

XANƏLİ PAŞAYEV
MAQSUD NƏCƏFOV

ANALİTİK HƏNDƏSƏDƏN MÜHAZİRƏLƏR
Dərs vəsaiti

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi tərəfindən təsdiq edilmişdir

BAKİ-2013

Elmi redaktoru: prof. M.S.CƏBRAYILOV

Rəyçilər: prof. Y.C.SALMANOV
dos. G.A.XUDAVƏRDİEVƏ

X. Paşayev, M. Nəcəfov. «Analitik həndəsədən mühazirələr». Bakı: «Çaşıoğlu»-2013. 360 s.

Bu dərs vəsaiti Təhsil Nazirliyinin 1997-ci ildə təhsilin «Bakalavr» pilləsində «Riyaziyyat» və «Riyaziyyat-informatika» və «informatika» ixtisasları üçün təsdiq etdiyi proqrama uyğun yazılmışdır.

Vəsait universitet və institutların riyaziyyat və fizika fakültələrinin tələbələri üçün nəzərdə tutulmuşdur.

$P \frac{1602050000 - 529}{082 - 02}$

© “Çaşıoğlu” nəşriyyatı, 2013.

ÖN SÖZ.

«Analitik həndəsə» fənni universitet və institutların «riyaziyyat» və ona yaxın ixtisaslarla yanaşı bütün ali texniki məktəblərin birinci kurslarında tədris olunur. Lakin hələ indiyə qədər Azərbaycan dilində bu fənnin tam kursu yazılmamışdır. Məhz ona görə belə bir vəsaitin yazılması zərurəti meydana çıxıb. Vəsait müəlliflərin uzun illər Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetində oxuduqları mühazirələrin məhsuludur. Yazılmış vəsait universitetlərin və pedaqoji institutların «Riyaziyyat», «Riyaziyyat-informatika» və «informatika» ixtisasların «Bakalavr» pilləsi üçün Təhsil Nazirliyinin 1998-ci ildə təsdiq etdiyi proqramı tam əhatə edir.

Vəsait üç hissə, on bir fəsildən ibarət olub, I hissə müstəvi üzərində, II hissə fəzada, III hissə isə n-ölçülü fəzalarda həndəsələrə həsr olunmuşdur. Hər fəslin sonunda bu fəslə aid məsələ həlli nümunələri və çalışmaları verilmişdir ki, bu da tələbələrin vəsaitdən sərbəst istifadə etməsinə imkan yaradır.

Sonda vəsaitin elmi redaktoru professor M.S.Cəbraylova, rəyçiləri professor Y.C.Salmanova və dosent G.A.Xudaverdiyevaya verdikləri dəyərli məsləhətlərə görə və nəhayət, tələbəmiz Pəniyeva Leyla Saleh qızına vəsaitin yazılmasındakı əməyinə görə dərin təşəkkürümüzü bildiririk.

I Hissə

MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ ANALİTİK HƏNDƏSƏ.

I Fəsil

VEKTORLAR CƏBRİNİN ELEMENTLƏRİ

§1. Vektorlar. Vektorlar üzərində xətti əməllər.

1.Vektor anlayışı. Təbiətdə elə kəmiyyətlər vardır ki, onlar yalnız özünün ədədi qiyməti ilə müəyyən edilir. Belə kəmiyyətlərə skalyar kəmiyyətlər deyilir. Bunlara misal olaraq cismin həcmi, parçanın uzunluğunu və s. göstərmək olar. Bu kəmiyyətlərdən fərqli olaraq elə kəmiyyətlər də vardır ki, onların tam müəyyən olunması üçün ədədi qiymətindən başqa, istiqaməti də müəyyən olunmalıdır. Belə kəmiyyətlərə vektorial kəmiyyətlər deyilir. Bunlara misal olaraq cismə təsir edən qüvvəni, onun sürətini və s. göstərmək olar. Bu kəmiyyətlərlə bağlı elmdə, o cümlədən riyaziyyatda vektor anlayışı verilir.

Tərif: *Həndəsədə başlanğıcı və son nöqtəsi qeyd olunmuş (istiqamətlənmiş) parçaya vektor deyilir.*

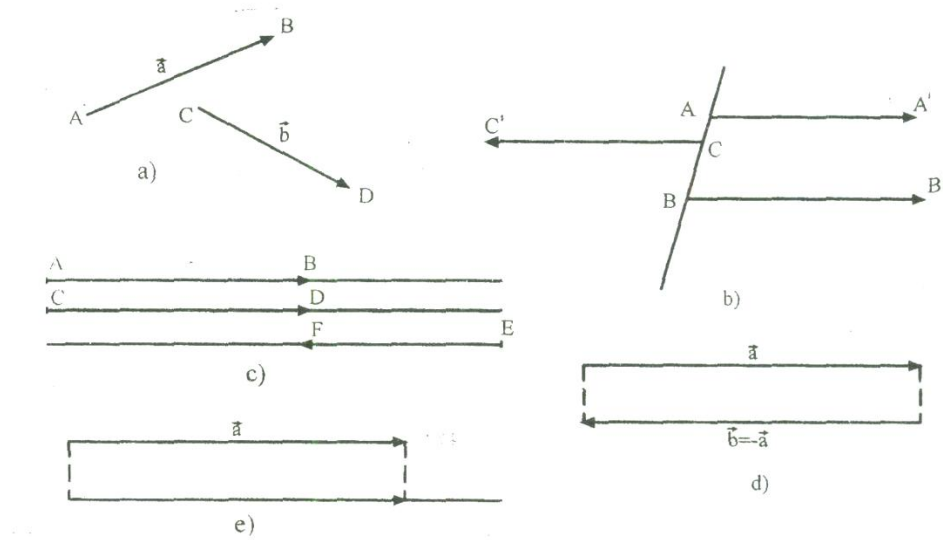
Vektor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ və ya $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{MN}, \dots$ kimi işarə olunur (şəkil 1,a). $\vec{AB}$ yazıldıqda A-vektorun başlanğıc, B-son nöqtəsidir.

Vektoru təyin edən parçanın uzunluğuna vektorun uzunluğu deyilir və belə işarə olunur:

$$|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|, \dots$$

Başlanğıcı və son nöqtəsi üst-üstə düşən vektoru sıfır vektor deyilir. Məs: $\vec{AA} = 0$, $\vec{BB} = 0$, $\vec{CC} = 0, \dots$ və s.

Əgər vektorlar eyni istiqamətli şüalar üzərində yerləşərsə, belə vektorlara **eyni istiqamətli**, əks istiqamətli şüalar üzərində yerləşərsə, belə vektorlara **əks istiqamətli** vektorlar deyilir və belə işarə olunur: $\vec{AB} \uparrow \vec{CD}$, $\vec{CD} \downarrow \vec{EF}$.



Şəkil 1.

Eyniistiqamətli şüalar dedikdə bu şüaların paralel olub, başlanğıc nöqtələrindən keçən düz xətdən eyni tərəfdə yerləşən şüalar olduğu başa düşülür (şəkil 1,b [AA). [BB).

Əksistiqamətli şüalar dedikdə isə paralel olub, onların başlanğıc nöqtələrindən keçən düz xətdən müxtəlif tərəflərdə yerləşən şüalar olduğu başa düşülür (şəkil 1,b. [AA). [CC).

(Şəkil 1,c)-də $\vec{AB}$ və $\vec{CD}$ vektorları eyniistiqamətli, $\vec{CD}$ və $\vec{EF}$ vektorları isə əksistiqamətli vektorlardır.

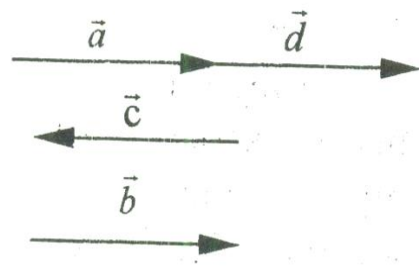
Eyni istiqamətli və bərabər uzunluqlu vektorlara **bərabər vektorlar** deyilir. Uzunluqları bərabər olub, istiqamətləri əks olan vektorlara isə **əks vektorlar** deyilir. $\vec{a}$ vektorunun əksi $-\vec{a}$ ilə işarə olunur (şəkil 1,d).

Fəzada hər hansı $\vec{a}$ vektoru götürək. O nöqtəsindən ona paralel olan şüa keçirək. Şüanın üzərində O başlanğıc nöqtəsindən başlayaraq uzunluğu $\vec{a}$ vektorunun uzunluğuna bərabər olan parça ayıraq. Sonra bu parçanın istiqamətini götürdüyümüz şüanın istiqamətinə yönəldək.

Onda $\vec{OA} = \vec{a}$ olacaqdır (şəkil 1,e).

Göründüyü kimi, $\vec{a}$ vektorunu fəzanın ixtiyarı nöqtəsinə paralel köçürmək olar.

Paralel və ya eyni düz xətlər üzərində yerləşən vektorlara kolinear vektorlar deyilir və $\vec{a} \parallel \vec{b}$ kimi işarə olunur (şəkil 2).



Şəkil 2.

Uzunluğu vahidə bərabər olan vektorlara **ort** vektorlar deyilir. $\vec{a}$ vektorunun ort vektorunu $\vec{a}_0$ ilə işarə edəcəyik. $|\vec{a}_0| = 1$.

$$\text{Aşkardır ki, } \vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

2.Vektorların toplanması və çıxılması. Fərz edək ki, bizə iki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları verilmişdir.

Hər hansı O nöqtəsi götürüb $\vec{a}$ vektorunu bu nöqtəyə, $\vec{b}$ vektorunu isə $\vec{a}$ vektorunun sonuna köçürək. Sonra birinci vektorun başlanğıcını ikinci vektorun sonu ilə birləşdirək. Alınan vektora bu vektorların cəmi deyilir (şəkil 3.).

Vektorların bu qayda ilə toplanmasına **üçbucaq qaydası** deyilir.

Qeyd edək ki, istənilən A, B, C nöqtələri üçün

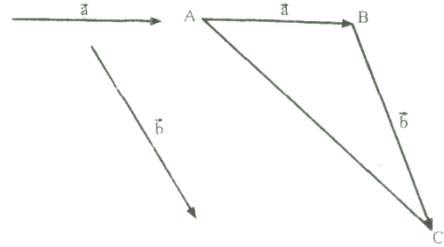
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad (1)$$

münasibəti doğrudur.

İndi verilmiş $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını bir nöqtəyə köçürüb, birinin başlanğıcından digərinə paralel düz xətlər çəkək. kəsişmə nöqtəsini D ilə işarə edək. Tamamilə aşkardır ki, $\vec{OD}$ bu vektorların cəmi olacaq (şəklə bax).

Vektorların bu cür toplanmasına paraleloqram qaydası deyilir (4,a).

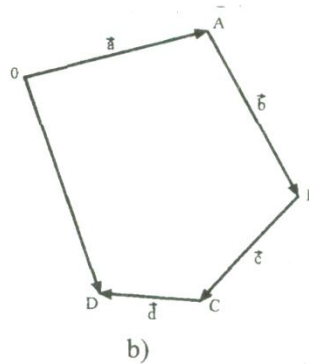
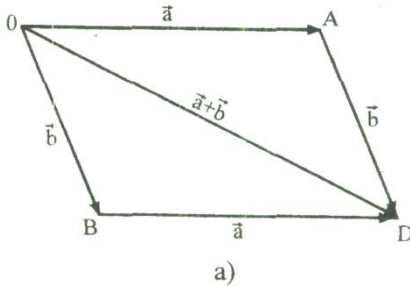
Qeyd edək ki, bir neçə vektoru topladıqda onların birini digərinin sonuna köçürməklə sınıq xətt alacağıq ki, bu sınıq xəttin qapayıcısı olan vektor onların cəmi olacaqdır. Əgər bu toplanan vektorların uc nöqtələrini A,B,C,D ilə işarə etsək, onda



Şəkil 3.

$$\vec{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

olar (şəkil 4, b).



Şəkil 4.

Vektorların toplanmasının aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

1°. $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$

2°. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$

3°. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

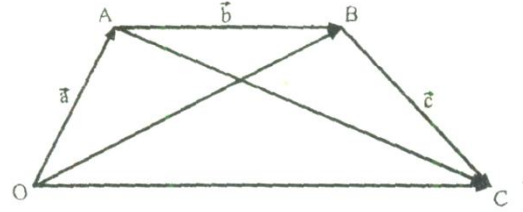
4°. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Bu xassələrdən sonuncusunu isbat edək. Bunun üçün verilmiş $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarının birini digərinin sonuna paralel köçürək. Onda onların qapayıcısı $\vec{OC}$ vektorunu aşağıdakı iki qayda ilə təyin etmək olar (şəkil 5).

$$\begin{cases} \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \\ \vec{OC} = \vec{a} + \vec{AC} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \end{cases}$$

Burada sol tərəflər bərabər olduğundan sağ tərəflər də bərabər olacaqdır. Beləliklə $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Vektorların toplanmasının yuxarıda göstərilən dörd əsas xassəsi vektorlar cəbrində mühüm əhəmiyyət kəsb edir.



Şəkil 5.

Tərif: $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$ şərtini ödəyən $\vec{x}$ vektoruna $\vec{a}$ vektoru ilə $\vec{b}$ vektorunun fərq vektoru deyilir.

Göstərək ki, $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Bunun üçün tərifdəki $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$ ifadəsinin hər iki tərəfinə $(-\vec{b})$ -ni əlavə edək:

$$-\vec{b} + \vec{b} + \vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$-\vec{b} + \vec{b} = \vec{0}$ olduğundan alırıq ki,

$$\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Buradakı $(-\vec{b})$ vektoru $\vec{b}$ vektorunun əks vektorudur (şəkil 6).

Asanlıqla göstərmək olar ki,

$$|\vec{a} \pm \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

(şəkil 6,b,c).

3.Vektorların ədədə vurulması. Fərz edək ki, bizə $\vec{a}$ vektoru və həqiqi λ ədədi verilmişdir.

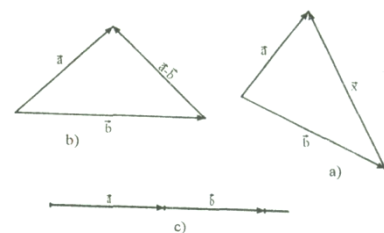
Tərif: Aşağıdakı iki şərti ödəyən vektora $\vec{a}$ vektorunun λ ədədinə hasili deyilir və $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ kimi işarə olunur:

$$1. |\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

2. $\lambda > 0$ olduqda $\vec{b}$ ilə $\vec{a}$ eyniistiqamətli, $\lambda < 0$ olduqda isə əksistiqamətli vektorlardır.

Məsələn:

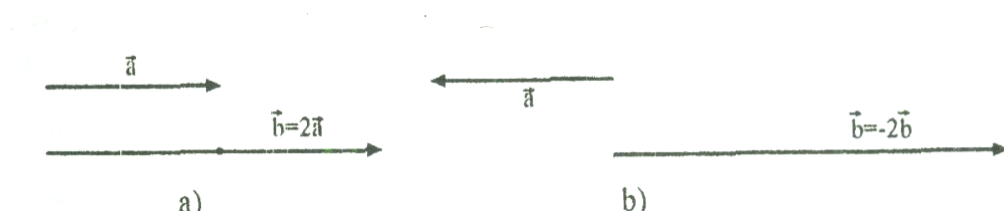
$\vec{b} = 2\vec{a}$ vektoru $\vec{a}$ vektoru ilə eyniistiqamətli olub, uzunluğu onun uzunluğundan iki dəfə artıq olacaqdır (şəkil 7,a).



Şəkil 6.

Vektorun ədədə hasili yalnız və yalnız o zaman sıfır olar ki, λ ədədi və ya $\vec{a}$ vektoru sıfıra bərabər olsun.

Fərz edək ki, α, β həqiqi ədədlər, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ ixtiyari vektorlardır.



Şəkil 7.

Onda vektorun ədədə vurulmasının aşağıdakı xassələrini asanlıqla isbat etmək olar:

$$1^{\circ}. 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}; \quad (-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a})$$

$$2^{\circ}. \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}$$

$$3^{\circ}. \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$$

$$4^{\circ}. (\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}.$$

4. Vektorların kollinearlığı və komplanarlığı şərtləri. Gələcəkdə çox rast gəlinən aşağıdakı teoremləri isbat edək:

Teorem 1: Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırsa və $\vec{a}$ vektoru sıfır vektor deyilsə, onda

$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} \quad (1)$$

şərtini ödəyən yeganə α ədədi vardır.

İsbatı: Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardır. Onda bu vektorlar ya eyniistiqamətli, ya da

əksistiqamətlidir. Birinci halda $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \Rightarrow \alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$; ikinci halda $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \Rightarrow \alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ olacaqdır.

Beləliklə, biz göstərdik ki, (1) şərtini ödəyən α ədədi var və o yuxarıdakı qayda ilə təyin olunur. İndi isbat edək ki, (1) bərabərliyini ödəyən α ədədi yeganədir. Əksini fərz edək. Tutaq ki, hər hansı üsulla tapdıq ki, $\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}$. Bu ifadəni (1) bərabərliyindən tərəf-tərəfə çıxsaq

$$\alpha \cdot \vec{a} - \alpha_1 \vec{a} = 0 \Rightarrow (\alpha - \alpha_1) \vec{a} = 0 \Rightarrow \alpha - \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_1$$

($\vec{a} \neq 0$ olduğundan)

Alırıq ki, α ədədi yeganədir.

Əgər $\vec{a}$ vektoru α müstəvisi üzərində hər hansı düz xəttə paralel olarsa, onda bu vektora α **müstəvisinə paralel vektor** deyilir.

Tərif: Tutaq ki, bizə sıfır olmayan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorları verilmişdir. Əgər bu vektorlar hər hansı bir α müstəvisinə paralel və ya həmin müstəvi üzərində yerləşərsə, onda belə vektorlara **komplanar vektorlar** deyilir.

Qeyd edək ki, əgər bu vektorlardan biri sıfır vektordursa qalan iki vektoru həmişə bir müstəvi üzərində yerləşdirmək olar.

Teorem 2: Üç vektorun komplanar olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \quad (2)$$

şərtini ödəyən yeganə α və β ədədlərinin olmasıdır.

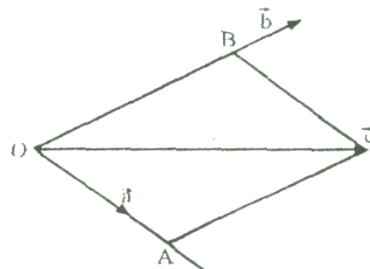
İsbatı: Fərz edək ki, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorları komplanardır və $\vec{a} \neq \lambda \vec{b}$. Onda onları bir müstəvi üzərinə köçürmək olar. Bu vektorları müstəvinin hər hansı O nöqtəsinə köçürüb, $\vec{c}$ vektorunun uc nöqtəsindən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarına paralel çəkilmiş düz xətlərin bu vektorların yerləşdiyi şüalarla kəsişmə nöqtəsini uyğun olaraq B və A ilə işarə edək (şəkil 8). Paraleloqram qaydasına görə:

$$\vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

Lakin $\vec{OA}$ və $\vec{OB}$ vektorları uyğun olaraq $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları ilə kollinear olduğundan, $\vec{OA} = \alpha \vec{a}$, $\vec{OB} = \beta \vec{b}$ olacaqdır.

Bunları yuxarıda nəzərə alsaq $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ alınar.

Göstərək ki, buradakı α və β ədədləri yeganədir. Əksini fərz edək. Tutaq ki, α və β ədədləri yeganə deyil (2) şərtini ödəyən başqa α_1 və β_1 ədədləri də vardır. Başqa sözlə



Şəkil 8.

$$\vec{c} = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} \quad (2)$$

Bu ifadəni (2) ilə tərəf-tərəfə çıxsaq aşağıdakı ifadəni alarıq

$$(\alpha - \alpha_1) \vec{a} = (\beta - \beta_1) \vec{b}$$

Buradan

$$\vec{b} = \frac{\alpha - \alpha_1}{\beta - \beta_1} \cdot \vec{a}.$$

Bu isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının kollinearlıq şərtidir. Lakin biz fərz etmişdik ki, bu vektorlar kollinear deyil. Belə ki, bu vektorlar kollinear olduqda teoremin isbatı tamamilə aşkardır. Onda $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ olmalıdır.

§2. Vektorların xətti asılılığı.

1.Tərif: Fərz edək ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ vektorları və $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ həqiqi ədədləri verilmişdir.

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$$

vektoruna $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarının xətti kombinasiyası deyilir.

Əgər $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ədədlərindən heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olduqda, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sisteminin xətti kombinasiyası sıfıra bərabər olarsa, yəni

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0 \quad (*)$$

münasibəti ödənərsə, onda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sisteminə **xətti asılı vektorlar sistemi** deyilir.

Əgər (*) münasibəti yalnız $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$ olduqda ödənərsə, onda belə vektorlar sisteminə **xətti asılı olmayan vektorlar sistemi** deyilir.

Vektorlar sisteminin xətti asılılığının aşağıdakı xassələrini verək:

1°. Vektorlar sistemi yalnız və yalnız o zaman xətti asılı olar ki, onlardan biri yerdə qalanlarının xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilsin.

2°. Vektorlar sisteminin hər hansı bir hissəsi xətti asılıdırsa, onda bu vektorlar sisteminin özü də xətti asılıdır.

3°. Xətti asılı olmayan vektorlar sisteminin istənilən hissəsi də xətti asılı deyil.

4°. Xətti asılı olmayan vektorlar sistemində sıfır vektor yoxdur.

Verilən bu xassələrdən birincisini isbat edək:

Əvvəlcə xassənin zəruriliyini isbat edək. Fərz edək ki, verilmiş vektorlar xətti asılıdır. Onda heç olmazsa biri sıfırdan fərqli elə $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ həqiqi ədədləri vardır ki, (*) münasibəti ödənilsin. Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $\alpha_k \neq 0$. Onda (*) münasibətini belə yazmaq olar:

$$\bar{a}_k = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3 + \dots + \lambda_{k-1} \bar{a}_{k-1} + \lambda_{k+1} \bar{a}_{k+1} + \dots + \lambda_n \bar{a}_n \quad (1)$$

$$\text{burada } \lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_k}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n.$$

Bu isə o deməkdir ki, verilmiş vektorlar sistemində $\bar{a}_k$ vektoru yerdə qalan vektorların xətti kombinasiyasıdır. İndi xassənin kafiliyini isbat edək.

Fərz edək ki, verilmiş vektorlar sistemində bir vektor yerdə qalanların xətti kombinasiyası şəklində göstərilmişdir. Başqa sözlə (1) münasibəti doğrudur. Onda buradan

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3 + \dots + \lambda_{k-1} \bar{a}_{k-1} - \bar{a}_k + \lambda_{k+1} \bar{a}_{k+1} + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = 0 \quad (2)$$

Bu isə verilmiş vektorların xətti asılı olması deməkdir. Belə ki, burada $\bar{a}_k$ vektorunun əmsalı $\lambda_k = -1 \neq 0$.

2. İki və üç vektorun xətti asılı olması şərti.

Teorem 3: İki vektor yalnız və yalnız o zaman xətti asılı olar ki, o vektorlar kollinear olsun.

İsbatı: Zəruriliyi isbat edək. Fərz edək ki, $\bar{a}_1$ və $\bar{a}_2$ vektorları xətti asılıdır. Onda heç olmazsa, biri sıfırdan fərqli elə α_1 və α_2 ədədləri vardır ki,

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 = 0 \quad (3)$$

şərti ödənsin. Fərz edək ki, $\alpha_1 \neq 0$. Onda $\lambda = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ işarə edək. Bu zaman (3) münasibətini aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$\bar{a}_1 = \lambda \bar{a}_2$$

Bu isə vektorların kollinear olması deməkdir. Teoremin kafiliyi isə tamamilə aşkardır. Belə ki, vektorlar kollinear olduqda $\bar{a}_1 = \lambda \bar{a}_2$ və ya $1 \cdot \bar{a}_1 - \lambda \bar{a}_2 = 0$ şərti ödəniləcəkdir. Teorem isbat olundu.

Teorem 4. Üç vektor yalnız və yalnız o zaman xətti asılı olar ki, bu vektorlar komplanar olsun.

İsbatı: Fərz edək ki, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorları xətti asılıdır. Onda α, β, γ -əmsallarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olmaqla

$$\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{c} = 0$$

münasibəti ödənməlidir. Fərz edək ki, $\gamma \neq 0$. Onda

$$\bar{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \bar{a} - \frac{\beta}{\gamma} \bar{b}$$

$$\text{burada } \lambda = -\frac{\alpha}{\gamma}; \quad \mu = -\frac{\beta}{\gamma} \text{ işarə etsək}$$

$$\bar{c} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{b}$$

ifadəsini alırıq. Bu da vektorların komplanarlıq şərtidir.

Teoremin kafiliyini isbat edək: Fərz edək ki, vektorlar komplanardır. Başqa sözlə onları bir müstəvi üzərinə köçürmək olar. Müstəvi üzərində hər hansı O nöqtəsi götürüb, həmin vektorları bu

nöqtəyə köçürsək, teorem 2-də olduğu kimi onlardan birini yerdə qalanlarının xətti kombinasiyası şəklində yazmaq olar:

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

və ya

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} - \vec{c} = 0.$$

Bu isə $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarının xətti asılı olması deməkdir. Teorem isbat olundu.

§3. Vektorlar fəzası. Fəzanın bazisi və verilmiş bazisə nəzərən vektorun koordinatları.

1. Biz yuxarıda göstərdik ki, vektorun toplanması və ədədə vurulması aşağıdakı 8 xassəyə malikdir:

$$1^{\circ}. \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$2^{\circ}. \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$3^{\circ}. \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$4^{\circ}. (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$5^{\circ}. 1 \cdot \vec{a} = \vec{a} (-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a})$$

$$6^{\circ}. \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$$

$$7^{\circ}. \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$$

$$8^{\circ}. \vec{a} \cdot (\alpha + \beta) = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$$

Göstərilən bu 8 xassəni ödəyən boş olmayan istənilən çoxluğa **vektorlar fəzası** deyilir.

2. Nizamla götürülmüş $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sistemi aşağıdakı iki şərti ödəyərsə, onda bu vektorlar sisteminə **xətti vektorlar fəzasının bazisi** deyilir:

1) Bu vektorlar xətti asılı olmasın;

2) Fəzanın istənilən vektoru bu vektorların xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilsin.

Buradakı bazis vektorların sayına **fəzanın ölçüsü** deyilir.

İndi göstərək ki, nizamla götürülmüş komplanar olmayan üç $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorları sərbəst vektorlar fəzasının bazisi kimi qəbul edilə bilər. Doğrudan da, bu vektorlar xətti asılı deyil. Çünki, komplanar deyil. İndi göstərək ki, fəzanın istənilən $\vec{d}$ vektoru bu vektorların xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilər. Bunun üçün $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vektorlarını O nöqtəsinə köçürüb onların uc nöqtələrini uyğun olaraq A, B, C, D ilə işarə edək. $\vec{d}$ vektorunun uc nöqtəsindən $\vec{c}$ vektoruna paralel çəkilmiş düz xəttin AOB müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini D_0 ilə işarə edək. $\vec{OD}_0$ vektorunun uc nöqtəsindən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarına paralel çəkilmiş düz xətlərin [OA) və [OB) şüaları ilə kəsişmə nöqtələrini uyğun olaraq A_1 və B_1 ilə işarə edək (şəkil 9). Şəkildən göründüyü kimi

$$\vec{b} = \vec{OD}_0 + \vec{D}_0\vec{D} \quad (4)$$

$$\vec{OD}_0 = \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1$$

$\vec{OA_1}$ vektoru $\vec{a}$ vektoru ilə, $\vec{OB_1}$ vektoru isə $\vec{b}$ vektoru ilə kollinear olduğundan $\vec{OA_1} = \alpha \vec{a}$, $\vec{OB_1} = \beta \vec{b}$.

$\vec{D_0D}$ vektoru isə $\vec{c}$ vektoru ilə kollinear olduğundan

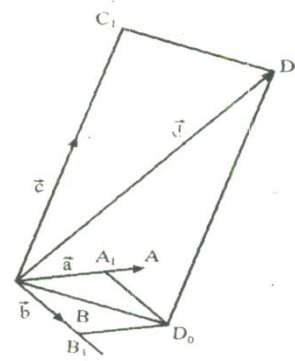
$$\vec{D_0D} = \gamma \vec{c}$$

Bunları (4) münasibətində nəzərə alsaq

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

ifadəsini almış olarıq. Beləliklə, göstərdik ki, sərbəst vektorlar fəzasının nizamla götürülmüş komplanar olmayan istənilən üç vektoru bu fəzanın bazisidir.

Deməli, qeyd olunan bu fəza üçölçülüdür.



Şəkil 9.

Biz teoremin isbatı əsnasında göstərdik ki, fəzanın istənilən vektoru bazis vektorlar üzrə (5) ayrılışına malikdir. İndi göstərək ki, bu ayrılış yeganədir. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, $\vec{d}$ vektoru götürdüyümüz bazis üzrə başqa bir ayrılışa da malikdir:

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad (5)$$

(5) ilə (5) ayrılışını tərəf-tərəfə çıxaraq:

$$(\alpha - \alpha) \vec{a} + (\beta - \beta) \vec{b} + (\gamma - \gamma) \vec{c} = 0 \quad (6)$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bazis vektorlar olduğundan onlar xətti asılı deyil. Onda (6) münasibəti o zaman ödənilər ki, buradakı bütün əmsallar sıfır olsun. Başqa sözlə

$$\begin{cases} \alpha - \alpha = 0 \\ \beta - \beta = 0 \\ \gamma - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha \\ \beta = \beta \\ \gamma = \gamma \end{cases}$$

Deməli (5) ayrılışı yeganədir.

Tərif: *Buradakı ayrılıq əmsallarına, başqa sözlə α, β, γ -ədədlərinə $\vec{d}$ vektorunun $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ bazisinə nəzərən koordinatları deyilir və $\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ kimi yazılır.*

Ümumi halda, üçölçülü vektorlar fəzasının bazisi $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ ilə, vektorlar fəzasını isə V_3 ilə işarə edirlər.

Xüsusi halda eyni bir müstəviyə paralel olan (üzərində olan) vektorlar çoxluğunu götürsək, analogi qayda ilə göstərmək olar ki, bu vektorlar çoxluğu ikiölçülü vektorlar fəzasını təşkil edir və bu vektorlardan kollinear olmayan nizamla götürülmüş istənilən ikisi bu fəzanın bazisidir. İkiölçülü fəzada təbii ki, vektorların koordinatları iki dənə, onun bazis vektorlar üzrə ayrılışı isə

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$

şəklində olacaqdır.

Vektorun koordinatlarının aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

1°. Vektorların cəminin (fərqinin) koordinatları bu vektorların uyğun koordinatlarının cəminə (fərqinə) bərabərdir.

Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının koordinatlarını aşağıdakı kimi işarə etsək

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3, \quad i = 1, 2, 3.$$

$\vec{a} \pm \vec{b} = a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3$ olduğunu alırıq.

2⁰. Vektoru ədədə vurduqda onun bütün koordinatlarını həmin ədədə vurmaq lazımdır.

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3.$$

Əgər bazis vektorlarının uzunluqları bir-birinə bərabər olmaqla, həm də qarşılıqlı perpendikulyardırsa, onda belə bazisə ortonormal bazis deyilir və $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ilə işarə olunur. Başqa sözlə,

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1.$$

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3.$$

olduqda belə bazisə ortonormal bazis deyilir.

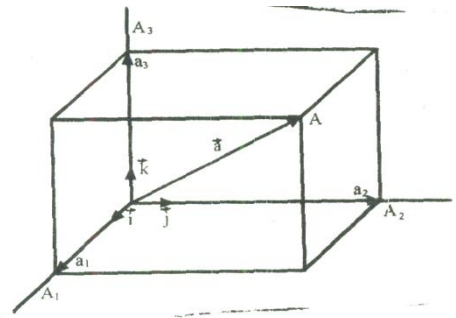
Vektorun uzunluğunun koordinatlarla ifadəsi

Teorem: Əgər $\vec{a}$ vektoru ortonormal bazisə nəzərən $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ koordinatlarına malikdirsə, onda bu vektorun uzunluğu

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (1)$$

düsturu ilə təyin olunur.

İsbatı: Verilmiş $\vec{a}$ vektorunu və bazis vektorlarını hər hansı O nöqtəsinə köçürüb, bu vektorlar üzərində paralelopiped quraq (şəkil 10).
Onda



Şəkil 10.

$$\vec{a} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 \quad (2)$$

Burada $\vec{OA}_1, \vec{OA}_2, \vec{OA}_3$ vektorları uyğun olaraq $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorları ilə kollinear olduğundan

$$\vec{OA}_1 = |\vec{OA}_1| \cdot \vec{i}, \vec{OA}_2 = |\vec{OA}_2| \cdot \vec{j}, \vec{OA}_3 = |\vec{OA}_3| \cdot \vec{k},$$

olacaqdır. Bunları (2)-də nəzərə alaraq

$$\vec{a} = \vec{OA} = |\vec{OA}_1| \cdot \vec{i} + |\vec{OA}_2| \cdot \vec{j} + |\vec{OA}_3| \cdot \vec{k},$$

Bu sonuncunu $\vec{a}$ vektorunun

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

koordinatlarla ifadəsi ilə müqayisə etsək

$$|\vec{OA}_1| = |a_1|, |\vec{OA}_2| = |a_2|, |\vec{OA}_3| = |a_3| \quad (*)$$

alırıq.

Digər tərəfdən, alınmış fiqur düz paralelopiped olduğundan onun diaqonalının kvadratı üç ölçüsünün (tillərinin) kvadratları cəminə bərabər olacaqdır.

$$|\vec{OA}|^2 = |\vec{OA}_1|^2 + |\vec{OA}_2|^2 + |\vec{OA}_3|^2$$

(*) ifadəsini burada nəzərə alsaq

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

və ya

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

alırıq.

Teorem isbat olundu.

§ 4. İki vektorun skalyar hasili

Fərz edək ki, bizə sıfırdan fərqli $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları verilmişdir.

Tərif: $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının uzunluqları ilə onlar arasında qalan bucağın kosinusu hasilinə bərabər olan ədədə bu vektorların skalyar hasili deyilir və $\vec{a} \cdot \vec{b}$ yaxud $(\vec{a}, \vec{b})$ kimi işarə olunur.

Onda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasili

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad (1)$$

olacaqdır. Burada $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

$\vec{a}$ ilə $\vec{b}$ vektoru arasındakı bucaq dedikdə $[OA)$ ilə $[OB)$ şüaları arasında qalan bucaq başa düşülür (şəkil 11).

Vektorların skalyar hasilinin tərəfindən bilavasitə alınır ki,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a^2} \quad (2)$$

və

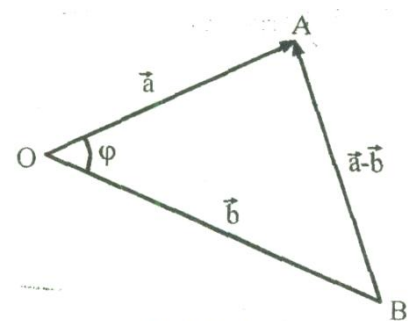
$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (3)$$

Ortonormal bazisdə skalyar hasilin koordinatlarla ifadəsini çıxaraq.

Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ bazisinə nəzərən aşağıdakı koordinatlara malikdir:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$i = 1, 2, 3$



Şəkil 11.

Üçbucaqlar üçün kosinuslar teoreminə görə (şəkil 11)

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$2|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\varphi=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2$$

Burada vektorların uzunluqlarının koordinatlarla ifadəsini nəzərə alsaq:

$$2(\vec{a}\cdot\vec{b})=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2]$$

bu ifadəni sadələşdirək.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3 \quad (4)$$

düsturunu alırıq. Bu düstura iki vektorun skalyar hasilinin koordinatlarla ifadəsi deyilir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının koordinatlarla ifadəsi deyilir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

$$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$$

koordinatlarla ifadəsini nəzərə almaqla (4) düsturundan istifadə edib, skalyar hasilin aşağıdakı xassələrini asanlıqla isbat etmək olar:

$$1^{\circ}. \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$2^{\circ}. (\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$3^{\circ}. (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

İndi ortonormal bazisdə vektorun koordinatlarının həndəsi mənasını göstərək.

Fərz edək ki, $\vec{a}$ vektoru $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ bazisinə nəzərən $\vec{a}=[a_1, a_2, a_3]$ koordinatlarına malikdir, onda

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

Bu ifadənin hər iki tərəfini $\vec{i}$ vektoruna skalyar vuraq:

$$\vec{a}\cdot\vec{i}=a_1\vec{i}\cdot\vec{i}+a_2\vec{j}\cdot\vec{i}+a_3\vec{k}\cdot\vec{i}$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0, \quad \vec{i}\cdot\vec{i}=1 \text{ olduğundan}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{i}=a_1\cdot 1$$

və ya

$$|\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{i})=a_1 \text{ alırıq.}$$

Analoji qayda ilə həmin ifadənin hər iki tərəfini $\vec{j}$ vektoruna skalyar vurmaqla

$$|\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{j})=a_2,$$

və $\vec{k}$ vektoruna skalyar vurmaqla

$$|\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{k})=a_3$$

ifadələrini alırıq.

Əgər $\vec{a}$ vektorunun bazis vektorlarla əmələ gətirdiyi bucaqları uyğun olaraq $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ilə işarə etsək:

$$a_i = |\vec{a}| \cos \varphi_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

ifadəsini alırıq.

Xüsusi halda $\vec{a}$ vektorunun uzunluğu vahidə bərabər olsa onun koordinatları

$$\vec{a} = (\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3)$$

şəklində olacaqdır.

Burada $\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3$ ədədlərinə $\vec{a}$ vektorunun **yönəldici kosinusları** deyilir.

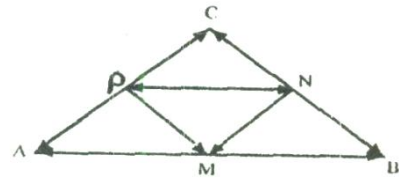
Vektorun uzunluğu onun koordinatlarının kvadratları cəminin kvadrat kökünə bərabər olduğundan $\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$.

İndi də vektorlar cəbrinə aid bir neçə məsələ həll edək.

Məsələ 1. ABC üçbucağının AB, BC və AC tərəflərinin M, N və P orta nöqtələri verilmişdir. $\vec{AM}, \vec{MB}, \vec{BN}, \vec{NC}, \vec{CP}, \vec{PA}, \vec{PN}, \vec{PM}, \vec{MN}, \vec{MA}, \vec{BM}, \vec{NB}, \vec{CN}, \vec{PC}, \vec{AP}, \vec{NP}, \vec{NM}, \vec{MP}$ vektorlarından bərabər olanları tapın (şəkil 1).

Həlli:

M, N və P üçbucağın AB, BC və AC tərəflərinin orta nöqtələri olduğundan a) $\vec{AM}, \vec{MB}$ və $\vec{PN}$ vektorları, b) $\vec{BN}, \vec{NC}$



Şəkil 1.

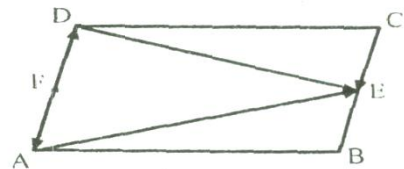
və $\vec{MP}$ vektorları, c) $\vec{CP}, \vec{PA}$ və $\vec{NM}$ vektorları; ç) $\vec{BM}, \vec{MA}$ və $\vec{NP}$ vektorları; d) $\vec{CN}, \vec{NB}$ və $\vec{PM}$ vektorları; e) $\vec{AP}, \vec{PC}$ və $\vec{MN}$ vektorları bərabərdir.

Məsələ 2. Məsələ 1-də verilmiş vektorlardan kollinear olanlarını təyin edir.

Həlli:

a) $\vec{AM}, \vec{MB}, \vec{AB}, \vec{PN}, \vec{BA}, \vec{MA}, \vec{BM}$ və $\vec{NP}$ b) $\vec{BC}, \vec{BN}, \vec{NC}, \vec{CB}, \vec{CN}, \vec{NB}, \vec{PN}$ və $\vec{MP}$ vektorları, c) $\vec{AC}, \vec{CA}, \vec{AP}, \vec{PA}, \vec{PC}, \vec{CP}, \vec{MN}$ və $\vec{NM}$ vektorları kollineardır.

Məsələ 3. ABCD paraleloqram və paraleloqramın BC və AD tərəflərinin E və F orta nöqtələri verilmişdir. Şəkində $\vec{ED} + \vec{FA} + \vec{CE}$ vektorunu qurun.



Şəkil 2.

Həlli:

$\vec{CE} = \vec{DF}$ olduğundan $\vec{ED} + \vec{FA} + \vec{CE} = \vec{ED} + \vec{DF} + \vec{FA} = \vec{ED} + \vec{DA} = \vec{EA}$ tələb olunan vektordur (şəkil 2).

Məsələ 4. ABCD paraleloqram və onun AD və BC tərəflərinin F və E orta nöqtələri verilmişdir. $\vec{AE} - \vec{AD}$ vektorunu şəkildə göstərin:

Həlli:

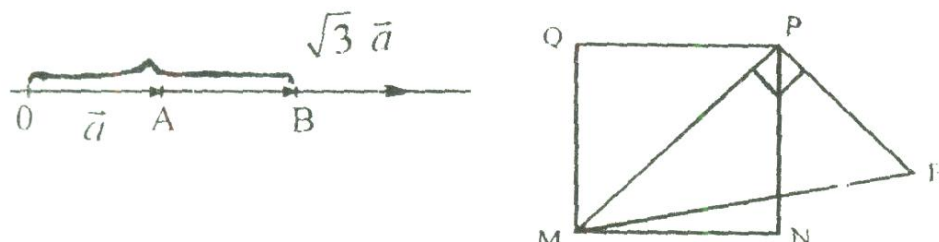
$\vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AE}$ olduğundan (şəkil 2) $\vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD}$ olar.

Məsələ 5. İxtiyari $\vec{a}$ vektoru çəkin və $2\vec{a} + \sqrt{3}\vec{a}$ vektorunu qurun.

Həlli:

Hər hansı d düz xətti götürək və onun üzərində ixtiyari O nöqtəsi qeyd edək. O nöqtəsindən $\vec{OA} = \vec{a}$ vektorunu ayıraq (şəkil 3). O nöqtəsindən $\vec{OB} = 2\vec{a}$ vektorunu ayıraq. B nöqtəsindən isə

$\vec{BC} = \sqrt{3} \vec{a}$ quraq. Alınmış $\vec{OC}$ tələb olunan vektordur (şəkil 4, burada MNPQ tərəfi vahidə bərabər kvadrattır, $MP = \sqrt{2}$, $ME = \sqrt{3}$).



Şəkil 3.

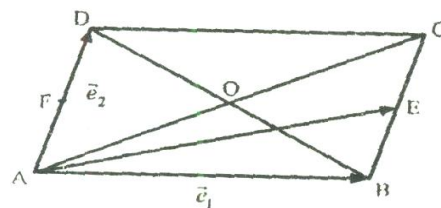
Məsələ 6. $P_1 = \vec{a} - 2\sqrt{2}\vec{b} + \sqrt{6}\vec{c}$, $P_2 = \sqrt{2}\vec{a} - 4\vec{b} + 2\sqrt{3}\vec{c}$ vektorlar sisteminin xətti asılı olub, olmadığını təyin edin, burada $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ kollinear olmayan vektorlardır.

Həlli:

$\vec{P}_2 = \sqrt{2}(\vec{a} - 2\sqrt{2}\vec{b} + \sqrt{6}\vec{c}) = \sqrt{2}\vec{P}_1$ olduğundan, $\sqrt{2}\vec{P}_1 - \vec{P}_2 = \vec{0}$ olar, burada $\alpha_1 = \sqrt{2} \neq 0$ və ya $\alpha_2 = -1 \neq 0$ olduğundan vektorlar sistemi xətti asılıdır.

Məsələ 7. ABCD paraleloqramı, qarşı-qarşıya duran BC və AD tərəflərinin E və F orta nöqtələri və diaqonallarının O kəsişmə nöqtəsi verilmişdir.

$\vec{AB} = \vec{e}_1$ və $\vec{AD} = \vec{e}_2$ bazis vektorları qəbul edib, $\vec{EA}$ vektorunun koordinatlarını təyin edib.



Həlli:

Vektorların toplanmasının üçbucaq qaydasına əsasən yaza bilərik:

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE}, \quad \vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{BC} \quad \text{və} \quad \vec{BC} = \vec{AD} \quad \text{olduğuna görə alırıq:}$$

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2.$$

$$\vec{EA} = -\vec{AE}, \quad \vec{EA} = -\left[\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2\right] = \left[-1, -\frac{1}{2}\right].$$

Məsələ 8. Hər hansı bazisə nəzərən aşağıdakı koordinatlara malik $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları verilmişdir: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$3\vec{a} + 2\vec{b}$ vektorlarının koordinatlarını tapın.

Həlli:

$$3\vec{a} + 2\vec{b} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Məsələ 9. Düzbucaqlı dekart koordinat sistemində öz koordinatları ilə verilmiş $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasında qalan bucağı hesablayın: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Həlli:

Tələb olunan bucağı $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ düsturu ilə hesablayaq:

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{-7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \varphi = -\frac{1}{2}; \varphi = \frac{5\pi}{6}.$$

ÇALIŞMALAR

1. ABCD trapesiyası və onun yan tərəflərinin E və F orta nöqtələri verilmişdir. $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}, \vec{EF}, \vec{AE}, \vec{BF}, \vec{FD}, \vec{FC}$ vektorlarından a) bərabər olanları; b) bərabər olmayıb kollinear olanları tapın.

2. ABCDABCD paralelopipedi verilmişdir. $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}, \vec{AA}, \vec{BB}, \vec{CC}, \vec{DD}, \vec{AC}, \vec{BD}, \vec{AC}, \vec{BD}, \vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}$ vektorlarından bərabər olanları tapın.

3. ABC üçbucağı, medianlarının M kəsişmə nöqtəsi və AB, BC, AC tərəflərinin F, Q və R orta nöqtələri verilmişdir. Şəkilə a) $\vec{AB} + \vec{BR} + \vec{RC}$; b) $\vec{AQ} + \vec{QC} + \vec{CF}$; v) $\vec{BR} + \vec{RC} + \vec{CF}$; q) $\vec{CF} + \vec{FB} + \vec{BA}$ vektorunu qurun.

4. ABCD paraleloqramı, diaqonallarının O kəsişmə nöqtəsi və AB, BC, CD, DA tərəflərinin M, N, P, Q orta nöqtələri verilmişdir.

a) $\vec{MC} - \vec{CF}$; b) $\vec{OC} - \vec{CF}$; v) $\vec{OQ} - \vec{OB}$; q) $\vec{OA} - \vec{NF}$; d) $\vec{AB} - \vec{OC}$ vektorunu şəkilə qurun.

5. ABCD trapesiyası və tərəflərinin M, N, P, Q orta nöqtələri verilmişdir. a) $\vec{AM} + \vec{MN}$; b) $\vec{AM} + \vec{MC}$; v) $\vec{AB} + \vec{BN} + \vec{NF}$; q) $\vec{AT} + \vec{NF} + \vec{FD}$ vektorlarını şəkilə qurun.

6. ABC üçbucağı və onun AB, BC, CA tərəflərinin M, K, L orta nöqtələri verilmişdir. $\vec{AK}, \vec{BL}$ və $\vec{CM}$ vektorlarını $\vec{a} = \vec{AB}$ və $\vec{b} = \vec{AC}$ vektorları ilə ifadə edin.

7. ABC üçbucağı və onun medianlarının M kəsişmə nöqtəsi və AB tərəfinin D orta nöqtəsi verilmişdir. $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}, \vec{BM}, \vec{CM}$ vektorlarını $\vec{a} = \vec{AD}$ və $\vec{b} = \vec{AM}$ vektorları ilə ifadə edin.

8. $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ vektorlarının komplanar olmayan $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üzrə ayrılışları verilmişdir. $\vec{l}, \vec{m}$ və $\vec{n}$ vektorlarının komplanar olub, olmadığını yoxlayın və komplanar olduqları halda onların xətti asılılığını tapın:

1) $\vec{l} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, \vec{m} = 2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}, \vec{n} = 2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b};$

2) $\vec{l} = \vec{c}, \vec{m} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, \vec{n} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c};$

3) $\vec{l} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{m} = \vec{b} + \vec{c}, \vec{n} = -\vec{a} + \vec{c}.$

9. Komplanar olmayan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorları verilmişdir. Komplanar olmayan $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \vec{n} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c},$

$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{q} = \vec{b} - \vec{c}$ vektorlar sisteminin xətti asılılığını təyin edin.

10. ABCD paraleloqramı, BC və AD tərəflərinin E və F orta nöqtələri və diaqonallarının O kəsişmə nöqtəsi verilmişdir. $\vec{e}_1 = \vec{AB}, \vec{e}_2 = \vec{AD}$ vektorlarını bazis vektorları qəbul edib aşağıdakı vektorların koordinatlarını təyin edin:

a) $\vec{AC}$; b) $\vec{OD}$; v) $\vec{FC}$; q) $\vec{BC}$; d) $\vec{EO}$; e) $\vec{BD}$.

11. ABC üçbucağında BK medianı və AC tərəfinə paralel olan MN orta xətti çəkilmişdir. BK və MN düz xətti O nöqtəsində kəsişirlər.

- a) $\vec{OC} = \vec{e}_1$ və $\vec{OM} = \vec{e}_2$ bazis vektorları qəbul edib $\vec{CM}, \vec{OB}, \vec{KM}$ və $\vec{CB}$ vektorlarının;
- b) $\vec{KC} = \vec{e}_1$ və $\vec{KN} = \vec{e}_2$ bazis vektorları qəbul edib $\vec{KM}, \vec{CB}, \vec{NC}$ və $\vec{AN}$ vektorlarının koordinatlarını təyin edin.
12. Fəzada $\vec{a}(2; -1; 0)$, $\vec{b}(1; \sqrt{2}; -5)$; $\vec{c}(1; 2; 5)$ və $\vec{d}(1; 0; 2)$ vektorları verilmişdir. a) $\vec{a} \vec{b}$; b) $\vec{a} \vec{c}$; v) $\vec{a} \vec{d}$; q) $\vec{b} \vec{c}$; d) $\vec{b} \vec{d}$; e) $\vec{c} \vec{a}$ ədədlərini hesablayın.
13. $\vec{a} + 3\vec{b}$ vektoru $7\vec{a} - 5\vec{b}$ vektoruna, $\vec{a} - 4\vec{b}$ vektoru isə $7\vec{a} - 2\vec{b}$ vektoruna perpendikulyardır. Sıfır vektordan fərqli $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucağı hesablayın.
14. $\vec{a}$ vektorunun birinci koordinatı 6, uzunluğu isə $2\sqrt{13}$ -ə bərabərdir. $\vec{a}$ vektorunun ikinci koordinatını tapın.
15. a) $|\vec{m}| = 3, (\vec{c}, \vec{m}) = 30^\circ$ b) $|\vec{n}| = 5, (\vec{c}, \vec{n}) = 135^\circ$ v) $|\vec{p}| = 1, (\vec{c}, \vec{p}) = -60^\circ$ olduqda, $\vec{m}, \vec{n}$ və $\vec{p}$ vektorlarının koordinatlarını təyin edin.
16. $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{b}(0; 1; 4)$ və $\vec{c}(1; 0; -3)$ vektorları verilmişdir. Aşağıdakı vektorların koordinatlarını təyin edin:
- a) $\vec{p}_1 = 2\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$; b) $\vec{p}_2 = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$; v) $\vec{p}_3 = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$.
17. $\vec{a}(3; -2; 4)$, $\vec{b}(5; 1; 6)$ və $\vec{c}(-3; 0; 2)$ vektorları verilmişdir. Aşağıdakı tənliklərin hər üçünü eyni zamanda ödəyən $\vec{x}$ vektorunu tapın:
- $\vec{a} \vec{x} = 4$, $\vec{b} \vec{x} = 35$, $\vec{c} \vec{x} = 0$.

II FƏSİL

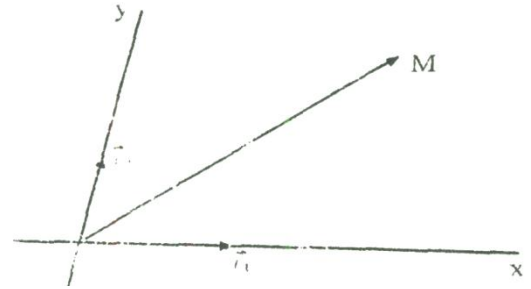
MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ KOORDİNAT METODU

§5. Müstəvi üzərində Afin koordinat sistemi.

1.Tərif: Müstəvi üzərində hər hansı O nöqtəsi və $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ bazisi götürək. Buüçlüyə müstəvi üzərində ümumi dekart koordinat sistemi deyilir və $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ kimi işarə olunur.

Ümumi dekart koordinat sisteminə bəzən afin koordinat sistemi və ya afin reper də deyilir. O nöqtəsindən keçib $\vec{e}_1$ -ə paralel olan oxu absis, $\vec{e}_2$ -yə paralel olan oxu ordinat oxu deyilir və uyğun olaraq (Ox) və (Oy) -lə işarə edilir. O -koordinat başlanğıcı, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ isə uyğun olaraq birinci və ikinci koordinat vektorları adlanır.

İndi verilmiş koordinat sisteminə nəzərən nöqtənin koordinatları anlayışını verək. Müstəvi üzərində hər hansı M nöqtəsi götürüb, bu nöqtəni koordinat başlanğıcı ilə birləşdirək. Alınan vektora M nöqtəsinin **radius-vektoru** deyəcəyik (şəkil 9).



Şəkil 9

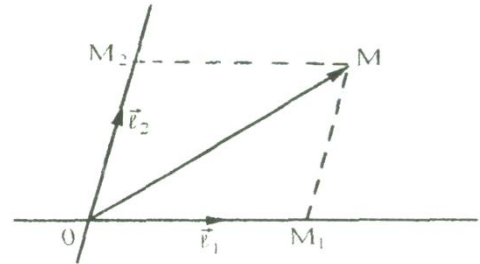
Tərif: $\vec{OM}$ vektorunun $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ bazisinə nəzərən koordinatlarına M nöqtəsinin $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ afin koordinat sisteminə nəzərən koordinatları deyilir və $M(x,y)$ kimi işarə olunur.

Vektorlar cəbrindən bilirik ki, $\vec{OM}$ vektoru

$$\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad (1)$$

kimi yeganə ayrılışa malikdir. Onda tərifdən çıxır ki, (1) münasibətini ödəyən (x,y) ədədləri M nöqtəsinin koordinatları olacaqdır.

İndi fərz edək ki, verilmiş $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ bazisinə nəzərən koordinatları (x,y) olan M nöqtəsinin qurulması tələb olunur. Bu halda $\vec{OM}$ vektorunun uyğun oxlar üzərində paralel proyeksiyalarını M_1, M_2 ilə işarə etsək (şəkil 10).



Şəkil 10

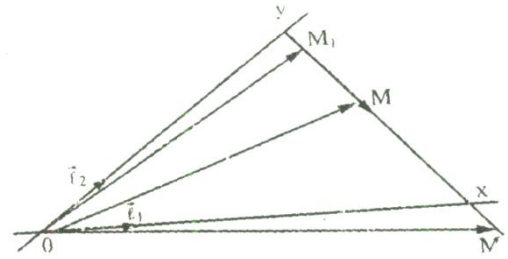
$$\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2 \quad (2)$$

olar.

Digər tərəfdən $\vec{OM}_1 = x\vec{e}_1$; $\vec{OM}_2 = y\vec{e}_2$ olduğundan M nöqtəsinə (2) vasitəsilə asanlıqla qurmaq olar.

Beləliklə, biz göstərdik ki, müstəvi üzərində koordinat sistemi verildikdə müstəvinin hər bir nöqtəsinə bir cüt həqiqi ədəd uyğun gəlir. Eləcə də bir cüt (x,y) həqiqi ədədinə (1) münasibəti ilə təyin olunan M nöqtəsi uyğun gələcəkdir. Başqa sözlə, müstəvi üzərində koordinat sistemi verməklə bu müstəvinin nöqtələri ilə həqiqi ədədlər cütü arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmış olduq.

Xüsusi halda, verilmiş $\{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ afin koordinat sisteminin bazis vektorlarının uzunluqları bərabər olmaqla bir-birinə perpendikulyar olarsa, onda belə afin koordinat sisteminə **düzbucaqlı dekart koordinat sistemi** deyilir. Başqa sözlə $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2|$ $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$ olduqda, belə afin koordinat sistemi düzbucaqlı dekart koordinat sistemi adlanır və $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ kimi işarə olunur.



Şəkil 11

2. Bəzi sadə məsələlərin koordinatlarla həlli.

a) Uc nöqtələri verilmiş vektorun koordinatlarının tapılması.

Fərz edək ki, $\vec{M_1M_2}$ vektorunun uc nöqtələri hər hansı $\{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ afin koordinat sisteminə nəzərən (x_1, y_1) , (x_2, y_2) koordinatlarına malikdir. Bu vektorun koordinatlarını tapaq. Şəkil 11-dən görüldüyü kimi $\vec{M_1M_2} = \vec{OM_2} - \vec{OM_1} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$. Buradan aydın olur ki, uc nöqtələri verilmiş vektorun koordinatlarını tapmaq üçün onun son nöqtəsinin koordinatlarından başlanğıc nöqtəsinin uyğun koordinatlarını çıxmaq lazımdır.

b) Verilmiş parçanı hər hansı λ nisbətində bölən nöqtənin koordinatlarının tapılması.

Tərif: $\vec{M_1M} - \lambda \vec{MM_2} = 0$ (2)

şərtini ödəyən λ ədədinə M, M_1, M_2 nöqtələrinin sadə nisbəti deyilir və $\lambda = (M_1M_2, M)$ kimi işarə olunur.

Bu zaman deyirlər ki, M nöqtəsi M_1M_2 parçasını λ nisbətində bölür.

Müstəvi üzərində verilmiş $\{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən qeyd etdiyimiz nöqtələrin koordinatlarını uyğun olaraq (x_1, y_1) , (x_2, y_2) və (x, y) işarə edək (şəkil 11).

Onda $\vec{M_1M} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}$

$\vec{MM_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \end{pmatrix}$

bunları (2)-də nəzərə alsaq

$$\begin{cases} (x - x_1) = \lambda(x_2 - x) \\ (y - y_1) = \lambda(y_2 - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \quad (3)$$

Bu düsturlara parçanın λ nisbətində bölünməsi düsturları deyilir. Xüsusi halda $\lambda = 1$ olduqda (3) münasibəti aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

c) İki nöqtə arasındakı məsafə.

Fərz edək ki, bizə hər hansı $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən koordinatları uyğun olaraq (x_1, y_1) (x_2, y_2) olan M_1 və M_2 nöqtələri verilib. Məlumdur ki, M_1, M_2 nöqtələri arasında məsafə

$$\rho(M_1 M_2) = \left| \vec{M_1 M_2} \right| \text{ kimidir.}$$

Lakin $\vec{M_1 M_2}$ vektorunun ortonormal bazisə nəzərən koordinatları

$$\vec{M_1 M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\rho(M_1 M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4)$$

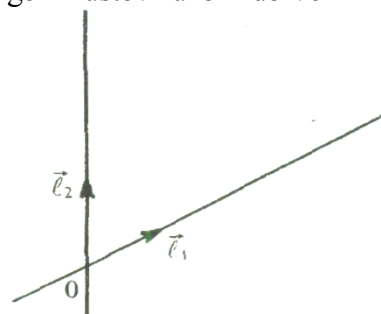
(4) düsturuna müstəvi üzərində iki nöqtə arasındakı məsafə düsturu deyilir.

3. Müstəvinin oriyentasiya edilməsi. Oriyentasiya edilmiş iki vektor arasında qalan bucaq.

Tərif: Müstəvi üzərində götürülmüş çevrə boyunca hərəkətin istiqamətlərindən biri qeyd olunmuşsa, onda deyirlər ki, müstəvi oriyentasiya olunmuşdur.

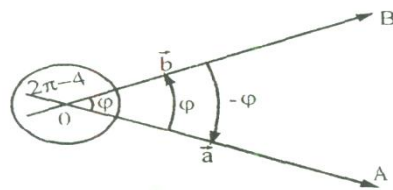
Adətən çevrə boyunca hərəkətin saat əqrəbinin əksinə olan istiqamətini müsbət istiqamət qəbul edirlər. Bu zaman deyirlər ki, müstəvi sağ oriyentasiyalıdır.

Müstəvinin bazis vektorlar vasitəsilə ilə də oriyentasiya edirlər. Əgər müstəvi üzərində verilmiş $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ bazisindəki $\bar{e}_1$ -i qısa yolla $\bar{e}_2$ üzərinə salmaq üçün O nöqtəsi ətrafında dönmə saat əqrəbinin dönmə saat əqrəbinin əks istiqamətində olarsa, onda belə bazisə sağ oriyentasiyalı bazis, bu bazisin təyin etdiyi $\{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ koordinat sisteminə isə sağ oriyentasiyalı koordinat sistemi deyilir.



Şəkil 12.

Yox, əgər hərəkət saat əqrəbi istiqamətində olarsa, onda $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ bazisinə sol oriyentasiyalı bazis, koordinat sisteminə isə sol oriyentasiyalı koordinat sistemi deyilir. Şəkil 12-də verilmiş bazis sağ oriyentasiyalıdır.



Şəkil 13.

Oriyentasiya edilmiş müstəvi üzərində $\bar{a}$ ilə $\bar{b}$ arasında qalan bucaq dedikdə $\bar{a}$ -nı $\bar{b}$ -nin üzərinə salmaq üçün onların kəsişmə nöqtəsi ətrafında saat əqrəbinin əksi istiqamətindəki dönmə bucağı müsbət, əks halda isə bu bucaq mənfi qəbul edilir. Şəkil 13-də göstərilmiş vektorlar üçün

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \varphi \text{ -dirsə,}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = -\varphi \text{ və ya}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = 2\pi - \varphi \text{ -dir.}$$

Başqa sözlə, müstəvi sağ oriyentasiyalı olduqda $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları arasında qalan bucaq

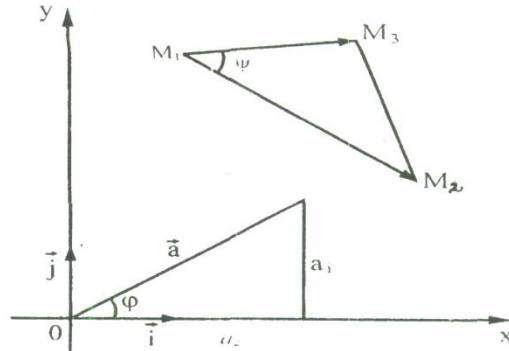
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \varphi \text{ -dirsə}$$

sol oriyentasiyalı olduqda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasında qalan bucaq

$\vec{a} \vec{b} = -\varphi$ olacaqdır.

4. Üçbucağın sahəsi

Fərz edək ki, bizə oriyentasiya olunmuş müstəvi üzərində hər hansı



Şəkil 14.

$\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ - düzbucaqlı Dekart koordinat sisteminə nəzərən təpə nöqtələrinin koordinatları $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ olan üçbucaq verilib. Bu üçbucağın sahəsini hesablamaq üçün düstur çıxaraq.

Bilirik ki, təpə nöqtələri M_1, M_2, M_3 olan üçbucağın sahəsi

$$S_{\Delta} = \pm \frac{1}{2} \left| \vec{M_1 M_2} \right| \cdot \left| \vec{M_1 M_3} \right| \sin \psi \quad (*)$$

düsturu ilə hesablanır. Burada $\psi = \angle \vec{M_1 M_2} \vec{M_1 M_3}$.

Vektorun koordinatlarının düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə həndəsi mənasından bilirik ki,

$$\begin{cases} a_1 = |\vec{a}| \cos \varphi \\ a_2 = |\vec{a}| \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \\ \sin \varphi = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \end{cases} \quad (5)$$

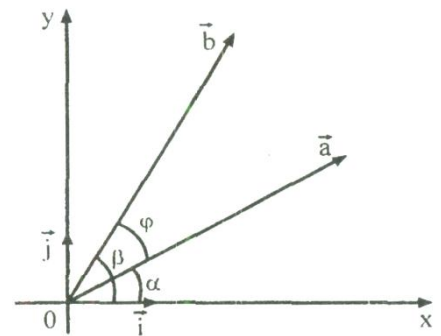
(şəkil 14-ə bax).

Burada φ $\vec{a}$ vektorunun (ox) oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır.

İndi düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən koordinatları verilmiş iki vektor arasında qalan bucağın sinus və kosinusunu hesablayaq.

$\vec{i} \vec{a} = \alpha$, $\vec{i} \vec{b} = \beta$, $\vec{a} \vec{b} = \varphi$ işarə edək. Şəkil 15-də göründüyü kimi, $\varphi = \beta - \alpha$.

Onda



Şəkil 15.

$$\sin \varphi = \sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta$$

(5) ifadəsini burada nəzərə alsaq

$$\sin \varphi = \frac{b_2}{\left| \begin{smallmatrix} - \\ b \end{smallmatrix} \right|} \cdot \frac{a_1}{\left| \begin{smallmatrix} - \\ a \end{smallmatrix} \right|} - \frac{a_2}{\left| \begin{smallmatrix} - \\ a \end{smallmatrix} \right|} \cdot \frac{b_1}{\left| \begin{smallmatrix} - \\ b \end{smallmatrix} \right|} \text{ və ya}$$

$$\sin \varphi = \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 b_1}{\left| \begin{smallmatrix} - \\ a \end{smallmatrix} \right| \cdot \left| \begin{smallmatrix} - \\ b \end{smallmatrix} \right|}.$$

Analoji qayda ilə

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\left| \begin{smallmatrix} - \\ a \end{smallmatrix} \right| \cdot \left| \begin{smallmatrix} - \\ b \end{smallmatrix} \right|} \text{ ifadəsini çıxarmaq olar.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{smallmatrix} - \\ a \end{smallmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ \left| \begin{smallmatrix} - \\ b \end{smallmatrix} \right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \end{array} \right. \text{ olduğundan}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \varphi = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \\ \cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \end{array} \right. \quad (6)$$

Bunlardan birincisini üçbucağın (*) sahə düsturunda nəzərə alaq

$$S_{\Delta} = \pm \frac{1}{2} \left| \vec{M_1 M_2} \right| \cdot \left| \vec{M_1 M_3} \right| \cdot \sin \psi = \pm \left| \vec{M_1 M_2} \right| \cdot \left| \vec{M_1 M_3} \right| \cdot \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}{\left| \vec{M_1 M_2} \right| \cdot \left| \vec{M_1 M_3} \right|} \text{ və}$$

ya

$$S_{\Delta} = \pm \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & y_3 - y_1 \\ y_2 - y_1 & x_3 - x_1 \end{array} \right| \quad (7)$$

olar.

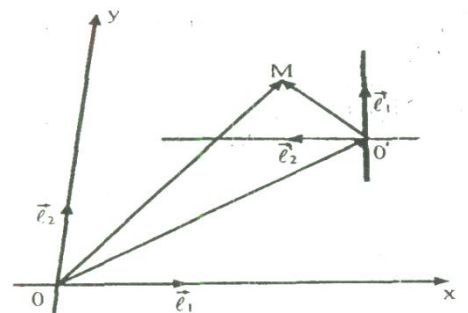
Bu düstur düzbucaqlı dekart koordinat sistemində nəzərən təpə nöqtələrinin koordinatları verilmiş üçbucağın **sahə düsturu** adlanır.

5.Afin koordinat sisteminin afin koordinat sistemində çevrilməsi.

Fərz edək ki, bizə $\left\{ 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$

və $\left\{ 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$ ümumi dekart koordinat sistemləri verilmişdir

(şəkil 16). Müstəvi üzərində hər hansı M nöqtəsi götürüb verilmiş koordinat sistemlərinə nəzərən onun koordinatlarını uyğun olaraq (x,y). (x,y) kimi işarə edək. Bunlar arasında əlaqə düsturunu çıxaraq.



Şəkil 16.

Bunun üçün II sistemin bazis vektorlarını və eləcə də başlanğıcını I koordinat sistemində nəzərən koordinatlarını aşağıdakı kimi işarə edək və onların I bazisə nəzərən ayrılışını yazaq:

$$\vec{e}_1' = \left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\} \vec{c}_{11} \vec{e}_1 + \vec{c}_{21} \vec{e}_2$$

$$\bar{e}_2 = \begin{cases} c_{12}; c_{22} \end{cases} \bar{e}_1 + c_{22} \bar{e}_2$$

$$O(x_0, y_0)$$

M nöqtəsinin I sistemə nəzərən koordinatları (x,y) olduğundan

$$\vec{OM} = x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2$$

və M nöqtəsinin II sistemə nəzərən koordinatları (x,y) olduğundan $\vec{OM} = x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2$ eləcə də $\vec{OO} = x_0 \bar{e}_1 + y_0 \bar{e}_2$ olacaqdır. İstənilən O,O,M nöqtələri üçün

$$\vec{OM} = \vec{OO} + \vec{OM} \quad (*)$$

ifadəsi doğrudur (şəkil 16).

$\vec{OM}, \vec{OO}, \vec{OM}$ və eləcə də $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ vektorlarının yuxarıdakı ifadəsini (*)-da yerinə yazaq.

$$x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2 = x_0 \bar{e}_1 + y_0 \bar{e}_2 + x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2$$

$$x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2 = x_0 \bar{e}_1 + y_0 \bar{e}_2 + x(c_{11} \bar{e}_1 + c_{21} \bar{e}_2) + y(c_{12} \bar{e}_1 + c_{22} \bar{e}_2)$$

Bu ifadəni $\bar{e}_1$ və $\bar{e}_2$ -yə nəzərən qruplaşdırsaq

$$x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2 = (x_0 + c_{11}x + c_{12}y) \bar{e}_1 + (y_0 + c_{21}x + c_{22}y) \bar{e}_2$$

Vektorlar bərabərdirsə, onda onların uyğun koordinatları da bərabərdir, başqa sözlə

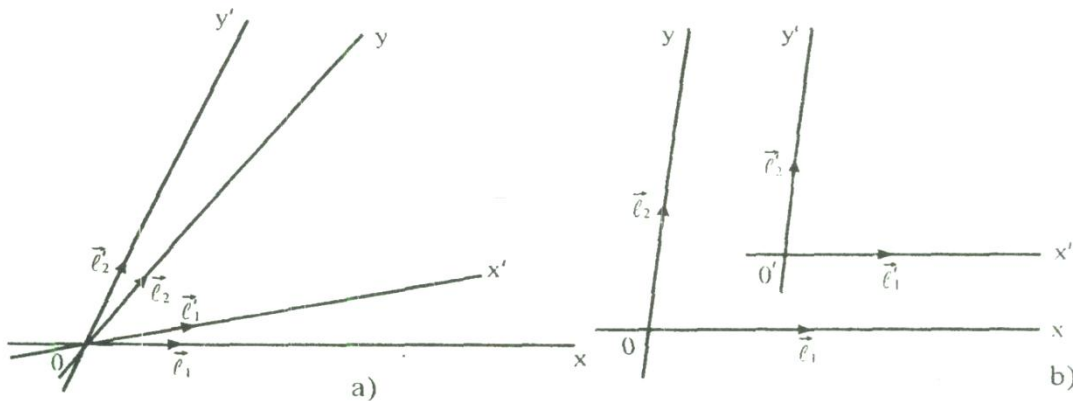
$$\begin{cases} x = c_{11}x + c_{12}y + x_0 \\ y = c_{21}x + c_{22}y + y_0 \end{cases} \quad (8)$$

(8) düsturlarına **afin koordinat sisteminin afin koordinat sisteminə çevrilməsi** düsturları deyilir.

Afin koordinat sisteminin çevrilməsinin xüsusi hallarına baxaq.

a) Tutaq ki, verilmiş sistemlərin başlanğıcı üst-üstə düşür (şəkil 17 a) $O=O$. Onda $x_0 = y_0 = 0$ olacaqdır. Bu zaman (8) düsturu aşağıdakı kimi olar:

$$\begin{cases} x = c_{11}x + c_{12}y \\ y = c_{21}x + c_{22}y \end{cases} \quad (8_1)$$



Şəkil 17.

Bu düsturlara koordinat sisteminin öz **başlanğıcı ətrafında döndərilməsi** düsturları deyilir.

b) İndi fərz edək ki, ikinci koordinat sistemi birinci koordinat sisteminin paralel köçürülməsi nəticəsində alınmışdır (şəkil 17 b). Başqa sözlə koordinat sistemləri yalnız başlanğıcı ilə fərqlənir:

$$\bar{e}_1 = \bar{e}_1, \quad \bar{e}_2 = \bar{e}_2, \quad O \neq O'$$

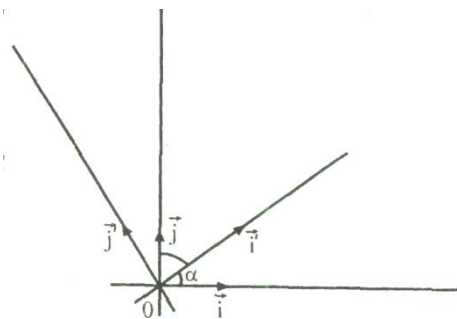
Onda (8) düsturları aşağıdakı şəkllə düşəcək:

$$\begin{cases} x = x + x_0 \\ y = y + y_0 \end{cases} \quad (8_2)$$

Bu düsturlar **koordinat sisteminin paralel köçürülməsi** düsturları adlanır.

6. Düzbucaqlı dekart koordinat sisteminin düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə çevrilməsi.

Fərz edək ki, bizə oriyentasiya olunmuş $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ və $\{0, \bar{i}', \bar{j}'\}$ kimi iki düzbucaqlı dekart koordinat sistemləri verilmişdir. Əvvəlcə fərz edək ki, bu koordinat sistemləri eyni oriyentasiyalıdır və eyni başlanğıca malikdir. Bilirik ki, düzbucaqlı dekart koordinat sistemində vahid vektorun koordinatları onun yönəldici kosinuslara bərabərdir. Başqa sözlə



Şəkil 18.

$$\bar{i} = (\cos \alpha; \cos(90^\circ - \alpha)) = (\cos \alpha; \sin \alpha)$$

$$\bar{j} = (\cos(90^\circ + \alpha); \sin(90^\circ + \alpha)) = (-\sin \alpha; \cos \alpha)$$

Burada $\alpha = \angle(\bar{i}, \bar{i}')$. Bunları (8)-də nəzərə alaq.

$$\begin{cases} x = x \cos \alpha - y \sin \alpha + x_0 \\ y = x \sin \alpha + y \cos \alpha + y_0 \end{cases} \quad (9_1)$$

Bu düsturun determinanti

$$\delta = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 1 \text{ olacaq.}$$

İndi fərz edək ki, verilmiş koordinat sistemləri müxtəlif oriyentasiyalıdır. Yenə də $\bar{i}$ və $\bar{i}'$ arasındakı bucağı α ilə işarə etsək ($\angle(\bar{i}, \bar{i}') = \alpha$), onda $\bar{i}$ və $\bar{j}$ vektorlarının koordinatları

$$\bar{i} = (\cos \alpha; \sin \alpha)$$

$$\bar{j} = (\cos(90^\circ - \alpha); -\sin(90^\circ - \alpha)) = (\sin \alpha; -\cos \alpha) \text{ olacaqdır.}$$

Yenə də bunları (8) düsturunda nəzərə alaq

$$\begin{cases} x = x \cos \alpha + y \sin \alpha + x_0 \\ y = x \sin \alpha - y \cos \alpha + y_0 \end{cases} \quad (9_2)$$

burada isə

$$\delta = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{vmatrix} = -1 \text{ olacaqdır.}$$

(9₁) və (9₂) düsturlarını birləşdirsək, aşağıdakı ümumi düsturu alırıq.

$$\begin{cases} x = x \cos \alpha - \varepsilon y \sin \alpha + x_0 \\ y = x \sin \alpha + \varepsilon y \cos \alpha + y_0 \end{cases} \quad (9)$$

$\varepsilon = 1$ olduqda eyni oriyentasiyalı düzbucaqlı dekart koordinat sistemlərinin, $\varepsilon = -1$ olduqda isə müxtəlif oriyentasiyalı koordinat sistemlərinin çevrilməsi düsturlarını almış oluruq.

7. Polyar koordinat sistemi.

Oriyentasiya edilmiş müstəvi üzərində hər hansı O nöqtəsi və $\bar{e}$ vahid vektoru götürək. o nöqtəsindən keçib, müsbət istiqaməti $\bar{e}$ vahid vektoru ilə təyin olunan OP şüası götürək. Bu cür

təyin olunmuş həndəsi obraza **polyar koordinat sistemi** deyilir və belə işarə olunur: $\{0, \vec{e}\}$. O-nöqtəsinə polyus, OP oxuna isə polyar ox deyilir.

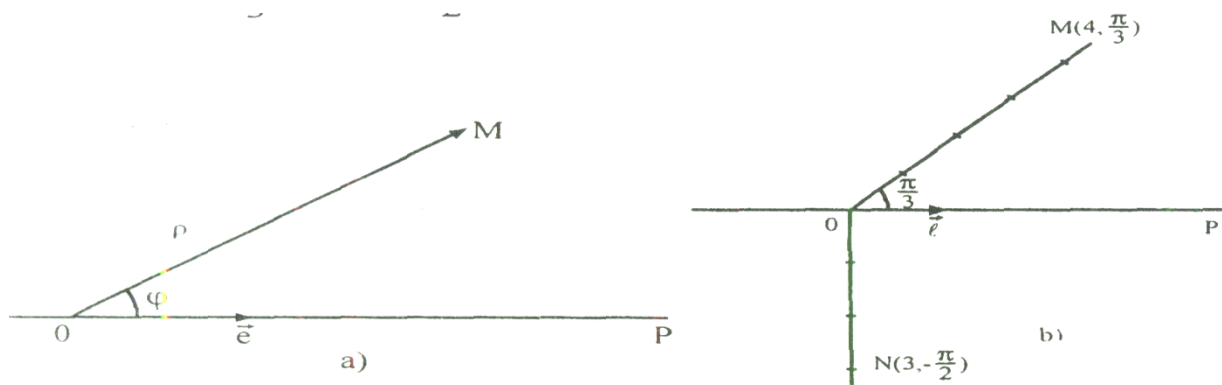
Göstərək ki, bu koordinat sistemi vasitəsilə nöqtənin müstəvi üzərindəki vəziyyəti birqiymətli təyin olunur. $|\vec{OM}| = \rho; \angle \vec{OM} = \varphi$ işarə edək (şəkil 19 a).

Onda aşkardır ki, ρ və φ ədədlərinə müstəvi üzərində yalnız bir nöqtə və tərsinə, hər bir nöqtəyə bir cüt (ρ, φ) ədədləri uyğun gələcəkdir. Başqa sözlə qeyd olunan bu ədədlər M nöqtəsinin müstəvi üzərində vəziyyətini birqiymətli təyin edir. Bu ədədlərə M nöqtəsinin polyar koordinatları deyilir və belə işarə olunur: $M(\rho, \varphi)$. ρ -polyar məsafə, φ -polyar bucaq adlanır. Burada $0 < \rho < \infty$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

$\rho = 0$ olduqda bu nöqtə polyusla üst-üstə düşür və bu heç bir məna kəsb etmir.

Aşağıdakı nöqtələri polyar koordinat sistemində quraq:

$$M(4, \frac{\pi}{3}), N(3, -\frac{\pi}{2}) \text{ (şəkil 19 b).}$$



Şəkil 19.

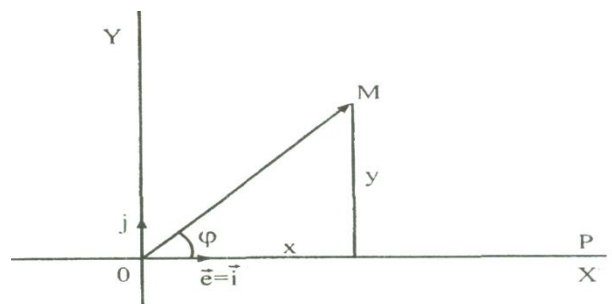
İndi nöqtənin polyar koordinatları ilə düzbucaqlı dekart koordinat sistemində nəzərən koordinatları arasındakı əlaqə düsturlarını yazaq. Bunun üçün elə $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemi götürək ki, onun başlanğıcı polyusla, absis oxu isə polyar oxla üst-üstə düşsün (şəkil 20). Götürdüyümüz M nöqtəsinin dekart koordinatlarını (x, y) , polyar koordinatlarını isə (ρ, φ) ilə işarə edək. Onda şəkil 20-dən aşkardır ki,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (10)$$

Buradan

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (11)$$

Bu düsturlar polyar koordinatlardan düzbucaqlı dekart koordinatlarına və tərsinə **keçid düsturları** adlanır.



Şəkil 20.

§ 6. Müstəvi üzərində koordinat metodu.

1. Müstəvi üzərində koordinat metodunun mahiyyəti həndəsi fiqurları ədədlər, tənliklər, bərabərsizliklər və eləcə də onların sistemləri vasitəsilə analitik şəkildə verməkdən ibarətdir. Koordinat metodunu daha dəqiq şərh etmək üçün «Həndəsi fiquru təyin edən şərt» anlayışını verək.

Fərz edək ki, bizə müstəvi üzərində $\{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ afin koordinat sistemi və hər hansı Φ fiquru verilmişdir. Əgər Φ fiquruna daxil olan istənilən nöqtənin koordinatları verilmiş hər hansı tənlik və ya bərabərsizliyi (sistemlərini) ödəyərsə, və bu fiqura daxil olmayan istənilən nöqtənin koordinatları qeyd olunan tənlik və ya bərabərsizliyi (sistemlərini) ödəməzsə, onda bu tənlik və ya bərabərsizliyə (sisteminə) həmin **Φ fiqurunu təyin edən şərt** deyilir. Xüsusi halda əgər bu şərt bir dənə tənlikdən ibarət olarsa, onda bu təkliyə həmin **fiqurun tənliyi** deyilir.

Müstəvi üzərində koordinat metodunu öyrənmək üçün adətən aşağıdakı iki məsələyə baxılır:

- Həndəsi fiqurun xassələri vasitəsilə onu təyin edən şərti (tənliyi) yazmaq.
- Həndəsi fiquru təyin edən şərt verildikdə onu koordinat sisteminə nəzərən qurmaq.

Birinci məsələyə aid nümunə göstərək:

Uyğun olaraq $B_1(0;2)$ $B_2(0;4)$ nöqtələrindən keçib, (ox) oxuna paralel olan l_1 və l_2 düz xətləri arasında qalan zolağı təyin edən şərti yazın.

Aşkardır ki, bu zolaq arasında yerləşən istənilən nöqtənin x -i nə olursa, olsun y -i

$$2 < y < 4$$

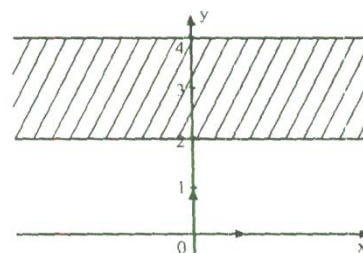
arasında yerləşməlidir. Elə bu da həmin zolağı təyin edən şərtidir (şəkil 22).

İkinci məsələyə aid nümunə göstərək.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

şərtini ödəyən həndəsi fiquru düzbucaqlı dekart koordinat sistemində qurun:

Birinci şərtədən məlum olur



Şəkil 22.

ki, bu fiqurun bütün nöqtələri (ox) oxunun müsbət istiqamətində yerləşib, absisi 4-ü aşmır.

Deməli belə nöqtələr çoxluğu ordinat oxu ilə bu oxa paralel olub, ondan 4 vahid uzaqlıqda (müsbət tərəfdə) yerləşən düz xətlərin təyin etdikləri zolaqda yerləşir (şəkil 23).

İkinci şərtədən isə eyni qayda ilə müəyyən olur ki, axtarılan həndəsi fiqurun nöqtələri absis oxu ilə ordinat oxundan 3 vahid ayırır, bu oxa paralel olan düz xətlərin təyin etdiyi zolaqda yerləşir.

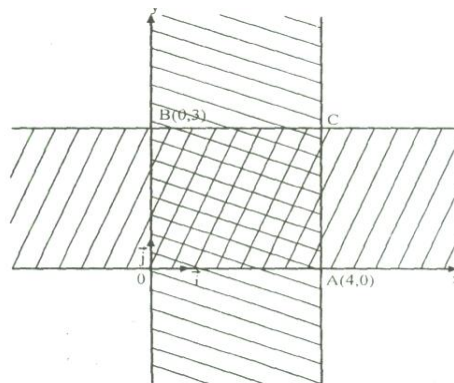
Başqa sözlə, axtarılan fiqur qeyd olunan zolaqların kəsişməsindən ibarət olan $OACB$ düzbucaqlısıdır (şəkil 23).

2. Cəbri xətt və onun tərtibi. Çevrənin tənliyi.

Müstəvi üzərində koordinat metodunu öyrənərkən xətt anlayışından daha tez-tez istifadə olunur. Xəttə misal olaraq düz xətti, çevrəni, parabolunu, sinusoid xəttini və s. göstərmək olar.

Əgər xəttin tənliyini hər hansı afin koordinat sisteminə nəzərən $F(x,y)=0$ (1) şəklinə gətirmək mümkündürsə, onda belə xəttə **cəbri xətt** deyilir.

Burada $F(x,y)$ x və y -ə nəzərən çoxhədlidir.



Şəkil 23.

Bilirik ki, çoxhədli dedikdə hədləri $a_0 x^m y^k$ şəklində olan ifadə başa düşülür. Burada $m + k \in N$ ədədinə **həddin dərəcəsi**, hədlərin ən yüksək dərəcəsinə isə bu **çoxhədlinin dərəcəsi** deyilir. (1) tənliyinin dərəcəsinə isə onun təyin etdiyi xəttin tərtibi deyilir.

İkitərtibli xəttə aid çevrəni misal göstərmək olar.

Bilirik ki, mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşib, radiusu r olan çevrənin tənliyi $x^2 + y^2 = r^2$ şəklindədir. Bu tənlik ikidərəcəli olduğundan çevrə ikitərtibli xətdir. O da məlumdur ki, $B(\alpha, \beta)$ mərkəzli çevrənin tənliyi

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

şəklindədir. Bu tənliyi açsaq,

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

şəklinə düşər. Burada $A = -2\alpha$, $B = -2\beta$, $C = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$.

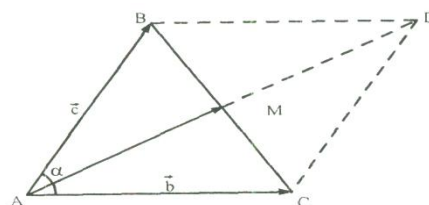
Buradan belə nəticəyə gəlmək olar ki, əgər ikitərtibli xəttin ümumi tənliyində x^2 və y^2 -nin əmsalları eyni olarsa, onda bu tənlik çevrənin tənliyidir.

§ 7. Vektorlar cəbrinin və koordinat metodunun məktəb həndəsə kursunun məsələlərinə tətbiqi

Vektorlar cəbrinin və koordinat metodunun köməyiylə məktəb həndəsə kursunun bir çox isbat və hesablama məsələlərini asanlıqla həll etmək olar.

Belə məsələlərin həlli nümunələrinə baxaq: əvvəlcə, vektorlar cəbrinin köməyi ilə aşağıdakı məsələləri həll edək.

Məsələ 1. Üçbucağın bir təpədən çıxan iki tərəfi və bunlar arasındakı bucaq verilmişdir.



Şəkil A.

Bu üçbucağın qeyd olunan təpəsindən çəkilmiş medianın uzunluğunu tapın.

Verilir: $AB = c$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$.

ABC üçbucağını paraleloqrama tamamlayaq (şəkil A). Onda vektorların paraleloqram qaydası ilə toplanmasından

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}.$$

Burada $\vec{AD}$ vektoru üçbucağın A təpəsindən çıxan medianın iki mislinə bərabər olduğundan

$$2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

olar. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək:

$$4\vec{AM}^2 = \vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2 \quad (1)$$

Hər bir vektorun skalyar kvadratı, başqa sözlə, öz-özünə skalyar hasil bu vektorun uzunluğunun kvadratına bərabər olduğundan

$$\vec{AB}^2 = |\vec{AB}|^2 = c^2, \quad \vec{AC}^2 = |\vec{AC}|^2 = b^2, \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = c \cdot b \cdot \cos \alpha$$

ifadələrini (1)-də nəzərə alsaq:

$$4|\vec{AM}|^2 = 4m_0^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha \quad \text{və ya}$$

$$m_0 = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha}$$

ifadəsini alırıq.

Analoji qayda ilə digər medianlar üçün də aşağıdakı düsturları çıxarmaq olar:

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2 + 2bc \cos \beta}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2bc \cos \gamma}$$

Burada β üçbucağın BA və BC, γ isə CA və CB tərəfləri arasında qalan bucaqdır.

Göründüyü kimi, vektorlar vasitəsilə çıxarılmış bu düsturlar digər üsullardan kifayət qədər asandır. İndi də bir isbat məsələsini həll edək:

Məsələ 2. ABC üçbucağının medianlarının kəsişmə nöqtəsinin M, O nöqtəsinin isə fəzanın ixtiyari nöqtəsi olduğunu bilərək,

$$\vec{OM} = \frac{1}{3} [\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}]$$

olduğunu isbat edin (şəkil B).

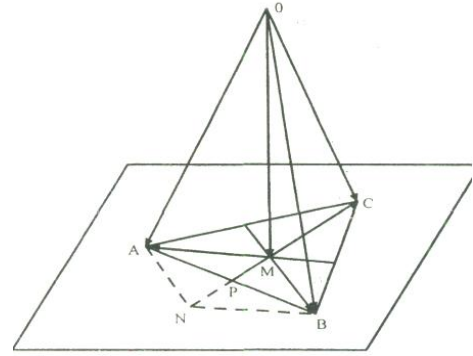
Həlli:

Şəkil B-dən görünür ki, vektorların toplanması qaydasına görə,

$$\vec{OA} = \vec{OM} + \vec{MA}$$

$$\vec{OB} = \vec{OM} + \vec{MB}$$

$$\vec{OC} = \vec{OM} + \vec{MC}$$



Şəkil B

Bu tərəf-tərəfə toplayaq.

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OM} + [\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}] \quad (2)$$

göstərək ki,

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$$

Doğrudan da şəkildən göründüyü kimi $\triangle AMB$ -ni paraleloqrama tamamlasaq,

$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MF}$$

digər tərəfdən

$$2\vec{MF} = -\vec{MC} \text{ bunu (3)-də nəzərə alsaq.}$$

$$\vec{MA} + \vec{MB} = -\vec{MC} \text{ və ya}$$

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0.$$

Bu sonuncunu (2) ifadəsində nəzərə alsaq,

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OM}$$

və ya $\vec{OM} = \frac{1}{3} [\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}]$ bərabərliyini alırıq.

Məsələ 3. Verilmiş ABC üçbucağında D nöqtəsi B ilə C arasında yerləşdikdə aşağıdakı bərabərliklərin doğru olduğunu göstərin:

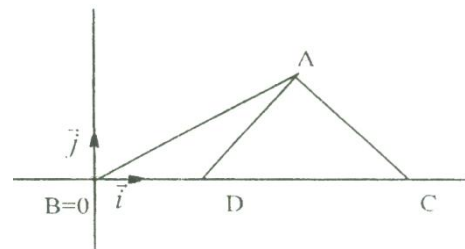
$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

(*)

İsbatı:

Bu məsələni koordinat metodu ilə həll edəcəyik.

Elə $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ dekart koordinat sistemi seçək ki, onun



Şəkil C.

başlanğıcı verilmiş üçbucağın B təpəsi, absis oxu isə BC tərəfi ilə üst-üstə düşsün. Bu cür koordinat sistemində üçbucağın

tərəflərinin koordinatlarını aşağıdakı kimi işarə edək: $A(\alpha, \beta)$, $C(v, 0)$, $D(\delta, 0)$.

Burada $BD = \delta$, $BC = v$ (şəkil C).

İndi (*) münasibətinə daxil olan bütün partaların uzunluqlarını iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə hesablayaq.

$$\begin{aligned} AB &= \alpha^2 + \beta^2 & BC &= v \\ AC &= (\alpha - v)^2 + \beta^2 & BD &= \delta \\ AD^2 &= (\alpha - \delta)^2 + \beta^2 & DC &= v - \delta \end{aligned}$$

Bunları (*) münasibətində nəzərə alıb, sadələşdirək.

$$\begin{aligned} AB^2 \cdot DC + AC \cdot BD - AD^2 \cdot BC &= (\alpha^2 + \beta^2)(v - \delta) + [(\alpha - v)^2 + \beta^2] \delta - \\ &- [(\alpha - \delta)^2 + \beta^2] v - \alpha^2 v - \alpha^2 \delta + \beta^2 v - \beta^2 \delta + \alpha^2 \delta + v^2 \delta + \beta^2 \delta - 2\alpha v \delta - \\ &- \alpha^2 v - \delta^2 v - \beta^2 v - 2\alpha \delta v = v^2 \delta - \delta^2 v = v \delta (v - \delta) = BC \cdot BD \cdot DC. \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$AB^2 \cdot DC + AC \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot BD \cdot DC.$$

Bu da teoremin isbatıdır. Bu teorem **Stüart teoremi** adlanır.

Burada D nöqtəsi üçbucağın bir tərəfi üzərində götürülmüş ixtiyari nöqtə olduğundan (*) düsturundan üçbucağın ixtiyari təpəsindən çəkilmiş median, tən bölən və hündürlüyün uzunluğunun hesablanması üçün düstur çıxartmaq olar.

Bu düsturdan istifadə edib medianın hesablanması üçün düstur çıxardaıq:

Bu halda D nöqtəsi BC parçasının orta nöqtəsi, $BD = DC$ olacaqdır. $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ və

$AD = m_a$ işarə etsək, onda $BD = DC = \frac{a}{2}$ olacaqdır.

Bunları (*) münasibətində nəzərə alsaq, median üçün

$$m_0^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \quad \text{və ya}$$

medianlar üçün məlum olan

$$m_0 = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 - a^2} \quad \text{düsturunu alarıq.}$$

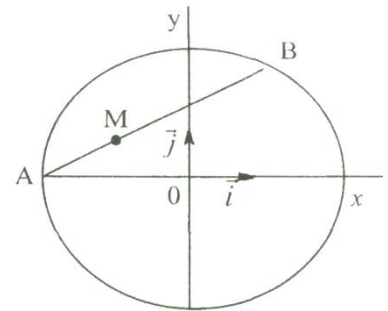
Məsələ 4. Verilmiş r radiuslu çevrə üzərində götürülmüş A nöqtəsindən keçən bütün vətərləri $\lambda \neq -1$ nisbətində bölən ω nöqtələr çoxluğunu tapın.

Həlli: Bu məsələni də koordinat metodu ilə həll edəcəyik.

Elə $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemi götürək ki,

onun mərkəzi çevrənin mərkəzi ilə üst-üstə düşməklə, absis oxu çevrə üzərində verilmiş A nöqtəsindən keçsin. Bu koordinat sistemində A nöqtəsi $(-r, 0)$ koordinatlarına malik olacaqdır.

B nöqtəsinin koordinatlarını isə (x_2, y_2) , M nöqtəsinin koordinatlarını isə (x, y) -lə işarə edək.



Şəkil D.

Məsələnin şərtinə görə

$$\frac{\vec{AM}}{\vec{MB}} = \lambda \quad \text{və ya} \quad \vec{AM} = \lambda \cdot \vec{MB}$$

Bu ifadəni koordinatlarla yazsaq,

$$x = \frac{-r + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{\lambda y_2}{1 + \lambda}$$

M nöqtəsinin AB vətərinin uc nöqtələrinə düşmədiyini ($\lambda \neq -1, \lambda \neq 0$) nəzərə alsaq.

$$x_2 = \frac{1+\lambda}{\lambda} \left[x + \frac{r}{1+\lambda} \right], \quad y_2 = \frac{1+\lambda}{\lambda} y \quad (1)$$

$B(x_2, y_2)$ verilmiş çevrə üzərində olduğundan onun koordinatları verilmiş çevrənin

$$x^2 + y^2 = r^2$$

tənliyini ödəməlidir. Başqa sözlə,

$$x_2^2 + y_2^2 = r^2.$$

x_2, y_2 -nin (1) ifadəsindəki qiymətlərini burada nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned} \left[\frac{1+\lambda}{\lambda} \right]^2 \left[x + \frac{r}{1+\lambda} \right]^2 + \left[\frac{1+\lambda}{\lambda} \right]^2 y^2 &= r^2 \quad \text{və ya} \\ \left[x + \frac{r}{1+\lambda} \right]^2 + y^2 &= \frac{r^2 \lambda^2}{(1+\lambda)^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Biz göstərdik ki, əgər $M(x, y)$ nöqtəsi verilmiş şərti ödəyən nöqtələr çoxluğuna daxildirsə, onda onun koordinatları (2) tənliyini ödəyər.

Asanlıqla göstərmək olar ki, koordinatları (2) tənliyini ödəyən hər bir $M(x, y)$ nöqtəsi yuxarıda qeyd olunan nöqtələr çoxluğuna daxildir. Bu nöqtələr çoxluğu ilə $\left[\frac{-r}{1+\lambda}; 0 \right]$ mərkəzli $R = \frac{r \cdot \lambda}{1+\lambda}$ radiuslu çevrənin tənliyidir.

İndi də koordinat metoduna aid bir neçə məsələ həll edək.

Məsələ 1. Afin koordinat sistemindən istifadə edərək $A(2, -3)$ nöqtəsini qurun.

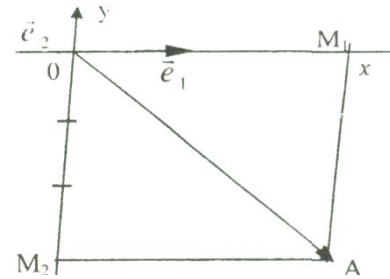
Həlli: Əvvəlcə $\vec{OM}_1 = 2\vec{e}_1$ və $\vec{OM}_2 = -3\vec{e}_2$ vektorlarını quraq.

Sonra isə bu vektorların köməyi ilə

$\vec{OA} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ vektorunu quraq (şəkil 1).

Alınan A axtarılan nöqtədir. Belə ki,

$$\vec{OA} = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2$$



Şəkil 1.

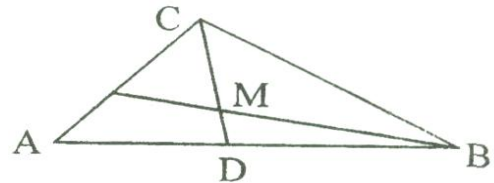
Məsələ 2. Təpələri $A(1, 4)$, $B(-5, 0)$ və $C(-2, -1)$ nöqtələrində yerləşən üçbucağın medianlarının kəsişmə nöqtəsini tapın.

Həlli: Üçbucağın AB tərəfinin nöqtəsini D ilə, medianların kəsişmə nöqtəsini isə M ilə işarə edək (şəkil 2).

$D(x, y)$ nöqtəsinin koordinatlarını tapaq:

$$x = \frac{1 + (-5)}{2} = -2,$$

$$y = \frac{4 + 0}{2} = 2, \quad \text{deməli } D(-2; 2)$$



Şəkil 2.

$\frac{OM}{MO} = 2$ olduğundan $M(x_0, y_0)$ nöqtəsinin koordinatlarını hesablaya bilərik:

$$x_0 = \frac{-2 + 2(-2)}{1 + 2} = \frac{-6}{3} = -2; \quad y_0 = \frac{-1 + 2 - 2}{1 + 2} = -1;$$

Beləliklə, verilmiş üçbucağın medianlarının kəsişmə nöqtəsi $M(-2;1)$ olacaqdır.

Məsələ 3. Tərəp nöqtələri verilmiş ABC üçbucağının AM medianının uzunluğunu tapın: $A(5;-4)$, $B(-1;2)$, $C(5;1)$.

Həlli: AM median olduğuna görə M nöqtəsi BC tərəfinin orta nöqtəsidir. M nöqtəsinin koordinatlarını tapaq:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

Deməli, $M\left[2; \frac{3}{2}\right]$.

İndi AM parçasının uzunluğunu tapaq:

$$AM = \sqrt{(+2-5)^2 + \left[\frac{3}{2}+4\right]^2} = \sqrt{9 + \frac{121}{4}} = \sqrt{\frac{157}{4}} = \sqrt{\frac{157}{4}}$$

Məsələ 4. Absisi $x=+7$ və $N(-1;5)$ nöqtəsindən məsafəsi $MN=10$ olan M nöqtəsinin ordinatını tapın.

Həlli: M nöqtəsinin ordinatını y ilə işarə etsək,

$$10 = \sqrt{(7+1)^2 + (y-5)^2} \Rightarrow 100 = 64 + (y-5)^2 \Rightarrow y^2 - 10y - 11 = 0.$$

$$y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25+11} = 5 \pm 6, \quad y_1 = 11, \quad y_2 = -1.$$

olar.

Məsələnin şərtini iki nöqtə ödəyir:

$$M_1(7;11), \quad M_2(7;-1).$$

Məsələ 5. Tərəpləri $A(-1;3)$, $B(2;-5)$ və $C(0;4)$ nöqtələri olan ABC üçbucağı verilmişdir. Üçbucağın A bucağını tapın.

Həlli: Əvvəlcə A bucağını əmələ gətirən AB və AC vektorlarını koordinatlarını təyin edək:

$$\vec{AB}(2+1;-5-3) \cdot \vec{AC}(0+1;4-3) \Rightarrow \vec{AB}(3;-8), \vec{AC}(1;1)$$

İndi bucaq düsturundan istifadə edib tələb olunan bucağı tapaq:

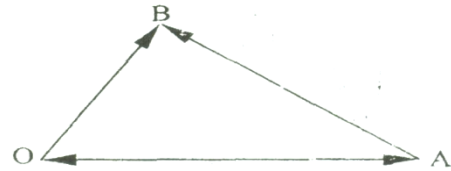
$$\cos\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = \frac{3 \cdot 1 + (-8) \cdot 1}{\sqrt{9+64} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{-5}{\sqrt{73} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-5}{\sqrt{146}}$$

$$\cos\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = \frac{-5}{\sqrt{146}}.$$

Məsələ 6. İxtiyari OAB üçbucağı verilmişdir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ koordinat sistemindən $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ koordinat sistemində keçid düsturlarını yazın, burada

$$\vec{e}_1 = \vec{OA}, \quad \vec{e}_2 = \vec{OB}$$

$$O = A; \vec{e}_1 = \vec{AO}, \quad \vec{e}_2 = \vec{BO} \text{ (şəkil 3).}$$



Şəkil 3.

Həlli: 3-cü şəkilə görə

$$O = A, \vec{e}_1 = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_1(-1;1), \vec{e}_2 = \vec{AO} = -\vec{OA} + O\vec{e}_2 =$$

$$= -\vec{e}_1 + O\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_2(-1;0)$$

afin koordinat sisteminin afin koordinat sisteminə çevrilməsi düsturlarına əsasən yazı bilərik:

$$\left. \begin{aligned} x &= -x - y + 1, \\ y &= x + Oy + O, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= -x - y + 1, \\ y &= x, \end{aligned} \right\}$$

ÇALIŞMALAR.

1. Diaqnolları koordinat oxlarına paralel olan paraleloqramın iki qonşu $A(1;3)$ və $B(2;-1)$ təpə nöqtəsi verilmişdir. Onun qalan iki təpəsinin koordinatlarını tapın.

2. $A(0;0)$, $B(3;1)$ və $C(1;7)$ təpəli üçbucağın düzbucaqlı olduğunu isbat edin.

3. Təpələri $F(-2;1)$, $Q(4;8)$ və $R(0;6)$ nöqtələrində yerləşən üçbucaq verilmişdir. Bu üçbucağın daxili bucaqlarından korbucaq olanı varmı?.

4. Koordinat bucağının tənböləni üzərində $M(8;0)$ nöqtəsindən 10 vahid məsafədə olan nöqtəni təyin edin. (Koordinat sistemi düzbucaqlıdır).

5. Mərkəzi $C(6;7)$ nöqtəsində yerləşən radiusu $r=5$ olan çevrə verilmişdir. $A(7;14)$ nöqtəsindən bu çevrəyə toxunanlar çəkilmişdir. Onların uzunluğunu hesablayın.

6. $M(0;2)$ və $N(2;4)$ nöqtələrindən keçən düz xətt (OX) oxu ilə hansı bucaq əmələ gətirir.

7. (OX) oxu üzərində, koordinat başlanğıcından və $A(9;-3)$ nöqtəsindən bərabər məsafədə yerləşən nöqtə tapın.

8. İki qonşu $A(2;0)$ və $B(5;3\sqrt{3})$ təpəsi verilmiş düzgün altıbucaqlının mərkəzini təyin edin.

9. ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzinin koordinatlarını və radiusunun uzunluğunu təyin edin: $A(2;2)$, $B(-5;1)$, $C(3;-5)$.

10. $A(-4;2)$ nöqtəsindən keçən və $B(2;0)$ nöqtəsində (OX) oxuna toxunan çevrənin mərkəzini təyin edin.

11. Təpələrinin $(-2;1)$, $(2;-2)$ və $(8;6)$ koordinatlarına görə üçbucağın perimetrini və sahəsini hesablayın.

12. Düz xətt özünün iki $A(-1;4)$ və $B(2;1)$ nöqtəsi ilə təyin olur. Həmin düz xətt üzərində yerləşən və absisi $x=5$ olan nöqtəni tapın.

13. $A(1;3)$, $B(4;7)$, $C(2;2)$ və $D(-1;4)$ nöqtələri verilmişdir. ABCD dördbucaqlısının paraleloqram olduğunu yoxlayın və AB tərəfini oturmaq qəbul edib onun hündürlüyünü hesablayın.

14. Təpələrinin koordinatları məlum olan üçbucağın medianlarının uzunluğunu hesablayın: $A(3;-2)$, $B(5;2)$ və $C(-1;4)$.

15. Bircins tirin ağırlıq mərkəzi $M(5;1)$ nöqtəsində yerləşir; uclarından biri isə $A(-1;-3)$ nöqtəsi ilə üst-üstə düşür. O biri ucun vəziyyətini təyin edin.

16. Üçbucağın tərəflərinin orta nöqtələri məlum olduqda, onun təpələrini tapın: $F(3;-2)$, $Q(1;6)$ və $R(-4;2)$.

17. Paraleloqramın iki qonşu $A(-4;5;-7)$ və $B(2;6)$ təpə nöqtəsi və diaqnollarının $M(3;1;5)$ kəsişmə nöqtəsi verilmişdir. Onun qalan iki təpəsinin koordinatlarını hesablayın.

18. Koordinat başlanğıcından çıxan və $A(4;3)$ nöqtəsindən keçən şüa üzərində elə B nöqtəsi tapın ki, koordinat başlanğıcından ona qədər olan məsafə 9-a bərabər olsun.

19. Polyar koordinatlarla verilmiş aşağıdakı nöqtələri qurun:

$$A\left[3; \frac{\pi}{6}\right], B\left[2; \frac{\pi}{3}\right], C\left[4; \frac{2\pi}{3}\right], D\left[3; \frac{\pi}{4}\right], E(6; \pi), \\ F\left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{3}\right], G\left[\sqrt{3}; \frac{5\pi}{6}\right], K\left[3; \frac{5\pi}{3}\right], S\left[5; \frac{7\pi}{6}\right].$$

20. Tərəfi a -ya bərabər olan düzgün altıbucaqlı verilmişdir. Onun təpələrindən birini polyus və ondan keçən tərəfi polyar ox qəbul edib, qalan təpələrinin polyar koordinatlarını tapın.

21. ABC üçbucağının təpələrinin polyar koordinatları verilmişdir: $A\left[5; \frac{\pi}{2}\right]$, $B\left[8; \frac{5\pi}{6}\right]$, $C\left[3; \frac{7\pi}{6}\right]$ verilmiş üçbucağın bərabəryanlı olduğunu isbat edin.

22. ABC üçbucağı verilmişdir. $A\left[9; \frac{\pi}{10}\right]$, $B\left[12; \frac{4\pi}{15}\right]$, $C\left[10; \frac{3\pi}{5}\right]$. Onun sahəsini hesablayın.

23. Düzbucaqlı dekart koordinatları verilmiş $A(-1;1)$, $B(0;2)$, $C(5;0)$ nöqtələrinin polyar koordinatlarını təyin edin.

24. Polyar koordinatları verilmiş $A\left[2; \frac{\pi}{3}\right]$, $B\left[\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$, $C\left[5; \frac{\pi}{2}\right]$, $D\left[3; \frac{\pi}{6}\right]$ nöqtələrinin düzbucaqlı dekart koordinatlarını tapın.

III FƏSİL

MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ DÜZ XƏTT

§ 8. Düz xəttin verilməsi üsulları və müxtəlif tənlikləri.

1. Tərif: *Düz xəttə paralel olan və ya onun üzərində yerləşən hər bir $\vec{a}$ vektoruna bu düz xəttin yönəldici vektoru deyilir.*

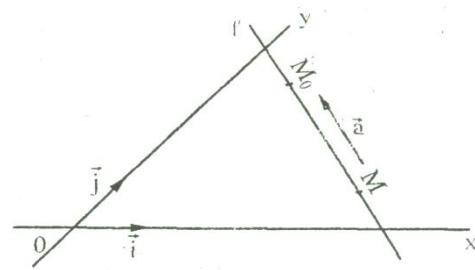
Tərifdən çıxır ki, hər bir düz xəttin sonsuz sayda yönəldici vektoru var. Məlumdur ki, düz xəttin bir nöqtəsi və yönəldici vektoru verilmişsə, bu düz xətt müstəvi üzərində birqıymətli təyin olunur. Belə ki, verilmiş nöqtədən verilmiş istiqamətə paralel yalnız bir düz xətt keçirmək olar. Eləcə də düz xəttin iki nöqtəsi həmin düz xətti tamamilə təyin edir. Belə ki, iki nöqtədən yalnız bir düz xətt keçir. Beləliklə müstəvi üzərində düz xətti aşağıdakı iki üsulla vermək olar:

a) bir nöqtəsinə və yönəldici vektoruna görə

b) iki nöqtəsinə görə.

2. Bu verilənlərə görə düz xəttin müxtəlif tənliklərini yazmaq:

Fərz edək ki, hər hansı 1 düz xətti birinci üsulla başqa sözlə, özünün ixtiyari M_0 nöqtəsi və $\vec{a}$ yönəldici



Şəkil 24.

vektoru vasitəsilə verilmişdir. Müstəvi üzərində hər hansı afın koordinat sistemi götürüb M_0 nöqtəsinin koordinatlarını (x_0, y_0) , $\vec{a}$ yönəldici vektorunun koordinatlarını isə a_1, a_2 ilə işarə edək. 1 düz xətti üzərində hər hansı cari $M(x, y)$ nöqtəsini götürək. Bildiyimiz kimi $M(x, y)$ nöqtəsi yalnız və yalnız o zaman 1 düz xətti üzərində yerləşər ki, $\vec{M_0M}$ vektoru $\vec{a}$ vektoru ilə kollinear olsun (şəkil 24). Başqa sözlə

$$M \in 1 \Leftrightarrow \vec{M_0M} = t \vec{a} \quad (1)$$

Bunu koordinatlarla yazsaq

$$\begin{cases} x - x_0 = ta_1 \\ y - y_0 = ta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases} \quad (2)$$

alırıq.

Bu tənliyə düz xəttin **parametrik tənliyi** deyilir. Burada t parametrinin hər bir qiymətinə düz xətt üzərində bir nöqtə və düz xətt üzərindəki hər bir nöqtəyə bir parametr uyğun gələcəkdir. Burada a_1 və a_2 düz xəttin yönəldici vektorunun koordinatlarıdır. $a_1 a_2 \neq 0$ olduqda (2) tənliyini belə yazmaq olar:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad (3)$$

(3) tənliyinə düz xəttin **kanonik tənliyi** deyilir. Buradan

$$a_2(x - x_0) = a_1(y - y_0) \quad (4)$$

və ya

$$\left| \begin{matrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{matrix} \right| = 0 \quad (4)$$

3. İndi fərz edək ki, düz xətt özünün iki nöqtəsi vasitəsilə verilmişdir:

$$M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2).$$

$$\vec{M_1M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

vektoruna düz xəttin yönəldici vektoru kimi baxsaq, onda (3) tənliyindən aşağıdakı tənliyi alırıq:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (5)$$

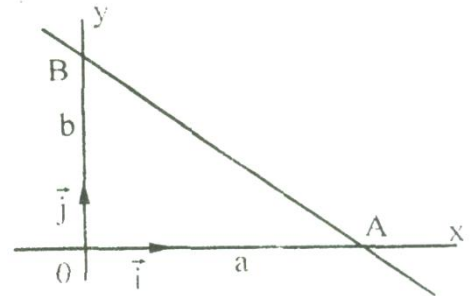
(5) tənliyinə **iki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyi** deyilir.

4. Düz xəttin parçalarla tənliyi.

Fərz edək ki, koordinat oxlarına paralel olmayan düz xətt bu oxları uyğun olaraq $A(a, 0)$, $B(0, b)$ nöqtələrində kəsir (şəkil 25). Bu nöqtələrdən keçən düz xəttin tənliyini yazaq:

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \Rightarrow -\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Şəkil 25.

alınmış bu tənlik düz xəttin parçalarla tənliyi adlanır. buradakı a və b düzbucaqlı dekart koordinat sistemində həndəsi məna kəsb edir. Başqa sözlə, bu ədədlər verilmiş düz xəttin uyğun olaraq koordinat oxlarından ayırdığı parçanın uzunluqlarıdır.

5. Düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi.

Düz xəttin yönəldici vektorunun ikinci koordinatının birinci koordinatına olan nisbətində bu düz xəttin **bucaq əmsalı** deyilir və k ilə işarə olunur. $k = \frac{a_2}{a_1}$ olar.

Bu ifadəni (4)-də nəzərə alsaq:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (6)$$

tənliyini alırıq.

Bu tənliyə düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi deyilir. (7) tənliyini aşağıdakı kimi də yazmaq olar:

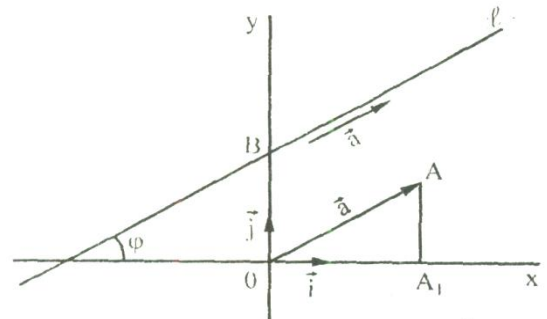
$$y = kx + b \quad (7)$$

burada $b = y_0 - kx_0$.

(7) tənliyindəki k və b ədədləri düzbucaqlı dekart koordinat sistemində həndəsi məna kəsb edir. Belə ki, düz xəttin yönəldici vektorunu koordinat başlanğıcına köçürsək, vektorun absis oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaq bu düz xəttin həmin oxla əmələ gətirdiyi φ bucağına bərabər olacaqdır (şəkil 26). Onda

OAA_1 düzbucaqlı üçbucağından

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_2}{a_1} = k.$$



Şəkil 26.

Bu düz xəttin ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapaq. Bunun üçün onların tənliklərini birlikdə həll etmək lazımdır:

$$\begin{cases} y = kx + b \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0; b)$$

Bu isə o deməkdir ki, düz xəttin (oy) oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin ordinatı

$$OB=b.$$

Beləliklə, biz göstərdik ki, (7) tənliyindəki k düz xəttin düzbucaqlı dekart koordinat sisteminin absis oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensi, b isə bu düz xəttin ordinat oxundan ayırdığı parçanın uzunluğudur.

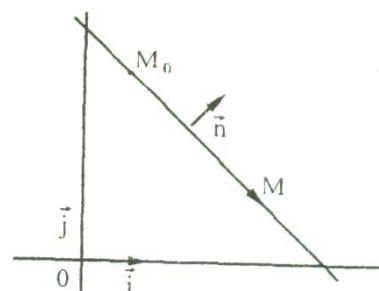
6. Bir nöqtəsinə və normal vektoruna görə düz xəttin tənliyi.

Düz xəttin yönəldici vektoruna perpendikulyar olan istənilən vektora **düz xəttin normal vektoru** deyilir və $\vec{n}$ ilə işarə olunur.

Bir nöqtəsinə və normal vektoruna görə düz xəttin tənliyini yazaq.

Fərz edək ki, bizə hər hansı l düz xətti, bu düz xətt üzərində bir M_0 nöqtəsi və $\vec{n}$ normal vektoru verilmişdir. Müstəvi üzərində hər hansı $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemi götürüb, M_0 nöqtəsinin koordinatlarını (x_0, y_0) , $\vec{n}$ normal vektorunun koordinatlarını isə α, β ilə işarə edək (şəkil 27).

Məlumdur ki, düz xəttin M cari nöqtəsi yalnız və yalnız o zaman l düz xətti üzərində yerləşər ki, $\vec{M_0M} \perp \vec{n}$ və yaxud $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ şərtini ödəsin. Buradan



Şəkil 27.

$$(x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta = 0 \quad (8)$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, koordinatları (8) tənliyini ödəyən hər bir nöqtə l düz xətti üzərində yerləşir. Bu isə o deməkdir ki, (8) l düz xəttinin tənliyidir. Bu tənliyə düz xəttin **bir nöqtəsinə və normal vektoruna görə tənliyi** deyilir. Bir daha qeyd edək ki, (8) tənliyi düzbucaqlı dekart koordinat sistemində nəzərə alınır.

§ 9. Düz xəttin ümumi tənliyi və onun araşdırılması.

Düz xəttin müxtəlif tənliklərini yazarkən gördük ki, bu tənliklərin hər biri ümumi dekart koordinat sistemində x, y dəyişənlərinə nəzərə alınaraq birdərəcəlidir. Belə bir sual meydana çıxır:

Hər hansı afın koordinat sistemində nəzərə alınaraq x, y dəyişənlərinə görə birdərəcəli olan tənlik düz xəttin tənliyidir?

Göstərək ki, A, B əmsallarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olduqda

$$Ax + By + C = 0 \quad (9)$$

tənliyi $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçib, $\vec{a} = \{B, -A\}$ yönəldici vektoruna malik olan düz xəttin tənliyidir. Burada $M_0(x_0, y_0)$ (9) tənliyi ilə təyin olunan həndəsi fiqur üzərində yerləşən ixtiyari nöqtədir. M_0 nöqtəsi bu həndəsi fiqur üzərində yerləşdiyindən onun koordinatları (9) tənliyini ödəməlidir:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

(9) tənliyindən bu tənliyi tərəf-tərəfə çıxsaq

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

münasibətini alırıq. Buradan

$$\left| \begin{array}{c} x - x_0 \\ -BA \end{array} \right| = 0$$

və ya

$$A(x - x_0) = -B(y - y_0)$$

$$\frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A}.$$

Bu tənliyi (3) və ya (4) tənlikləri ilə müqayisə etsək görürük ki, (9) tənliyi $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçib, $\vec{A}, \vec{B}$ yönəldici vektoruna malik düz xəttin tənliyidir. Bu tənliyə **düz xəttin ümumi tənliyi** deyilir.

İndi düz xəttin ümumi tənliyini araşdıraraq. Başqa sözlə bu tənlikdəki əmsallardan birinin və ya ikisinin sıfıra bərabər olan hallarında düz xəttin koordinat sisteminə nəzərən necə yerləşdiyini öyrənək.

1. Fərz edək ki, düz xətt koordinat başlanğıcından keçir. Onda koordinat başlanğıcının koordinatları (9) tənliyini ödəməlidir, başqa sözlə:

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

İndi fərz edək ki, (9) tənliyində $C=0$. Bu zaman (9) tənliyi

$$Ax + By = 0$$

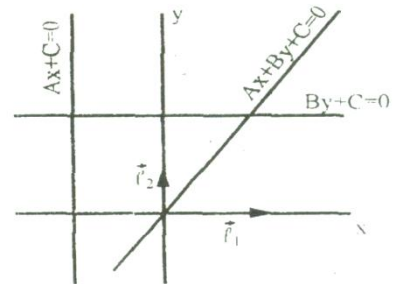
şəklinə düşəcəkdir. Koordinat başlanğıcının koordinatları bu tənliyi ödədiyindən, düz xətt koordinat başlanğıcından keçir. Beləliklə, biz göstərdik ki, (9) tənliyində $C=0$ yalnız və yalnız o zaman olar ki, düz xətt koordinat başlanğıcından keçsin (şəkil 28).

2. Fərz edək ki, (7) tənliyində $A=0, B=0, C=0$. Onda tənliyimiz $By+C=0$ şəklində olacaq. Onda bu düz xəttin yönəldici vektoru $\vec{a} = \vec{A}; 0$ olur. Bu vektor $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektoruna kollinear olduğundan ($\vec{a} = -B\vec{e}_1$), onda bu düz xətt (OX) oxuna paraleldir. Başqa sözlə $l \parallel (OX)$. Əksinə əgər l düz xətti (OX) oxuna paraleldirsə, onda

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -B; A \end{pmatrix} \parallel \vec{e}_1 \Rightarrow \left| \frac{-BA}{10} \right| = 0 \cdot A = 0$$

Beləliklə, göstərdik ki, (9) tənliyində A yalnız və yalnız o zaman sıfıra bərabər olar ki, $l \parallel (OX)$ olsun. Tamamilə analoji qayda ilə isbat olunur ki, düz xəttin ümumi tənliyində $B=0$ yalnız və yalnız o zaman olar ki, $l \parallel (OY)$ olsun. Bu halda düz xəttin tənliyi $Ax + C = 0$ şəklində olacaqdır (şəkil 28).

3. Fərz edək ki, (9) tənliyində $A=0, C=0, B \neq 0$. Bu halda tənliyimiz $By=0$ və ya $y=0$ şəklində olacaq. Burada $C=0$ olduğundan bu düz xətt koordinat başlanğıcından keçir. $A=0$ olduğundan isə (OX) oxuna paraleldir. Başqa sözlə, bu tənlik (OX) oxunu təyin edir. Analoji qayda ilə göstərmək olar ki, $x=0$ isə (OY) oxunun tənliyidir.



Şəkil 28.

Düz xəttin ümumi tənliyi ilə əlaqədar daha bir faktı qeyd edək.

Düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə $Ax + By + C = 0$ ümumi tənliyinə malik düz xəttin $\vec{n}$ normal vektoru $\vec{A}, \vec{B}$ koordinatlarına malikdir. Bunu göstərmək üçün $\vec{n}$ vektorunun düz xəttin $\vec{a} = \vec{A}; \vec{B}$ yönəldici vektoruna perpendikulyar olduğunu göstərmək kifayətdir. Doğrudan da

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = A \cdot (-B) + B \cdot A = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{a}.$$

Bu isə $\vec{n}$ vektorunun normal vektor olması deməkdir.

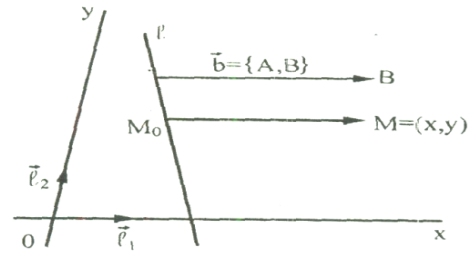
§ 10. $\delta(x, y) = Ax + By + C$ ifadəsinin həndəsi mənası

Fərz edək ki, $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ afin koordinat sisteminə nəzərən $Ax + By + C = 0$ tənliyinə malik l düz xətti verilmişdir. $\vec{b} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ vektoru götürüb, onun

başlanğıcını l düz xətti üzərinə köçürək. Bu vektorun uc nöqtəsini B ilə işarə edək. İndi müstəvi üzərində hər hansı

$M(x, y)$ nöqtəsi götürüb, bu nöqtədən keçib, $\vec{b}$ vektoruna paralel olan düz xəttin l düz xətti ilə kəsişmə nöqtəsini $M_0(x_0, y_0)$ ilə işarə edək (şəkil 29).

Onda



Şəkil 29.

$$\vec{M_0M} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{M_0M} = \lambda \vec{b} \quad (1)$$

şərti ödənilməlidir.

Aşkardır ki, $\lambda > 0$ olduqda M nöqtəsi B nöqtəsi ilə l düz xəttinin təyin etdiyi eyni yarımüstəvidə, $\lambda < 0$ olduqda isə M nöqtəsi B ilə müxtəlif yarımüstəvidə yerləşəcək.

(1)tənliyini koordinatlarla yazaq:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda A \\ y = y_0 + \lambda B \end{cases} \quad (1)$$

Bunu $\delta = Ax + By + C$ ifadəsində nəzərə alsaq, aşağıdakını alarıq:

$$Ax + By + C = (Ax_0 + By_0 + C) + \lambda(A^2 + B^2)$$

M_0 nöqtəsi l düz xətti üzərində yerləşdiyindən onun koordinatları bu düz xəttin tənliyini ödəyəcəkdir. Başqa sözlə

$$Ax_0 + By_0 + C = 0$$

olur. Digər tərəfdən $A^2 + B^2 > 0$ olduğundan $Ax + By + C$ ifadəsinin işarəsi yalnız λ -nın işarəsindən asılı olacaqdır. Başqa sözlə əgər $\lambda > 0$ olarsa, $Ax + By + C = 0$ olacaqdır. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi $\lambda > 0$ o zaman olar ki, müstəvinin M cari nöqtəsi B nöqtəsi ilə eyni yarımüstəvidə yerləşsin. Beləliklə, göstərdik ki,

$$Ax + By + C > 0$$

bərabərsizliyi l düz xəttinin təyin etdiyi B nöqtəsi yerləşən açıq yarımüstəvini təyin edən şərtidir. Onda

$$Ax + By + C < 0$$

bərabərsizliyi digər yarımüstəvini təyin edən şərt olacaqdır.

§ 11. İki düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti.

Fərz edək ki, $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ afin koordinat sisteminə nəzərən aşağıdakı tənliklərə malik l_1 və l_2 düz xətləri verilmişdir.

$$\begin{aligned} l_1 : A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Bu düz xətlərin yönəldici vektorlarının koordinatları uyğun olaraq $\vec{a} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$ olacaqdır.

Məlumdur ki, müstəvi üzərində iki düz xətt ya üst-üstə düşür, ya paraleldir, ya da kəşir.

1. Fərz edək ki, düz xətlər üst-üstə düşür. Onda bu düz xətlərin tənlikləri eynigüclü olmalıdır. Belə ki, bunlar eyni həndəsi fiquru təyin edir. Bu tənliklərin eynigüclü olmasından

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (1)$$

Əgər (1) şərti ödənilirsə, onda $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$ olacaqdır. Bunları l_2 düz xəttinin tənliyində nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned} \lambda A_1 x + \lambda B_1 y + \lambda C_1 &= 0 \quad \text{və ya} \\ \lambda(A_1 x + B_1 y + C_1) &= 0 \Rightarrow A_1 x + B_1 y + C_1 = 0. \end{aligned}$$

Bu isə o deməkdir ki, l_1 və l_2 düz xətlərinin tənlikləri eynidir. Yəni bu düz xətlər üst-üstə düşür.

(1) tənliyinə iki düz xəttin üst-üstə düşmə şərti deyilir.

2. Fərz edək ki, düz xətlər paraleldir. Onda onların $\vec{a} = \begin{pmatrix} -B_1; A_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -B_2; A_2 \end{pmatrix}$ yönəldici vektorları kollinear olmalıdır. Başqa sözlə

$$\frac{-B_1}{-B_2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Burada $\frac{C_1}{C_2}$ bu nisbətlərə bərabər ola bilməz. Əks halda birinci şərtə görə düz xətlər üst-üstə düşərdi.

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \quad (2)$$

Deməli, (2) şərti ödənildikdə l_1 və l_2 düz xətləri paralel olacaqdır.

Aşkardır ki, (2) şərti ödənildikdə

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda A_2 \\ B_1 &= \lambda B_2 \end{aligned}$$

olar. Bu isə l_1 və l_2 düz xətlərinin yönəldici vektorlarının kollinearlığı deməkdir. Beləliklə, göstərdik ki, (2) **düz xətlərin paralellik şərtidir**.

3. Düz xətlər yalnız və yalnız o zaman kəsişər ki, onların $\vec{a} = \begin{pmatrix} -B_1; A_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -B_2; A_2 \end{pmatrix}$ yönəldici vektorları kollinear olmasın. Başqa sözlə

$$\vec{a} \neq \lambda \vec{b} \quad \text{və ya} \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad (3)$$

Deməli (3) şərti düz xətlərin **kəsişmə şərti** olacaqdır.

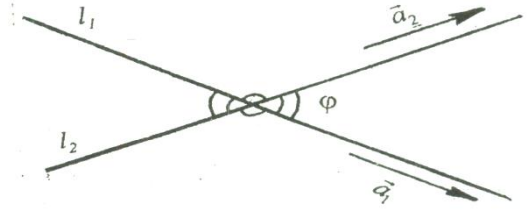
§ 12. İki düz xətt arasında qalan bucağın hesablanması.

Fərz edək ki, düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən aşağıdakı l_1 və l_2 düz xətləri özlərinin ümumi tənlikləri ilə verilmişdir:

$$\begin{aligned} l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0 \\ l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Məlumdur ki, bu düz xətlər paralel olduqda onlar arasındakı bucaq ya sıfır, ya da 180° , perpendikulyar olduqda isə onlar arasındakı bucaq ya 90° , ya da 270° dərəcə olacaqdır.

Fərz edək ki, l_1 və l_2 düz xətləri yuxarıda qeyd olunanlardan fərqli bucaq altında kəsişir. Bu zaman dörd dənə bucaq əmələ gəlir ki, bunlar da cüt-cüt bərabərdir. Bucaqlardan biri məlum olduqda yerdə qalan bucaqlar asanlıqla tapılır. Aşkardır ki, bu bucaqlardan biri düz xətlərin yönəldici vektorları arasında qalan bucağa bərabərdir. Həmin bucağı φ ilə işarə edək (şəkil 30). Verilmiş düz xətlərin yönəldici



Şəkil 30.

vektorları uyğun olaraq $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ A_2 \end{bmatrix}$ olduğundan, bildiyimiz kimi

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (1)$$

$$\sin \varphi = \frac{\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix}}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (2)$$

bunları tərəf-tərəfə bölsək,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \quad (3)$$

olar.

Əgər düz xətt özünün $y_1 = k_1 x + b_1$, $y_2 = k_2 x + b_2$ bucaq əmsali tənliyi ilə verilsə, onların yönəldici vektorları uyğun olaraq $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ k_1 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ olacaqdır. Bunları (3) düsturunda yerinə yazsaq

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad (4)$$

olar.

Aşkardır ki, bu düz xətlər yalnız və yalnız o zaman paralel olar ki, $\operatorname{tg} \varphi = 0$ olsun. Bu isə o zaman mümkündür ki,

$$k_2 - k_1 = 0 \text{ və ya } k_2 = k_1$$

olsun. Bu, **düz xətlərin paralellik şərti** adlanır.

Bu düz xətlər o zaman bir-birinə perpendikulyar olar ki, (4) ifadəsinin məxrəci sıfıra bərabər olsun. Başqa sözlə

$$1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

Bu isə **düz xətlərin perpendikulyarlıq şərti** adlanır.

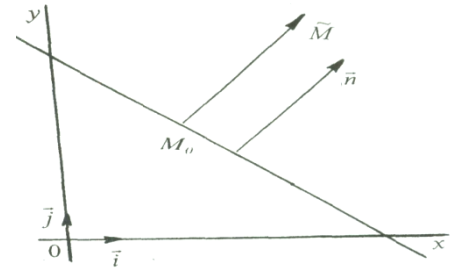
§ 13. Nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə.

Nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə dedikdə nöqtədən düz xəttə endirilmiş perpendikulyardan bu düz xəttin ayırdığı parçanın uzunluğu başa düşülür.

Fərz edək ki, bizə hər hansı $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən

$Ax + By + C = 0$ ümumi tənliyinə malik l düz xətti verilmişdir. Müstəvi üzərində hər hansı

$\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ nöqtəsi götürüb (nöqtənin düz xətt üzərində olması istisna olunmur), bu nöqtədən düz xəttə endirilmiş perpendikulyarın oturacağını $M_0(x_0, y_0)$ -la işarə edək. Onda alınan $\vec{M_0M}$ vektoru müstəvinin $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ normal vektoru ilə kollinear olacaqdır. Buradan



Şəkil 31

$$\vec{M_0M} // \vec{n} \Rightarrow \vec{M_0M} \cdot \vec{n} = |\vec{M_0M}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\angle(\vec{n}, \vec{M_0M}))$$

$$|\vec{M_0M}| = \frac{|\vec{M_0M} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \cdot (\pm 1)$$

Lakin $|\vec{M_0M}| = \rho(\tilde{M}, l)$ nöqtəsindən l düz xəttinə qədər məsafə olduğundan

$$\rho(\tilde{M}, l) = |\vec{M_0M}| = \frac{|\vec{M_0M} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(\tilde{x} - x_0)A + (\tilde{y} - y_0)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{y} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Burada $M_0 \in l$ olduğundan $Ax_0 + By_0 + C = 0$ olması nəzərə alınmışdır.

Beləliklə, $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ nöqtəsindən $Ax + By + C = 0$ düz xəttinə qədər olan məsafə düsturu

$$\rho(\tilde{M}, l) = \frac{|A\tilde{x} + B\tilde{y} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1)$$

şəklində olacaqdır.

Düz xəttin tənliyi bucaq əmsalına görə verildikdə $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ nöqtəsindən $y = kx + b$ düz xəttinə qədər olan məsafə

$$\rho(\tilde{M}, l) = \frac{|k\tilde{x} - \tilde{y} + b|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|k\tilde{x} - \tilde{y} + b|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

düsturu ilə hesablanacaqdır.

§ 14. Düz xətlərə aid əsas məsələlər.

1. Verilmiş iki düz xəttin kəsişmə nöqtəsinin tapılması.

Həlli: Fərz edək ki, verilmiş l_1 və l_2 düz xətləri hər hansı afin koordinat sisteminə nəzərən $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tənliklərinə malikdir. Onda onların $M_0(x_0, y_0)$ kəsişmə nöqtəsi aşağıdakı tənliklər sisteminin həllindən ibarətdir.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Bu sistemin həlli üsulu oxucuya məlumdur. Biz Kramer üsulundan istifadə edək.

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 B_1 \\ C_2 B_2 \\ A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \\ A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

Məsələ: $3x - y - 5 = 0$, $x + 2y + 3 = 0$ tənliklərinə malik düz xətlərin kəsişmə nöqtəsini tapın:

Həlli:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 5-1 \\ -32 \\ 3-1 \\ 12 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-10+(-3)}{6-(-1)} = 1$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 35 \\ 1-3 \\ 3-1 \\ 12 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-9-5}{6-(-1)} = -2 \quad M_0(1;-2)$$

2.verilmiş nöqtədən keçib, verilmiş düz xəttə paralel olan düz xəttin tənliyinin yazılması.

I üsul. Bu məsələni həll etmək üçün verilmiş düz xəttin bucaq əmsalını tapıb, verilmiş nöqtədən keçib həmin bucaq əmsalına malik düz xəttin tənliyini yazmaq lazımdır. Belə ki, paralel düz xətlərin bucaq əmsalları bir-birinə bərabərdir.

İndi fərz edək ki, verilmiş nöqtə (x_0, y_0) koordinatlarına, verilmiş düz xətt isə $y = kx + b$ bucaq əmsallı tənliyə malikdir. Onda axtarılan düz xəttin tənliyi

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

olacaqdır.

II üsul. Paralel düz xətlərin tənlikləri bir-birilə yalnız sərbəst hədləri ilə fərqlənir. Başqa sözlə. $Ax + By + C = 0$ tənliyinə malik düz xəttə paralel olan hər bir düz xəttin tənliyi

$$Ax + By + C_1 = 0 \quad (1)$$

şəklində olur. Bu düz xətt verilmiş $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçdiyindən onun koordinatları bu tənliyi ödəməlidir:

$$Ax_0 + by_0 + C_1 = 0$$

Burada $C_1 = -(Ax_0 + By_0)$ tapıb, (1) tənliyində yerinə yazmaq lazımdır. Bu üsulla bir məsələ həll edək.

Məsələ: $M_0(2;-1)$ nöqtəsindən keçib, $3x - y + 2 = 0$ düz xəttinə paralel olan düz xəttin tənliyini yazın:

Həlli:

Axtarılan düz xətt verilmiş düz xəttə paralel olduğundan, onun tənliyi

$$3x - y + C_1 = 0 \quad (2)$$

şəklində olacaqdır. Bu düz xətt $M_0(2;-1)$ nöqtəsindən keçdiyindən, onun koordinatları (2) tənliyini ödəməlidir.

$$3 - 2 - (-1) + C_1 = 0$$

$$C_1 = -7$$

Bunu (2) tənliyində yerinə yazsaq,

$$3x - y - 7 = 0 \quad \text{olar.}$$

Beləliklə, axtarılan düz xəttin tənliyi elə bu tənlikdir.

3.Verilmiş nöqtədən keçib, verilmiş düz xəttə perpendikulyar olan düz xəttin tənliyinin yazılması.

Burada axtarılan düz xəttin bucaq əmsalını perpendikulyarlıq şərtindən tapıb, ikinci məsələdə olduğu kimi düz xəttin bucaq əmsallı tənliyində yerinə yazmaq lazımdır.

Məsələ: $M_0(2, -1)$ nöqtəsindən keçib, $3x - y + 5 = 0$ düz xəttinə perpendikulyar olan düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli: Bunun üçün verilmiş düz xəttin bucaq əmsalını tapaq.

$$y = 3x + 5 \Rightarrow k_1 = 3$$

düz xəttin perpendikulyarlıq şərtindən $k_2 = -\frac{1}{3}$.

İndi bir nöqtəsinə və bucaq əmsalına görə düz xəttin tənliyini yazmaq olar:

$$y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$$x + 3y + 1 = 0$$

4. Verilmiş nöqtədən keçib, (OX) oxunun müsbət istiqaməti ilə φ bucağı əmələ gətirən düz xəttin tənliyini yazılması.

Bu məsələni də düz xəttin bucaq əmsallı tənliyinin yazılmasına gətiririk. Belə ki, düz xəttin bucaq əmsalının həndəsi mənası düz xəttin (OX) oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensinə bərabərdir. Başqa sözlə $k = \operatorname{tg} \varphi$. Yenə də düz xəttin bucaq əmsallı tənliyindən istifadə edib, axtarılan tənliyi yazmaq olar:

$$y - y_0 = \operatorname{tg} \varphi (x - x_0)$$

Məsələ: Düzbucaqlı dekart koordinat sistemində $M_0(1, 2)$ nöqtəsindən keçib, (OX) oxunun müsbət istiqaməti ilə 60° -lik bucaq əmələ gətirən düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli: Verilir: $M_0(1, 2)$ $\varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$

Verilənlərdən istifadə edib, axtarılan tənliyi yazmaq olar:

$$y - 2 = \sqrt{3}(x - 1)$$

$$\sqrt{3}x - y + 2 - \sqrt{3} = 0$$

Beləliklə, axtarılan tənlik $y = \sqrt{3}x + 2 - \sqrt{3}$ və ya $\sqrt{3}x - y + 2 - \sqrt{3} = 0$ olacaqdır.

Düz xətlər nəzəriyyəsinin müxtəlif bölmələrinə aid məsələlər həll edək.

Məsələ 1. $M_0(2, 3)$ nöqtəsindən keçən və yönəldicisi $\vec{p}(-3; 2)$ vektoru olan düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli: Verilmiş nöqtədən keçən və yönəldici vektoru məlum olan düz xətt tənliyinə, yəni düz xəttin parametrik tənliklərinə əsasən

$$x = 2 - 3t \text{ və } y = 3 + 2t$$

oldğunu yaza bilərik. Bu da axtarılan düz xəttin tənlikləridir.

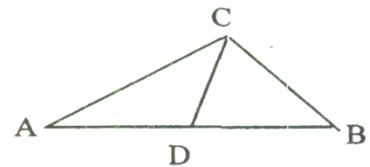
Məsələ 2. Üçbucağın təpələri verilmişdir: $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, -4)$. C təpəsindən keçən medianın tənliyini yazın.

Həlli: C təpəsindən keçən median AB tərəfinin D orta nöqtəsindən keçdiyi üçün $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ düsturlarına

əsasən D nöqtəsinin koordinatlarını tapaq: $x = \frac{4 + (-4)}{2} = 0$,

$y = \frac{6 + 0}{2} = 3$. Deməli D nöqtəsinin koordinatları $D(0, 3)$ olar. İndi iki nöqtədən keçən düz xəttin

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ tənliyindən istifadə edəcək, CD medianının tənliyini yazaq.

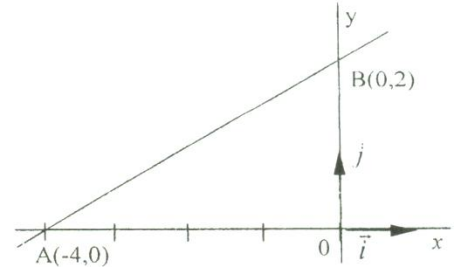


$$\frac{x+1}{0+1} = \frac{y+4}{3+4} \Rightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{7} \Rightarrow 7x+7 = y+4 \Rightarrow 7x-y+3=0.$$

Məsələ 3. $y = 3x + 2$ tənliyi ilə təyin olan düz xətti qurun.

Həlli: Düz xətti qurmaq üçün onun iki nöqtəsini tapmaq lazımdır. Qurulması tələb edilən düz xəttin ordinat oxu ilə $B(0,2)$ kəsişmə

nöqtəsi məlumdur: ona görə onun daha bir nöqtəsini tapaq. Bunun üçün onun absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsini təyin edək. absis oxu üzərində yerləşən bütün nöqtələrin ordinatı sıfıra bərabər olduğundan axtarılan nöqtənin ordinatı sıfır olar. Bunu tənlikdə nəzərə alsaq, $x + 4 = 0$ alırıq. Buradan da tapılır ki, $x = -4$. Deməli, $A(-4,0)$, A və B nöqtələrindən keçən düz xətt axtarılan düz xətt olacaqdır (şəkilə bax).



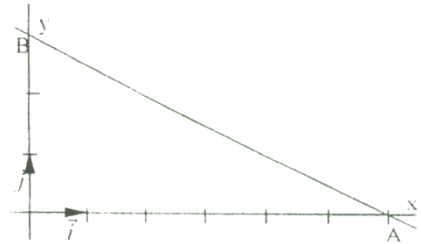
Məsələ 4. Düzbucaqlı koordinat sistemində, koordinat oxları və $x + 2y - 6 = 0$ düz xətti arasında qalan üçbucağın sahəsini hesablayın.

Həlli: Düz xəttin $x + 2y - 6 = 0$ tənliyini

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$$

şəklinə parçalarla gətirdikdə alınır ki, sahəsini axtardığımız AOB üçbucağının katetlərindən biri $OA=6$, o biri isə $OB=3$.

Buradan da $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$.



Məsələ 5. $x + 2y - 1 + \lambda(x - y - 2) = 0$ tənliyi ilə təyin olunan düz xətlər dəstəsinə daxil olub və $M(2,1)$ nöqtəsindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli: Axtarılan düz xətt M nöqtəsindən keçdiyinə görə onun koordinatları verilmiş tənliyi ödəməlidir:

$$(2 + 2 - 1) + \lambda(2 - 1 - 2) = 0 \Rightarrow 3 = \lambda$$

λ -nın bu qiymətini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq, axtarılan düz xəttin tənliyini alırıq:

$$x + 2y - 1 + 3(x - y - 2) = 0 \Rightarrow x + 3x + 2y - 3y - 1 - 6 = 0 \Rightarrow 4x - y - 7 = 0.$$

Məsələ 6. $\frac{\sqrt{3}}{2}x - 3y + \sqrt{3} = 0$ və $x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0$ tənlikləri ilə təyin olan düz xətlər verilmişdir. Onların qarşılıqlı vəziyyətlərini təyin edin.

Həlli: Hər iki tənliyə daxil olan x , y dəyişənlərinin əmsallarından düzəldilmiş determinanı yoxlayaq:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -3 \\ 1 & -2\sqrt{3} \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$$

$\Delta = 0$ olduğundan verilmiş düz xətlər kəsişmirlər. İndi $\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_1C_1 \\ B_2C_2 \end{vmatrix}$ və $\Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1A_1 \\ C_2A_2 \end{vmatrix}$

determinantlarını yoxlayaq: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3}2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 21 \end{vmatrix} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$

Deməli, düz xətlər üst-üstə düşür.

Məsələ 7. $y - 3 = 0$, $x - y + 5 = 0$, $2y - 5 = 0$ tənlikləri ilə verilmiş üç düz xəttin qarşılıqlı vəziyyətlərini təyin edin.

Həlli: Yuxarıda qeyd etdik ki,

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \\ A_3 B_3 C_3 \end{vmatrix} = 0$$

olduqda verilmiş tənliklər ilə təyin olunan düz xətlər bir nöqtədən keçir. Əvvəlcə bu şərti yoxlayaq:

$$\begin{vmatrix} 01-3 \\ 1-15 \\ 02-5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1-3 \\ 2-5 \end{vmatrix} = -(-5+6) = -1 \neq 0.$$

Deməli, verilmiş düz xətlər bir nöqtədən keçmirlər. İndi verilmiş düz xətlərin cüt-cüt qarşılıqlı vəziyyətlərini təyin edək.

$$y-3=0$$

$$x-y+5=0 \quad \begin{vmatrix} 01 \\ 1-1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ deməli birinci iki düz xətt kəsişir,}$$

$$y-3=0$$

$$2y-5=0 \quad \begin{vmatrix} 01 \\ 02 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1-3 \\ 2-5 \end{vmatrix} = -5+6=1 \neq 0$$

birinci və üçüncü düz xətlər paraleldir.

$$x-y+5=0$$

$$2y-5=0 \quad \begin{vmatrix} 1-1 \\ 02 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Buradan alınır ki, birinci və üçüncü düz xətlər paraleldirlər, ikinci düz xətt isə onların hər ikisini kəşir.

Məsələ 8. Düzbucaqlı dekart koordinat sistemində $\sqrt{3}x-3y-6=0$ və $\sqrt{3}x-y+5=0$ tənlikləri ilə verilmiş düz xətlər arasındakı bucağı təyin edin.

Həlli:

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

düsturundan istifadə edərək verilmiş düz xətlər arasındakı bucağı təyin edək:

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + (-3)(-1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{3+3}{\sqrt{3+9} \cdot \sqrt{3+1}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Deməli $\varphi = 30^\circ$.

Məsələ 9. Düzbucaqlı dekart koordinat sistemində üçbucağın təpələri verilmişdir: $A\left[-\frac{1}{7}, -\frac{3}{28}\right]$

, $B(4,3)$, $C(2;-1)$. Üçbucağın C təpəsindən çəkilmiş hündürlüyünün uzunluğunu hesablayın.

Həlli: Əvvəlcə üçbucağın AB tərəfinin tənliyini yazaq:

$$\frac{x+\frac{1}{7}}{4+\frac{1}{7}} = \frac{y+\frac{3}{28}}{3+\frac{3}{28}} \Rightarrow \frac{x+\frac{1}{7}}{\frac{28+1}{7}} = \frac{y+\frac{3}{28}}{\frac{84+3}{28}} \Rightarrow \frac{7x+1}{28+1} = \frac{28y+3}{84+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7x+1}{29} = \frac{28y+3}{87} \Rightarrow 87(7x+1) = 29(28y+3) \Rightarrow 3(7x+1) = 28y+3 \Rightarrow 21x-28y=0 \Rightarrow 3x-4y=0$$

İndi C nöqtəsindən $3x-4y=0$ tənliyi ilə təyin olunan (AB) tərəfinə qədər olan məsafəni hesablayaq:

$$\rho(C, AB) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Beləliklə, $h_c = 2$.

ÇALIŞMALAR.

1. Verilmiş nöqtədən keçən və verilmiş vektora paralel olan düz xəttin tənliyini yazın:

a) $A_1(2, -3)$, $\vec{p}_1(1; 2)$, b) $A_2(-1, 1)$, $\vec{p}_2(2; -1)$.

v) $A_3(3, 1)$, $\vec{p}_3(1; -1)$.

2. ABC üçbucağının təpələri verilmişdir: $A(-3, 2)$, $B(3, -2)$ və $C(0, -1)$. Üçbucağın tərəflərinin tənliyini yazın.

3. $A(-1, 3)$, $B(0, 4)$ və $C(2, -2)$ üçbucağın təpələridir. A təpəsindən çəkilmiş medianın tənliyini təyin edin.

4. Təpələri $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$ və $C(-1, -4)$ nöqtələrində yerləşən üçbucağın B təpəsindən keçən tənbölənin tənliyini yazın.

5. Qonşu iki $A(1; -2)$ və $B(3; 2)$ təpəsi və diaqonallarının $M(1; 1)$ kəsişmə nöqtəsi verilmiş paraleloqramın tərəflərinin tənliyini yazın.

6. ABCD trapesiyasının təpələri verilmişdir: $A(-2; -2)$, $B(-3; 1)$, $C\left[\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right]$, $D(3; 1)$. Onun diaqonallarının və orta xəttinin tənliyini qurun.

7. $F(2; -8)$ və $Q(-1; 7)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin bucaq əmsalını və ordinat oxundan ayırdığı parçanı tapın.

8. Absis oxundan $a = 3$ vahid parça ayıran və $M(-5; 3)$ nöqtəsindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.

9. $A(2; -3)$ və $B(3; -5)$ nöqtələri verilmişdir. AB parçasının orta nöqtəsindən keçən və ona perpendikulyar olan düz xəttin tənliyini yazın.

10. Üçbucağın iki $A(-1; 5)$, $B(3; 2)$ təpəsi və onun hündürlüklərinin $H(5; -3)$ kəsişmə nöqtəsi verilmişdir. Onun hündürlüklərinin tənliyini yazın.

11. $2x + 8y - 15 = 0$ düz xəttinə nəzərən $M(2; -5)$ nöqtəsi ilə simmetrik olan nöqtənin koordinatlarını tapın.

12. $2x - y - 10 = 0$ düz xəttinin üzərində elə Q nöqtəsi tapın ki, bu nöqtədən $M(-5; 0)$ və $N(-3; 4)$ nöqtələrinə qədər məsafələrin cəmi ən kiçik olsun.

13. Üçbucağın $A(1; 2)$, $B(-1; 6)$ və $C(5; 0)$ təpələri verilmişdir. Üçbucağın daxilinə çəkilmiş AMNP rombunun tərəflərinin tənliyini yazın, belə ki, onun M təpəsi AB tərəfi, N təpəsi BC tərəfi və P təpəsi AC tərəfi üzərində yerləşir.

14. Aşağıdakı tənliklər ilə təyin olan düz xətlər cütlərinin qarşılıqlı vəziyyətlərini təyin edin:

a) $2x + 3y - 1 = 0$, $3x - y + 4 = 0$; b) $x - y + 1 = 0$, $3x - 3y - 2 = 0$;

v) $2x + 3y - 1 = 0$, $6x + 9y - 3 = 0$; q) $x - y + 3 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$.

15. Aşağıda tənlikləri ilə verilmiş düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyətini təyin edin.

$$6x - 3y + 5 = 0, \quad \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$$

16. Tənlikləri verilmiş aşağıdakı düz xətlər üçlüklərinin qarşılıqlı vəziyyətlərini təyin edin:

a) $2x - y + 5 = 0$, $x + y - 3 = 0$, $x - y = 0$;

b) $x - y + 6 = 0$, $2x + y + 5 = 0$, $3x - 2y + 17 = 0$;

v) $y + 2 = 0$, $2x - 3y + 5 = 0$, $2y + 3 = 0$;

q) $x - 2y + 6 = 0$, $x + y = 0$, $2x - y - 6 = 0$.

17. $A(3; 1)$ nöqtəsindən $2x + 3y - 1 = 0$ düz xətti ilə 45° -lik bucaq əmələ gətirən düz xətt keçirin.

18. İki $A(3;3)$ və $B(0;2)$ nöqtəsi verilmişdir. $x + y - 4 = 0$ düz xətti üzərində elə nöqtə tapın ki, həmin nöqtədən AB parçası 145° bucaq altında görünsün.

19. Bərabəryanlı üçbucağın $B(-3;-1)$ təpəsi və oturacağındakı $C(2;1)$ təpəsi və bu təpəsindəki bucağın kosinusu verilmişdir: $\cos \varphi = \frac{3}{5}$. Üçbucağın tərəflərinin tənliyini yazın.

20. Üçbucağın $C(-3;2)$ təpəsi, A və B təpəsindəki bucağın kosinusu $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos B = \frac{3}{5}$ və AB tərəfinin $2x - y - 2 = 0$ tənliyi verilmişdir. Üçbucağın tərəflərinin tənliyini yazın.

21. Üçbucağın tərəflərinin $M_1(2;3)$, $M_2(-1;2)$ və $M_3(4;5)$ orta nöqtələri verilmişdir. Onun tərəflərinin tənliyini yazın.

22. Paraleloqramın iki tərəfinin $x - 3y = 0$ və $2x + 5y + 6 = 0$ tənliyi və $C(4;-1)$ təpəsi verilmişdir. Onun qalan tərəflərinin tənliyini tapın.

23. $ABCD$ paraleloqramının AB və AD tərəflərinin $3x + 4y - 12 = 0$ və $5x - 12y - 6 = 0$ tənlikləri və BC tərəfinin $E\left[-2; \frac{13}{6}\right]$ orta nöqtəsi verilmişdir. paraleloqramın qalan tərəflərinin tənliyini tapın.

24. Üçbucağın iki $B(-6;2)$ və $C(2;-2)$ təpəsi və hündürlüklərinin $H(1;2)$ kəsişmə nöqtəsi verilmişdir. Üçbucağın üçüncü təpəsini tapın.

25. Tərəflərinin $3x - 4y - 3 = 0$, $5x + 12y + 2 = 0$ və $3x + 4y + 390 = 0$ tənlikləri verilmiş üçbucağın hündürlüklərinin tənliyini yazın.

26. $M(1;1)$ nöqtəsindən 3 vahid məsafədən keçən və $5x - 12y + 46 = 0$ düz xəttinə paralel olan düz xəttin tənliyini yazın.

27. ABC üçbucağı verilmişdir: $A(1;2)$, $B(3;7)$, $C(5;-13)$. B təpəsindən, A təpəsindən keçən mediana endirilmiş perpendikulyarın uzunluğunu hesablayın.

28. $x + 7y - 6 = 0$ və $5x - 5y + 1 = 0$ düz xətlərinin əmələ gətirdiyi bucağın tən bölənin tənliyini yazın.

29. Üçbucağın $A\left[\frac{2}{5}; \frac{2}{5}\right]$, $B(0;4)$ və $C(-3;-2)$ təpələri verilmişdir. Bu üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzini tapın.

30. $5x - y - 5 = 0$ düz xətt ilə, $3x - 2y - 6 = 0$ düz xəttinin koordinat oxları arasındakı parçalarının kəsişdiyini isbat edin.

IV FƏSİL

İKİTƏRTİBLİ XƏTLƏRİN KANONİK TƏNLİKLƏRİNƏ GÖRƏ ÖYRƏNİLMƏSİ.

Düz xətlər nəzəriyyəsini öyrənərkən göstərdik ki, **düz xətt** bir tərtibli xətdir, yəni onun tənliyi hər hansı ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən ikiməchullu birdərəcəlidir.

Analitik həndəsədə hər hansı ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən tənliyi ikidərəcəli cəbri tənlik olan ikitərtibli xətlər xüsusi yer tutur. Ümumi şəkildə ikitərtibli xəttin hər hansı afin koordinat sisteminə nəzərən tənliyi aşağıdakı kimidir:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (1)$$

Burada $a_{ij}=a_{ji}$ əmsalları istənilən həqiqi ədədlərdir. a_{11}, a_{12}, a_{22} əmsallarının üçü də birdən sıfır ola bilməz. Əks halda (1) tənliyi birdərəcəli tənlik olardı.

Bilirik ki, istənilən iki məchullu birdərəcəli tənlik müstəvi üzərində düz xəttin tənliyidir. Lakin ikidərəcəli tənlikdə məsələ başqa cürdür. Burada (1) tənliyi əmsallarından asılı olaraq müxtəlif formalı ayrılərin və hətta bir cüt düz xəttin (kəsişən və ya paralel) tənliyi ola bilər.

Biz bu ayrılərdən birinin tənliyi ilə orta məktəbdən tanışıq. Bu, bütün nöqtələri verilmiş bir nöqtədən eyni uzaqlıqda yerləşən nöqtələr çoxluğu-çevrədir. Düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən çevrənin tənliyi aşağıdakı kimidir:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \quad (2)$$

Burada (α, β) -çevrənin mərkəzinin koordinatları, r -isə radiusudur.

Əlverişli düzbucaqlı dekart koordinat sistemi seçməklə daha üç ikitərtibli ayrının sadə tənliyini çıxaraçağıq.

§ 15. Ellips, kanonik tənliyi və onun formasının təyin edilməsi.

Tərif: *Müstəvi üzərində, fokus adlanan verilmiş F_1 və F_2 nöqtələrindən məsafələri cəmi əvvəlcədən verilmiş $2a$ ədədinə bərabər olan bütün nöqtələr çoxluğuna ellips deyilir.*

F_1 və F_2 nöqtələri arasındakı məsafəni $2c$ ilə işarə edək:

$$\rho(F_1, F_2) = 2c.$$

Aşkardır ki, $2a > 2c$ olmalıdır. Əks halda müstəvi üzərində tərifə ödəyən heç bir nöqtə ola bilməz.

Elə düzbucaqlı dekart koordinat sistemi seçək ki, onun başlanğıcı $[F_1 F_2]$ parçasının orta nöqtəsində, absis oxunun müsbət istiqaməti F_2 -dən F_1 -ə doğru yönəlmiş olsun (şəkil 32). Bu cür koordinat sistemində ellipsin tənliyini çıxaraq.

Ellipsi γ_1 ilə işarə edək. $M \in \gamma_1$ olduqda $[F_1 M]$ və $[F_2 M]$ parçaları



Şəkil 32.

Mnöqtəsinin fokal radiusları adlanır. Fokal radiusların uzunluqlarını $\rho(F_1, M) = r_1$, $\rho(F_2, M) = r_2$ işarə edək. Onda, ellipsin tərəfinə görə

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (1)$$

olmalıdır.

Götürdüyümüz koordinat sistemində fokus nöqtələri $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ olacaqdır. Əgər $M \in \gamma_1$ nöqtəsinin koordinatlarını (x, y) -lə işarə etsək, onda iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ r_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \end{cases} \quad (2)$$

r_1, r_2 -nin bu ifadələrini (1)-də nəzərə alıb, r_1 -in ifadəsini sağa keçirib hər iki tərəfi kvadrata yüksəltmək aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \Rightarrow x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (*)$$

$a > c$ olduğundan

$$a^2 - c^2 > 0$$

$a^2 - c^2 = b^2$ işarə etsək və (*) ifadəsinin hər iki tərəfini $a^2 \cdot b^2 \neq 0$ bölsək aşağıdakı tənliyi alırıq:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

Biz göstərdik ki, $M \in \gamma_1$ olduqda bu nöqtənin koordinatları (3) tənliyini ödəyir. İndi də göstərək ki, (x, y) koordinatları (3) tənliyini ödəyən hər bir M nöqtəsi (1) münasibətini ödəyir, yəni γ_1 çoxluğuna daxildir.

Tutaq ki, $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsinin koordinatları (3) tənliyini ödəyir, onda:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_1^2 = b^2 \left[1 - \frac{x_1^2}{a^2} \right]$$

y_1^2 -nin bu qiymətini M_1 nöqtəsinin radius-vektorunun r_1, r_2 uzunluqlarının

$$r_1 = \rho(F_1, M_1) = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}$$

$$r_2 = \rho(F_2, M_1) = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}$$

ifadələrində nəzərə alıb, sadələşdirsək, aşağıdakıları alırıq:

$$\begin{cases} r_1 = \pm \left[a + \frac{c}{a} x_1 \right] \\ r_2 = \pm \left[a - \frac{c}{a} x_1 \right] \end{cases} \quad (4)$$

Qeyd edək ki, r_1, r_2, M_1 nöqtəsinin radius-vektorlarının uzunluqlarıdır. Ona görə də (4) ifadəsində işarəni elə götürmək lazımdır ki, ifadənin sağ tərəfi sıfırdan böyük olsun. (3) tənliyindən görünür ki,

$$M_1(x_1, y_1) \in \gamma_1 \Rightarrow |x_1| \leq a$$

və $\frac{c}{a} < 1$ olduğunu nəzərə alsaq

$$a + \frac{c}{a} x_1 > 0$$

$$a - \frac{c}{a} x_1 > 0$$

Beləliklə

$$\begin{cases} r_1 = a + \frac{c}{a} x_1 \\ r_2 = a - \frac{c}{a} x_1 \end{cases} \Rightarrow r_1 + r_2 = 2a .$$

Bununla göstərdik ki, koordinatları (3) tənliyini ödəyən hər bir nöqtə γ_1 ellipsi üzərində yerləşir.

Beləliklə, (2) tənliyinin γ_1 ellipsinin tənliyi olduğunu göstərdik. Bu tənliyə **ellipsin kanonik tənliyi** deyilir.

Kanonik tənliyi vasitəsilə ellipsin formasını təyin edək.

Ellipsin formasını təyin etmək üçün onun (2) tənliyindən alınan aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

1°.Əgər $M(x,y)$ nöqtəsinin koordinatları (2) tənliyini ödəyirsə, onda bu nöqtə ilə koordinat oxlarına və koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olan $M_1(x,-y)$, $M_2(-x,y)$ və $M_3(-x,-y)$ nöqtələrinin də koordinatları bu tənliyi ödəyir. Deməli, ellips koordinat oxlarına və koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.

2°.(2) tənliyindən görünür ki, $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Bu isə o deməkdir ki, ellips məhdud əyridir və tərəfləri $2a$, $2b$ olan düzbucaqlının daxilində yerləşir.

3°.Koordinat başlanğıcından keçən

$$\begin{cases} x = a_1 t \\ y = a_2 t \end{cases}$$

düz xətti ilə ellipsin kəsişmə nöqtələrini axtaraq. Bunun üçün düz xəttin tənliyi ilə (2) tənliyini birlikdə həll etmək lazımdır.

$$\frac{(a_1 t)^2}{a^2} + \frac{(a_2 t)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \left[\frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{b^2} \right] t^2 = 1.$$

Bu tənlikdə t^2 -nin əmsalı sıfırdan böyük olduğundan tənliyin iki həqiqi kökü vardır. Bu da onu göstərir ki, koordinat başlanğıcından keçən hər bir düz xətlə ellipsin iki kəsişmə nöqtəsi vardır. Deməli, ellips qapalı əyridir.

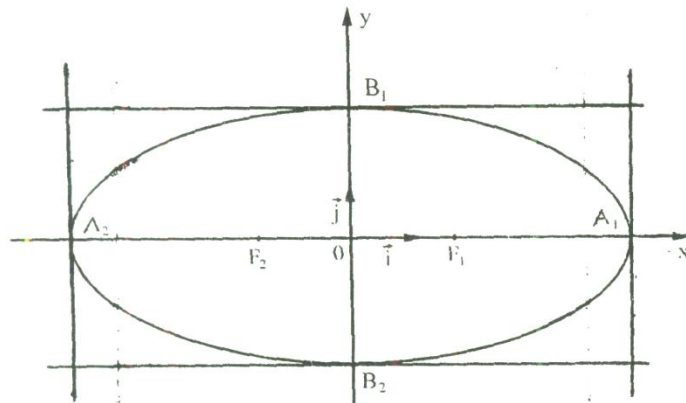
4°.Ellipsin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapsaq, görərik ki, ellips absis oxunu $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ nöqtələrində, ordinat oxunu isə $B_1(0,b)$ və $B_2(0,-b)$ nöqtələrində kəsəcəkdir. Bu nöqtələrə ellipsin təpə nöqtələri, $[F_1 F_2]$ və $[B_1 B_2]$ parçalarına isə uyğun olaraq ellipsin **böyük** və **kiçik oxları** deyilir. Fokus nöqtələri yerləşən böyük ox fokal ox adlanır. Bəzən bu parçaların $\rho(A_1, A_2) = 2a$, $\rho(B_1, B_2) = 2b$ uzunluqlarına da ellipsin böyük və kiçik oxları, a və b ədədlərinə isə uyğun olaraq yarımoxlar deyilir. Oxların kəsişmə nöqtəsinə isə ellipsin mərkəzi deyilir.

5°.Ellipsin formasını təyin etmək üçün onun I koordinat rübündə yerləşən hissəsini qurmaq kifayətdir. Qalan rüblərdə onu koordinat oxlarına və koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olmasından istifadə edib qurmaq olar. Bu rübdə ($x \geq 0, y \geq 0$) istənilən nöqtənin koordinatları

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

münasibətini ödəyir. Nöqtənin x -absisi sıfırdan a -ya qədər artdıqca y -ordinatı b -dən sıfıra qədər azalacaqdır.

Ellipsin bu xassələrini nəzərə alsaq onun formasının aşağıdakı kimi (şəkil 33) olduğunu müəyyən etmiş olarıq.



Şəkil 33.

Ellipsin eksentristeti. Ellipsin fokusları arasındakı məsafənin böyük oxunun uzunluğuna olan nisbətində onun **eksentristeti** deyilir və e ilə işarə olunur.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

$c < a$ olduğundan $0 < e < 1$.

qeyd edək ki, e ədədi ellipsin basıqlığını müəyyən edir. Daha dəqiq desək, e böyük olduqca onun forması çevrədən daha çox fərqlənir (şəkil 34).

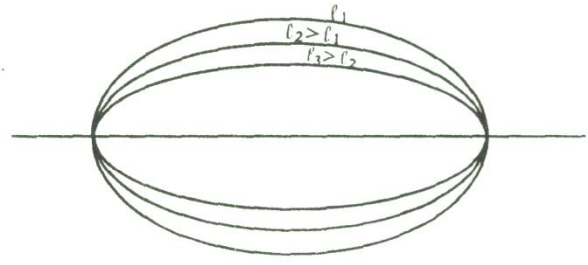
Ellipsin parametrik tənliyi.

Fərz edək ki, bizə

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kanonik tənliyinə malik γ_1 ellipsi verilmişdir. Mərkəzi bu ellipsin mərkəzində olub, radiusları uyğun olaraq b və a olan ($b < a$) konsentrik iki çevrə çəkək.

Ellipsin mərkəzindən keçən hər hansı şüanın bu çevrələrlə kəsişmə nöqtələrini uyğun olaraq P və Q , (ox) oxunun müsbət istiqamətilə əmələ gətirdiyi bucağı isə t ilə işarə edək. P nöqtəsindən (ox) oxuna, Q nöqtəsindən isə (oy) oxuna paralel düz xətlər keçirib, kəsişmə nöqtəsini $M(x,y)$ ilə işarə edək



Şəkil 34

(şəkil 35). Göstərək ki, $M \in \gamma_1$. Bunun üçün P və Q nöqtələrinin (ox) oxu üzərindəki ortoqonal proyeksiyalarını uyğun olaraq P' və Q' ilə işarə edək, onda:

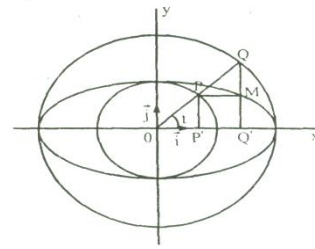
$$x = OQ = a \cos t$$

$$y = MQ = PP' = b \sin t.$$

Beləliklə,

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

(5)



Şəkil 35.

x və y -in bu qiymətlərini ellipsin (3) tənliyində yerinə yazsaq, t -nin istənilən qiymətində tənliyin ödənildiyini görürük. Deməli, $M(x,y)$ nöqtəsi γ_1 ellipsi üzərində yerləşir. Eləcə də asanlıqla göstərmək olar ki, ellips üzərində yerləşən hər bir nöqtənin koordinatları (5) tənliyini ödəyir. Bu tənliyə ellipsin parametrik tənliyi deyilir.

Qeyd edək ki, biz burada ellipsin nöqtələrinin qurulmasını da öyrəndik.

§ 16. Hiperbola, kanonik tənliyi və onun formasının təyin edilməsi

Tərif: *Müstəvi üzərində fokus adlanan verilmiş F_1 və F_2 nöqtələrindən məsafələrinin fərqi mütləq qiymətcə əvvəlcədən verilmiş $2a$ ($2a < \rho(F_1, F_2)$) ədədinə bərabər olan nöqtələr çoxluğuna hiperbola deyilir.*

Ellipsdə olduğu kimi burada da fokuslar arasındakı məsafəni $2c$, M nöqtəsinin $\overline{MF_1}$, $\overline{MF_2}$ fokal radiuslarının uzunluqlarını uyğun olaraq r_1, r_2 ilə işarə edək:

$$\rho(F_1, F_2) = 2c, \quad \rho(M, F_1) = r_1, \quad \rho(M, F_2) = r_2$$

onda $c_1 > a$ olacaqdır.

Elə $\{0, i, j\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemi götürək ki, onun başlanğıcı $\overline{F_1 F_2}$ parçasının

orta nöqtəsi olub, (ox) oxu isə F_2 -dən F_1 -ə doğru yönəlmiş olsun (şəkil 32).

Bu cür seçilmiş koordinat sistemində γ_2 hiperbolasının tənliyini çıxaraq.

Aşkardır ki, bu sistemdə fokus nöqtələri $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ koordinatlarına malik olacaqlardır.

Əgər $M \in \gamma_2$ nöqtəsinin koordinatlarını (x, y) ilə işarə etsək, onda

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{cases}$$

Hiperbolanın tərifinə görə

$$|r_1 - r_2| = 2a \quad (1)$$

və yaxud

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \end{aligned}$$

Bu tənliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldib ellipsdə olduğu kimi sadələşdirsək, aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (*)$$

$c > a$ olduğundan $c^2 - a^2 > 0$ olacaqdır.

$$c^2 - a^2 = b^2$$

işarə edib, (*) ifadəsinin bütün hədlərini $a^2 \cdot b^2 \neq 0$ ifadəsinə bölsək, aşağıdakı tənliyi alarıq:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Deməli, $M(x, y) = \gamma_2$ olduqda onun koordinatları (2) tənliyini ödəyir. İndi göstərək ki, koordinatları bu tənliyi ödəyən hər bir $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsi (1) münasibətini ödəyir. M_1 nöqtəsinin koordinatları (2) tənliyini ödədiyindən:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_1^2 = b^2 \left[-1 + \frac{x_1^2}{a^2} \right]$$

Bunu r_1 və r_2 -nin ifadəsində nəzərə alaq

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1 - c)^2 + b^2 \left[\frac{x_1^2}{a^2} - 1 \right]} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1c + c^2 + \frac{b^2}{a^2} x_1^2 - b^2} = \\ &= \sqrt{\left[1 + \frac{b^2}{a^2} \right] x_1^2 - 2x_1c + c^2 - b^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2} x_1^2 - 2x_1c + c^2 - b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x_1^2 - 2x_1c + a^2} = \\ &= \sqrt{\left[\frac{c}{a} x_1 - a \right]^2} = \pm \left[\frac{c}{a} x_1 - a \right] \\ r_2 &= \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 + 2x_1c + c^2 + b^2 \left[\frac{x_1^2}{a^2} - 1 \right]} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x_1^2 + 2x_1c + a^2} = \pm \left[\frac{c}{a} x_1 + a \right] \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\begin{cases} r_1 = \pm \left[\frac{c}{a} x_1 - a \right] \\ r_2 = \pm \left[\frac{c}{a} x_1 + a \right] \end{cases}$$

Burada işarə elə götürülməlidir ki, sağ tərəfin işarəsi sıfırdan böyük olsun. $c > a$ olduğundan $\frac{c}{a}$

>1 , (2) tənliyindən görünür ki, $\forall M_1(x_1, y_1) \in \gamma_2$ üçün $|x_1| \geq a$. Onda $\frac{c}{a}|x_1| > a$ olacaqdır. Burada

$$\begin{aligned} x_1 \geq 0 \text{ olduqda } & \begin{cases} r_1 = \frac{c}{a}x_1 - a > 0 \\ r_2 = \frac{c}{a}x_1 + a > 0 \end{cases} \quad \text{və} \\ x_1 < 0 \text{ olduqda } & \begin{cases} r_1 = -\frac{c}{a}x_1 + a > 0 \\ r_2 = -\frac{c}{a}x_1 - a > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

olacaqdır. Hər iki halda

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

münasibəti ödənilir. Deməli, koordinatları (2) tənliyini ödəyən hər bir M_1 nöqtəsi γ_2 hiperbolası üzərində yerləşir. Bu isə o deməkdir ki, (2) tənliyi hiperbolanın tənliyidir. Ona **hiperbolanın kanonik tənliyi** deyilir.

kanonik tənliyinə görə hiperbolanın formasını təyin edək.

hiperbolanın kanonik tənliyindən alınan aşağıdakı xassələri qeyd edək:

a) Ellipsdə olduğu kimi hiperbola da koordinat oxlarına və koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. Bu simmetriya oxlarından fokus nöqtələri yerləşən oxa hiperbolanın **fokal** və yaxud **həqiqi oxu**, ona perpendikulyar olan oxa hiperbolanın **ikinci** və yaxud **xəyali oxu** deyilir.

hiperbolanın simmetriya mərkəzi isə onun **mərkəzi** adlanır.

b) Hiperbolanın koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapsaq görürük ki, hiperbola (ox) oxu ilə $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$ nöqtələrində kəşir, (oy) oxu ilə heç bir nöqtədə kəşimir. Məhz buna görə də bu oxa xəyali ox deyilir. A_1, A_2 nöqtələrinə hiperbolanın **təpə nöqtələri**, a və b ədədlərinə isə hiperbolanın **yarımoxları** deyilir.

c) Hiperbolanın tənliyini y -ə görə həll etsək

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{alırıq.}$$

Bu ifadədən görünür ki, yalnız $|x| \geq a$ olduqda y həqiqi qiymətlər alır. Bu isə o deməkdir ki, hiperbolanın $x = a$ və $x = -a$ paralel xətləri arasında heç bir nöqtəsi yoxdur. Deməli, hiperbola iki hissədən ibarətdir. Bunlar hiperbolanın qolları adlanır. Bir qol $x \geq a$ yarımüstəvisi, digər qol isə $x \leq -a$ yarımüstəvisi üzərində yerləşir.

ç) $x \geq 0$, $y > 0$ üçün (2) tənliyindən aşağıdakını alırıq:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Bu münasibətdən görünür ki, x sonsuz artdıqca y -də sonsuz artır. Deməli, hiperbola qeyri-məhdud əyridir.

d) Koordinat başlanğıcından keçən

$$\begin{cases} x = a_1 t \\ y = a_2 t \end{cases}$$

düz xətti ilə hiperbolanın kəsişmə nöqtələrini axtaraq. Bunun üçün düz xəttin bu tənliyi ilə (2) tənliyini birlikdə həll edək:

$$\frac{(a_1 t)^2}{a^2} - \frac{(a_2 t)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \left[\frac{a_1^2}{a^2} - \frac{a_2^2}{b^2} \right] t^2 = 1 \quad (3)$$

(3)tənliyinin hər bir həqiqi kökünə düz xətlə hiperbolanın bir kəsişmə nöqtəsi uyğun gələcəkdir. Deməli

$$\frac{a_1^2}{a^2} - \frac{a_2^2}{b^2} > 0 \quad (4)$$

olduqda düz xətt hiperbolanı iki nöqtədə kəsəcək, $\frac{a_1^2}{a^2} - \frac{a_2^2}{b^2} \leq 0$ olduqda isə düz xətlə hiperbolanın heç bir kəsişmə nöqtəsi olmayacaqdır.

(4)şərtində $\frac{a_2}{a_1}$ kəmiyyətinin bu düz xəttin bucaq əmsalı olduğunu nəzərə alsaq, həmin düz xəttin hiperbola ilə kəsişmə şərti aşağıdakı şəkllə düşər:

$$k^2 < \frac{b^2}{a^2} \text{ və ya } k < \left| \frac{b}{a} \right|$$

Deməli, hiperbola qapalı əyri deyil və koordinat başlanğıcından keçən düz xəttin bucaq əmsalı $-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$ olduqda bu düz xətlə hiperbolanın iki ortaq nöqtəsi var.

Bu isə o deməkdir ki, hiperbolanın bütün nöqtələri

$$y = \frac{b}{a}x \text{ və } y = -\frac{b}{a}x$$

düz xətlərinin əmələ gətirdiyi elə bucaqların daxilində yerləşir ki, fokus nöqtələri həmin bucaqlarda yerləşmiş olsun. Bu düz xətlərə (2) tənliyinə malik hiperbolanın **asimptotları** deyilir.

göstərək ki, hiperbolanın asimptotları hiperbolaya sonsuz yaxınlaşır, lakin onu kəsmir. Bunun üçün $y = \frac{b}{a}x$ tənliyinə malik l_1 asimptotu üzərində $M_1(x_1, y_1)$, γ_2 hiperbolası üzərində $M_2(x_2, y_2)$ nöqtələrini götürək. Belə ki, bu nöqtələr eyni $x > 0$ absisinə və uyğun olaraq $y_1 > 0$ və $y_2 > 0$ ordinatlarına malik olsunlar (şəkil 36).

$$y_2 = \frac{b}{a}x, \quad y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Bu nöqtələrin ordinatlarının fərqi hesablayaq:

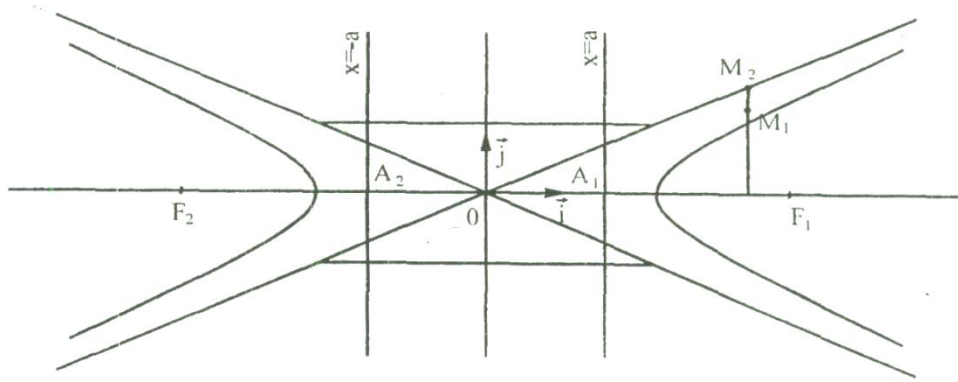
$$y_2 - y_1 = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

Bu ifadənin sol tərəfini özünün qoşmasına vuraq, $y_2 - y_1 = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$ olar. Burada

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y_2 - y_1) = 0.$$

Deməli, hiperbolanın qeyd etdiyimiz qolu üzərində yerləşən nöqtənin absisi sonsuz artdıqca bu nöqtə $y = \frac{b}{a}x$ düz xəttinə sonsuz yaxınlaşır.

Bütün bu xassələrini nəzərə alsaq hiperbolanın formasının aşağıdakı kimi olduğunu müəyyən edərik (şəkil 36).



Şəkil 36.

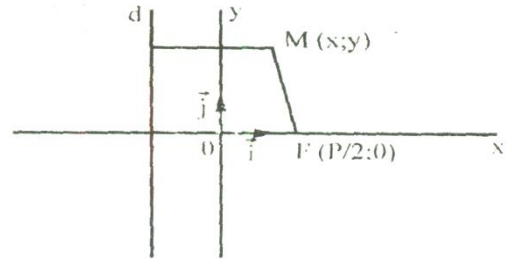
Hiperbolanın yarımoxları bir-birinə bərabər olduqda bu cür hiperbolaya **bərabəryanlı hiperbola** deyilir.

Ellipsdə olduğu kimi burada da $e = \frac{c}{a}$ ədədinə hiperbolanın **eksentristeteti** deyilir. Aşkardır ki, burada $e > 1$.

§ 17. Parabola, kanonik tənliyi və onun formasının təyin edilməsi.

Tərif: Fokus adlanan verilmiş F nöqtəsindən və direktris adlanan d düz xəttindən eyni uzaqlıqda yerləşən müstəvinin bütün nöqtələr çoxluğuna parabola deyilir.

F fokus nöqtəsindən d direktrisinə endirilmiş perpendikulyarın bu düz xətlə kəsişmə nöqtəsini D ilə işarə edək. Elə düzbucaqlı dekart koordinat sistemi seçək ki, onun başlanğıcı $[FD]$ parçasının orta nöqtəsində yerləşməklə (ox) oxu D -dən F -ə doğru yönəlmiş olsun (şəkil 37) $\rho(F, d) = p$ işarə edib, bu cür seçilmiş koordinat sistemində γ_3 parabolasının tənliyini çıxaraq.



Şəkil 37.

Aşkardır ki, bu koordinat sistemində d direktrisinin tənliyi:

$$x = -\frac{P}{2} \text{ və ya } x + \frac{P}{2} = 0$$

şəklində olacaq.

F fokus nöqtəsinin koordinatı isə $F\left[\frac{P}{2}; 0\right]$ olacaqdır.

Əgər $M(x, y) \in \gamma_3$ olarsa, onda parabolanın tərifinə görə

$$\rho(M, F) = \rho(M, d) \quad (1)$$

İki nöqtə arasındakı məsafə düsturundan

$$\rho(M, F) = \sqrt{\left[x - \frac{P}{2}\right]^2 + y^2} \text{ və } \rho(M, d) = \left|x + \frac{P}{2}\right|$$

olduğunu (1)-də nəzərə alsaq, aşağıdakı tənliyi alarıq:

$$\sqrt{\left[x - \frac{P}{2}\right]^2 + y^2} = \left|x + \frac{P}{2}\right|$$

Bu tənliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldib oxşar hədləri islah etsək:

$$y^2 = 2px \quad (2)$$

tənliyini alırıq.

Biz göstərdik ki, parabola üzərində yerləşən hər bir nöqtənin koordinatları (2) tənliyini ödəyir. İndi göstərek ki, koordinatları (2) tənliyini ödəyən istənilən $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsinin koordinatları (1) şərtini ödəyir. Tutaq ki, $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsinin koordinatları (2) tənliyini ödəyir, başqa sözlə,

$$y_1^2 = 2px_1$$

Bunu $\rho(M_1, F)$ -in ifadəsində nəzərə alaq:

$$\begin{aligned}\rho(M_1, F) &= \sqrt{\left[x_1 - \frac{P}{2}\right]^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 - px + \frac{P^2}{4} + 2px_1} = \sqrt{x_1^2 + px + \frac{P^2}{4}} = \\ &= \sqrt{\left[x_1 + \frac{P}{2}\right]^2} = \left|x_1 + \frac{P}{2}\right| = \rho(M_1, d).\end{aligned}$$

Beləliklə, göstərdik ki, M_1 nöqtəsi (1) şərtini ödəyir.

$$\rho(M_1, F) = \rho(M_1, d)$$

Bu isə o deməkdir ki, $M_1 \in \gamma_3$. Deməli (2) tənliyi parabolun tənliyidir. Bu tənliyə parabolun **kanonik tənliyi** deyilir. buradakı p ədədi parabolun **fokal parametri** adlanır.

Kanonik tənliyinə görə parabolun formasını təyin edək. Bunun üçün aşağıdakı xassələri qeyd edək:

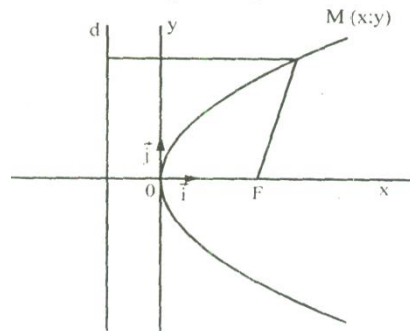
a) Əgər $M(x, y)$ nöqtəsi γ_3 parabolası üzərində yerləşirsə, onda (ox) oxuna nəzərən simmetrik olan $M(x, -y)$ nöqtəsi də parabola üzərində yerləşir. Deməli, parabola absis oxuna nəzərən simmetrikdir. Bu oxa parabolun simmetriya oxu deyilir. (DF) oxu parabolun simmetriya oxu olacaqdır.

b) (2) tənliyindən görünür ki, $x \geq 0$. Bu isə o deməkdir ki, parabolun bütün nöqtələri $x \geq 0$ yarımmüstəvisi üzərində yerləşir.

c) Parabola öz simmetriya oxu ilə koordinat başlanğıcında kəsişir. Bu nöqtəyə parabolun təpəsi deyilir.

ç) (2) tənliyindən görünür ki, parabola üzərində yerləşən nöqtənin absisi $x \geq 0$ sonsuz artdıqda, onda $|y|$ -də sonsuz artacaqdır. Bu isə o deməkdir ki, parabola qeyri-məhdud əyridir.

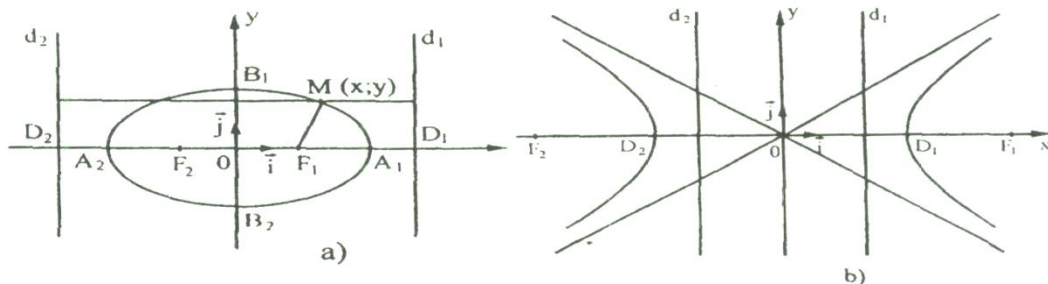
Bu xassələri nəzərə alsaq parabolun formasının aşağıdakı kimi olduğunu müəyyən edərək (şəkil 38).



Şəkil 38.

§ 18. Ellipsin, hiperbolanın direktrisləri və direktryal xassələri

Tərif: Ellipsin (hiperbolanın) ikinci oxuna paralel olub, ondan $\frac{a}{e}$ məsafəsində yerləşən düz xətlərə ellipsin (hiperbolanın) direktrisləri deyilir (şəkil 39).



Şəkil 39 a,b.

(oy) oxuna nəzərən F_1 -lə eyni yarımmüstəvi üzərində yerləşən direktrise F_1 **fokusuna uyğun direktris deyilir** və d_1 ilə işarə olunur. Digər direktris isə F_2 fokusuna uyğun direktris adlanır və d_2 ilə işarə edilir.

Göstərək ki, ellipsin bütün nöqtələri onun direktrisləri arasında yerləşir və onun direktrislərlə heç bir kəsişmə nöqtəsi yoxdur.

Verilmiş əyriyə uyğun kanonik düzbucaqlı dekart koordinat sistemi götürüb, direktrislərinin tənliklərini yazaq:

$$x = -\frac{a}{e}, \quad x = \frac{a}{e}$$

Bu direktrislər arasındakı məsafə

$$2\frac{a}{e} > 2a.$$

olacaqdır.

Belə ki, ellips üçün $e < a$. Burada $[A_1, A_2]$ fokal oxunun uzunluğu

$$A_1A_2 = 2a < \rho(d_1, d_2)$$

olduğundan yuxarıdakı fakt aşkar olur (şəkil 39,a).

Hiperbolada isə direktrislər arasındakı məsafə $2\frac{a}{e} < 2a$ olduğundan hiperbolanın direktrisləri arasında qalan heç bir nöqtəsi yoxdur (şəkil 39,b).

Teorem: (Drektyal xassələr). *Ellips (hiperbola, parabola) müstəvinin elə nöqtələr çoxluğudur ki, bu çoxluğun istənilən nöqtəsindən fokusa qədər olan məsafənin uyğun direktrise qədər olan məsafəyə nisbəti sabit kəmiyyət olub, həmin əyrinin eksentristetinə bərabərdir.*

Başqa sözlə

$$\frac{MF_1}{\rho(M, d_1)} = e \quad (*)$$

Burada $M \in \gamma$

İsbatı: Fərz edək ki, $M \in \gamma$ nöqtəsinin koordinatları (x, y) -dir. Onda

$$MF_1 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = |a - ex|$$

$$\rho(M, d_1) = \left| \frac{a}{e} - x \right|$$

Bunların nisbəti isə

$$\frac{MF_1}{\rho(M, d_1)} = \frac{|a - ex|}{\left| \frac{a}{e} - x \right|} = e$$

olacaqdır.

Analoji qayda ilə göstərmək olar ki,

$$\frac{MF_2}{\rho(M, d_2)} = e.$$

İndi fərz edək ki, (*) münasibəti ödənilir. Göstərək ki, $M \in \gamma$. Bilirik ki,

$$MF_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$\rho(M, d_1) = \left| \frac{a}{e} - x \right|$$

Bunları (*) münasibətində yerinə yazıb, kvadrata yüksəldək:

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2 \left[\frac{a}{e} - x \right]^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2 x^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2a \cdot \frac{c}{a} x + \frac{c^2}{a^2} x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ burada } b^2 = a^2 - c^2.$$

Beləliklə teorem ellips üçün isbat olundu.

Teoremi analoji qayda ilə hiperbola üçün də isbat etmək olar. Bu teoremdən göründü ki, ellips (hiperbola) fokusdan və direktrisdən məsafələrinin nisbəti sabit olan nöqtələr çoxluğudur. Parabolun tərifindən məlumdur ki, bu əyri də fokusdan və direktrisdən eyni məsafədə yerləşən nöqtələr çoxluğudur. Elə bu baxımdan da parabolun eksentristetini vahid qəbul etmək olar. Belə ki, bu əyrinin də hər bir nöqtəsindən fokusa qədər olan məsafənin onun direktrisinə qədər olan məsafəyə nisbəti sabit olub, vahidə bərabərdir.

§ 19. Ellips, hiperbola və parabolun polyar koordinatlarla tənliyi.

Fərz edək ki, F nöqtəsi ellipsin sol, hiperbolanın sağ, parabolun fokusudur. d isə bu fokusa uyğun olan direktridir. Elə polyar koordinat sistemi seçək ki, onun polyusu F nöqtəsində, polyar ox isə F nöqtəsindən direktrise endirilmiş perpendikulyar istiqamətdə olsun. Verilmiş əyri üzərində hər hansı M nöqtəsi götürüb, onun polyar koordinatlarını (r, φ) ilə işarə edək. Bu nöqtədən polyar oxa endirilmiş perpendikulyarın oturacağını M, F nöqtəsindən polyar oxa qaldırılmış perpendikulyarın əyri ilə kəsişmə nöqtəsini M_0 və $M_0F = p$ ilə işarə edək (şəkil 40).

Yuxarıda isbat etdiyimiz teoremə görə

$$\frac{MF}{\rho(M, d)} = e$$

şəkil 40-dan göründüyü kimi

$$\rho(M, d) = MD = MF + DF \quad (*)$$

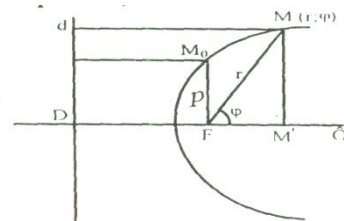
$$\rho(M, d) = \frac{MF}{e} = \frac{r}{e}$$

$$MF = r \cos \varphi$$

Teoremi M_0 nöqtəsinə tətbiq etsək,

$$\frac{P}{DF} = e \Rightarrow DF = \frac{P}{e} \text{ olar.}$$

Bunları (*) bərabərliyində yerinə yazmaqla $\frac{r}{e} = r \cos \varphi + \frac{P}{e}$
və $r(1 - e \cos \varphi) = p$ alırıq.



Şəkil 40.

Beləliklə, ellips, hiperbola və parabolun polyar koordinatlarla tənliyini yazmış olduq:

$$r = \frac{P}{1 - e \cos \varphi} \quad (1)$$

(1)ifadəsində $e < 1$ olduqda bu ellipsin, $e > 1$ olduqda hiperbolanın, $e = 1$ olduqda isə parabolun polyar koordinatlarla tənliyi olacaqdır.

İndi də ellips, hiperbola və parabola üçün φ bucağının hansı aralıqda dəyişdiyini müəyyənləşdirək.

Bunun üçün φ -ni elə seçmək lazımdır ki, məxrəc müsbət kəmiyyət olsun. Ellips üçün $e < 1$ olduğundan

$$l - e \cos \varphi = 0$$

şərti φ -nin istənilən qiymətlərində, başqa sözlə

$$0 < \varphi < 2\pi$$

aralığında dəyişdikdə ödənilir.

Hiperbola üçün $e > 1$ olduğundan (*) münasibəti $\cos \varphi > \frac{1}{e}$ şərti daxilində ödənilir. $\cos \varphi_0 = \frac{1}{e}$ işarə etsək, onda (*) münasibətinin ödənilməsi üçün φ bucağı

$$\varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0$$

və

$$-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$$

aralığında dəyişməlidir.

Parabola üçün isə $l - e \cos \varphi > 0$ və ya $l - \cos \varphi = 0$ münasibəti $-\pi < \varphi < \pi$ aralığında ödənilir.

Ellips, hiperbola, parabola kanonik tənlikləri vasitəsilə verildikdə (1) düsturundakı **fokal parametrlər** adlanan p-nin ifadəsini hesablayaq.

(1)tənliyini çıxardarkən qeyd etdik ki, p ellips, hiperbola və parabolun fokus nöqtəsindən qaldırılmış perpendikulyarın bu əyrilərlə M_0 kəsişmə nöqtəsinin absisidir. Onda bu nöqtənin ordinatı da c-yə bərabər olacaq. Başqa sözlə M_0 nöqtəsinin koordinatları (c,p) olacaqdır. Bunu qeyd olunan əyrilərin tənliyində nəzərə almaqla p üçün ifadə çıxaraçağıq.

1.Bunu əvvəlcə ellips üçün edək:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} &= 1 \Rightarrow p^2 = b^2 \left[1 - \frac{c^2}{a^2} \right] \\ p^2 &= b^2 \left[\frac{a^2 - c^2}{a^2} \right] \Rightarrow p^2 = b^2 \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Beləliklə } p = \frac{b^2}{a}.$$

2.İndi hiperbola üçün p-nin ifadəsini tapaq:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} &= 1 \Rightarrow p^2 = b^2 \left[\frac{c^2}{a^2} - 1 \right] \\ p^2 &= b^2 \left[\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right] \Rightarrow p^2 = b^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Beləliklə } p = \frac{b^2}{a}.$$

Parabola üçün p-ni hesablayaq. Analoji qayda ilə göstərmək olar ki, buradakı p parabolun tənliyindəki p ilə üst-üstə düşür.

Onu parabolun tənliyindəki parametrlə qarışdırmaq deyərək $\tilde{p}$ ilə işarə edək. Onda M_0 nöqtəsinin koordinatları $\left[\frac{P}{2}, \tilde{p} \right]$ olacaqdır. Bunun parabolun tənliyində nəzərə alaq:

$$\begin{aligned} y^2 &= 2px \\ \tilde{p}^2 &= 2 \cdot p \cdot \frac{P}{2} = p^2 \Rightarrow \tilde{p} = p \end{aligned}$$

İkitərtibli xətlərin kanonik tənliklərinin yazılmasına aid məsələlər həll edək.

Məsələ 1. Böyük oxu 10, eksentristeti $\frac{4}{5}$ olan ellipsin kanonik tənliyini yazın.

Həlli:

$$2a = 10 \quad e = \frac{4}{5}$$

Bilirik ki, ellipsin kanonik tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{şəklindədir.}$$

Burada a^2 verilib, b^2 -ni tapaq.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow b^2 = (1 - e^2)a^2$$

$$b^2 = \left[1 - \left[\frac{4}{5} \right]^2 \right] \cdot 10^2$$

$$b^2 = \left[1 - \frac{16}{25} \right] \cdot 100 = 36$$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Məsələ 2. Böyük yarımoxu 6 və eksentristeti 0,5-ə bərabər olan ellipsin kanonik tənliyini yazın.

Həlli:

Məsələnin şərtinə görə $a = 6$, $e = \frac{1}{2}$. Digər tərəfdən məlumdur ki,

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = ae.$$

a və e -nin verilmiş qiymətlərini nəzərə alsaq $c = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ və ya $c=3$ alarıq. $b^2 = a^2 - e^2$

düsturundan istifadə edərək $b^2 = 36 - 9 = 27$ olduğunu tapırıq. a və b -nin qiymətlərini (1) tənliyində yerinə yazsaq:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1.$$

Bu da ellipsin tələb olunan tənliyidir.

Məsələ 3. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ ellipsi üzərində, onun sağ fokusundan olan məsafəni sol fokusundan olan məsafəsindən dörd dəfə böyük olan nöqtəni tapın.

Həlli:

Axtarılan nöqtəni $M(x,y)$ ilə işarə edək. M nöqtəsindən sağ fokusa qədər məsafə $r_1 = a - ex$, sol fokusa qədər məsafə isə $r_2 = a + ex$ olduğundan, məsələnin şərtinə əsasən yaza bilərik:

$$a - ex = (a + ex) = 4a + 4ex \quad \text{və ya} \quad 5ex = -3a \quad (*)$$

Ellipsin tənliyindəngöründüyü kimi $a^2 = 100$, $b^2 = 36$. Onda

$$c^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow c = 8.$$

$e = \frac{c}{a}$ düsturundan istifadə edək. $e = \frac{8}{10} = 0,8$, a və e -nin qiymətlərini (*) bərabərliyində

yerinə yazsaq, $x = -\frac{15}{2}$ alarıq. X -in bu qiymətini verilmiş tənlikdə yerinə yazdıqda:

$$\left[-\frac{15}{2} \right]^2 + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{175 \cdot 9}{160},$$

$$y = \pm \frac{3}{2} \sqrt{7}. \text{ Deməli axtarılan nöqtə}$$

$$M \left[-\frac{15}{2}; \pm \frac{3}{2} \sqrt{7} \right] \text{ nöqtəsidir.}$$

Məsələ 4. Fokuslar arasındakı məsafəni 20 vahid olub, $M(12, 3\sqrt{5})$ nöqtəsindən keçən hiperbolanın kanonik tənliyini yazın.

Həlli:

Hiperbola M nöqtəsindən keçdiyindən bu nöqtənin koordinatları hiperbolanın kanonik tənliyini ödəməlidir.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Başqa sözlə:

$$\frac{12^2}{a^2} - \frac{(3\sqrt{5})^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{144}{a^2} - \frac{45}{b^2} = 1 \quad (*)$$

$2c=20$ verildiyindən $c=10$ alırıq.

$$c^2 - a^2 = b^2$$

$b^2 = 100 - a^2$. Biri (*) ifadəsində nəzərə alaq.

$$\frac{144}{a^2} - \frac{45}{100 - a^2} = 1.$$

$$14400 - 144a^2 - 45a^2 = 100a^2 - a^4$$

$$a^4 - 289a^2 + 14400 = 0$$

burada $a^2 = t$ əvəzləməsi aparaq.

$$t^2 - 289t + 14400 = 0$$

$$D = 289^2 - 4 \cdot 14400 \cdot 1 = 25921$$

$$t_{1,2} = \frac{289 \pm \sqrt{25921}}{2 \cdot 1} = \frac{289 \pm 161}{2}$$

$$t_1 = \frac{289 + 161}{2} = 225$$

$$t_2 = \frac{289 - 161}{2} = 64.$$

$$a^2 = 225 \Rightarrow a = 15$$

$$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8.$$

Hiperbolada $c > a$ olduğu üçün $a = 8$ götürürük.

$$b^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36.$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Məsələ 5. Asimptotları bir-birinə perpendikulyar olub, direktrislərinin tənliyi $x = \pm 3\sqrt{2}$ olan hiperbolanın kanonik tənliyini yazın.

Həlli:

Hiperbolanın asimptatlarının tənliyi $y = \pm \frac{b}{a}x$ şəklində, direktrislərinin tənliyi isə $x = \pm \frac{a}{e}$

şəklində olduğunu bilirik. Bunu verilənlərlə müqayisə etsək və nəzərə alsaq ki, asimptotun (ox) oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaq 45° -dir, onda

$$k = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \Rightarrow a = b.$$

Direktrislərin tənliyindən isə görünür ki,

$$2\frac{a}{e} = 2 \cdot 3\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{e} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a^2}{c} = 3\sqrt{2}$$

hiperbola üçün $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$.

Burada $c = \sqrt{2}a$

$$\frac{a^2}{\sqrt{2}a} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a = 6.$$

Beləliklə axtarılan tənlik $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$ şəklində olacaqdır.

Məsələ 6. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ ellipsi ilə ortaq fokuslu və $e = \frac{5}{4}$ ekssentristetli hiperbolanın tənliyini yazın.

Həlli: Ellipsin fokuslarının koordinatlarını təyin edək: $c^2 = 49 - 24 = 25$, $c=5$; $F_1(5;0)$ $F_2(-5;0)$ hiperbolanın fokusları ellipsin fokusları ilə eyni olduğundan F_1 və F_2 hiperbolanın da fokuslarıdır, yəni hiperbola üçün $c=5$. Hiperbolanın ekssentristeti $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$ olduğundan, $\frac{5}{a} = \frac{5}{4} \Rightarrow a = 4$ olur. hiperbola üçün $b^2 = c^2 - a^2$ olduğundan $b^2 = 25 - 16 = 9$. Onda hiperbolanın

tənliyi $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ olar.

Məsələ 7. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$ hiperbolası üzərində elə nöqtə tapın ki, onun asimptotlardan birinə qədər olan məsafəsi digərinə qədər olan məsafəsindən üç dəfə böyük olsun.

Həlli: Əvvəlcə tənliyi verilmiş hiperbolanın asimptotlarının tənliyini yazaq: $a=7$ və $b=4$ olduğundan, $y = \pm \frac{b}{a}x$ tənliklərinə əsasən yaza bilərik: $y = \pm \frac{4}{7}x$ və ya $4x - 7y = 0$ və $4x + 7y = 0$. Axtarılan nöqtəni $M_0(x_0, y_0)$ ilə işarə edək.

$$\text{Onda: } \frac{4x_0 + 7y_0}{\sqrt{16 + 49}} = 3 \frac{4x_0 - 7y_0}{\sqrt{16 + 49}} \text{ və ya } 2x_0 - 7y_0 = 0 \quad (1)$$

$M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi verilmiş hiperbolanın üzərində yerləşdiyindən, onun koordinatları hiperbolanın verilmiş tənliyini ödəməlidir, yəni

$$\frac{x_0^2}{49} - \frac{y_0^2}{16} = 1 \quad (2)$$

olmalıdır. (1) və (2) tənliklərini birgə həll etsək axtarılan nöqtəni tapırıq:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{49} - \frac{y_0^2}{16} = 1 \\ 2x_0 - 7y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\left[\frac{7}{2}y_0\right]^2}{49} - \frac{y_0^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{49y_0^2}{4 \cdot 49} - \frac{y_0^2}{16} = 1 \Rightarrow y_0 = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}; x_0 = \pm \frac{7}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \pm \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

Deməli, axtarılan nöqtə $M_0\left[\pm \frac{4\sqrt{3}}{3}; \pm \frac{14\sqrt{3}}{3}\right]$ koordinatlarına malik olan dörd nöqtədir.

Məsələ 8. Parabolanın fokusunun koordinatları və direktrisinin tənliyi verilmişdir: $F(3;0)$, $x+1=0$. Onun tənliyini təyin edin.

Həlli: Məsələnin şərtində verilənlərdən aydın olur ki, parabolanın təpəsi $O(1;0)$ nöqtəsində yerləşir. $x=x-1$ və $y=y$ düsturlarından istifadə edərək O koordinat başlanğıcını O nöqtəsinə köçürək. Onda O x y koordinat sistemi alınır. Bu yeni koordinat sistemində parabolanın təpəsi koordinat başlanğıcında yerləşər, fokus isə $(3;0)$ koordinatlarına malik olar, çünki $x=3-1=2$, $y=y=0$.

Yeni koordinat sistemində parabolanın tənliyini yazsaq alarıq; $y^e = 2rx$; $\frac{P}{2} = 2$, $p=4$ onda $y^e = 8x$.

Yeni koordinat sistemindən köhnə koordinat sistemə keçsək yazı bilərik: $y^2 = 8(x-1)$, $y^2 = 8x - 8$. Bu parabolanın axtarılan tənliyidir.

Məsələ 9. $y^2 = 4x$ parabolasının və $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ ellipsinin ortaq toxunanlarının tənliyini yazın.

Həlli: $Ax+By+C=0$ -axtarılan ortaq toxunanın tənliyi olsun. Onda düz xəttin ellipsə və parabolaya toxunması şərtindən istifadə edərək yazı bilərik:

$$\begin{cases} A^2a^2 + B^2b^2 = C^2 \\ B^2p = 2AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8A^2 + 2B^2 = C^2 \\ 2B^2 = 2AC \end{cases} \Rightarrow 8A^2 + 2AC - C^2 = 0$$

$$A_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 8c^2}}{8} = \frac{-c \pm 3c}{8}; \quad A_1 = \frac{1}{4}c, \quad A_2 = -\frac{1}{2}c.$$

$$\text{Buradan da } 2B^2 = 2 \cdot \frac{1}{4}c \cdot c = \frac{1}{2}c^2, \quad B^2 = \frac{1}{4}c^2, \quad B_{1,2} = \pm \frac{1}{2}c.$$

A -nın ikinci qiyməti kənar kökdür. A_1 və $B_{1,2}$ bu qiymətlərini ortaq toxunanın tənliyində yerlərinə yazsaq alarıq;

$$\frac{1}{4}Cx \pm \frac{1}{2}Cy + C = 0 \Rightarrow x \pm 2y + 4 = 0.$$

Məsələ 10. Aşağıdakı polyar koordinatlarla verilmiş ellipsin tənliyini yazın:

$$r = \frac{1}{2 - \sqrt{3} \cos \varphi}$$

Bilirik ki, ellipsin polyar koordinatlarla tənliyi $r = \frac{P}{1 - e \cos \varphi}$ şəklindədir.

İndi verilmiş tənliyi bu şəkllə salaq:

$$r = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi}$$

Bunu ellipsin polyar koordinatlarla tənliyi ilə müqayisə etsək:

$$\begin{cases} p = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2} \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ olacaqdır. Ellipsin } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ tənliyini yazmaq üçün } a^2 \text{ və } b^2 \text{-ni tapmaq}$$

lazımdır.

Bu sistemin ikinci tənliyindən $c = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ifadəsini tapıb, birincidə nəzərə alsaq:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a - \left[\frac{\sqrt{3}}{2} a \right]^2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2.$$

$$p = \frac{b^2}{a} \text{-ifadəsindən isə:}$$

$$b^2 = p \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ olduğunu alarıq. Bunları ellipsin kanonik tənliyində yerinə yazaq:}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Məsələ 11. Aşağıda polyar koordinatlarla verilmiş hiperbolanın kanonik tənliyini yazın.

$$r = \frac{3}{4 - \sqrt{19} \cos \varphi}$$

Bilirik ki, hiperbolanın polyar koordinatlarla tənliyi

$$r = \frac{P}{1 - e \cos \varphi}$$

şəklindədir. Verilmiş tənliyi bu şəkllə salaq.

$$r = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{\sqrt{19}}{4} \cos \varphi}.$$

Bunu hiperbolanın polyar koordinatlarla tənliyi ilə müqayisə etsək:

$$\begin{cases} p = \frac{3}{4} \\ e = \frac{\sqrt{19}}{4} \end{cases} \text{ olduğunu müəyyən etmiş olarıq. Hiperbolanın } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ kanonik tənliyini}$$

yazmaq üçün a^2 və b^2 -ni tapmaq lazımdır.

$$p = \frac{b^2}{a} \text{ və } e = \frac{c}{a} \text{ ifadəsindən}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{c^2 - a^2}{a} \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{19}}{4} \end{cases}$$

$$c = \frac{\sqrt{19}}{4} a \text{ əvəz edək.}$$

$$\text{Bunu birinci tənlikdə nəzərə alsaq: } \frac{3}{4} = \frac{\left[\frac{\sqrt{19}}{4} a \right]^2 - a^2}{a} \Rightarrow \frac{\frac{19}{16} a^2 - a^2}{a} = \frac{3}{4} \text{ və ya}$$

$$\frac{3}{16} a = \frac{3}{4}; \quad a = 4 \text{ alarıq.}$$

$$p = \frac{b^2}{a} \text{-dan } b^2 = \frac{3}{4} a = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3.$$

Beləliklə $a^2 = 16$, $b^2 = 3$.

Bunları hiperbolanın kanonik tənliyində yerinə yazaq:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Məsələ 12. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{1} = 1$ kanonik tənliyi ilə verilmiş hiperbolanın polyar koordinatlarla tənliyini yazın.

Həlli:

Hiperbolanın $r = \frac{P}{1 - e \cos \varphi}$ polyar koordinatlarla tənliyindəki p və e -ni tapıb burada yerinə yazmaq kifayətdir.

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{4}; \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{16 + 1}}{4} = \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

Bu tapdıqlarımızı hiperbolanın polyar koordinatlarla tənliyində yerinə yazaq.

$$r = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{\sqrt{17}}{4} \cos \varphi} \quad \text{və ya} \quad r = \frac{1}{4 - \sqrt{17} \cos \varphi}.$$

ÇALIŞMALAR.

1. Oxları koordinat oxları ilə üst-üstə düşən ellips $M(2;2)$ və $N(3;1)$ nöqtələrindən keçir. Ellipsin kanonik tənliyini yazın.

2. Ellipsin fokuslarının birindən, böyük oxunun uclarına qədər məsafələr uyğun olaraq 7 və 1-ə bərabərdir. Ellipsin kanonik tənliyini yazın.

3.a) Direktrisləri arasındakı məsafə 12-yə, böyük oxu isə $2\sqrt{3}$ -ə bərabər olan;

b) direktrisləri arasındakı məsafə $\frac{72}{\sqrt{11}}$, fokusları arasındakı məsafə isə $2\sqrt{11}$ -ə bərabər olan;

v) direktrisləri arasındakı məsafə $4\sqrt{15}$, eksentristeti isə $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -yə bərabər olan ellipsin kanonik tənliyini yazın.

4. $x = \pm 8$ tənlikləri, kiçik oxu 8-ə bərabər olan ellipsin direktrislərinin tənlikləridir. Ellipsin kanonik tənliyini yazın.

5. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ ellipsi üzərində, sağ fokusdan məsafəni sol fokusdan məsafəsindən dörd dəfə böyük olan nöqtəni tapın.

6. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipsinin $N(2;1)$ nöqtəsində yarı bölünən vətərinin tənliyini yazın.

7. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ ellipsinə elə toxunan çəkin ki, o, $2x - y + 17 = 0$ düz xəttinə paralel olsun.

8. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipsinə toxunan və $x + y - 1 = 0$ düz xəttinə paralel olan düz xəttin tənliyini yazın.

9. $Ax + By + C = 0$ düz xəttinin $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsinə toxunması üçün zəruri və kafi şərti tapın.

10. $x + y - 5 = 0$ və $x + 4y - 10 = 0$ düz xəttlərinin hər ikisinə toxunan ellipsin kanonik tənliyini yazın.

11. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$ hiperbolası verilmişdir. Onun fokuslarının koordinatlarını və asimptotlarının tənliyini yazın.

12. Fokusları $F_1(10;0)$, $F_2(-10;0)$ olan və $M(12;3\sqrt{5})$ nöqtəsindən keçən hiperbolanın kanonik tənliyini yazın.

13. Həqiqi oxu 48 və eksentristeti $e = \frac{13}{12}$ olan hiperbolanın kanonik tənliyini yazın.

14. $M(24;5)$ nöqtəsindən keçən və asimptotlarının tənliyi $y = \pm \frac{5}{12}x$ olan hiperbolanın kanonik tənliyini yazın.

15. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbolası üzərində yerləşən, fokal radiusları perpendikulyar olan nöqtəni tapın.

16. İki qoşma hiperboladan birincinin direktrisləri arasındakı məsafənin 7,2, ikincinin direktrisləri arasındakı məsafənin 12,8 olduğunu bilərək onların kanonik tənliyini yazın.

17. $M(2;-5)$ nöqtəsindən $x^2 - 4y^2 = 4$ hiperbolasının asimptotlarına paralel düz xətlər keçirin.

18. a) eksentristeti $e = 2$ olan; b) fokusları arasındakı məsafə direktrisləri arasındakı məsafədən iki dəfə böyük olan hiperbolanın asimptotları arasındakı bucağı tapın.

19. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ hiperbolasının, uzunluğu 20 vahid olan diametrinin tənliyini yazın.

20. $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$ hiperbolasının $M(3;-1)$ nöqtəsindən keçən və bu nöqtədə yarıya bölünən vətərinin tənliyini yazın.

21. Hiperbola $x - y - 2 = 0$ düz xəttinə $M(4;2)$ nöqtəsində toxunur. Onun kanonik tənliyini yazın.

22. $y^2 = 4x$ tənliyi ilə verilmiş parabolanın fokusunun koordinatlarını təyin edin və direktrislərinin tənliyini yazın.

23. Təpəsi koordinat başlanğıcında yerləşən, simmetriya oxu (Ox) və fokusu $F(3;0)$ nöqtəsi olan parabolanın tənliyini yazın.

24. $y^2 = 8x$ parabolası üzərində yerləşən və fokal radius vektoru 20 vahid olan nöqtəni tapın.

25. $y^2 = 4,5x$ parabolası üzərində direktrisdən 9,125 vahid məsafədə olan nöqtə verilmişdir. Parabolanın təpəsindən bu nöqtəyə qədər məsafəni hesablayın.

26. $Ax + By + C = 0$ düz xəttinin $y^2 = 2px$ parabolasına toxunması üçün zəruri və kafi şərti təyin edin.

27. $y^2 = 2px$ parabolasına toxunan düz xəttin $x - 3y + 9 = 0$ tənliyi verilmişdir. parabolanın kanonik tənliyini yazın.

28. $M(5;-7)$ nöqtəsindən $y^2 = 8x$ parabolasına toxunan düz xətt keçirin.

29. $3x - y + 5 = 0$ düz xəttinə paralel olan və $y^2 = 12x$ parabolasına toxunan düz xəttin tənliyini yazın.

30. $4x + 3y + 46 = 0$ düz xəttinin $y^2 = 64x$ parolasından ən qısa məsafəsini hesablayın.

V FƏSİL

İKİTƏRTİBLİ XƏTLƏRİN ÜMUMİ NƏZƏRİYYƏSİ.

Əvvəlcə müstəvinin xəyali nöqtəsi anlayışını verək.

Yuxarıda göstərdik ki, müstəvi üzərində hər hansı Afın koordinat sistemi verildikdə müstəvinin istənilən nöqtəsinə bir cüt həqiqi ədəd və hər bir cüt həqiqi ədədə müstəvinin müəyyən bir nöqtəsi uyğun gəlir.

Nöqtəyə uyğun gələn ədədlərdən birini və ya hər ikisini xəyali (kompleks) ədədlər götürməklə xəyali nöqtə anlayışını təyin edəcəyik. Məsələn $(i\sqrt{3};5)$, $(2;3+i)$ və s. kimi nöqtələri **xəyali nöqtə** adlandıracağıq. Bu cür xəyali nöqtələrlə tamamlanmış müstəviyə kompleks müstəvi deyəcəyik.

Əgər verilmiş xəyali nöqtələrin uyğun koordinatları kompleks qoşmadırsa, başqa sözlə $M_1(a+bi, c+di)$, $M_2(a-bi, c-di)$ isə, onda bu nöqtələrə **kompleks qoşma nöqtələr** deyəcəyik. Tamamilə aşkardır ki, uc nöqtələr kompleks qoşma olan parçaların orta nöqtəsinin koordinatları həqiqi ədədlərdir. Doğrudan da $[M_1, M_2]$ parçasının $M(x,y)$ orta nöqtəsinin koordinatları

$$x = \frac{a+bi + a-bi}{2} = a$$
$$y = \frac{c+di + c-di}{2} = c$$

həqiqi ədədləri olar.

İndi ikitərtibli xətlərin ümumi tənliyinə baxaq.

Cəbri xətt anlayışından bilirik ki, ikitərtibli xəttin ümumi tənliyi aşağıdakı şəkildədir:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (1)$$

Burada++++++ və x^2, y^2, z^2 əmsallarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidir.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = F_1(x, y) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = F_2(x, y) \\ a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = F_0(x, y) \end{cases} \quad (*)$$

işarə etsək (1) tənliyini

$$F(x, y) = F_1(x, y)x + F_2(x, y)y + F_0(x, y) = 0$$

şəklində yazmaq olar. Biz ikitərtibli xətlərin bir necə tənliyini yazmışıq. Başqa ikitərtibli xətlər də var. Məsələn:

$$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

olduqda deyirlər ki, bu əyri iki düz xəttə parçalanır. Elə ikitərtibli xətlər vardır ki, onun həqiqi nöqtəsi heç yoxdur. Məsələn:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Bu əyriyə **xəyali ellips** deyilir.

Elə ikitərtibli xətlər də vardır ki, onun yalnız bir həqiqi nöqtəsi var. Məsələn:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Bu əyrinin həqiqi nöqtəsi $O(0;0)$ koordinat başlanğıcıdır.

§ 20. İkitərtibli xətlərin düz xətlə kəsişməsi.

Fərz edək ki, bizə hər hansı ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən $F(x, y) = 0$ tənliyinə malik γ ikitərtibli xətti və $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçib, $\vec{p} = [p_1, p_2]$ yönəldici vektoruna malik l düz xətti verilmişdir. onda bu düz xəttin parametrik tənliyi

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t \\ y = y_0 + p_2 t \end{cases} \quad (2)$$

şəklində olacaqdır. Məlumdur ki, bu xətlərin kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün onların tənliklərini birlikdə həll etmək lazımdır. Bunun üçün (2) sistemini (1) tənliyində nəzərə alıb, t -yə görə qruplaşdırsaq

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \quad (3)$$

tənliyini alırıq.

(3)düsturu ikitərtibli xəttin düz xətlə kəsişməsi şərtidir. Bu tənlikdən tapılmış t -nin hər bir qiymətinə ikitərtibli xətlə (2) düz xəttinin bir kəsişmə nöqtəsi uyğun gələcəkdir.

Burada

$$\begin{aligned} P &= a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 \\ Q &= F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 \\ R &= F(x_0, y_0) \end{aligned}$$

(3) tənliyində $P \neq 0$ olduqda bu tənliyin t -yə görə iki kökü var. $P=0$ olduqda tənliyin həqiqi kökü birdən artıq deyil və bu köklərin həqiqi müxtəlif, həqiqi üst-üstə düşən, xəyali olmasından asılı olaraq kəsişmə nöqtələri də həqiqi, xəyali və s. nöqtələr olacaq. Bu halları ayrı-ayrılıqda araşdıraq. Bunun üçün (3) kvadrat tənliyinin köklərini tapaq.

$$t = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - PR}}{P}$$

Burada

1) $P \neq 0$

a) $Q^2 - PR > 0$ olduqda tənliyin iki müxtəlif həqiqi,

b) $Q^2 - PR < 0$ olduqda iki müxtəlif xəyali,

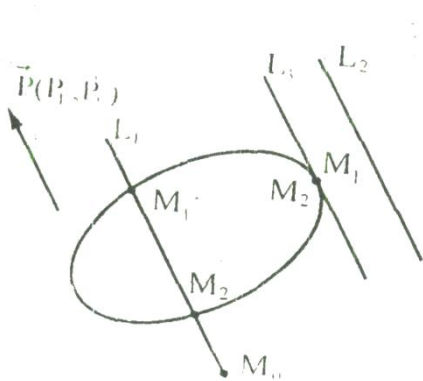
c) $Q^2 - PR = 0$ olduqda iki üst-üstə düşən həqiqi kökü var.

Bunlara uyğun olaraq, düz xətt ikitərtibli xətt iki həqiqi (şəkil 40-da l_1 düz xətti), iki xəyali (l_2 düz xətti) və nəhayət, üst-üstə düşən iki həqiqi nöqtədə (l_3 düz xətti) kəsəcəkdir.

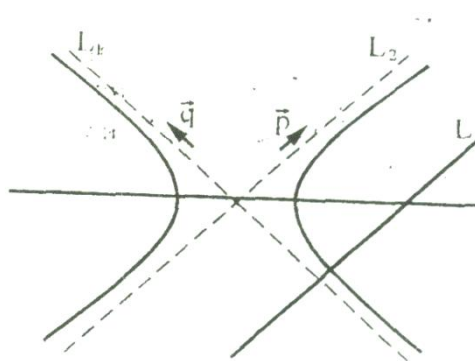
2) $P=0$ olduqda tənlik $2Qt + R = 0$ şəklində düşəcəkdir. Burada

a) $Q \neq 0$, $R = 0$ olduqda tənliyin bir kökü və ona uyğun olan bir həqiqi kəsişmə nöqtəsi olaşəkil 41-də) l düz xətti).

b) $Q = 0$, $R \neq 0$ olduqda tənliyin həlli yoxdur. Deməli ikitərtibli xətt düz xətti kəsmir (şəkil 42b-də l_1 və l_2 düz xətləri).

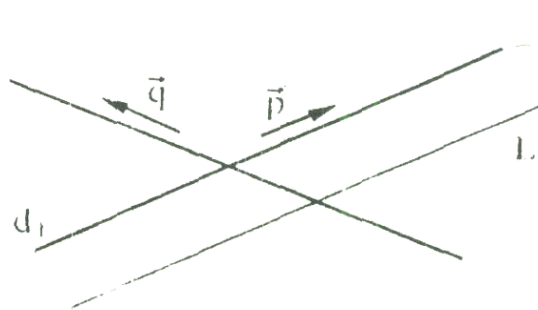


Şəkil 40

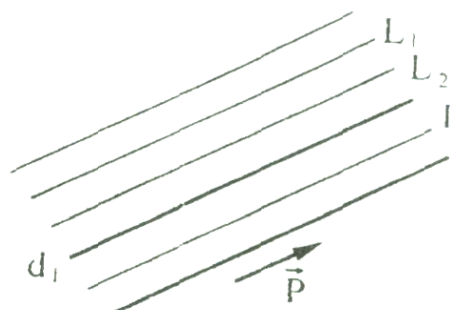


Şəkil 41.

c) $Q = 0$, $R \neq 0$ olduqda tənliyin sonsuz sayda kökü olur. Onda düz xətt əyri ilə üst-üstə düşür. Bu halda ikitərtibli xətt iki d_1 və d_2 düz xətlərinə parçalanır (şəkil 42 a,b).



a



b

Şəkil 42.

§ 21. İkitərtibli əyriyə nəzərən asimptotik istiqamətlər və asimptotlar.

Fərz edək $F(x, y) = 0$ (1) tənliyinə malik γ ikitərtibli xətti və aşağıdakı parametrik tənliyinə malik l düz xətti verilmişdir.

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t \\ y = y_0 + p_2 t \end{cases} \quad (2)$$

Tərif: l düz xətti γ ikitərtibli xəttini birdən artıq nöqtədə kəsmirsə və ya onunla üst-üstə düşürsə, onda bu düz xəttin $\tilde{p} = [p_1, p_2]$ istiqamətinə γ ikitərtibli xəttinə nəzərən asimptotik istiqamət deyilir.

Bu tərifdən bilavasitə çıxır ki, l düz xəttinin $\tilde{p} = [p_1, p_2]$ yönəldici vektorunun γ ikitərtibli əyrisinə nəzərən asimptotik istiqamət olması üçün (3) tənliyində $P=0$ olmalıdır. Başqa sözlə, $\tilde{p}$ vektorunun koordinatları aşağıdakı şərti ödəməlidir.

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{23}p_2^2 = 0 \quad (4)$$

Deməli γ ikitərtibli əyrisinə nəzərən asimptotik istiqamətinin tapılması (4) tənliyinin köklərinin tapılmasına gətirilir.

$$a_{23}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0 \quad (4')$$

Burada $k = \frac{p_2}{p_1}$

γ ikitərtibli xəttinin asimptotik istiqamətinin olub-olmaması (4) və (4) tənliyinin kökünün olub-olmasından asılıdır.

$$k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}$$

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ işarə edək.

Burada $\Delta > 0$ olsa, onda (4) tənliyinin heç bir həqiqi kökü yoxdur. Deməli, bu əyri heç bir asimptotik istiqamətə malik deyil. $\Delta < 0$ olduqda (4) tənliyinin iki dənə həqiqi kökü və uyğun olaraq əyriyə nəzərən iki asimptotik istiqamət olacaqdır. $\Delta = 0$ olduqda (4) tənliyinin bir kökü və uyğun olaraq əyriyə nəzərən bir dənə asimptotik istiqamət olacaqdır.

Öyrəndiyimiz ikitərtibli əyrilərin asimptotik istiqamətlərini təyin edək.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips üçün $\Delta = \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2} > 0$ olduğundan ellips heç bir asimptotik istiqamətə malik deyil.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbola üçün $\Delta = \frac{1}{a^2} \cdot \left[-\frac{1}{b^2}\right] < 0$ olduğundan hiperbola iki asimptotik istiqamətə malikdir.

$y^2 = 2px$ parabola üçün $\Delta = 0 \cdot 1 + 0 = 0$ olduğundan parabola yalnız bir asimptotik istiqamətə malikdir.

Elə bu baxımdan da $\Delta > 0$ olduqda ikitərtibli əyriyə elliptik, $\Delta < 0$ olduqda hiperbolik, $\Delta = 0$ olduqda isə parabolik tip əyri deyilir.

§ 22. İkitərtibli xətlərin mərkəzi.

İkitərtibli xətlərin mərkəzi anlayışını vermək üçün aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma: $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinin $F(x, y) = 0$ tənliyinə malik ikitərtibli xəttin hər hansı

$\tilde{p} = (p_1, p_2)$ istiqamətində vətərinin orta nöqtəsi olması üçün (3) tənliyində $Q = 0$ başqa sözlə

$$Q = F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0$$

şərtinin ödənməsi zəruri və kifədir.

İsbatı: Fərz edək ki, $M_0(x_0, y_0)$ $F(x, y) = 0$ tənliyinə malik γ ikitərtibli xəttinin $\tilde{p}$ istiqamətindəki vətərinin hər hansı nöqtəsidir. Bilirik ki, bu vətər boyunca yönəlmiş düz xəttin parametrik tənliyi

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t \\ y = y_0 + p_2 t \end{cases}$$

şəklindədir və onun ikitərtibli xətlə kəsişmə nöqtələrinin hər biri t parametrinin $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ tənliyindən tapılan bir qiymətinə uyğundur. Bu qiymətləri düz xəttin tənliyində nəzərə almaqla kəsişmə nöqtələrinin koordinatları tapılır. Fərz edək ki, düz xəttin ikitərtibli xətlə kəsişmə nöqtələri M_1, M_2 və bu nöqtələrə uyğun parametrlər t_1, t_2 -dir. Onda bu nöqtələrin koordinatları $M_1(x_0 + p_1 t_1, y_0 + p_2 t_1)$, $M_2(x_0 + p_1 t_2, y_0 + p_2 t_2)$ olacaqdır. Bilirik ki, bu parçanın $M(x, y)$ orta nöqtəsinin koordinatları

$$x = \frac{x_0 + p_1 t_1 + x_0 + p_1 t_2}{2} = \frac{2x_0 + p_1(t_1 + t_2)}{2}$$

$$y = \frac{2y_0 + p_2(t_1 + t_2)}{2}$$

kimi tapılır. Bu ifadələrdən görünür ki, $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi yalnız və yalnız o zaman $[M_1 M_2]$ parçasının orta nöqtəsi olar ki, burada $t_1 + t_2 = 0$ ya (3) tənliyində Viyet teoreminə görə $Q=0$ olsun. Başqa sözlə

$$Q = F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0 \quad (*)$$

şərti ödənsin.

Lemma isbat olundu.

Tərif: *İkitərtibli xəttin simmetriya mərkəzinə bu əyrinin mərkəzi deyilir.*

Göstərək ki, $F(x, y) = 0$ tənliyinə malik ikitərtibli xəttin mərkəzinin koordinatları aşağıdakı tənliklər sistemindən tapılır:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ F_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Fərz edək ki, $C(x_0, y_0)$ nöqtəsi (1) tənliyi ilə verilmiş ikitərtibli xəttin mərkəzidir. Onda bu nöqtədən keçən istənilən vətər yarıya bölünməlidir. Bu nöqtədən keçən $\tilde{p} = [\tilde{p}_1, \tilde{p}_2]$ və $\tilde{q} = [q_1, q_2]$ istiqamətlərinə malik vətərlərini (diametrlərini) çəkək. Onda (*) düsturuna görə

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0 \\ F_1(x_0, y_0)q_1 + F_2(x_0, y_0)q_2 = 0 \end{cases} \quad (**)$$

şərtləri ödənməlidir. Lakin $\tilde{p} \neq 0, \tilde{q} \neq 0$ kollinear olmayan vektorlar olduğundan (**) sisteminin ödənməsi üçün

$$\begin{aligned} F_1(x_0, y_0) &= 0 \\ F_2(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \quad \text{olmalıdır.}$$

İndi fərz edək ki, (5) şərtləri ödənilir, $C(x_0, y_0)$ nöqtəsinin γ ikitərtibli əyrisinin mərkəzi olduğunu göstərək.

Koordinat sisteminin başlanğıcını əyrinin $C(x_0, y_0)$ mərkəzinə köçürək, onda bu koordinat sistemində nəzərən əyrinin tənliyi aşağıdakı şəkllə düşər.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

Burada

$$\begin{aligned} a_{10} &= F_1(x_0, y_0) \\ a_{20} &= F_2(x_0, y_0) \\ a_{00} &= F(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Lakin $F_1(x_0, y_0) = 0$

$F_2(x_0, y_0) = 0$ olduğundan sonuncu tənlik

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{00} = 0 \quad (1)$$

şəklinə düşəcəkdir. Bu tənlikdən görünür ki, əyri C koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. Belə ki, hər bir $M(x, y)$ nöqtəsi ilə yanaşı $M(-x, -y)$ nöqtəsi də bu əyri üzərində yerləşir. başqa sözlə, nöqtələrdən birinin koordinatları bu tənliyi ödədikdə digərinin də koordinatları həmin tənliyi ödəyir.

Teorem isbat olundu.

Beləliklə, isbat olundu ki, (1) tənliyinə malik ikitərtibli xəttin mərkəzinin koordinatları (5) tənliklər sistemindən tapılır. Deməli, ikitərtibli xəttin mərkəzinin olub-olmaması (5) tənliklər sisteminin həllinin olub-olmamasından asılıdır:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{21}x + a_{23}y + a_{20} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

İndi bu tənliklər sistemini araşdıraq. Burada

$$1. \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

olduqda (5) tənliklər sisteminin yeganə həlli var. Deməli, bu halda əyri yeganə mərkəzə malikdir.

$$2. \quad \Delta = 0 \quad \text{və} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{12} \\ a_{20} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{və ya} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{21} & a_{20} \end{vmatrix}$$

Determinantlarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olduqda, (5) tənliklər sisteminin həlli yoxdur. Başqa sözlə əyri heç bir mərkəzə malik deyil.

3. $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ olarsa, (5) tənliklər sisteminin sonsuz sayda həlli olacaq. Buna uyğun olaraq əyri sonsuz sayda mərkəzə malikdir. Bu nöqtələr çoxluğu düz xətti təyin edir ki, ona da ikitərtibli xəttin **mərkəzlər düz xətti** deyilir. Bu halda əyri iki düz xəttə parçalanır.

Əyrinin birdən artıq mərkəzi olduqda, belə əyrilər **mərkəzsiz əyrilər** adlanır.

§ 23. İkitərtibli xəttin toxunanı.

Əgər ikitərtibli xəttin mərkəzi bu xəttin üzərindədirsə, onda bu nöqtəyə onun **xüsusi nöqtəsi** deyilir. qalan nöqtələrə ikitərtibli xəttin **adi nöqtələri** deyilir.

Fərz edək ki, $\{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ afin koordinat sisteminə nəzərən $F(x, y) = 0$ tənliyinə malik γ ikitərtibli xətti verilmişdir.

Əgər l düz xətti γ ikitərtibli xəttini üst-üstə düşən iki nöqtədə kəsərsə, onda bu düz xəttə ikitərtibli xəttin həmin nöqtədə **toxunanı** deyilir (şəkil 43).

Göstərək ki, ikitərtibli xətt özünün istənilən adi nöqtəsində yeganə toxunana malikdir və bu toxunanın tənliyi

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_0(x_0, y_0) = 0 \quad (6)$$

şəklindədir.

İsbatı: Fərz edək ki,
$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t \\ y = y_0 + p_2 t \end{cases}$$

tənliyinə malik l düz xətti γ ikitərtibli xəttinə $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində toxunur.

Şəkil 43.

Onda tərifə görə, düz xətlə ikitərtibli xətt üst-üstə düşən iki M_0 nöqtəsində kəsişməlidir. Bu isə düz xəttin (2) tənliyində parametrlər $t = t_1 = t_2 = 0$ qiymətinə uyğundur. Digər tərəfdən (3) kəsişmə şərtində Viyet teoreminə görə $Q = t_1 + t_2 = 0$ olacaqdır. İndi fərz edək ki, (3) kəsişmə şərtində $Q=0$. Digər tərəfdən $M_0 \in \gamma$ olduğundan burada $R = F(x_0, y_0) = 0$, onda (3) tənliyi $Pt^2 = 0$ şəklinə düşər. Burada kəsişmə nöqtələri iki dənə olduğundan $P \neq 0$ onda $t^2 = 0$ və ya $t_1 = t_2 = 0$ olar.

Lakin kəsişmə şərtindən alınan parametrlərin bu qiymətində düz xətt ikitərtibli xətti üst-üstə düşən iki M_0 nöqtəsində kəsir. Belə ki, (2) tənliyində iki dəfə $t=0$ götürməklə hər dəfə M_0 nöqtəsinin koordinatlarını almış olacağıq.

Beləliklə, biz göstərdik ki, l düz xəttinin M_0 nöqtəsində γ ikitərtibli əyrisinə toxunması üçün

$$Q = F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0 \quad (*)$$

şərtinin ödənməsi zəruri və kafidir. Başqa sözlə, l düz xəttinin $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində γ ikitərtibli

xəttinə toxunması üçün onun $\tilde{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ yönəldici vektorunun koordinatları (*) münasibətini ödəməlidir. Onda bu münasibətdən tapılan $\tilde{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ yönəldici vektoruna və $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinə görə toxunanın tənliyini yaza bilərik. (*)-dan

$$k = \frac{p_2}{p_1} = -\frac{F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)} \quad \text{tapıb}$$

$y - y_0 = k(x - x_0)$ tənliyində yerinə yazsaq, $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində ikitərtibli əyriyə toxunanın

$$y - y_0 = -\frac{F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)}(x - x_0)$$

və ya

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y - [F_1(x_0, y_0)x_0 + F_2(x_0, y_0)y_0] = 0$$

tənliyini alırıq.

Lakin $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$ olduğundan $F(x_0, y_0) = 0$ və ya

$$F(x_0, y_0) = F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_0(x_0, y_0) = 0 \quad (7)$$

şərti ödənməlidir. Buradan

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y = -F_0(x_0, y_0)$$

bunu (7)-də nəzərə alsaq:

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_0(x_0, y_0) = 0$$

Bunu açıq şəkildə yazsaq, $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində γ ikitərtibli əyrisinə toxunanın tənliyinin

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} = 0 \quad (8)$$

şəklində olduğunu görürük.

Bu düsturdan istifadə edərək kanonik tənliyə malik ellip, hiperbola və parabolun toxunanının tənliyini yazsaq.

Ellipsin $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kanonik tənliyini ikitərtibli xəttin ümumi tənliyi ilə müqayisə etsək,

$a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$, $a_{00} = -1$ və qalan əmsalların sıfıra bərabər olduğunu görürük. Bunları toxunanın (8) tənliyində nəzərə alsaq, ellipsin toxunanının tənliyinin

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

şəklində olduğunu alırıq.

Analoji qayda ilə göstərmək olar ki, kanonik tənlikləri ilə verilmiş hiperbolanın və parabolun $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindəki toxunanların tənliyi uyğun olaraq

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

$$y_0 y = p(x + x_0)$$

şəklindədir.

§ 24. İkitərtibli xəttin diametri

Fərz edək ki, bizə hər hansı afin koordinat sisteminə nəzərən

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

ümumi tənliyinə malik γ ikitərtibli əyrisi və asimptotik istiqamətə malik olmayan $\tilde{p} = [\tilde{p}_1, \tilde{p}_2]$ vektoru verilmişdir.

tərif: γ ikitərtibli xəttinin hər hansı $\tilde{p} = [\tilde{p}_1, \tilde{p}_2]$ istiqamətinə paralel bütün vətərlərin orta nöqtələr çoxluğuna γ ikitərtibli xəttinin $\tilde{p} = [\tilde{p}_1, \tilde{p}_2]$ istiqaməti ilə qoşma diametri deyilir (şəkil 44).

Göstərək ki, γ ikitərtibli əyrisinin istənilən $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ qeyri-asimptotik istiqaməti ilə qoşma olan diametri vardır. Yuxarıda istifadə etdiyimiz lemmaya görə ixtiyari istiqamətə malik olan hər bir vətərin $M(x,y)$ orta nöqtəsinin koordinatları

$$F_1(x,y)p_1 + F_2(x,y)p_2 = 0 \quad \text{və ya}$$

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{10})p_1 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{20})p_2 = 0 \quad (9)$$

şərtini ödəməlidir. Bu tənliyi x,y dəyişənlərinə nəzərən qruplaşdırsaq

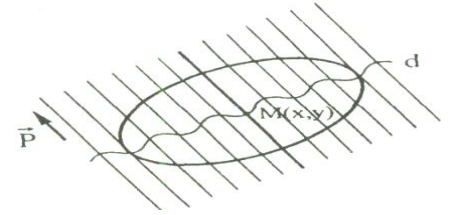
$$(a_{11}p_1 + a_{21}p_2)x + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2)y + a_{10}p_1 + a_{20}p_2 = 0 \quad (9')$$

alırıq. Bu tənlikdəki (x,y) qeyd olunan nöqtələr çoxluğunun ixtiyari (cari) nöqtəsinin koordinatları olduğundan (9) diametrin tənliyi olacaqdır.

Göstərək ki, bu tənlik düz xəttin tənliyidir. Başqa sözlə, x və y -in əmsalları ikisi də birdən sıfır deyil. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, bu əmsalların ikisi də birdən sıfırdır.

$$a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = 0$$

$$a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = 0$$



Şəkil 44.

Bunları (3) tənliyindəki P -nin ifadəsində nəzərə alsaq:

$$p = a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = (a_{11}p_1 + a_{12}p_2)p_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2)p_2 = 0$$

Bu isə $\vec{p}$ -nin qeyri-asimptotik istiqamət olmasına ziddir. Deməli (9) düz xəttin tənliyidir.

Diametrin aşağıdakı bəzi xassələrini qeyd edək:

1°. Bütün diametrlər mərkəzdən keçir. Bunu bilavasitə (9) tənliyindən görmək olar. Bu xassədən asanlıqla çıxır ki, əgər γ ikitərtibli xətti birdən artıq mərkəzə malikdirsə, onda bu əyrinin yalnız bir dənə diametri var.

2°. Əgər γ ikitərtibli ayrıdırsa, onda mərkəzdən keçən və qeyri-asimptotik istiqamətə malik olan hər bir vətər bu əyrinin diametridir.

§ 25. Qoşma diametrlər. qoşmalıq şərti. İkitərtibli əyriyə nəzərən qoşma istiqamətlər.

Tərif: *Biri digərinə paralel vətərlərin orta nöqtələr çoxluğundan ibarət olan diametrlərə biri digərinə qoşma olan diametrlər deyilir.*

Onların istiqamətinə isə γ ikitərtibli əyrisinə nəzərən **qoşma istiqamətlər** deyilir.

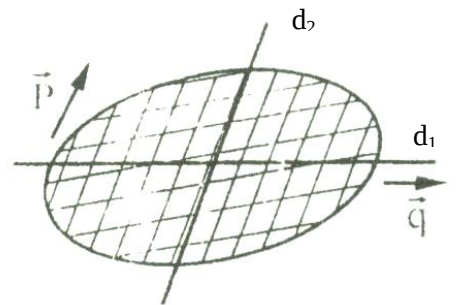
Fərz edək ki, bizə $F(x,y) = 0$ ümumi tənliyinə malik γ ikitərtibli əyrisi verilmişdir. Bu əyriyə nəzərən bir-birinə qoşma olan $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ və $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ vektorlarının qoşmalıq şərtini çıxaraq. Bilirik ki, $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ vektoru ilə qoşma olan diametrin tənliyi (9) şəklindədir. $\vec{q}$ vektoru bu düz xətlə paralel olduğu üçün

$\begin{pmatrix} a_{21}p_1 + a_{22}p_2 \\ a_{11}p_1 + a_{12}p_2 \end{pmatrix} \parallel \vec{q}$ olmalıdır (şəkil 45).

Başqa sözlə

$$-\frac{a_{21}p_1 + a_{22}p_2}{q_1} = \frac{a_{11}p_1 + a_{12}p_2}{q_2} \Rightarrow a_{11}p_1q_1 + a_{12}(q_1p_2 + p_1q_2) + a_{22}p_2q_2 = 0 \quad (10)$$

(10)münasibətinə γ ikitərtibli əyrisinə nəzərən istiqamətlərinin **qoşmalıq şərti** deyilir. bu şərti düz xətlərin bucaq əmsalları vasitəsilə ifadə edək. Burada



Şəkil 45.

$$\frac{P_2}{P_1} = k_1, \frac{q_2}{q_1} = k_2$$

işarə etsək, (10)-şərti aşağıdakı şəkllə düşər:

$$a_{22}k_1k_2 + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{11} = 0 \quad (10)$$

(10)münasibətinə k_1 və k_2 bucaq əmsallarına malik diametrlərin qoşmalığı şərti deyilir.

§ 26. İkitərtibli əyriyə nəzərən baş istiqamətlər. Əyrinin baş diametrləri.

Tərif: Əgər γ ikitərtibli xəttinə nəzərən qoşma istiqamətlər bir-birinə perpendikulyarsa, onda belə istiqamətlərə ikitərtibli xəttə nəzərən baş istiqamətlər deyilir.

(1)tənliyinə malik ikitərtibli xətlərin baş istiqamətlərini tapaq:

Tərifə görə əgər $\bar{p}$ və $\bar{q}$ ikitərtibli xəttə nəzərən baş istiqamətdirsə, onda onların bucaq əmsalları

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \text{ şərtini ödəməlidir.}$$

Bunu (10) tənliyində nəzərə alsaq, baş istiqamətlər üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$-a_{22} + a_{12}\left[-\frac{1}{k_2} + k_2\right] + a_{11} = 0$$

və ya

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0 \quad (11)$$

Alınan düstur γ ikitərtibli xəttinin baş istiqamətinin tapılması düsturudur. Bu tənliyin köklərini tapaq:

$$k = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}$$

Burada aşağıdakı hallar mümkündür:

1) $a_{12} \neq 0$ olsa, onda (11) tənliyinin iki həqiqi kökü var. Başqa sözlə bu halda əyriyə nəzərən iki baş istiqamət var. Belə ki, bu düsturdakı kökalıtı ifadə a_0 -lərin istənilən qiymətində mənfi deyil.

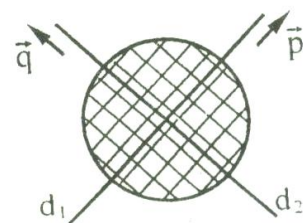
2) $a_{12} = 0$, $a_{22} - a_{11} \neq 0$. Bu halda (11) tənliyi $p_1 \cdot p_1 = 0$ şəklinə düşür. Buradan $p_1 \neq 0$, $q_1 = 0$ və ya $p_1 = 0$, $q_1 \neq 0$ olur. Bu isə $\bar{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ və ya $\bar{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektorları ikitərtibli əyriyə nəzərən baş istiqamətlər olacaqdır. Başqa sözlə, bu halda koordinat oxlarının istiqaməti əyriyə nəzərən baş istiqamətlərdir.

3) $a_{12} = 0$ $a_{11} - a_{22} = 0$. Buradan $a_{11} = a_{22}$ olduğundan ikitərtibli xəttin ümumi tənliyi $a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$

şəklində olar. Bu tənliyin bütün hədlərini a_{11} -ə bölsək tənliyimiz aşağıdakı şəkllə düşər:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

tənliyidir. Çevrənin isə istənilən sayda bir-birinə perpendikulyar olan diametrləri olduğundan, deməli bu halda ikitərtibli xəttə nəzərən sonsuz sayda baş diametrlər mövcuddur (şəkil 46).



Şəkil 46.

Hər bir baş istiqamətə malik diametrə bu **əyrinin baş diametri** deyilir. Baş istiqamətlərin tapılması düsturlarından bilavasitə çıxır ki, ikitərtibli əyri ya iki dənə, ya da sonsuz sayda baş istiqamətlərə malikdir.

§ 27. İkitərtibli xətlərin təsnifatı.

İkitərtibli xəttin təsnifatı dedikdə aşağıdakılar başa düşülür:

Elə düzbucaqlı dekart koordinat sistemi seçilir ki, bu sistemə nəzərən ikitərtibli xəttin tənliyini sadə şəkllə gətirməklə müstəvi üzərində neçə növ ikitərtibli xəttin mövcud olduğu müəyyən olunsun.

Fərz edək ki, bizə $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

ümumi tənliyinə malik γ ikitərtibli xətti verilmişdir. Elə $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemi seçək ki, koordinat oxlarının istiqaməti baş istiqamətə yönəlsin. Bu halda ikitərtibli xətlərin ümumi tənliyində $a_{12} = 0$ olduğunu göstərək. Bunun üçün oxlardan birinin (ox) oxunun $k=0$ bucaq əmsalını baş istiqamətlərin tapılması üçün olan

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0 \quad (11)$$

düsturunda nəzərə alsaq, $a_{12} = 0$ olar.

Onda bu cür seçilmiş koordinat sisteminə nəzərən γ -nın yeni tənliyi aşağıdakı şəkllə düşəcəkdir:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (*)$$

İndi $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ koordinat sisteminin başlanğıcını ikitərtibli xəttin mərkəzinə paralel (oxların istiqamətin dəyişmədən) köçürsək, bildiyimiz kimi əyrinin tənliyində $a_{10} = 0$, $a_{20} = 0$ olacaqdır. Bu halda əyrinin tənliyi aşağıdakı şəkllə düşər:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{00} = 0 \quad (1)$$

Əmsallardan asılı olaraq bu tənlik aşağıdakı tənliklərdən birinə gətirilir:

1) $a_{00} \neq 0$ olduqda

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2) $a_{00} = 0$ olduqda isə

a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

Beləliklə (1) tənliyi göstərilən beş tənlikdən birinə gətirilir ki, bu tənliklərlə təyin olunan xətlər mərkəzli xətlərdir (yeganə mərkəzə malikdir).

Fərz edək ki, ikitərtibli xətt sonsuz sayda mərkəzə malikdir. Onda koordinat sisteminin başlanğıcını bu mərkəzlərdən birinə köçürməklə koordinat vektorunun istiqamətini əyriyə nəzərən asimptotik istiqamətə yönəltsək, onda (*) tənliyi

$$a_{11}x^2 + a_{00} = 0 \quad (11)$$

şəklinə düşər. Bu halda

a) Əgər a_{11} -in a_{00} -in işarələri müxtəlif, başqa sözlə $a_{11} \cdot a_{00} < 0$ olduqda, ikitərtibli xəttin tənliyi $x^2 - a^2 = 0$ şəklinə,

b) $a_{11} \cdot a_{00} > 0$ olduqda, a_{11} və a_{00} -in işarələri eynidirsə, ikitərtibli xəttin tənliyi $x^2 + a^2 = 0$ şəklinə düşəcəkdir.

c)nəhayət (II) tənlikdə $a_{00} = 0$ olduqda bu tənlik $x^2 = 0$ şəklinə düşəcəkdir.

Əgər əyri mərkəzsiz əyridirsə, onda aşkardır ki, bu əyrinin yalnız bir dənə baş diametri vardır. Koordinat sisteminin başlanğıcını diametrin hər hansı bir nöqtəsinə köçürsək ikitərtibli xəttin tənliyi

$$a_{22}y^2 + 2a_{10}x = 0 \text{ və ya } y^2 = 2px$$

şəklinə düşər.

Beləliklə biz göstərdik ki, müstəvi üzərində aşağıdakı tənliklərə malik 9 növ ikitərtibli xətt mövcuddur.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips

2. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbola

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ xəyali ellips

4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ və ya $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ kəsişən həqiqi iki düz xətt.

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ və ya $\frac{x}{a} - i\frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} + i\frac{y}{b} = 0$ kəsişən xəyali iki düz xətt

6. $x^2 - a^2 = 0$ və ya $x - a = 0$, $x + a = 0$ iki paralel həqiqi düz xətt

7. $x^2 + a^2 = 0$ və ya $x - ia = 0$, $x + ia = 0$ iki paralel xəyali düz xətt

8. $x^2 = 0$ üst-üstə düşən iki həqiqi düz xətt

9. $y^2 = 2px$ parabola.

§ 28. İkitərtibli xətlərin ümumi tənliyinin sadələşdirilməsi.

Fərz edək ki, bizə $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən $F(x, y) = 0$ tənliyinə malik γ ikitərtibli xətti verilmişdir. Bu düzbucaqlı koordinat sistemini öz başlanğıcı ətrafında elə α bucağı qədər döndərək ki, alınan yeni $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ koordinat sistemində koordinat

oxlarından birinin, məsələn $\bar{i}$ -in istiqaməti baş istiqamətə yönəlmiş olsun. Bilirik ki, bu zaman alınan tənlikdə xy -həddinin əmsalı $a_{12} = 0$ olacaqdır.

Onda, alınan koordinat sisteminə nəzərən əyrinin tənliyi

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (1)$$

şəklinə düşər. Burada

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11} = a_{11} \cos^2 \alpha + a_{12} \cos \alpha \sin \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha \\ a_{22} = a_{11} \sin^2 \alpha - a_{21} \cos \alpha \sin \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha \\ a_{10} = a_{10} \cos \alpha + a_{20} \sin \alpha \\ a_{20} = -a_{10} \sin \alpha + a_{20} \cos \alpha \\ a_{00} = a_{00} \end{cases}$$

Məlumdur ki, bu zaman çevirmə düsturları

$$\begin{cases} x = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

i istiqaməti ikitərtibli xətlə nəzərən baş istiqamətə yönəldiyindən onun $\begin{bmatrix} \cos \alpha, \sin \alpha \end{bmatrix}$ koordinatları baş istiqamətlərin tapılma

$$a_{12} p_2^2 + (a_{11} - a_{22}) p_1 p_2 - a_{12} p_1^2 = 0$$

düsturunu ödəməlidir. Başqa sözlə

$$a_{12} \sin^2 \alpha + a_{11} \sin \alpha \cos \alpha - a_{22} \cos \alpha \sin \alpha - a_{12} \cos^2 \alpha = 0$$

Buradan

$$\sin \alpha (a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha) = \cos \alpha (a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha)$$

alınan nisbəti λ ilə işarə edək:

$$\frac{a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha}{\sin \alpha} = \lambda$$

Bu şərti ödəyən λ ədədinin olub-olmadığını müəyyən etməliyik. Sonuncu ifadədən

$$\begin{cases} a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha = \lambda \cos \alpha \\ a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha = \lambda \sin \alpha \end{cases} \quad (3)$$

və ya

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha = 0 \\ a_{21} \cos \alpha + (a_{22} - \lambda) \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (4)$$

(4) tənliklər sisteminin əmsallarından düzəldilmiş baş determinant sıfırdan fərqli ola bilməz. Əks halda, bu bircinsli xətti tənliklər sistemi yeganə trivial həllə malik olardı, başqa sözlə,

$$\begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

olardı. Lakin eyni bucağın sinus və kosinusu sıfır ola bilməz. Onda

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{və ya}$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \quad (5)$$

olar. (5) tənliyi ikitərtibli əyrinin **xarakterik tənliyi** adlanır. Bu tənliyin köklərini araşdıraraq:

$$\lambda = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{2}$$

Buradan görünür ki., xarakteristik tənlik iki dənə həqiqi kökə malikdir. Belə ki, kökaltı ifadə əmsallardan asılı olmayaraq mənfi ola bilməz. Bu isə o deməkdir ki, (4) tənliklər sistemini ödəyən həmişə iki dənə λ ədədi var. Bu kökləri λ_1 və λ_2 ilə işarə edək. Sistemdəki tənliklərdən birini götürüb, onun hər iki tərəfini $\cos \alpha \neq 0$ -a bölsək aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$tg \alpha = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} \quad (6)$$

Beləliklə biz göstərdik ki, düzbucaqlı dekart koordinat sistemini (6) tənliyindən tapılan α bucağı qədər döndərsək, koordinat oxları baş istiqamətə yönəlmiş olacaqdır ki, bu cür koordinat sistemində $a_{12} = 0$ olur.

İndi (1) tənliyindəki digər əmsalların tapılması ilə məşğul olaq. Əvvəlcə a_{10} və a_{20} əmsallarını hesablamaq üçün $\sin \alpha$ və $\cos \alpha$ -nı $tg \alpha$ ilə ifadə edək:

$$\sin \alpha = \frac{tg \alpha}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}$$

(*) ifadəsindəki tənliklərdən birinci ilə ikinci tənlikləri tərəf-tərəfə toplasaq:

$$a_{11} + a_{22} = a_{11} + a_{22} \quad (7)$$

olar.

$$a_{11} = (a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha) \cos \alpha + (a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha) \sin \alpha$$

şəklində qruplaşdırıb, (3)-ü nəzərə alsaq

$$a_{11} = \lambda_1 \cos^2 \alpha + \lambda_1 \sin^2 \alpha = \lambda_1$$

$a_{11} = \lambda_1$ olduğunu alırıq.

Digər tərəfdən, Viyet teoreminə görə (5) xarakteristik tənliyindən

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}.$$

Bunu (7) ifadəsi ilə müqayisə etsək,

$$a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{olar.}$$

$a_{11} = \lambda_1$ olduğunu burada nəzərə alsaq, alırıq ki, $a_{22} = \lambda_2$.

Beləliklə, biz göstərdik ki, düzbucaqlı dekart koordinat sistemini öz başlanğıcı ətrafında (6) tənliyindən tapılan α bucağı qədər döndərsək, ikitərtibli xəttin tənliyi

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

şəklinə düşər. Burada yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi

$$\begin{cases} a_{10} = a_{10} \cos \alpha + a_{20} \sin \alpha \\ a_{20} = -a_{10} \sin \alpha + a_{20} \cos \alpha \end{cases}$$

Beləliklə, biz ikitərtibli xəttin ümumi tənliyinin sadələşdirilməsi üsulunu göstərdik.

§ 29. Ümumi tənliyinə görə ikitərtibli əyrinin qurulması.

Biz yuxarıda əyrinin ümumi tənliyinin sadələşdirilməsi yolunu öyrəndik. Bundan istifadə edərək, ümumi tənliyinə görə ikitərtibli əyrini qura bilərik. Bunu aşağıdakı ardıcılıqla etmək lazımdır.

a) əyrinin $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$ xarakterik tənliyini yazıb, onun köklərini tapmaq.

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}}$ ifadəsindən $\cos \alpha$ və $\sin \alpha$ -nı tapmaq.

c) Koordinat sistemini α bucağı qədər döndərmək. Başqa sözlə elə $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ koordinat sistemi

quraq ki, burada $\bar{i} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$, $\bar{j} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$ olsun.

d) a_{10} və a_{20} tapmaq.

e) Koordinat sistemini əyrinin O mərkəzinə paralel köçürməklə alınan $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ koordinat sistemində əyrini kanonik tənliyinə görə qurmaq.

İndi ümumi tənliyinə görə ikitərtibli xəttin qurulmasına aid bir məsələ həll edək.

Məsələ: Aşağıdakı ümumi tənliyi ilə verilmiş ikitərtibli xətləri düzbucaqlı dekart koordinat sistemində qurun:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$$

Həlli:

1) Verilmiş bu əyrinin $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$ xarakteristik tənliyini yazıb, onun köklərini tapmaq:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 25\lambda &= 0 \\ \lambda_1 &= 0, \quad \lambda_2 = 25 \end{aligned}$$

2) Yeni seçəcəyimiz $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ koordinat sisteminin bazis vektorlarının koordinatlarını tapmaq:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} = \frac{-9}{-12} = \frac{3}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{3}{5}$$

3) $\vec{i} = \begin{bmatrix} \cos \alpha; \sin \alpha \end{bmatrix}$, $\vec{j} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha; \cos \alpha \end{bmatrix}$ olduğundan $\vec{i} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}; \frac{3}{5} \end{bmatrix}$, $\vec{j} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ olacaqdır.

$\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ koordinat sistemini quraq.

Bildiyimiz kimi qurduğumuz bu yeni $O\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemində verilmiş ikitərtibli xəttin tənliyi

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

şəklinə düşəcəkdir. Burada $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 25$.

4) a_{10} və a_{20} əmsallarını hesablayaq.

$$a_{10} = a_{10} \cos \alpha + a_{20} \sin \alpha = 25$$

$$a_{20} = -a_{10} \sin \alpha + a_{20} \cos \alpha = 50$$

Verilmiş tənlikdən

$$a_{00} = -50$$

Bunları sonuncu tənlikdə yerinə yazsaq,

$$25y^2 + 50x + 100y - 50 = 0$$

$$y^2 + 2x + 4y - 2 = 0$$

İndi bu tənlikdən əyrinin mərkəzini tapaq.

Bunu iki üsulla, ya əyrinin mərkəzinin tapılması düsturlarından istifadə etməklə, ya da tənliyi x və y -ə nəzərən tam kvadrata gətirməklə etmək olar.

Biz ikinci üsuldən istifadə edəcəyik.

$$(y + 2)^2 - 4 + 2x - 2 = 0$$

$$(y + 2)^2 - 2x - 6 = 0$$

$$(y + 2)^2 + 2(x - 3) = 0$$

Buradan görürük ki, əyrinin mərkəzi $O(3, -2)$ nöqtəsi olacaqdır.

5) Əyrinin mərkəzini bu nöqtəyə köçürsək onun tənliyi

$$Y^2 = -2X$$

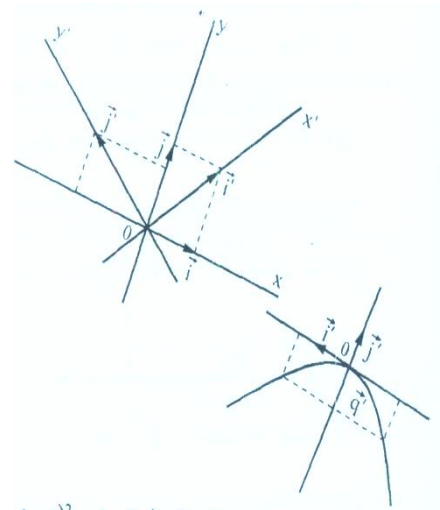
şəklinə düşər ki, bu da parabola əyrisidir. Bu zaman çevrilmə düsturları

$$\begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y - 2 \end{cases} \quad \text{olar.}$$

6) Nəhayət, aldığımız $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemində $y^2 = -2X$ kanonik tənliyinə görə parabolunu qurmaq olar (şəkilə bax).

İndi V fəslə aid bir neçə məsələ həll edək.

Məsələ 1: $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$ əyrisinin mərkəzini təyin edin.



Həlli: Məlumdur ki, (1) əyrisinin mərkəzi

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0, \quad a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0$$

tənliklər sistemi ilə təyin olunur. ona görə yazı bilərik:

$$\left. \begin{aligned} 3x_0 - y_0 + 2 &= 0 \\ -x_0 + 3y_0 + 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 9x_0 - 3y_0 + 6 &= 0 \\ -x_0 + 3y_0 + 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8x_0 = -8, x_0 = -1.$$

x-in bu qiymətini ikinci tənlikdə yerinə yazaq: $1 + 3y_0 + 2 = 0$, $y_0 = -1$. Deməli, əyrinin mərkəzi $M_0(-1; -1)$ nöqtəsindədir.

Məsələ 2. $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ xəttinin asimptotlarının tənliyini yazın.

Həlli: Xəttin asimptotlarının tənliyi

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{10})p_1 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{20})p_2 = 0$$

şəklindədir. Burada p_1, p_2 verilmiş xəttə nəzərən asimptotik istiqaməti təyin edən vektorun koordinatlarıdır. Həmin koordinatlar

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0$$

tənliyi ilə təyin olunur.

$$3p_1^2 + 10p_1p_2 + 7p_2^2 = 0 \Rightarrow 3k^2 + 10k + 7 = 0 \quad \text{burada}$$

$$k = \frac{p_1}{p_2} \quad k = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 21}}{3} = \frac{-5 \pm 2}{3}.$$

$$k_1 = \frac{-5 + 2}{3} = -1, \quad k_2 = \frac{-5 - 2}{3} = -\frac{7}{3}. \text{ Onda}$$

$$k(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + (a_{12}x + a_{22}y + a_{20}) = 0$$

Məsələ 3: $M_0(1; 0)$ nöqtəsindən keçən və $3x^2 + 7xy + 5y^2 - 2x - 2y = 0$ ikitərtibli xəttinə toxunan düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli:

$M_0(1; 0)$ nöqtəsindən keçən düz xətlər dəstəsinin tənliyini yazaq:

$$y = k(x - 1) \quad (*)$$

Qəbul edək ki, bu verilmiş xəttə toxunan düz xəttin tənliyidir. Onda verilmiş tənlik ilə bu tənlik birgədir, yəni onlardan ibarət olan tənliklər sisteminin həlli vardır. Ona görə

$$\begin{cases} 3x^2 + 7xy + 5y^2 - 2x - 2y = 0 \\ y = kx - k \end{cases}$$

tənliklər sistemini həll edək:

$$3x^2 + 7x(kx - k) + 5(kx - k)^2 - 2x - 2(kx - k) = 0 \Rightarrow (5k^2 + 7k + 3)x^2 - (10k^2 + 9k + 2)x + (5k^2 + 2k) = 0$$

M_0 nöqtəsindən keçən düz xətt verilmiş tənliklə təyin olan xəttə toxunduğundan, x dəyişənindən asılı alınmış kvadrat tənliyin diskriminantı sıfıra bərabər olmalıdır, yəni

$$(10k^2 + 9k + 2)^2 - 4(5k^2 + 7k + 3)(5k^2 + 2k) = 0$$

və ya

$$5k^2 + 12k - 4 = 0 \Rightarrow k_1 = -\frac{2}{5}, \quad k_2 = -2$$

k_1 və k_2 -ni növbə ilə (*) tənliyində nəzərə alsaq, tapırıq:

$$2x + 5y - 2 = 0, \quad 2x + y - 2 = 0.$$

Məsələ 4. $x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$ xəttinin $\vec{a} = (1; 2)$ vektoruna qoşma olan diametrin tənliyini yazın.

Həlli: $\vec{p} = (p_1; p_2)$ vektoruna qoşma olan diametrin tənliyi

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2)x + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)y + (a_{10}p_1 + a_{20}p_2) = 0$$

şəklindədir. Bu tənlikdən istifadə edərək yazı bilərik:

$$\left[1 \cdot 1 + \left[-\frac{3}{2}\right] \cdot 2\right]x + \left[\left[-\frac{3}{2}\right] \cdot 1 + 2 \cdot 2\right]y + ((-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 2) = 0 \Rightarrow -2x + \frac{5}{2}y - 4 = 0 \text{ və ya}$$

$$4x - 5y + 8 = 0$$

Məsələ 5: Oxların döndərilməsi vasitəsilə $23x^2 + 72xy + 2y^2 + 25 = 0$ əyrisinin tənliyini sadələşdirin:

Həlli: İkitərtibli xəttin xarakteristik tənliyini yazaq:

$$\lambda^2 - (23 + 2)\lambda + (23 \cdot 1 - 36^2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 25\lambda - 1250 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -25, \quad \lambda_2 = 50$$

Onda verilmiş tənlik $-25x^2 + 50y^2 + 25 = 0$ şəklini alar. Buradan da tapırıq:

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Məsələ 6: Düzbucaqlı dekart koordinat sisteminin oxlarının döndərilməsi və koordinat başlanğıcının köçürülməsi vasitəsilə

$$40x^2 + 36xy + 25y^2 - 8x - 14y + 1 = 0$$

tənliyini sadə şəklə gətirin.

Həlli: Əvvəlcə xəttin xarakteristik tənliyinin köklərini təyin edək:

$$\lambda^2 - (40 + 25)\lambda + (40 \cdot 25 - 18^2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 65\lambda + 676 = 0$$

$$\lambda^2 - 52\lambda - 13\lambda + 676 = 0 \Rightarrow (\lambda - 52)\lambda - 13(\lambda - 52) = 0 \Rightarrow (\lambda - 52)(\lambda - 13) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 52, \quad \lambda_2 = 13.$$

Onda $52x^2 + 13y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ olar. λ -in qiymətindən istifadə edərək tapa bilərik:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{52 - 40}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}.$$

buradan da

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$\sin \alpha$ və $\cos \alpha$ -in qiymətlərindən istifadə etməklə a_{10} və a_{20} əmsallarını tapmaq olar:

$$a_{10} = a_{10} \cos \alpha + a_{20} \sin \alpha = (-4) \frac{3}{\sqrt{13}} + (-7) \frac{2}{13} = \frac{-12}{\sqrt{13}} + \frac{-14}{\sqrt{13}} = \frac{-26}{\sqrt{13}}$$

$$a_{20} = -a_{10} \sin \alpha + a_{20} \cos \alpha = (-1) \cdot (-4) \frac{2}{\sqrt{13}} + (-7) \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}} - \frac{21}{\sqrt{13}} = -\frac{13}{\sqrt{13}}$$

Onda

$$52x^2 + 13y^2 - 4\sqrt{13}x - 2\sqrt{13}y + 1 = 0,$$

$$52 \left[x^2 - 2 \frac{2\sqrt{13}}{52} x + \frac{52}{52} \right] + 13 \left[y^2 - 2 \frac{\sqrt{13}}{13} y + \frac{13}{13^2} \right] + 1 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow 52X^2 + 13Y^2 = 1$$

Burada

$$X = x^2 - 2 \frac{2\sqrt{13}}{52} x + \frac{1}{52}; \quad Y = y^2 - 2 \frac{\sqrt{13}}{13} y + \frac{1}{13}$$

ÇALIŞMALAR.

1. Aşağıdaki tənliklər ilə verilmiş xətlərin mərkəzini tapın:

a) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 11 = 0$.

b) $2x - y - 4x + 2y + 11 = 0$.

v) $4x^2 + 4xy + y^2 - 10x - 5y + 6 = 0$.

q) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.

d) $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 2y - 11 = 0$.

e) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.

2. Aşağıdakı xətlərə nəzərən asimptotik istiqamətə malik olan vektorları tapın.

a) $4x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 7 = 0$.

b) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$.

v) $x^2 - 2xy + 5y^2 - 3x + 5 = 0$.

q) $x^2 - axy + 5x - y = 0$.

3. Tənliyi verilmiş:

a) $10x^2 + 21xy + 9y^2 - 30y + 4 = 0$.

b) $x^2 3xy - 10y^2 + 6x - 8y = 0$.

v) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y - 14 = 0$.

q) $3x^2 + 7xy + 4y^2 + 5x + 2y - 6 = 0$. d) $10xy - 2y^2 + 6x + 4y + 21 = 0$.

xəttin asimptotlarının tənliyini yazın.

4. $4xy - 5y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ ikitərtibli xəttin $M(-4;1)$ nöqtəsindən keçən diametrinin tənliyini yazın.

5. $5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x = 0$ xəttinin $2x - 3y = 0$ düz xəttinə paralel diametrini tapın.

6. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$ və $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$ xəttinin ortaq diametrini tapın.

7. İki $A(2;1)$, $B(1;4)$ nöqtəsi və $3x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$ xətti verilmişdir. Xəttin A nöqtəsindən keçən diametrinə qoşma olan və B nöqtəsindən keçən vətərinin tənliyini yazın.

8. Koordinat başlanğıcından keçən və $3x^2 + 7xy + 5y^2 + 8x + 5y + 1 = 0$ xəttinə toxunan düz xəttin tənliyini yazın.

9. Düzbucaqlı koordinat sistemində

a) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$,

b) $5x^2 + 24xy - 2y^2 + 4x - 1 = 0$,

v)

$x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$ xəttinin baş oxlarının tənliyini yazın.

10. Koordinat başlanğıcının köçürülməsi vasitəsilə

a) $2x^2 - 8x + 4y + 9 = 0$,

b) $x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 13 = 0$,

v) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$,

q) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$,

d) $x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 23 = 0$

e) $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$ tənliklərini sadələşdirin.

VI FƏSİL

MÜSTƏVİNİN ÇEVİRİLMƏSİ.

§ 30. İnikas və çevrilmələr.

Tərif: Fərz edək ki, bizə hər hansı boş olmayan X, Y çoxluqları verilmişdir. Əgər X çoxluğundan götürülmüş hər bir x elementinə Y çoxluğundan olan y elementi müəyyən qayda ilə qarşı qoyulmuşsa, onda deyirlər ki, X çoxluğunun Y çoxluğuna inikas verilmişdir və aşağıdakı kimi işarə olunur:

$$f : X \rightarrow Y$$

$x \in X$ elementinə $y \in Y$ elementi uyğundursa, onda bu uyğunluq

$$f(x) = y$$

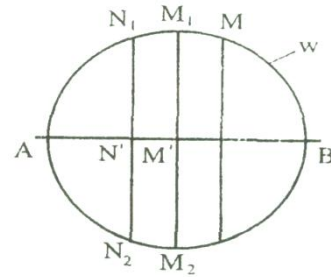
kimi yazılır.

Tərifdən bilavasitə çıxır ki, X və Y ədədi çoxluqlar olarsa, onda funksiyanın tərifini inikasin tərifinə ilə üst-üstə düşür. Deməli, funksiya inikasin xüsusi halıdır. Funksiyada olduğu kimi burada da X çoxluğuna inikasin **təyin oblastı**, Y çoxluğuna isə onun **qiymətlər çoxluğu** deyilir.

$y = f(x)$ olduqda y elementinə x -in **obrazı**, x elementinə y -in **proobrazı** deyilir.

1) Əgər $x_1 \neq x_2$ olduqda $f(x_1) \neq f(x_2)$ ($y_1 \neq y_2$) olarsa, onda bu cür inikasa **inyektiv inikas** və ya **inyeksiya** deyilir.

2) Əgər f inikası zamanı X çoxluğunun obrazı Y çoxluğu ilə üst-üstə düşərsə, başqa sözlə $f(X) = Y$ olarsa, onda bu cür inikasa **suryektiv inikas** və ya **suryeksiya** deyilir.



Şəkil 47.

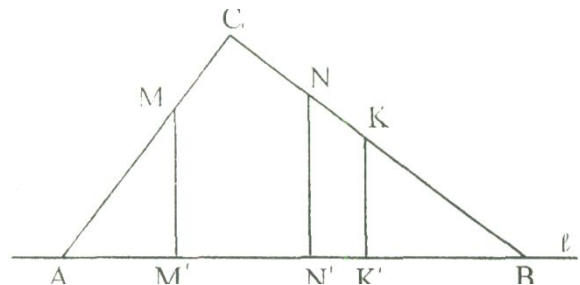
3) $f : X \rightarrow Y$ inikası həm inyektiv, həm də suryektiv olarsa, onda bu inikasa **biyektiv inikas** və ya **biyeksiya** deyilir.

Misal 1. Fərz edək ki, bizə ω çevrəsi verilmişdir. Bu çevrə üzərində götürülmüş hər bir M nöqtəsini bu çevrənin diametri üzərindəki ortoqonal proyeksiyasına qarşı qoyaq (şəkil 47). Alınan inikas qarşılıqlı birqiymətli olmayacaqdır. Belə ki, diametrə perpendikulyar olan vətərin M_1, M_2 uc nöqtələrinə onun diametrlə eyni bir M kəsişmə nöqtəsi uyğun olacaq. Lakin bu zaman çevrənin bütün nöqtələri bu diametrə inikas olunacaqdır. Deməli, bu

$$f : \omega \rightarrow \overline{AB}$$

inikası inyektiv deyil, lakin suryektivdir.

Misal 2. Hər hansı ABC üçbucağı götürək. Üçbucaq üzərində götürülmüş, hər bir nöqtəyə onun AB düz xətti üzərindəki ortoqonal proyeksiyasını qarşı qoyaq. Təyin olunan $f : \Delta \rightarrow (AB)$ inikası inyektivdir, suryektiv deyil. Belə ki, üçbucağın tərəfləri üzərində götürülmüş hər bir nöqtəyə l düz xətti üzərində yeganə nöqtə uyğun gəlir. Lakin bu üçbucaq üzərindəki nöqtələr çoxluğunun obrazları $\overline{AB}$ parçasını təyin edir. Bu da (AB) düz xəttindən fərqlidir:

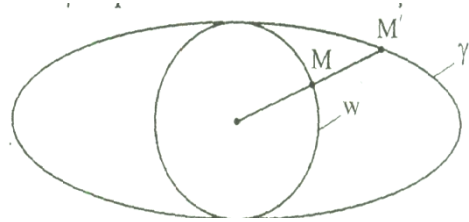


Şəkil 48.

$$f : (\Delta) = \overline{AB} \neq (AB).$$

Deməli, bu inikas inyektivdir, lakin suryektiv deyil. Əgər biz Y qiymətlər çoxluğunu (AB) düz xətti deyil, $\overline{AB}$ parçası götürsəydik, onda təyin etdiyimiz inikas həm inyektiv, həm də suryektiv, başqa sözlə, biyektiv inikas olardı.

Misal 3. Eyni mərkəzli və bir-birinə iki nöqtədə toxunan ω çevrəsi və γ ellipsi verilib. Mərkəzdən kəçən hər bir düz xəttin çevrə ilə kəsişmə nöqtəsini ellipslə kəsişmə nöqtəsinə qarşı qoyaq. Alınan $f: \omega \rightarrow \gamma$ inikası həm inyektiv, həm də suryektiv olur. Başqa sözlə biyektiv inikasdır (şəkil 49).



Şəkil 49.

Tərif: *Çoxluğun öz-özünə biyektiv inikasına çevirmə deyilir. Bəzənbuna çevrilmə də deyilir.*

Biz adətən müstəvinin çevrilmələrindən danışacağıq. Onda bu halda çevirməyə aşağıdakı kimi tərif vermək olar.

Müstəvinin öz-özünə biyektiv inikasına çevirmə deyilir. Əgər çevirmə müstəvinin ixtiyari nöqtəsini öz-özünə çevirərsə, belə çevirməyə eynilik çevirməsi deyilir. Bu çevirməyə bəzən vahid çevirmə də deyilir.

Fərz edək ki, bizə $f(x)=y$ çevirməsi verilmişdir. hər bir $y \in Y$ elementinə elə $x \in X$ elementini qarşı qoyaq ki, $f(x)=y$ olsun. Başqa sözlə, x elementi y -in obrazı olsun, onda belə çevirməyə f çevirməsinin **tərs çevirməsi** deyilir və

$$f^{-1}(y) = x$$

kimi işarə olunur. Aşkardır ki, hər bir çevirmənin tərs çevirməsi var.

Çevirmələr qrupu və onun alt qrupu. Fərz edək ki, bizə f və g çevirmələri verilib və f çevirməsi x elementini y -ə, g çevirməsi də y elementini z -ə çevirir:

$$f(x) = y, \quad g(y) = z$$

Bunların ardıcıl təsiri nəticəsində x elementi z -ə çevrilir. Başqa sözlə, $x \rightarrow z$. Bu da çevirmədir və bunu $f \cdot g$ kimi işarə edirlər.

$$f \cdot g(x) = z$$

çevirməsinə f və g çevirmələrinin **kompozisiyası** deyilir. Çevirmələrin kompozisiyası aşağıdakı şərtləri ödəsə, onda G çevirmələr çoxluğuna bu çevirmələrin kompozisiyasına nəzərən **qrup** deyilir:

1. $h, g, f \in G \Rightarrow h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$
2. $f, g \in G \Rightarrow f \cdot g \in G$
3. $f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G$.

Beləliklə, G çoxluğunda bu şərtlər ödənildikdə deyirlər ki, G çoxluğu çevirmələrin kompozisiyasına nəzərən qrupdur və belə işarə olunur: (G_0) .

$H \neq \emptyset$ aşağıdakı şərtləri ödədikdə bu çoxluğa G -nin **alt qrupu** deyilir:

1. $H \in G$
2. H çoxluğu G -də təyin olunan əmələ nəzərən qrupdur.

Qeyd edək ki, eyni bir çoxluğun bütün çevirmələri onların kompozisiyasına nəzərən qrup təşkil edir. Onda $H \in G$ -nin G çoxluğunun alt qrupu olması üçün qrupun tərifindəki sonuncu iki şərti ödəməsi kifayətdir:

1. $f, g \in H \Rightarrow f \cdot g \in H$
2. $f \in H \Rightarrow f^{-1} \in H$.

§ 31. Müstəvinin hərəkəti.

Tərif: *Müstəvinin iki nöqtəsi arasındakı məsafəni dəyişməyən hər bir çevirməyə müstəvinin hərəkəti deyilir. Başqa sözlə əgər müstəvinin f çevirməsi*

$$f(M) \rightarrow M, \quad f(N) \rightarrow N$$

olduqda $\rho(M, N) = \rho(f(M), f(N))$ olarsa, bu çevirmə **müstəvinin hərəkəti** adlanır.

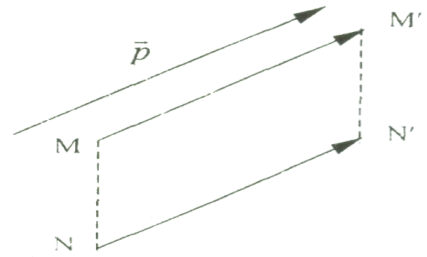
Eynilik çevirməsi hərəkətin ən bariz nümunəsidir. Hərəkətə aid digər misallar göstərək:

Misal 1. Paralel köçürmə.

Fərz edək ki, bizə hər hansı $\vec{p} \neq 0$ vektoru verilib. Müstəvinin hər bir M nöqtəsinə elə M' nöqtəsinə qarşı qoyaq ki, $\vec{MM'} = \vec{p}$ olsun.

Məlumdur ki, bu cür inikas biyektivdir. Başqa sözlə çevirmədir. Bu cür çevirməyə $\vec{p}$ vektoruna malik **parallel köçürülmə** deyilir.

Əgər $\vec{p}$ parallel köçürülməsi M nöqtəsinə M' -ə və N nöqtəsinə N' -ə çevirirsə, onda



Şəkil 50.

$$\vec{MM'} = \vec{NN'} = \vec{p} \Rightarrow \vec{MN} = \vec{M'N'}$$

İndi parallel köçürmənin koordinatlarla ifadəsini çıxaraq.

Müstəvi üzərində hər hansı düzbucaqlı dekart koordinat sistemi götürüb, $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $M(x,y)$, $M'(x',y')$ işarə edək.

$\vec{MM'} = \vec{p}$ olduğundan

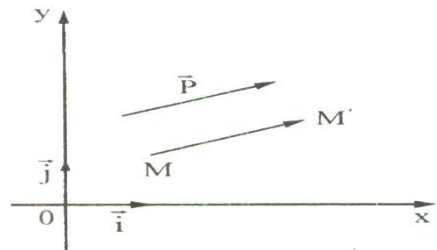
$$\begin{cases} x' - x = p_1 \\ y' - y = p_2 \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} x' = x + p_1 \\ y' = y + p_2 \end{cases} \quad (1)$$

Aşkardır ki, koordinatları (x,y) olan hər bir M nöqtəsinə koordinatları (1) düsturundan tapılan $M'(x',y')$ nöqtəsinə çevirən çevirmə $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ vektoruna malik parallel köçürmədir. Deməli (1) düsturları parallel köçürmənin koordinatlarla ifadəsidir.

Misal 2. Ox simmetriyası.

Əgər l düz xətti $\overline{MM'}$ parçasının orta nöqtəsindən keçib, ona perpendikulyar olarsa, onda M və M' nöqtələrinə l düz xəttinə nəzərən **simmetrik nöqtələr** deyilir. l düz xəttinə **simmetriya oxu** deyilir.

Fərz edək ki, bizə hər hansı l düz xətti verilmişdir. Müstəvinin hər hansı M nöqtəsinə elə M' nöqtəsinə qarşı qoyaq ki, bu nöqtələr l düz xəttinə nəzərən simmetrik olsun.



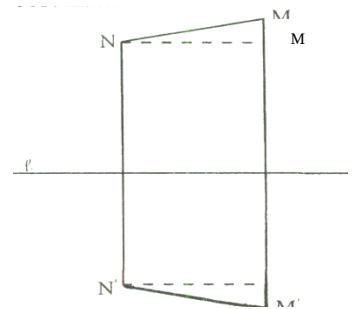
Şəkil 51.

Tamamilə aşkardır ki, bu cür çevirmə iki nöqtə arasındakı məsafəni dəyişmir. Belə çevirməyə **ox simmetriyası** deyilir (şəkil 52).

Ox simmetriyasının koordinatlarla ifadəsini verək:

Elə $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ düzbucaqlı dekart

koordinat sistemi götürək ki, onun absis oxu simmetriya oxu ilə üst-üstə düşsün. Seçilmiş koordinat sistemində M nöqtəsinin koordinatlarını (x,y) , M' nöqtəsinin koordinatlarını isə (x',y') ilə işarə edək. Bu cür koordinat sistemində $\overline{MM'}$ parçası absis oxuna perpendikulyar olub, bu oxla yarıya bölündüyündən onun M_0 orta nöqtəsinin koordinatları $(x,0)$ olacaqdır. Parçanın yarıya bölünmə düsturlarından



Şəkil 52

$$\begin{cases} \frac{x+x}{2} = x \\ \frac{y+y}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -y \end{cases} \quad (2)$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, (2) düsturları ilə təyin olunan

$$l : M \rightarrow M$$

çevirməsi (ox) oxuna malik simmetriya çevirməsidir. Çevirmə iki nöqtə arasındakı məsafəni dəyişmir. Başqa sözlə hərəkətdir.

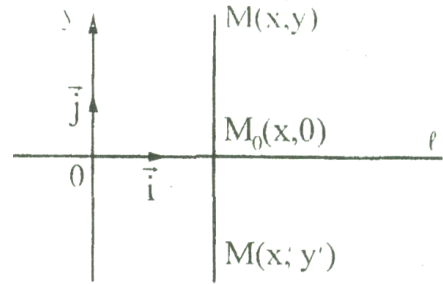
Misal 3. Mərkəzi simmetriya.

Əgər verilmiş O nöqtəsi $\overline{MM}$ parçasını yarıya bölürsə, onda M və M nöqtələri O nöqtəsinə nəzərən **simmetrik nöqtələr** adlanır. O nöqtəsinə **simmetriya mərkəzi** deyilir. Müstəvinin hər hansı M nöqtəsinə elə M nöqtəsini qarşı qoyaq ki, bu nöqtələr verilmiş O nöqtəsinə nəzərən simmetrik olsun. Fərz edək ki, O mərkəzli simmetriya nəticəsində

$$M \rightarrow M \text{ və } N \rightarrow N$$

onda şəkil 54-dən tamamilə aşkardır ki,

$$MN = MN$$



Şəkil 53.

İndi elə düzbucaqlı dekart koordinat sistemi seçək ki, onun mərkəzi simmetriya mərkəzi ilə üst-üstə düşsün. Bu cür koordinat sistemə nəzərən bu çevirmənin koordinatlarla ifadəsini verək.

Bu koordinat sistemində M nöqtəsinin koordinatlarını (x,y) və M nöqtəsinin koordinatlarını (x, y) ilə işarə edək. $\overline{MM}$ parçası koordinat başlanğıcında yarıya bölündüyündən

$$\begin{cases} \frac{x+x}{2} = 0 \\ \frac{y+y}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x \\ y = -y \end{cases} \quad (3)$$

Bu düsturlar mərkəzi koordinat başlanğıcında olan simmetriyanın koordinatlarla ifadəsidir.

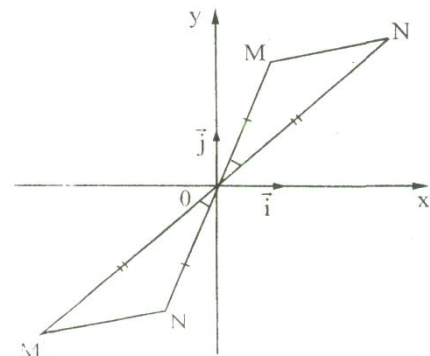
Misal 4. Dönmə.

Fərz edək ki, bizə oriyentasiya olunmuş müstəvi üzərində hər hansı O nöqtəsi və α bucağı verilmişdir. Müstəvinin hər bir M nöqtəsinə elə M nöqtəsini qarşı qoyaq ki, $M \rightarrow M$ ($M \neq O$) aşağıdakı şərtləri ödəsin:

1. $OM = OM$

2. $\angle \vec{OM} \vec{OM} = \alpha$

Aşkardır ki, bu cür təyin olunmuş $f : M \rightarrow M$ inikası qarşılıqlı birqıymətlidir. Başqa sözlə, müstəvinin çevirməsidir. Bu çevirməyə dönmə deyilir. Burada O nöqtəsi dönmə mərkəzi, α bucağı isə dönmə bucağı adlanır.



Şəkil 54.

Başlanğıcı dönmə çevirməsinin O mərkəzində yerləşən düzbucaqlı dekart koordinat sistemi götürüb, dönmənin bu sistemə nəzərən koordinatlarla ifadəsini çıxaraq (şəkil 55). Bunun üçün M

nöqtəsinin koordinatlarını (x,y), M nöqtəsinin koordinatlarını (x, y) ilə işarə edək. Onda $\vec{OM}$ və

$\vec{OM}$ vektorlarının koordinatları uyğun olaraq

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ olacaqdır.

Bu vektorlar arasında qalan bucağın sinus və kosinusunu bizə məlum olan düsturlarla yazaq:

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{vmatrix} x & y \\ x & y \end{vmatrix} \right|}{\left| \vec{OM} \right| \cdot \left| \vec{OM} \right|} = \frac{xy - xy}{x^2 + y^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{xx + yy}{x^2 + y^2}.$$

Bu düsturların birincisini y-ə, ikincisini x-ə vurub, tərəf-tərəfə toplasaq

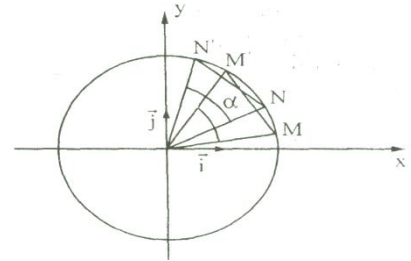
$$x \cos \alpha - y \sin \alpha = x$$

sonra onlardan birincini x-ə ikincini y-ə vurub tərəf-tərəfə çıxsaq $x \sin \alpha + y \cos \alpha = y$ alırıq.

Beləliklə, dönmə çevirməsinin koordinatlarla ifadəsini

$$\begin{cases} x = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y = y \sin \alpha + x \cos \alpha \end{cases} \quad (4)$$

almış oluruq. Beləliklə, asanlıqla göstərmək olar ki, (4) düsturları vasitəsilə təyin olunan $\varphi: M \rightarrow M$ çevirməsi α dönmə bucağına malik dönmədir. Bu çevirmə iki nöqtə arasındakı məsafəni dəyişməmiş, başqa sözlə hərəkətdir. İndi hərəkətə aid bəzi faktları qeyd edək. Bunun üçün «afin reper» anlayışını verək:



Şəkil 55.

Hər bir afin koordinat sistemini bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtə ilə vermək olar. Əgər $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ afin koordinat sistemində bazis vektorların uc nöqtələrini uyğun olaraq E_1 və E_2 ilə

işarə etsək, onda $\vec{e}_1 = \vec{OE}_1$, $\vec{e}_2 = \vec{OE}_2$ olar və verilmiş $\{E_1, E_2\}$ nöqtələr üçlüyü afin koordinat sistemi ilə eynigüclü olar. Ona görə də bəzən afin koordinat sistemini üç nöqtə ilə verirlər. Belə üç nöqtəyə müstəvi üzərində **afin reper** deyilir və $R = \{A, B, C\}$ kimi yazılır.

Xüsusi halda $\left| \vec{OE}_1 \right| = \left| \vec{OE}_2 \right|$ və $\vec{OE}_1 \perp \vec{OE}_2$ olarsa, onda belə reperə

ortonormal reper deyilir.

Teorem: *Hərəkət hər bir afin reperi afin reperə, xüsusi halda ortonormal reperi ortonormal reperə çevirir.*

İsbatı:

Tutaq ki, bizə $R = \{A, B, C\}$ reperi və g hərəkəti verilmişdir.

A, B, C nöqtələrinin g hərəkətindəki obrazlarını A, B, C ilə işarə edək.

A, B, C bir düz xətt üzərində yerləşmədiyindən

$$AB < AC < BC.$$

Lakin hərəkət iki nöqtə arasındakı məsafəni dəyişmədiyindən

$$AB = AB, \quad AC = AC, \quad CB = CB$$

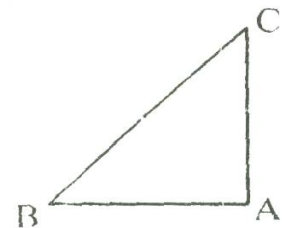
onda

$$AB < AC + BC.$$

Bu o deməkdir ki, A, B, C bir düz xətt üzərində yerləşməyib. Başqa sözlə,

$$g(R) = R = \{A, B, C\}$$

Teoremin ikinci hissəsi tamamilə aşkardır. Doğrudan da, əgər $R = \{A, B, C\}$ reperi ortonormal reperdirsə, onda $\angle A = 90^\circ$ $|AB| = |AC| = 1$. (şəkil 56).



Şəkil 56.

Lakin yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi hərəkət iki nöqtə arasındakı məsafəni dəyişmədiyindən

$$|AB| = |AC| = 1$$

və Pifaqor teoreminə görə

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ olduğundan buradan}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Bu isə o deməkdir ki, (/Pifaqorun tərs teoreminə görə) A bucağı düz bucaqdır.

Teorem (əsas): Fərz edək ki, bizə iki $R = \{A, B, C\}$ və $R = \{A, B, C\}$ ortonormal reperləri verilmişdir. onda R-i R-ə çevirən elə yeganə

$$g : M(x, y) \rightarrow M(x, y)$$

hərəkəti var ki, bu hərəkət müstəvinin hər hansı $M(x, y)$ nöqtəsini elə $M(x, y)$ nöqtəsinə çevirir ki, M-in R-ə nəzərən koordinatları M-in R-ə nəzərən uyğun koordinatlarına bərabər olsun.

İsbatı: Müstəvinin hər bir $M(x, y)$ nöqtəsinə elə $M(x, y)$ nöqtəsini qarşı qoyaq ki, M-in R-ə nəzərən koordinatları M-in R-ə nəzərən uyğun koordinatlarına bərabər olsun. Aşkardır ki, bu cür təyin olunmuş

$$g : M(x, y) \rightarrow M(x, y)$$

çevirməsi iki nöqtə arasındakı məsafəni dəyişmir. Başqa sözlə hərəkətdir. O da aşkardır ki, bu hərəkət $A(0,0)$ -nı, $A(0,0)$ -ə, $B(1,0)$ nöqtəsini $B(1,0)$ -ə, $C(0,1)$ nöqtəsini $C(0,1)$ -ə çevirir. Bu isə o deməkdir ki, R-i R-ə çevirən g çevirməsi yeganədir. Teoremin ikinci hissəsi g hərəkətini təyin etdiyimiz qaydanın özüdür.

Hərəkətin növləri və koordinatlarla ifadəsi.

Tərif: Əgər g hərəkəti hər hansı R reperini özü ilə eyni oriyentasiyalı reperə çevirirsə, onda belə hərəkətə birinci növ, özü ilə əks oriyentasiyalı reperə çevirirsə, onda belə hərəkətə ikinci növ hərəkət deyilir.

İndi hərəkətin analitik (koordinatlarla) ifadəsini verək.

Fərz edək ki, bizə g hərəkəti və hər hansı R ortonormal reperi verilib. Onda bu hərəkət R reperini hər hansı R ortonormal reperinə çevirəcəkdir.

$$g : R \rightarrow R$$

Müstəvi üzərində hər hansı M nöqtəsi götürüb, onun R reperinə nəzərən koordinatlarını (x, y) , $M = g(M)$ nöqtəsinin koordinatlarını isə (x, y) ilə işarə edək. Onda M nöqtəsinin R-ə nəzərən koordinatları da (x, y) olacaqdır.

İndi M nöqtəsinin R və R reperlərinə nəzərən koordinatları arasındakı əlaqə düsturlarını yazaq (düzbucaqlı dekart koordinat sisteminin düzbucaqlı dekart koordinat sistemə çevrilməsi düsturları):

$$\begin{cases} x = x \cos \alpha - y \sin \alpha + x_0 \\ y = x \sin \alpha + y \cos \alpha + y_0 \end{cases} \quad (*)$$

Lakin (x, y) M nöqtəsinin (x, y) isə bu nöqtənin obrazı olan M nöqtəsinin eyni R reperinə nəzərən koordinatları olduğundan bu düsturlar g hərəkətinin koordinatlarla ifadəsi olacaqdır. Belə ki, asanlıqla göstərmək olar ki, bu düsturların təyin etdiyi çevirmə iki nöqtə arasındakı məsafəni dəyişmir:

Hərəkətin koordinatlarla ifadəsinin determinantını hesablayaq:

$$\delta = \begin{vmatrix} \cos \alpha - \varepsilon \sin \alpha \\ \sin \alpha \varepsilon \cos \alpha \end{vmatrix} = \varepsilon \cos^2 \alpha + \varepsilon \sin^2 \alpha = \varepsilon (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \varepsilon$$

Bu isə o deməkdir ki, hərəkətin koordinatlarla ifadəsindəki determinant müsbət birə bərabər olduqda bu hərəkət birinci növ, mənfi birə bərabər olduqda isə bu hərəkət ikinci növdür.

Bu qaydadan istifadə edərək asanlıqla göstərmək olar ki, hərəkətə aid yuxarıda göstərdiyimiz misallarda paralel köçürmə, dönmə və mərkəzi simmetriya birinci növ, ox simmetriyası isə ikinci növ hərəkətdir.

Hərəkətlər qrupu və onun alt qrupları.

Müstəvinin bütün hərəkətlər çoxluğunu D ilə işarə edək. Göstərək ki, D hərəkətlərin kompozisiyasına nəzərən qrupdur.

Fərz edək ki, f və g çevirmələri hərəkətdir. Başqa sözlə $f, g \in D$. Göstərək ki, $f \cdot g$ kompozisiyası da hərəkətdir. Bunu göstərmək üçün fərz edək ki,

$$g : M \rightarrow M, N \rightarrow N, f : M \rightarrow M, N \rightarrow N.$$

g -nin hərəkət olmasından $MN = MN$

f -in hərəkət olmasından isə $MN = MN$ alınar.

Buradan alınır ki, $MN = MN$. Bu isə $f \cdot g$ çevrilməsinin hərəkət olması deməkdir. Başqa sözlə $f \cdot g \in D \Rightarrow f \cdot g \in D$.

Eləcə də $g \in D$ olduqda $g \in D$. Belə ki, g -nin hərəkət olmasından

$$MN = MN \quad (*)$$

Digər tərəfdən

$$g : M \rightarrow M, N \rightarrow N$$

və $(*)$ -dan g^{-1} üçün $MN = MN$.

bu isə g^{-1} -in hərəkət olması deməkdir. Başqa sözlə

$$g \in D \Rightarrow g^{-1} \in D$$

Beləliklə biz göstərdik ki, D hərəkətlər çoxluğu qrupdur. Ona **hərəkətlər qrupu** deyilir.

İstənilən $g \in D$ hərəkəti nəticəsində biri digərinə keçən fiqurlara **konquryent fiqurlar** deyilir.

Bəzi hallarda konquryent fiqurları bərabər fiqurlar kimi başa düşürük. Çoxluqlar baxımından bu doğru deyil. Belə ki, müxtəlif yerlərdə duran həndəsi fiqurlar (nöqtələr çoxluğu) bir-birinə bərabər ola bilməz, yalnız onların ölçüləri bərabər ola bilər. Məhz ona görə də belə fiqurlara konquryent fiqurlar deyilir.

İndi D çoxluğunun alt qruplarına baxaq. Bütün birinci növ hərəkətlər çoxluğunu D_1 ilə işarə edək. Göstərək ki, bu çoxluqlar da birinci növ hərəkətlərin kompozisiyasına nəzərən qrupdur.

Fərz edək ki, g və f hərəkətlərinin hər biri birinci növ hərəkətdir və

$$g : R \rightarrow R, f : R \rightarrow R \text{ çevirir.}$$

Onda g -nin birinci növ hərəkət olmasından R reperi R -lə eyni oriyentasiyalı, f -in birinci növ hərəkət olmasından isə R reperi R ilə eyni oriyentasiyalı olacaqdır. Başqa sözlə R -i R -ə çevirən $f \cdot g$ kompozisiyası birinci növ hərəkət olacaqdır. Tamamilə aşkardır ki,

$$f \in D_1 \Rightarrow f^{-1} \in D_1.$$

Beləliklə, biz göstərdik ki, D_1 birinci növ hərəkətlər çoxluğu bu hərəkətlərin kompozisiyasına nəzərən qrupdur. Bu qrupa **birinci növ hərəkətlər qrupu** deyilir. tamamilə aşkardır ki, $D_1 \in D$ olduğundan $D_1 D$ -nin alt qrupudur.

Aşkardır ki, ikinci növ hərəkətlər çoxluğu qrup deyil. Belə ki, istənilən ikinci növ iki hərəkətin kompozisiyası birinci növdür. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, T -paralel köçürmələr çoxluğu, O -mərkəzi simmetriyalar çoxluğu və ω -dönmələr çoxluqlarının hər biri birinci növ hərəkətlər qrupu olub, D_1 -in alt qruplarıdır. Lakin ox simmetriyalar çoxluğu ikinci növ hərəkətlər çoxluğundan ibarət olduğundan bu çoxluq qeyd olunan əmələ nəzərən qrup deyildir.

§ 32. Oxşar çevirmə.

Fərz edək ki, bizə $k > 0$ həqiqi ədədi verilmişdir. Əgər müstəvinin hər bir f çevirməsi

$$f : M \rightarrow M, N \rightarrow N \text{ çevirdikdə}$$

$MN = kMN$ şərti ödənilərsə, onda belə çevirməyə k əmsallı **oxşar çevirmə** deyilir.

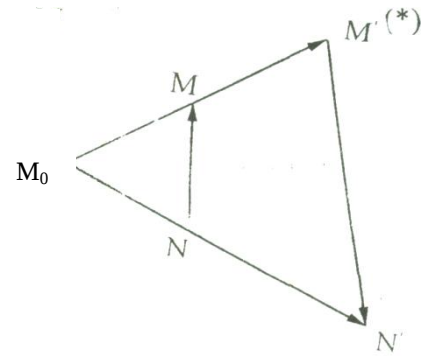
Aşkardır ki, $k = 1$ olduqda oxşar çevirmə hərəkət olur. deməli hərəkət oxşar çevirmənin xüsusi halıdır. Oxşar çevirmənin xüsusi halı olan daha bir çevirməyə, homotetiya çevirməsinə baxaq.

Fərz edək ki, bizə M_0 nöqtəsi və k həqiqi ədədi verilmişdir. Müstəvinin hər bir M nöqtəsinə elə M nöqtəsini qarşı qoyaq ki,

$$\vec{M_0M} = k \vec{M_0M}$$

şərti ödənilmiş olsun. Aşkardır ki, bu cür inikas qarşılıqlı birqiy-mətlidir. Başqa sözlə müstəvinin çevirməsidir. Bu çevirməyə M_0 mərkəzli **homotetiya çevirməsi** deyilir.

Göstərək ki, bu çevirmə oxşar çevirmənin xüsusi halıdır. Doğrudan da (*) şərtindən M və N nöqtələri üçün



Şəkil 57.

$$\vec{M_0M} = k \vec{M_0M}$$

$$\vec{M_0N} = k \vec{M_0N}$$

$$\vec{MN} = k \vec{MN}$$

Buradan

$$\text{və ya } |\vec{MN}| = |k| \cdot |\vec{MN}|$$

(1)

Bu isə o deməkdir ki, homotetiya müsbət k əmsallı oxşar çevirmədir.

İndi homotetiyanın aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

1°. Homotetiya onun mərkəzindən keçən hər bir düz xətti özünə çevirir.

2°. Homotetiya mərkəzdən keçməyən düz xətti özünə paralel olan düz xəttə çevirir.

3°. Homotetiya bucağı özünə (konqruent) bərabər bucağa çevirir.

4°. Homotetiya üç nöqtənin sadə nisbətini dəyişmir. Bu xassəni isbat edək. (1) münasibətindən

$$(M_1, M_2, M) = \frac{\vec{M_1M}}{\vec{MM_2}} = \frac{\vec{M_1M} \cdot k}{\vec{MM_2} \cdot k} = (M_1, M_2, M)$$

Teorem 1. k_1 əmsallı h_1 ilə, k_2 əmsallı h_2 homotetiyanın hasili $k_1 \cdot k_2$ əmsallı homotetiyaadır.

İsbatı:

$$\text{Əgər } h_1 : M \rightarrow M \Rightarrow \vec{OM} = k_1 \vec{OM}$$

$$h_2 : M \rightarrow M \Rightarrow \vec{OM} = k_2 \vec{OM}$$

$$\text{onda } h_2 \cdot h_1 : M \rightarrow M \Rightarrow \vec{OM} = k_1 \cdot k_2 \vec{OM}$$

Bu isə dediyimiz teoremin isbatıdır.

Teorem 2. Fərz edək ki, bizə $|k|$ əmsallı h homotetiya və müsbət k əmsallı f oxşar çevirməsi verilmişdir. Onda f oxşar çevirməsi hər hansı hərəkətlə bu homotetiyanın hasilinə bərabərdir. Başqa sözlə

$$f = h \cdot g$$

İsbatı: $f \cdot h^{-1} = g$ işarə edək. f -in əmsalı k , h^{-1} -in əmsalı $\frac{1}{k}$ olduğundan $g = f \cdot h^{-1}$ əmsalı

vahidə bərabər olacaqdır. Başqa sözlə, g hərəkətdir. $g = f \cdot h^{-1}$ ifadəsinin hər iki tərəfini h -a vursaq,

$$g \cdot h = (f \cdot h^{-1}) \cdot h$$

$$g \cdot h = f(h^{-1} \cdot h)$$

$$f = g \cdot h$$

Bununla da teorem isbat olundu.

Bu teorem onu göstərir ki, homotetiya ilə hərəkətin ortaq xassələri oxşar çevirmənin xassələridir. İndi oxşar çevirmənin koordinatlarla ifadəsini çıxaraq.

Fərz edək ki, k əmsallı h homotetiyası $M(x, y)$ nöqtəsini $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ nöqtəsinə çevirir. g hərəkəti isə $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ nöqtəsini $M(x, y)$ nöqtəsinə çevirir. Başqa sözlə

$$h : M(x, y) \rightarrow \tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

$$g : \tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow M(x, y).$$

Bu çevirmələrin koordinatlarla ifadəsini yazaq

$$\begin{cases} \tilde{x} = kx \\ \tilde{y} = ky \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x = \tilde{x} \cos \alpha - \varepsilon \tilde{y} \sin \alpha + x_0 \\ \tilde{y} = \tilde{x} \sin \alpha + \varepsilon \tilde{y} \cos \alpha + y_0 \end{cases} \quad (3)$$

İndi $\tilde{x}$ və $\tilde{y}$ -nin (2) ifadəsini (3)-də nəzərə alsaq;

$$\begin{cases} x = kx \cos \alpha - \varepsilon ky \sin \alpha + x_0 \\ y = kx \sin \alpha + \varepsilon ky \cos \alpha + y_0 \end{cases}$$

alırıq. Bu oxşar çevirmənin koordinatlarla ifadəsidir.

Asanlıqla göstərmək olar ki, oxşar çevirmələr çoxluğu bu çevirmələrin kompozisiyasına nəzərən qrupdur. Bu qrup **oxşar çevirmələr qrupu** adlanır. Hərəkət oxşar çevirmənin xüsusi halı olduğundan D hərəkətlər qrupu P oxşar çevirmələr qrupunun alt qrupudur: $D \in P$.

İxtiyari oxşar çevirmə zamanı biri digərinə keçən F və F fiqurlarına **oxşar fiqurlar** deyilir və $F \sim F$ kimi yazılır.

§ 33. Afin çevirmə.

Tərif: *Bir düz xətt üzərində yerləşən üç nöqtəni bir düz xətt üzərində yerləşən üç nöqtəyə çevirən və onların sadə nisbətini saxlayan müstəvinin hər bir çevirməsinə afin çevirmə deyilir.*

Başqa sözlə əgər hər hansı f çevirməsi d düz xətti üzərində yerləşən A, B, C nöqtələrini uyğun olaraq eyni bir d düz xətti üzərində yerləşən

$$f(A) = A, \quad f(B) = B, \quad f(C) = C.$$

nöqtələrinə çevirərsə və $(AB, C) = (ABC)$ olarsa, onda bu f çevirməsinə **afin çevirmə** deyilir.

Qeyd edək ki, oxşar çevirmə düz xətti düz xəttə çevirdiyindən və üç nöqtənin sadə nisbətini dəyişmədiyindən bu çevirmə də afin çevirmədir. Hərəkət isə oxşar çevirmənin xüsusi halı olduğundan afin çevirmənin də xüsusi halıdır.

Afin çevirməyə aid əsas teoremi isbat edək:

Teorem: *Fərz edək ki, bizə nizamlı götürülmüş hər hansı R və R reperləri verilmişdir. onda R -i R -ə çevirən yeganə afin çevirməsi vardır ki, bu çevirmə müstəvinin hər bir M nöqtəsini elə M nöqtəsinə çevirir ki, bu zaman M -in R -ə nəzərən koordinatları M -in R -ə nəzərən uyğun koordinatlarına bərabər olur.*

İsbatı: Hər bir M nöqtəsinə elə M nöqtəsini qarşı qoyaq ki, M -in R -ə nəzərən koordinatları M -in R -ə nəzərən uyğun koordinatlarına bərabər olsun. Aşkardır ki, bu cür uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir. Deməli, müstəvinin çevirməsidir. Göstərək ki, bu çevirmə afin çevirməsidir və bunu f ilə işarə edək. Bunun üçün bir düz xətt üzərində yerləşən M_1, M_2, M nöqtələri götürüb, onların R reperinə nəzərən koordinatlarını uyğun olaraq (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x, y) ilə işarə edək.

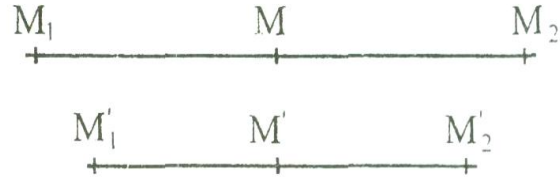
Onda bu nöqtələrin obrazları olan M_1M_2 və M nöqtələrinin R -ə nəzərən koordinatları da həmin ədədlər olacaq. Başqa sözlə, $x_1 = x_1$, $y_1 = y_1$, $M \in (M_1, M_2)$. Onda məlum düstura görə

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Lakin burada (x, y) həm də M nöqtəsinin koordinatları olduğundan onda M -də $[M_1M_2]$ parçasını da λ nisbətində böləcək. Bu isə o deməkdir ki, təyin etdiyimiz bu çevirmə afin çevirməsidir.

Təyin etdiyimiz qaydadan bilavasitə çıxır ki, f çevirməsi yeganədir. Teorem isbat olundu.

Bu teoremin nəticəsi kimi söyləmək olar ki, hər bir afin çevirmə afin reperi afin repera çevirir.



Şəkil 58.

İndi afin çevirmənin koordinatlarla ifadəsini verək. Fərz edək ki, bizə f afin çevirməsi və R reperi verilmişdir. R reperinin bu çevirmədəki obrazını R ilə işarə edək M isə müstəvi üzərində ötürülmüş hər hansı M nöqtəsinin obrazı olsun. M -in R -ə nəzərən koordinatlarını (x, y) ilə işarə etsək, yuxarıdakı teoremə görə $M = f(M)$ nöqtəsinin R -ə nəzərən koordinatları da (x, y) olacaqdır. Bu M nöqtəsinin R -ə nəzərən koordinatlarını isə (x, y) ilə işarə edək. Onda eyni bir M nöqtəsinin R və R reperlərinə nəzərən koordinatları arasında əlaqə düsturlarından (ümumi dekart koordinat sisteminin ümumi dekart koordinat sisteminə çevirməsi düsturları):

$$\begin{cases} x = c_{11}x + c_{12}y + x_0 \\ y = c_{21}x + c_{22}y + y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Digər tərəfdən bu düsturlar M və M nöqtələrinin eyni bir R reperinə nəzərən koordinatları arasındakı əlaqə düsturu olduğundan bu düsturlar f afin çevirməsinin koordinatlarla ifadəsi olacaq. Belə ki, asanlıqla göstərmək olar ki, koordinatları (1) vasitəsilə təyin olunan

$$f : M \rightarrow M$$

çevirməsi bir düz xətt üzərində yerləşən üç nöqtənin sadə nisbətini dəyişmir. Burada $[c_{11}, c_{21}]$, $[c_{12}, c_{22}]$ ədədləri ikinci reperi bazis vektorlarının, $[x_0, y_0]$ isə başlanğıcının birinci repera nəzərən koordinatlarıdır.

Hərəkətdə olduğu kimi burada da göstərmək olar ki, afin çevirmələr çoxluğu da onların kompozisiyasına nəzərən qrup təşkil edir. Bu qrup A ilə işarə edək. Aşkardır ki, D hərəkətlər və H oxşar çevirmələr qrupun afin çevirmələr qrupunun alt qruplarıdır.

İstənilən afin çevirmə vasitəsilə biri digərinə çevrilən F və F fiqurlarına **afin ekvivalent fiqurlar** deyilir.

Müstəvinin çevirmələrinə aid aşağıdakı məsələləri həll edək.

Məsələ 1. Düzbucaqlı koordinat sistemində $\vec{a} = (-1; 4)$ vektoru ilə təyin olan paralel köçürmə çevirməsinin analitik ifadəsini təyin edin.

Həlli: Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi düzbucaqlı koordinat sistemində paralel köçürmə çevirməsinin analitik ifadəsi

$$x = x + x_0, \quad y = y + y_0$$

şəklində olur. Bu düsturlarda $\vec{a}$ vektorunun koordinatlarını yerinə yazsaq, alırıq: $x = x - 1$, $y = y + 4$. Bu, tələb edilən düsturlardır.

Məsələ 2. Müstəvi $M(2;3)$ nöqtəsi ətrafında α bucağı qədər dönmüşdür, belə ki, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. Bu dönmə zamanı $x + 2y - 3 = 0$ düz xəttinin çevrildiyi düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli: Müstəvinin $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi ətrafında α bucağı qədər dönmənin analitik ifadəsi

$$x = x \cos \alpha - y \sin \alpha + x_0, \quad y = x \sin \alpha + y \cos \alpha + y_0$$

şəklinə malikdir. Məsələnin şərtində verilənləri nəzərə alsaq bu düsturlar aşağıdakı şəkli alarlar:

$$x = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2, \quad y = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3.$$

Axıncı düsturlardan x, y dəyişənlərini x, y vasitəsilə ifadə etsək alarıq:

$$x = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{6}{5}, \quad y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{17}{5}$$

x, y -in bu qiymətlərini məsələnin şərtində verilmiş düz xətt tənliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$11x + 2y - 43 = 0$$

Bu, axtarılan düz xəttin tənliyidir.

Məsələ 3. $x = \frac{6}{5}x + \frac{2}{5}y - 1, \quad y = -\frac{8}{5}x + \frac{5}{6}y + 1$ oxşar çevirmə zamanı $x + y - 1 = 0$ düz

xəttinin çevrildiyi düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli: Oxşar çevirmənin məsələnin şərtində verilmiş analitik ifadəsindən istifadə edərək x, y dəyişənlərini x, y -dən asılı ifadə etsək, alarıq:

$$x = \frac{3}{10}x - \frac{4}{10}y + \frac{7}{10}, \quad y = \frac{4}{10}x + \frac{3}{10}y + \frac{1}{10}.$$

x, y -in bu qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq alarıq:

$$\left[\frac{3}{10}x - \frac{4}{10}y + \frac{7}{10} \right] + \left[\frac{4}{10}x + \frac{3}{10}y + \frac{1}{10} \right] - 1 = 0.$$

Buradan da tapa bilərik: $7x - y - 2 = 0$.

Məsələ 4: $x = 7x - y + 1, \quad y = 4x + 2y + 4$ afin çevirməsinin ikiqat düz xəttini tapın.

Həlli: Qəbul edək ki, $Ax + By + C = 0$ (1) düz xətti verilmiş afin çevirməsinin ikiqat düz xəttinin proobrazıdır. Onda

$$A(7x - y + 1) + B(4x + 2y + 4) + C = 0$$

və ya

$$(7A + 4B)x + (-A + 2B)y + (A + 4B + C) = 0 \quad (2)$$

axtarılan düz xəttin tənliyi olar.

Məlumdur ki, (2) düz xətti verilmiş afin çevirməsinin ikiqat düz xətti olması üçün (1) tənliyi ilə (2) tənliyinin əmsalları mütənasib olmalıdır:

$$\begin{cases} 7A + 4B = \lambda A, \\ -A + 2B = \lambda B, \\ A + 4B + C = \lambda C \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} (7 - \lambda)A + 4B = 0, \\ -A + (2 - \lambda)B = 0, \\ A + 4B + (1 - \lambda)C = 0 \end{cases} \quad (3)$$

A və B əmsalları eyni zamanda sıfıra bərabər olmadığına görə (3) sisteminin birinci iki tənliyinə əsasən yazı bilərik:

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & 4 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{və ya} \quad \lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0 \quad (4)$$

$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 3$ (4) tənliyinin kökləridir. (3) sisteminin birinci iki tənliyindən istifadə edərək

$A : B$ nisbətini tapmaq olar:

$$(7 - 6)A - 4B = 0 \Rightarrow A = -4B \Rightarrow A : B = -4$$

$$-A + (2 - 3)B = 0 \Rightarrow -A = B \Rightarrow A : B = -1.$$

(3) sisteminin axırıncı tənliyindən istifadə edərək C-ni tapa bilərik:

$C = \frac{A+4B}{\lambda-1}$, indi $Ax+By+C=0$ və ya $Ax+By+\frac{A+4B}{\lambda-1}=0$ tənliyindən istifadə edərək yazı bilərik:

$$\lambda = 6 \text{ olduqda } Ax+By+\frac{A+4B}{6-1}=0 \Rightarrow A\left[x+\frac{1}{5}\right]+B\left[y+\frac{4}{5}\right]=0.$$

Bu halda $A:B=-4$ olduğundan tapırıq:

$$-4\left[x+\frac{1}{5}\right]+\left[y+\frac{4}{5}\right]=0 \Rightarrow -4x-\frac{4}{5}+y+\frac{4}{5}=0 \Rightarrow 4x-y=0.$$

$$\lambda = 3 \text{ olduqda } Ax+By+\frac{A+4B}{2}=0, A\left[x+\frac{1}{2}\right]+B(y+2)=0.$$

Bu halda $A:B=-1$ olduğundan alırıq:

$2x-2y-3=0$. Deməli, $4x-y=0$ və $2x-2y=0$ verilmiş afin çevirmənin ikiqat düz xətləridir.

ÇALIŞMALAR.

1. Düzbucaqlı koordinat sistemində analitik ifadəni $x = x+1$, $y = y-2$ şəklində olan paralel köçürmə zamanı $2x-y+1=0$ düz xəttinin çevrildiyi düz xətti tapın.

2. Müstəvi $M(-1;3)$ nöqtəsi ətrafında $\alpha = 45^\circ$ bucağı qədər dönür. Bu çevirmə zamanı koordinat oxları hansı düz xətlərə çevrilir?

3. Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən və tərəflərindən birinin tənliyi $4x+2y-1=0$ şəklində olan düzgün altıbucaqlının tərəflərinin tənliyini yazın.

4. Bərabərtərəfli üçbucağın təpələrindən biri $M(1;1)$ nöqtəsində, digər ikisi isə koordinat oxları üzərində yerləşir. Bu təpələrin koordinatlarını tapın.

5. Bərabərtərəfli üçbucağın tərəfinin $2x-y=0$ tənliyi və medianlarının $M(5;1)$ kəsişmə nöqtəsi verilmişdir. Qalan iki tərəfin tənliyini yazın.

6. $A(2;1)$, $B(3;-2)$, $C(1;0)$, $A(-1;-5)$, $B(-3;1)$, $C(1;-3)$ nöqtələri verilmişdir. ABC və ABC üçbucaqlarının homotetik olduğunu isbat edin və $h(h(\Delta ABC)) = \Delta ABC$ homotetiyasının analitik ifadəsini yazın.

7. Bazis vektorlarını uyğun olaraq

a) $\bar{a}_1 = (0;5)$, $\bar{b}_1 = (-5;0)$; b) $\bar{a}_2 = (3;-\sqrt{3})$, $\bar{b}_2 = (-\sqrt{3};-3)$;

b) $\bar{a}_3 = (2;2)$, $\bar{b}_3 = (-2;2)$; q) $\bar{a}_4 = \left[-\frac{15}{13}; \frac{12}{13}\right]$, $\bar{b}_4 = \left[-\frac{12}{13}; \frac{15}{13}\right]$ vektorlarına çevirən oxşar

çevirmənin koordinatlarla ifadəsini yazın.

8. $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + 1$, $y = \frac{3}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{2}y - 1$ oxşar çevirməsi zamanı düz xəttin çevrildiyi düz xəttin tənliyini yazın.

9. $M(0;1)$ nöqtəsini $M(-3;3)$ nöqtəsinə, $\bar{a} = (1;2)$ və $\bar{b} = (1;0)$ vektorlarını isə $\bar{a} = (-7;-2)$ və $\bar{b} = (1;-2)$ vektorlarına çevirən afin çevirmənin analitik ifadəsini təyin edin.

10. Afin çevirməsinin koordinatlarla ifadələri verilmişdir:

$x = x-3y+2$, $y = 2x+y-3$. Bu çevirmə zamanı a) $2x+y+2=0$; b) $3x-2y+1=0$ düz xəttinin obrazını tapın.

11. $x = 2x+y-2$, $y = x-y-1$ afin çevirməsi və $A(1;1)$ nöqtəsi verilmişdir. A nöqtəsindən keçən və bu çevirmə zamanı yenə də A nöqtəsindən keçən düz xəttə çevrilən düz xətti təyin edin.

II HİSSƏ

FƏZADA ANALİTİK HƏNDƏSƏ

VII FƏSİL

FƏZADA KOORDİNAT SİSTEMLƏRİ VƏ BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİN KOORDİNATLARLA HƏLLİ.

§ 34. Fəzada ümumi dekart koordinat sistemi.

Tərif: *Bir müstəvi üzərində yerləşməyən nizamlı götürülmüş istənilən dörd nöqtəyə fəzada ümumi dekart koordinat sistemi və ya afin koordinat sistemi deyilir. Afin koordinat sisteminə afin reper də deyilir və $R = \{A_1, A_2, A_3\}$ kimi işarə olunur.*

Bu dörd nöqtə bir müstəvi üzərində yerləşmədiyindən $\vec{OA}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{OA}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{OA}_3 = \vec{e}_3$ nizamlı götürülmüş komplanar olmayan vektorlar olacaqdır. Bunlar

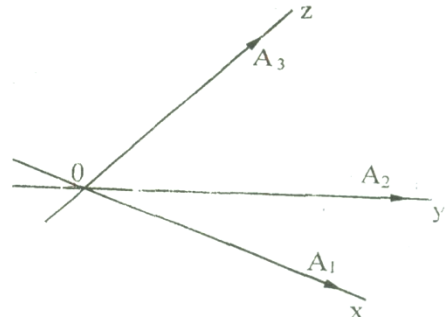
komplanar olmadığından $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ vektorlarını fəzanın

bazisi kimi qəbul etmək olar. Onda afin koordinat sisteminə

fəzanın o nöqtəsindən və $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bazisindən ibarət

həndəsi obraz kimi baxmaq olar. Başqa sözlə,

$R = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ və $\{A_1, A_2, A_3\}$



Şəkil 59

eynigüclü həndəsi obrazlar olacaqdır. Elə ona görə də afin koordinat sistemi olaraq

$R = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ dördlüyünü də götürürlər. O-koordinat başlanğıcından keçib, istiqamətləri bazis

vektorlarla müəyyən olunan oxlara **koordinat oxları** deyilir və uyğun olaraq (ox), (oy), (oz) kimi işarə olunur. Bu oxlar absis, ordinat, aplikat oxları adlanır. İki koordinat oxlarının əmələ gətirdiyi müstəvilər **koordinat müstəviləri** adlanır və uyğun olaraq (xoy), (xoz), (yoz) kimi yazılır.

Fəzada ixtiyari M nöqtəsi götürüb, bu nöqtəni verilmiş afin koordinat sisteminin başlanğıcı ilə birləşdirək. Alınan $\vec{OM}$ vektoruna M nöqtəsinin **radius vektoru** deyilir.

Tərif: M nöqtəsinin $\vec{OM}$ radius vektorunun $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bazisinə nəzərən koordinatlarına M

nöqtəsinin $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ afin koordinat sisteminə nəzərən **koordinatları** deyilir və $M(x, y, z)$ kimi işarə olunur.

Biz «Vektorlar cəbrinin elementləri» fəslində göstərdik ki, fəzanın hər bir vektoru $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bazisinə nəzərən yeganə

$$\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad (1)$$

ayrılışına malikdir.

Deməli, fəzada afin koordinat sistemi verildikdə hər bir nöqtəyə bu nöqtənin koordinatları adlanan (x,y,z) ədədlər üçlüyü uyğundur. Tərsinə, istənilən üç ədədə fəzada bir nöqtə uyğun gəlir.

Bu isə o deməkdir ki, fəzada afin koordinat sistemi verildikdə həqiqi ədədlər üçlüyü ilə fəzanın nöqtələri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaranır.

Koordinat sistemi verildikdə nöqtənin koordinatlarının tapılması və koordinatları məlum olan nöqtənin qurulması ilə məşğul olaq.

Verilmiş nöqtənin koordinatlarının tapılması (1) münasibətindən aşkardır. Belə ki, bu ayrılış yeganə olduğundan ayrılış əmsalları olan koordinatlar da yeganə olacaqdır.

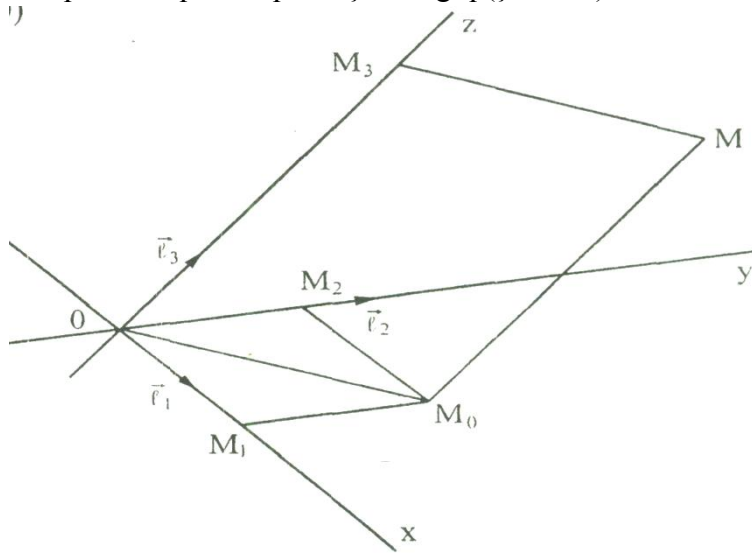
İndi (x,y,z) koordinatlarına malik nöqtənin qurulması ilə məşğul olaq. Bunun üçün verilmiş koordinat sistemində $\vec{OM}_1 = x\vec{e}_1$, $\vec{OM}_2 = y\vec{e}_2$, $\vec{OM}_3 = z\vec{e}_3$ vektorlarını, sonra isə

$$\vec{OM}_0 = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

vektorunu quraq. Daha sonra

$$\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \vec{OM}_3 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

vektorunu qurmaqla M nöqtəsini qurmuş olacağıq (şəkil 60).



Şəkil 60.

Qeyd edək ki, OM_1M_0M sınıq xəttinə **nöqtənin koordinat sınıq xətti** deyilir. Qeyd edək ki, bu sınıq xətt nöqtənin fəzadakı vəziyyətini birqiymətli təyin edir. Ona görə də, bəzən, nöqtəni qurmaq üçün onun koordinat sınıq xəttini qururlar.

İndi koordinat rüblərinin işarələrini təyin edək. Məlumdur ki, koordinat müstəviləri fəzanın 8 hissəyə bölür. Bunlardan dördü (xoy) müstəvisindən yuxarıda qalan dördü bir müstəvidən aşağıda yerləşir. Yuxarıda yerləşən 4 rübdəki bütün nöqtələrin aplikatı müsbət, aşağıdakı 4 rübdə yerləşən nöqtələrin aplikatı mənfi olacaqdır. (xoy) müstəvisinə nəzərən simmetrik olan bütün nöqtələrin absis və ordinatları eyni olacaqdır. Bunu aşağıdakı cədvəldən də görmək olar:

Rüblər	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
koordinatlar								
x	+	-	+	-	+	-	+	-
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

Əgər bazis vektorların uzunluqları bir-birinə bərabər olub və qarşılıqlı perpendikulyar olarsa, başqa sözlə

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1 \quad \text{və} \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$$

belə afin koordinat sisteminə düzbucaqlı dekart koordinat sistemi və ya ortonormal reper deyilir və $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kimi işarə olunur.

Aşağıdakı sadə məsələlərin koordinatlarla ifadəsinə baxaq:

1.Uc nöqtələri verilmiş vektorun koordinatlarının tapılması. Fərz edək ki, M_1M_2 vektorunun uc nöqtələri hər hansı afin koordinat sisteminə nəzərən (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) koordinatlarına malikdir. Onda bu nöqtələrin radius vektorları da uyğun olaraq:

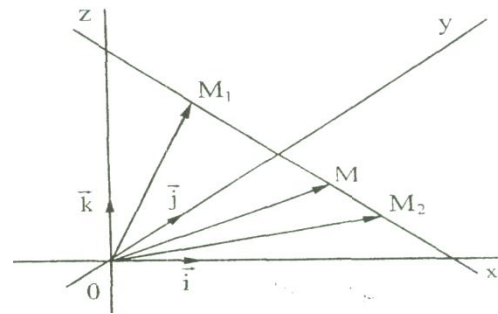
$\vec{OM}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{OM}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ koordinatlarına malik olacaqdır. Lakin M_1M_2 vektoru

$M_1M_2 = \vec{OM}_2 - \vec{OM}_1$ olduğundan (şəkil 61).

$$M_1M_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Beləliklə, biz göstərdik ki, vektorun koordinatları onun uc nöqtələrinin uyğun oordinatlarının fərqinə bərabərdir.

2.Parçanın λ nisbətində bölünməsi. Fərz edək M nöqtəsi M_1M_2 parçasını λ nisbətində bölür. 1 hissədə verdiyimiz tərifə görə



ki,

Şəkil 61.

$$M_1M = \lambda MM_2 \quad (*)$$

şərti ödənməlidir.

M_1, M_2 və M nöqtələrinin koordinatlarını uyğun olaraq (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) və (x, y, z) ilə işarə etsək, onda

$$M_1M = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix}$$

$$MM_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix}$$

Bunları (*) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y) \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z) \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \end{cases} \quad (1)$$

düsturlarını alırıq. Bu düsturlara **parçanın λ nisbətində bölünməsi düsturları** deyilir.

Xüsusi halda M nöqtəsi M_1M_2 parçasını yarıya bölərsə, (2) düsturları aşağıdakı şəkllə düşəcəkdir:

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}$$

3. İki nöqtə arasındakı məsafə.

Fərz edək ki, bizə hər hansı $\{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən uyğun olaraq (x_1, y_1, z_1) və (x_2, y_2, z_2) koordinatlarına malik M_1 və M_2 nöqtələri verilmişdir. Onda məlumdur ki, $\vec{M_1 M_2}$ vektorunun koordinatları aşağıdakı kimi olacaqdır.

$$\vec{M_1 M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Vektorlar cəbrindən məlumdur ki, vektorun uzunluğu onun uyğun koordinatlarının kvadratları cəminin kvadrat kökünə bərabərdir. Başqa sözlə

$$\left| \vec{M_1 M_2} \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Digər tərəfdən M_1, M_2 nöqtələri arasındakı $\rho(M_1, M_2)$ məsafəsi $\vec{M_1 M_2}$ vektorunun uzunluğuna bərabər olduğundan

$$\rho(M_1, M_2) = \left| \vec{M_1 M_2} \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

§ 35. Dekart koordinat sistemlərinin çevrilməsi düsturları.

Əvvəlcə ümumi dekart koordinat sisteminin çevrilməsi düsturlarını çıxaraq:

1. Fərz edək ki, bizə $R = \{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ və $R = \{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ kimi ümumi dekart koordinat

sistemləri (afin reperləri) verilmişdir. Fəzada hər hansı M nöqtəsi götürüb, onun birinci reperə nəzərən koordinatlarını (x, y, z) , ikinci reperə nəzərən koordinatlarını $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ilə işarə edək.

Koordinat sisteminin çevrilməsi dedikdə qeyd etdiyimiz hər hansı M nöqtəsinin R və $\bar{R}$ reperlərinə nəzərən koordinatları arasındakı əlaqə düsturu başa düşülür. Bu düsturları çıxarmaq üçün R reperinin bazis vektorlarının və başlanğıcının $\bar{R}$ reperinə nəzərən koordinatlarını aşağıdakı kimi işarə edək:

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix}$$

$$O(x_0, y_0, z_0)$$

Məlumdur ki, istənilən üç O, O, M nöqtələri üçün

$$\vec{OM} = \vec{OO} + \vec{OM} \quad (*)$$

münasibəti doğrudur (şəkil 62). Yuxarıda qeyd olunan vektorların bazis vektorlar üzrə ayrılışını yazaq:

$$\vec{OM} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$$

$$\vec{OO} = x_0 \vec{e}_1 + y_0 \vec{e}_2 + z_0 \vec{e}_3$$

$$\vec{OM} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

Bunları (*)-da yerinə yazaq:

$$x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 = x_0 \vec{e}_1 + y_0 \vec{e}_2 + z_0 \vec{e}_3 + x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

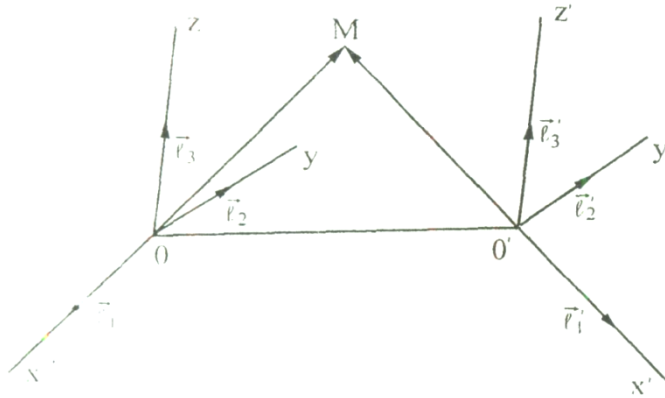
Sonra $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ və $\vec{e}_3$ -in birinci bazis üzrə ayrılışını yazaq:

$$\vec{e}_1 = c_{11} \vec{e}_1 + c_{21} \vec{e}_2 + c_{31} \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 = c_{12} \vec{e}_1 + c_{22} \vec{e}_2 + c_{32} \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_3 = c_{13} \vec{e}_1 + c_{23} \vec{e}_2 + c_{33} \vec{e}_3$$

Bunları sonuncu ifadədə yerinə yazıb, sağ tərəfi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis vektorlarına nəzərən qruplaşdıraraq:



Şəkil 62.

$$x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 = x_0 \vec{e}_1 + y_0 \vec{e}_2 + z_0 \vec{e}_3 + x(c_{11} \vec{e}_1 + c_{21} \vec{e}_2 + c_{31} \vec{e}_3) + y_2(c_{12} \vec{e}_1 + c_{22} \vec{e}_2 + c_{12} \vec{e}_3) + z(c_{13} \vec{e}_1 + c_{23} \vec{e}_2 + c_{33} \vec{e}_3)$$

$$x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 = (x_0 + xc_{11} + yc_{12} + zc_{13}) \vec{e}_1 + (y_0 + xc_{21} + yc_{22} + zc_{23}) \vec{e}_2 + (z_0 + xc_{31} + yc_{32} + zc_{33}) \vec{e}_3$$

Burada bərabər vektorların uyğun koordinatlarının bərabər olduğunu nəzərə alsaq

$$\begin{cases} x = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + x_0 \\ y = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + y_0 \\ z = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + z_0 \end{cases} \quad (1)$$

düsturlarını alırıq.

Bu düsturlara **ümumi dekart koordinat sisteminin ümumi dekart koordinat sistemə çevrilməsi** düsturları deyilir. Burada

$$C = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Bmatrix}$$

Matrisinə R ümumi dekart koordinat sistemindən R ümumi dekart koordinat sistemə **keçid matrisi** deyilir.

Məlum olduğu kimi buradakı c_0 -lər ikinci koordinat sistemindəki bazis vektorlarının birinci sistemə nəzərən koordinatlarıdır.

Xüsusi halda, əgər R və R reperlərinin koordinat başlanğıcları üst-üstə düşərsə, onda $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ olar. (1) düsturları bu zaman

$$\begin{aligned}x &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z \\y &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z \\z &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z\end{aligned}\quad (2)$$

şəklinə düşər.

(2) düsturlarına koordinat sisteminin öz başlanğıcı ətrafında **döndərilməsi düsturları** deyilir.

Əgər R və R reperləri bir-birindən yalnız başlanğıcı ilə fərqlənərsə, onda (1) düsturları aşağıdakı şəkllə düşər.

$$\begin{cases}x = x + x_0 \\y = y + y_0 \\z = z + z_0\end{cases}\quad (3)$$

(3) düsturlarına koordinat sisteminin **paralel köçürülməsi** düsturları deyilir.

2.Düzbucaqlı dekart koordinat sisteminin düzbucaqlı dekart koordinat sistemə çevrilməsi.

İndi fərz edək ki, R və R reperləri ortonormal reperlərdir: $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

İndi reperin $\bar{i}$ vektorunun birinci reperin bazis vektorları ilə əmələ gətirdiyi bucaqları uyğun olaraq $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\bar{j}$ vektorunun bu vektorlarla əmələ gətirdiyi bucaqları $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ və nəhayət $\bar{k}$ vektorunun həmin bazis vektorlarla əmələ gətirdiyi bucaqları $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ işarə edək. Bildiyimiz kimi vahid vektorun koordinatları onun yönəldici kosinuslarına bərabər olduğundan (I hissə §5).

$$\begin{aligned}\bar{i} &= \cos \alpha_1; \cos \alpha_2; \cos \alpha_3 \\ \bar{j} &= \cos \beta_1; \cos \beta_2; \cos \beta_3 \\ \bar{k} &= \cos \gamma_1; \cos \gamma_2; \cos \gamma_3\end{aligned}$$

Bunları (1) düsturunda nəzərə alsaq

$$\begin{cases}x = x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 + x_0 \\y = x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 + y_0 \\z = x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3 + z_0\end{cases}\quad (4)$$

düsturlarını alırıq.

$\bar{i}, \bar{j}$ və $\bar{k}$ vektorları vahid vektorlar olduğundan,

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 &= 1 \\ \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3 &= 1 \\ \cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 &= 1\end{aligned}$$

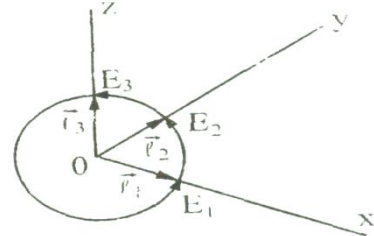
$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 &= 0 \\ \cos \alpha_1 \cos \gamma_1 + \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 + \cos \alpha_3 \cos \gamma_3 &= 0 \\ \cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \cos \beta_2 \cos \gamma_2 + \cos \beta_3 \cos \gamma_3 &= 0\end{aligned}$$

(4) düsturlarına **düzbucaqlı dekart koordinat sisteminin düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə çevrilməsi** düsturları deyilir.

§ 36. Fəzanın oriyentasiya edilməsi.

Fəzada hər hansı $\{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ afin reperi götürüb onun bazis vektorlarının uc nöqtələrini uyğun olaraq E_1, E_2, E_3 ilə işarə edək. Bu nöqtələrdən keçən E_1 -dən E_2 -yə, E_2 -dən E_3 -ə, E_3 -dən E_1 -ə doğru çevrə boyunca hərəkətin istiqaməti saat əqrəbinin əks istiqamətində olarsa, onda deyirlər ki, $\{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ koordinat sistemi sağ oriyentasiyalıdır.



Şəkil 63.

Qeyd olunan hərəkət saat əqrəbinin istiqamətində olarsa, onda deyirlər ki, bu koordinat sistemi sol oriyentasiyalıdır və $\{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ üçlüyü uyğun olaraq sağ və sol oriyentasiyalı üçlüklər adlanır.

Əgər fəzada oriyentasiya olunmuş koordinat sistemi verilərsə, onda deyirlər ki, fəzanın özü oriyentasiya olunmuşdur. Biz bir dekart koordinat sistemindən digərinə keçid düsturlarını yazarkən ikinci bazisin birinci bazisə nəzərən koordinatlarından düzəldilmiş matrisdən istifadə edirik ki, bunu da həmin bazislərin birindən digərinə **keçid matrisi** deyilir. Məsələn, ümumi dekart koordinat sistemindən ümumi dekart koordinat sistemə keçid matrisi

$$\|c_0\| = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad i, j = 1, 2, 3$$

şəklində idi.

Qeyd edək ki, əgər verilmiş koordinat sistemləri (bazisləri) eyni oriyentasiyalıdırsa, onda bu matrisə uyğun olan determinant sıfırdan böyükdür. Başqa sözlə: R və R eyni oriyentasiyalı olduqda

$$D = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} > 0$$

olur. R və R reperləri müxtəlif oriyentasiyalı olduqda isə $D < 0$ olur.

§ 37. İki vektorun vektorial hasili.

Fərz edək ki, bizə oriyentasiya olunmuş fəzada $\{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemi və $\bar{a}, \bar{b}$ vektorları verilmişdir. Aşağıdakı üç şərti ödəyən $\bar{c}$ vektoruna bu vektorların vektorial hasili deyilir və $\bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ kimi və ya $\bar{c} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix}$ kimi işarə olunur.

1. $\bar{c}$ vektorunun uzunluğu bu vektorların uzunluğu ilə onlar arasında qalan bucağın sinusu hasilinə bərabər olsun. Başqa sözlə:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ həm də $\vec{c} \perp \vec{b}$ olsun.

3. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ üçlüyü fəzanı oriyentasiya edən $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ üçlüyü ilə eyni oriyentasiyalı olsun.

İndi götürdüyümüz $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən koordinatları

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ və $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ olan vektorların vektorial hasilinin koordinatlarla ifadəsini çıxaraq. Bu hasilin koordinatlarını $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ ilə işarə edək. Fərz edək ki, $\vec{a}$ vektoru $\vec{b}$ vektoru ilə kollinear deyil. Başqa sözlə $\vec{a} \neq \lambda \vec{b}$. Əks halda qeyd olunan hasil (birinci şərtə əsasən) sıfıra bərabər olar.

İkinci şərtə görə

$$\begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Aşkardır ki, burada $\vec{c} \neq 0$ olduğundan onun koordinatlarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidir. Fərz edək ki, $c_3 \neq 0$. (1) tənliyinin hər iki tərəfini c_3 -ə bölsək, $\frac{c_1}{c_3}$ və $\frac{c_2}{c_3}$ dəyişənlərinə nəzərən ikiməchullu

$$\begin{cases} a_1 \frac{c_1}{c_3} + a_2 \frac{c_2}{c_3} = -a_3 \\ b_1 \frac{c_1}{c_3} + b_2 \frac{c_2}{c_3} = -b_3 \end{cases}$$

xətti tənliklər sistemini alırıq. Bu tənliyin baş və köməkçi determinantlarını aşağıdakı kimi işarə edək:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{21} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

Kramer qaydasına görə

$$\frac{c_1}{c_3} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{c_2}{c_3} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \text{ və ya}$$

$$\frac{c_1}{\Delta_1} = \frac{c_2}{\Delta_{21}} = \frac{c_3}{\Delta} = t \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \Delta_1 t \\ c_2 = \Delta_{21} t \\ c_3 = \Delta t \end{cases} \quad (3)$$

Buradan t-ni təyin edək. Üçüncü şərtə görə $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ üçlüyü $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ilə eyni oriyentasiyalı olduğundan birincidən ikinciyə keçid matrisinə uyğun determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0$$

olacaq. Bu determinantı axırıncı sətərə görə açaq:

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ b_2 b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix} > 0$$

c_1, c_2, c_3 -ün (3) ifadəsindəki qiymətlərini burada yerinə yazsaq:

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} = (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta^2 t > 0 \Rightarrow t > 0 \text{ alırıq.}$$

$\vec{c}$ vektorunun uzunluğunu (3) düsturundakı koordinatları ilə hesablayaq:

$$\begin{vmatrix} \vec{c} \end{vmatrix} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \sqrt{(t\Delta_1)^2 + (t\Delta_2)^2 + (t\Delta)^2} = \pm t \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta^2}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{c} \end{vmatrix} = \pm t \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta^2}$$

Lakin, yuxarıda göstərdik ki, $t > 0$. Onda

$$\begin{vmatrix} \vec{c} \end{vmatrix} = t \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta^2} \quad (4)$$

İndi $\vec{c}$ vektorunun uzunluğunu vektorial hasilin tərifindəki ikinci şərtə görə hesablayaq:

$$\begin{vmatrix} \vec{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} \end{vmatrix} \sin \alpha = \sqrt{\begin{vmatrix} \vec{a} \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} \end{vmatrix}^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha)} = \sqrt{\begin{vmatrix} \vec{a} \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} \end{vmatrix}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

Buradakı $\begin{vmatrix} \vec{a} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \vec{b} \end{vmatrix}$ və $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ skalyar hasilinin koordinatlarla ifadəsində yerinə yazıb, sadələşdirək,

$$\begin{vmatrix} \vec{c} \end{vmatrix} = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta^2} \quad (5)$$

olduğunu alırıq.

(4) ilə (5)-i müqayisə etsək və $t > 0$ olduğunu nəzərə alsaq t -nin müsbət vahid olduğunu alırıq. Bunu (3) ifadəsində nəzərə alsaq

$$\vec{c} = \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \text{ və ya } \vec{c} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ b_2 b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Beləliklə, biz göstərdik ki, düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən koordinatları uyğun olaraq $\vec{a}, a_2, a_3$, $\vec{b}, b_2, b_3$ olan iki vektorun vektorial hasilinin koordinatları bu vektorların koordinatları vasitəsilə aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ b_2 b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

şəklində və ya

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ b_2 b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \vec{i} \\ a_2 b_2 \vec{j} \\ a_3 b_3 \vec{k} \end{vmatrix}$$

Beləliklə

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (6)$$

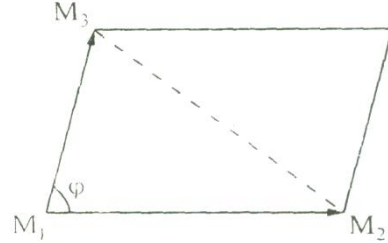
Xassələri:

Vektorial hasilin (6) ifadəsindən istifadə edərək aşağıdakı xassələrini asanlıqla isbat etmək olar:

$$1^{\circ}. \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$2^{\circ}. (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$3^{\circ}. (\vec{a} + \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}$$



Şəkil 64.

Üçbucağın sahəsi. Fərz edək ki, bizə $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən təpə nöqtələri uyğun olaraq aşağıdakı koordinatlara malik M_1, M_2, M_3 üçbucağı verilmişdir: $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Bilirik ki, bu üçbucağın sahəsi $\vec{M_1M_2}$ və $\vec{M_1M_3}$ vektorları üzərində qurulmuş paralleloqramın sahəsinin yarısına bərabərdir (şəkil 64). Bu vektorlar üzərində qurulmuş paralleloqramın sahəsi isə həmin vektorların uzunluqları ilə onlar arasında qalan bucağın sinusu hasilinə bərabərdir. Başqa sözlə

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{M_1M_2}| \cdot |\vec{M_1M_3}| \sin \varphi$$

Digər tərəfdən bu bərabərliyin sağ tərəfi vektorial hasilin tərəfindəki birinci şərtə görə $\vec{M_1M_2}$ və $\vec{M_1M_3}$ vektorlarının vektorial hasilinin uzunluğuna bərabərdir. Başqa sözlə

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{M_1M_2} \times \vec{M_1M_3}| \quad (1)$$

İndi $\vec{M_1M_2}$ və $\vec{M_1M_3}$ vektorlarının vektorial hasilini olan vektorun və onun uzunluğunun koordinatlarla ifadəsini tapıb (1) düsturunda yerinə yazaq:

$$\vec{M_1M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{M_1M_3} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M_1M_2} \times \vec{M_1M_3} = \begin{pmatrix} y_2 - y_1 z_2 - z_1 & z_2 - z_1 x_2 - x_1 & x_2 - x_1 y_2 - y_1 \\ y_3 - y_1 z_3 - z_1 & z_3 - z_1 x_3 - x_1 & x_3 - x_1 y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{M_1M_2} \times \vec{M_1M_3}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}$$

Beləliklə biz aldığımız ki,

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{M_1M_2} \times \vec{M_1M_3}| = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}$$

xüsusi halda üçbucaq (xoy) müstəvisi üzərində yerləşdikdə

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \right\| \quad \text{və ya} \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix} \right\|$$

§ 38. Üç vektorun qarışıq hasilı

Fərz edək ki, bizə sıfırdan fərqli $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorları verilmişdir. Bu vektorlardan ikisinin vektorial hasilinin üçüncüyə skalyar hasilinə həmin vektorların **qarışıq hasilı** deyilir və $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ kimi işarə olunur.

Məlumdur ki, qarışıq hasil skalyar kəmiyyətdir. Bəzən eyni mütəəyyən ədəddir. Göstərək ki, bu mütəəqq qiyəətə həmin vektorlar üzərində qurulmuş parallelepipedin həcmiə ifadə edən ədədə bərabərdir. Bunun üçün $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorları üzərində parallelepiped quraq (şəkil 65). $\vec{a}$ ilə $\vec{b}$ vektorunun vektorial hasilini $\vec{m}$ ilə işarə edək:

$$\vec{m} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları bu parallelepipedin oturacaqlarının tərəfləridir. Onda bu oturacağın sahəsi:

$$S_{ot} = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{m} \right|$$

olub, bu parallelepipedin hündürlüyü isə $\vec{m}$ vektoru boyunca yönəlmiş olacaqdır. Onda bu parallelepipedin hündürlüyü

$$h = \left| \vec{c} \right| \cos \varphi.$$

Burada $\varphi, \vec{c}$ ilə $\vec{m}$ vektoru arasında qalan bucaqdır (şəkil 65). S_{ot} -ın və h -ın bu qiymətlərini parallelepipedin həcmi düsturunda yerinə yazsaq

$$V_{par} = S_{ot} \cdot h = \left| \vec{m} \right| \cdot \left| \vec{c} \right| \cos \varphi = \left| \vec{m} \cdot \vec{c} \right| = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right| = \left| (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|$$

ifadəsini alırıq.

Beləliklə biz göstərdik ki, üç vektorun qarışıq hasilı onlar üzərində qurulmuş parallelepipedin həcminə bərabərdir:

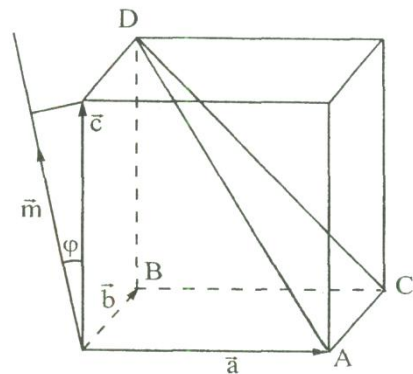
$$V_{par} = \left| (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|$$

İndi hər hansı $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən aşağıdakı koordinatlara malik üç vektorun qarışıq hasilinin koordinatlarla ifadəsini çıxaraq:

$$\vec{a} = a_1, a_2, a_3, \quad \vec{b} = b_1, b_2, b_3,$$

$$\vec{c} = c_1, c_2, c_3$$



Şəkil 65.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 a_1 \\ b_2 b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 a_1 \\ b_1 b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix} \right\} \text{ və}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ b_2 b_3 \end{vmatrix} \cdot c_1 + \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix} \cdot c_2 + \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix} \cdot c_3 = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}$$

Beləliklə, üç vektorun qarışıq hasilinin koordinatlarla ifadəsi aşağıdakı kimidir:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Göstərək ki, üç vektorun komplanarlıq şərtini (1) düsturundan asanlıqla almaq olar. Belə ki, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorları üzərində qurulmuş paralelepipedin həcmi yalnız və yalnız o zaman sıfıra bərabər olar ki, bu vektorlar komplanar olsun. Başqa sözlə

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ və ya } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$$

şərti **üç vektorun komplanarlıq şərti** olacaq.

Tetraedrin həcmi. Təpə nöqtələri A,B,C,D olan tetraed götürüb, bu nöqtələrin hər hansı $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən koordinatlarını uyğun olaraq (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , (x_4, y_4, z_4) işarə edək.

Qeyd olunan tetraedrin həcmi onun təpə nöqtələri vasitəsilə ifadə edək. Bunun üçün götürdüyümüz tetraedri paralelepipedə tamamlayaq. Başqa sözlə tilləri $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ vektorlarından ibarət olan paralelepipedi quraq (şəkil 65). Bilirik ki, qeyd olunan tetraedrin həcmi alınmış paralelepipedin həcmi $\frac{1}{6}$ -nə bərabərdir. Başqa sözlə

$$V_{tet} = \frac{1}{6} V_{par}$$

Digər tərəfdən, yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, bu paralelepipedin həcmi onun tilləri olan $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ vektorlarının qarışıq hasilini ifadə edən ədədə bərabərdir. Başqa sözlə,

$$V_{tet} = \frac{1}{6} \left| \left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \right] \right|$$

İndi $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ vektorlarının (1) düsturundakı koordinatlarla ifadəsini tapıb, burada yerinə yazaq,

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{vmatrix} \\ \vec{AC} &= \begin{vmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{vmatrix} \\ \vec{AD} &= \begin{vmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \\ z_4 - z_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$V_{tet} = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

Beləliklə, aldığımız (2) düsturu düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən təpə nöqtələri verilmiş **tetraedrin həcmi** düsturudur.

§ 39. Fəzada koordinat metodu. Səthin tənliyi.

Müstəvi üzərində koordinat metodunun mahiyyəti ilə II fəsildə tanış olmuşuq. Fəzada koordinat metodunun mahiyyəti müstəvi üzərində olduğundan demək olar ki, heç fərqlənmir. Burada da mahiyyət fəzada koordinat sistemi götürməklə, həndəsi fiqurları ədədlər, tənliklər, bərabərsizliklər və ya onların sistemləri vasitəsilə verməkdən ibarətdir. Bunun üçün «fiquru təyin edən şərt» anlayışı verilir.

Fərz edək ki, bizə fəzada hər hansı $\{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ afin koordinat sistemi və Φ fiquru verilmişdir.

Əgər Φ fiquru üzərində yerləşən istənilən nöqtənin götürdüyümüz afin koordinat sisteminə nəzərən koordinatları, verilmiş hər hansı tənlik və ya bərabərsizliyi (onların sistemlərini) ödəyirsə və bu fiqur üzərində yerləşməyən ixtiyari nöqtənin koordinatları həmin tənlik və ya bərabərsizliyi ödəmirsə, onda bu tənlik və ya bərabərsizliyə (onların sisteminə) **Φ fiqurunu təyin edən şərt** deyilir. Əgər bu şərt bir tənlikdən ibarət olarsa, ona **fiqurun tənliyi** deyilir.

Koordinat metodunun mahiyyətini daha dərinlən öyrənmək üçün adətən aşağıdakı iki məsələyə baxılır.

a)Fiquru təyin edən şərt vasitəsilə onu koordinat sistemində qurmaq. Məsələn: koordinatları $z > 0$ olan nöqtələr çoxluğu fəzada verilmiş $\{x, y, z\}$ afin koordinat sisteminə nəzərən, (xoy) müstəvisindən yuxarıda yerləşən ((oz) oxunun müsbət istiqamətində) nöqtələrdən ibarətdir. Başqa sözlə, (xoy) müstəvisinin təyin etdiyi elə yarımfəzadır ki, buradakı bütün nöqtələr üçün $z > 0$.

b)Verilmiş fiqurun xassələri vasitəsilə, onu təyin edən şərti, xüsusi halda onun tənliyini yazmaq. Fəzada həndəsi fiqur olaraq səth anlayışından daha çox istifadə olunur. Səthi təyin edən şərt

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

şəklindədir ki, buna da **səthin ümumi tənliyi** deyilir. Səthə misal olaraq oxucuya məktəb kursundan tanış olan müstəvi, sferik səth, silindr və konusu göstərmək olar.

Xassələrinə görə, verilmiş koordinat sisteminə nəzərən, sferik səthin tənliyini yazaq.

Oxucuya məlumdur ki, sferik səth mərkəz adlanan verilmiş hər hansı R nöqtəsindən R məsafəsində yerləşən fəzanın bütün nöqtələr çoxluğundan ibarətdir.

Fəzada hər hansı $\{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ koordinat sistemi götürüb, sferik səthin yuxarıda verdikimiz tərifinə görə tənliyini yazaq:

Götürdüyümüz koordinat sisteminə nəzərən, bu səthin B mərkəzinin koordinatlarını (α, β, γ) , M cari (ixtiyari) nöqtəsinin koordinatlarını isə (x, y, z) -lə işarə edək. Onda, verdikimiz tərifə görə

$$\rho(O, M) = R$$

Onda, iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2} = R$$

və yaxud

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2 \quad (2)$$

Bu tənlik $B(\alpha, \beta, \gamma)$ mərkəzli, R -radiuslu **sferik səthin** tənliyi olacaq. Xüsusi halda, sferik səthin mərkəzi koordinat başlanğıcı ilə üst-üstə düşərsə, bu zaman

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

olar və uyğun olaraq (2) tənliyi

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (3)$$

şəklinə düşər.

Əgər (1) tənliyində mütərizələri açıb dəyişənlərə nəzərən qruplaşdırsaq.

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \quad (4)$$

tənliyini alırıq ki, bu da sferik səthin ümumi tənliyi adlanır.

Burada $A = -2\alpha$, $B = -2\beta$, $C = -2\gamma$ və $D = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$.

İndi iki fiqurun kəsişməsinin və birləşməsinin tənliklərini yazaq:

Fərz edək ki, bizə hər hansı afin koordinat sisteminə nəzərən $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ tənliklərinə malik Φ_1 və Φ_2 fiqurları verilmişdir.

Məlumdur ki, bu fiqurların kəsişməsi hər iki fiqura daxil olan nöqtələr çoxluğu olduğundan, bu nöqtələrin koordinatları verilmiş tənliklərin hər ikisini ödəməlidir. Başqa sözlə,

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

sistemini ödəməlidir.

(5) sistemi $\Phi_1 \cap \Phi_2$ **kəsişməsinin tənliyi** olacaqdır.

İki fiqurun birləşməsi isə bu fiqurlardan heç olmazsa, birinə daxil olan nöqtələr çoxluğundan ibarətdir. Onda bu çoxluğa daxil olan hər bir nöqtənin koordinatları verilmiş fiqurların tənliklərindən heç olmazsa birini ödəməlidir.

Bu isə yalnız və yalnız o zaman olar ki, qeyd olunan çoxluğun ixtiyari nöqtəsinin koordinatları

$$F_1(x, y, z), \quad F_2(x, y, z) = 0 \quad (6)$$

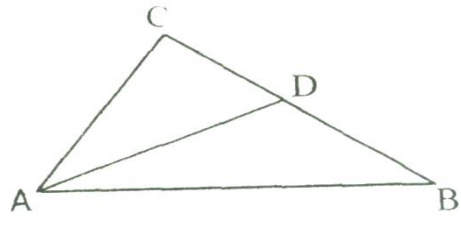
tənliyini ödəmiş olsun.

(6) tənliyi Φ_1 və Φ_2 fiqurlarının **birləşməsinin tənliyi** olacaqdır.

İndi də bu fəslə aid bir neçə məsələ həll edək.

Məsələ 1: ABC üçbucağı verilmişdir: A(2;-1;4), B(3;2;-6), C(-5;0;2). Onun A təpəsindən keçən medianın uzunluğunu hesablayın.

Həlli: BC tərəfi ilə A təpəsindən keçən medianın kəsişmə nöqtəsini D ilə işarə edək. Medianın tərifinə görə D nöqtəsi BC tərəfinin orta nöqtəsidir, yəni D nöqtəsi BC parçasını $\lambda = 1$ nisbətində bölür (şəkil 1). Ona görə (3) düsturundan istifadə edərək D nöqtəsinin koordinatlarını tapaq:



Şəkil 1

$$x = \frac{3 + (-5)}{2} = -1, \quad y = \frac{2 + 0}{2} = 1, \quad z = \frac{-6 + 2}{2} = -2$$

Deməli, D(-1;1;-2). İndi AD-ni hesablayaq:

$$AD = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+1)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Məsələ 2: A(2;-1;7) və B(4;5;-2) nöqtələri verilmişdir. AB düz xətti ilə koordinat müstəvilərinin kəsişmə nöqtələrini təyin edin.

Həlli: AB düz xətti ilə Oxy müstəvisinin kəsişmə nöqtəsini $M_3(x_3, y_3, 0)$ ilə işarə edək. Göründüyü kimi M_3 nöqtəsinin üçüncü koordinatı sifıra bərabərdir. Bundan da parçanın λ nisbətində bölünməsi (2) düsturlarının üçüncüsündən istifadə edərək tapa bilərik.

$$0 = \frac{7 + \lambda_3(-2)}{1 + \lambda} \quad \text{və ya} \quad 7 - 2\lambda_3 = 0, \quad \text{buradan da} \quad \lambda = \frac{7}{2} \quad \text{alınır. Qeyd olunan düsturların birinci və}$$

ikinci düsturundan da istifadə edib, M_1 nöqtəsinin x_1 və y_1 koordinatlarını tapa bilərik:

$$x_3 = \frac{2 + \frac{7}{2} \cdot 4}{1 + \frac{7}{2}} = \frac{4 + 28}{2 + 7} = \frac{32}{9}$$

$$y_3 = \frac{-1 + \frac{7}{2} \cdot 5}{1 + \frac{7}{2}} = \frac{-2 + 35}{2 + 7} = \frac{11}{3}$$

Deməli, $M_3 \left[\frac{32}{9}; \frac{11}{3}; 0 \right]$.

Buna oxşar olaraq AB düz xətti ilə Oxz müstəvisinin kəsişmə nöqtəsini $M_2(x_2; 0; z_2)$ ilə və Oyz müstəvisi ilə isə kəsişmə nöqtəsini $M_1(0; y_1; z_1)$ ilə işarə edək. M_2 nöqtəsinin ikinci koordinatından istifadə edərək tapa bilərik:

$$0 = \frac{-1 + \lambda_2 \cdot 5}{1 + \lambda_2}, \quad 5\lambda_2 - 1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{5}.$$

Onda

$$x_2 = \frac{2 + \frac{1}{5} \cdot 4}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{10 + 4}{5 + 1} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \cdot z_2 = \frac{7 + \frac{1}{5}(-2)}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{11}{2}$$

$$M_2 \left[\frac{7}{3}; 0; \frac{11}{2} \right].$$

M_1 nöqtəsinin birinci koordinatından istifadə etdikdə

$$0 = \frac{2 + \lambda_1 \cdot 4}{1 + \lambda_1}, \quad 4\lambda_1 = -2, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}.$$

Onda

$$y_1 = \frac{-1 + \left[-\frac{1}{2}\right] \cdot 5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-7/2}{\frac{1}{2}} = -7, \quad z_1 = \frac{7 + \left[-\frac{1}{2}\right] \cdot (-2)}{1 - \frac{1}{2}} = 16.$$

$$M_1(0; -7; 16).$$

Məsələ 3: Tili a-ya bərabər olan $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubu verilmişdir. $\{B, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ sistemindən

$\{D_1, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ sisteminə keçid düsturlarını təyin edin.

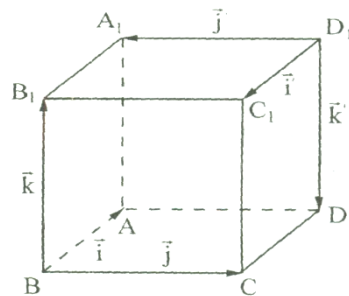
Burada $\bar{i} = \vec{BA}$, $\bar{j} = \vec{BC}$, $\bar{k} = \vec{BB_1}$, $\bar{i} = \vec{D_1 C_1}$, $\bar{j} = \vec{D_1 A_1}$, $\bar{k} = \vec{D_1 D}$ (şəkil 2).

Həlli: Şəkildən aydın görünür ki,

$$\alpha_1 = (\vec{i}, \vec{i}) = \pi$$

$$\alpha_2 = (\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_3 = (\vec{i}, \vec{k}) = \frac{\pi}{2}$$



Şəkil 2

$$\beta_2 = (\vec{j}, \vec{i}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta_2 = (\vec{j}, \vec{j}) = \pi$$

$$\beta_3 = (\vec{j}, \vec{k}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma_1 = (\vec{k}, \vec{i}) = \frac{\pi}{2}, \gamma_2 = (\vec{k}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}, \gamma_3 = (\vec{k}, \vec{k}) = \pi$$

$$x_0 = a, y_0 = a, z_0 = a.$$

Onda (2) düsturlarından istifadə edərək yazı bilərik:

$$x = x \cos \pi + y \cos \frac{\pi}{2} + z \cos \frac{\pi}{2} + a = -x + a.$$

$$y = x \cos \frac{\pi}{2} + y \cos \pi + z \cos \frac{\pi}{2} + a = -y + a.$$

$$z = x \cos \frac{\pi}{2} + y \cos \frac{\pi}{2} + z \cos \pi + a = -z + a.$$

Məsələ 4: A(2;-3;1), B(-1;1;1), C(-4;5;6) və D(2;-3;6) nöqtələri verilmişdir. Bu nöqtələrin bir müstəvi üzərində yerləşib-yerləşmədiyini təyin edin. Onlar bir müstəvi üzərində yerləşdikdə ABCD dördbucaqlısının sahəsini hesablayın.

Həlli: Aşkardır ki, əgər $\vec{AB}, \vec{AC}$ və $\vec{AD}$ vektorları komplanardırsa, onda A,B,C və D nöqtələri bir müstəvi üzərində yerləşər. Ona görə qeyd olunan vektorların komplanar olub-olmadığını təyin edək. Bunun üçün həmin vektorların koordinatlarını tapaq:

$$\vec{AB} = (-1-2; 1+3; 1-1) \Rightarrow \vec{AB} = (-3; 4; 0);$$

$$\vec{AC} = (-4-2; 5+3; 6-1) \Rightarrow \vec{AC} = (-6; 8; 5);$$

$$\vec{AD} = (2-2; -3+3; 6-1) \Rightarrow \vec{AD} = (0; 0; 5).$$

$\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ vektorlarının komplanar olması üçün onların koordinatlarından düzəldilmiş üçtərtibli determinantın sıfıra bərabər olması zəruri və kifayət şərtdir. Ona görə bu vektorların koordinatlarından ibarət olan üçtərtibli determinantı hesablayaq:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 480 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -120 + 0 + 0 + 0 + 0 + 120 = 0.$$

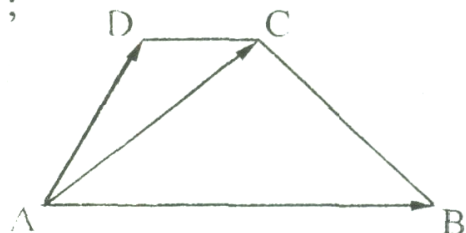
Determinant sıfıra bərabər olduğundan $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ vektorları komplanardırlar, ona görə də A,B,C və D nöqtələri bir müstəvi üzərində yerləşirlər. İndi ABCD dördbucaqlısının sahəsini hesablayaq. Bu məqsədlə A və C nöqtələrini birləşdirərək dördbucaqlını iki ABC və ACD üçbucaqlarına ayıraq.

Vektorların vektorial hasilindən istifadə edərək, üçbucaqların sahəsini hesablayaq:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left[\vec{AB}, \vec{AC} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} 40 \\ 85 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0-3 \\ 5-6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -34 \\ 68 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{400 + 225 + 0} = \frac{1}{2} \sqrt{625} = \frac{25}{2};$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \left[\vec{AC}, \vec{AD} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} 85 \\ 05 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 5-6 \\ 50 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -68 \\ 00 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1600 + 900 + 0} = \frac{1}{2} \sqrt{2500} = \frac{50}{2};$$



$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{25}{2} + \frac{50}{2} = \frac{75}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{75}{2} \cdot kub.v.$$

Şəkil 3.

Məsələ 5: Təpələri A(2;-1;-1), B(5;-1;2) C(3;0;-3) və D(6;0;-1) nöqtələrində yerləşən tetraedrin həcmi təyin edin.

Həlli: ABCD tetraedrinin həcmi hesablamaq üçün, əvvəlcə onun bir təpəsindən çıxan üç tili ilə üst-üstə düşən $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ vektorlarının koordinatlarını təyin edək: $\vec{AB} = (3;0;3)$, $\vec{AC} = (1;1;-2)$, $\vec{AD} = (4;1;0)$. Bu vektorlar üzərində qurulmuş tetraedrin həcmi məlum düsturdan istifadə edərək, hesablayaq:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \right] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |0 + 0 + 3 - 12 + 6 + 0| = \frac{1}{6} |-3| = \frac{1}{2}, \quad V_{ABCD} = \frac{1}{2} kub.v$$

ÇALIŞMALAR.

1. Afın koordinat sistemində A(3;2;1), B(-2;1;3), C(-2;-4;-3), D(1;-3;2), E(1;2;-3), F(-2;3;-1) G(-3;4;-1), K(2;-5;-3), L(3;1;0), S(1;0;3), T(0;1;4), R(1;0;0), P(0;3;0) nöqtələrini qurun.

2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubunun A təpəsindən çıxan tilləri koordinat vektorları qəbul edilmişdir.

$\{A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ koordinat sistemində kubun təpələrinin koordinatlarını təyin edin.

3. $\vec{OM} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$ vektoru verilmişdir. Onun koordinat oxları ilə əmələ gətirdiyi bucaqların kosinuslarını hesablayın.

4. Üçbucağın təpələri A(3;5;-4), B(-1;1;2) və C(-5;-5;-2) nöqtələrində yerləşir. Onun bərabəryanlı olub-olmadığını təyin edin.

5. Ox müstəvisi üzərində yerləşən və A(1;1;1), B(-1;1;0), C(3;1;-1) nöqtələrindən bərabər uzaqlıqda olan nöqtəni təyin edin.

6. ABC üçbucağı verilmişdir. A(3;-2;4), B(3;-1;0), C(-5;0;2). B nöqtəsindən keçən medianın uzunluğunu təyin edin.

7. Üçbucağın təpələri A(2;-1;3), B(4;0;1) və C(6;6;4) nöqtələrində yerləşir. B bucağının tənböləni ilə AC tərəfinin kəsişmə nöqtəsini tapın.

8. Paraleloqramın ardıcıl üç təpəsi verilmişdir: A(3;0;4), B(1;2;3), C(9;6;4).

a) diaqonallarının kəsişmə nöqtəsini;

b) dördüncü D təpəsinin koordinatlarını;

c) AC diaqonalinin uzunluğunu hesablayın.

9. A(2;-1;1) və B(4;5;-2) nöqtələri verilmişdir. AB parçasını koordinat müstəviləri hansı nisbətə bölür?

10. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelepipedini verilmişdir. Nöqtənin $\{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ koordinat sistemindəki

x,y,z koordinatlarını, onun $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sistemindəki x,y,z koordinatları ilə ifadə edin, burada

$$\vec{e}_1 = \vec{AB}, \quad \vec{e}_2 = \vec{AD}, \quad \vec{e}_3 = \vec{AA_1}, \quad \vec{e}_1 = \vec{OO_1}, \quad \vec{e}_2 = \vec{OO_2}, \quad \vec{e}_3 = \vec{OO_3}, \quad O = AC_1 \cap BD_1, \\ O_1 = BC_1 \cap B_1C_1, \quad O_2 = CD_1 \cap DC_1, \quad O_3 = A_1C_1 \cap B_1D_1.$$

11. Nöqtənin $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ sistemindəki x, y, z koordinatları $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ sistemindəki x, y, z

koordinatları ilə ifadə edilmişdir.

a) $x = x - 3y + z, y = x + y, z = x + 1$;

b) $x = x - 1, y = y + 3, z = z$;

c) $x = x - y + z + 1, y = x - y + 2z + 2, z = z - 3$;

c) $x = x - y + z + 1, y = -x - y + 2z + 2, z = z - 3$.

O nöqtəsinin və $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vektorlarının $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ sistemində koordinatlarını tapın.

12. $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ və $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ düzbucaqlı koordinat sistemləri verilmişdir, belə ki,

$$\alpha_1 = \arccos\left[-\frac{11}{15}\right], \alpha_2 = \arccos\left[-\frac{2}{15}\right], \alpha_3 = \arccos\left[\frac{2}{3}\right], \beta_1 = \arccos\left[-\frac{2}{15}\right], \beta_2 = \arccos\left[-\frac{14}{15}\right],$$

$$\beta_3 = \arccos\left[-\frac{1}{3}\right], \gamma_1 = \arccos\left[\frac{2}{3}\right], \gamma_2 = \arccos\left[-\frac{1}{3}\right], \gamma_3 = \arccos\left[\frac{2}{3}\right].$$

Koordinat sisteminin birindən o birinə keçmək üçün çevirmə düsturlarını yazın.

13. $\bar{a} = 8\bar{i} + 4\bar{j} + 1\bar{k}$ və $\bar{b} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 1\bar{k}$ vektorları verilmişdir. Bu vektorlar üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsini təyin edin.

14. $A(1;2;-3)$, $B(5;2;0)$ və $C(3;2;-2)$ nöqtələri verilmişdir. C nöqtəsindən AB düz xəttinə qədər məsafəni tapın (vektorial hasildən istifadə etməklə).

15. ABCD tetraderi verilmişdir: $A(2;-4;5)$, $B(-1;-3;4)$, $C(5;5;-1)$, $D(1;-2;2)$. Onun AH hündürlüyünü tapın.

16. $\vec{AB} = 4\bar{i} + 3\bar{j} + 0\bar{k}$, $\vec{AD} = 2\bar{i} + 1\bar{j} + 2\bar{k}$ və $\vec{AA_1} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}$ vektorları üzərində qurulmuş $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelipedini verilmişdir.

a) paralelipedin həcmi; b) A_1 təpəsindən ABCD üzünə endirilmiş hündürlüyün uzunluğunu hesablayın.

17. $\vec{AB} = 2\bar{i} + 1\bar{j} + 0\bar{k}$, $\vec{AC} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 0\bar{k}$ və $\vec{AD} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$ vektorları üzərində ABCD tetraedri verilmişdir.

a) Tetraedrin həcmi; b) üzlərinin sahəsini; c) D təpəsindən çəkilmiş hündürlüyün uzunluğunu; d) AB və BC tilləri arasındakı bucağın kosinusunu tapın.

18. $\vec{AB} = 6\bar{i} + 1\bar{j} - 1\bar{k}$, $\vec{AC} = 2\bar{i} - 1\bar{j} + 4\bar{k}$ və $\vec{AA_1} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ vektorları üzərində qurulmuş $ABCA_1 B_1 C_1$ prizması verilmişdir.

a) Prizmanın həcmi; b) onun üzlərinin sahəsini; c) $B_1 C_1$ və AA_1 tilləri arasındakı bucağı təyin edin.

19. ABC üçbucağı verilmişdir: $A(-1;1;2)$, $B(1;1;0)$, $C(2;6;-2)$ a) üçbucağın sahəsini; b) daxili bucaqlarının kosinusunu; c) BH hündürlüyünün uzunluğuna hesablayın.

20. Həcmi $V=5$ olan tetraedrin $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$ təpələri verilmişdir. onun Oy oxu üzərində yerləşən D təpəsinin koordinatlarını tapın.

III FƏSİL

FƏZADA MÜSTƏVİLƏR VƏ DÜZ XƏTLƏR

§ 40. Müstəvinin verilməsi üsulları və müxtəlif tənlikləri.

1. Müstəvinin verilməsi üsulları. Məlumdur ki, eyni bir α müstəvisinə paralel olan və bu müstəvi üzərində yerləşən vektorlar çoxluğu iki ölçülü V vektorlar fəzasını təyin edir. Bu fəzaya bəzən α müstəvisinin vektorlar fəzası, onun vektorlarına isə α **müstəvisinin vektorları** deyilir.

Əgər kollinear olmayan $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları α müstəvisinin vektorlarıdırsa, onda $\vec{c}$ vektoru yalnız və yalnız o zaman bu müstəvinin vektoru olar ki, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanar olsunlar (üç vektorun xətti asılı olması şərti). Vektorların bu xassəsindən istifadə edib, müstəvini müxtəlif üsullarla vermək olar.

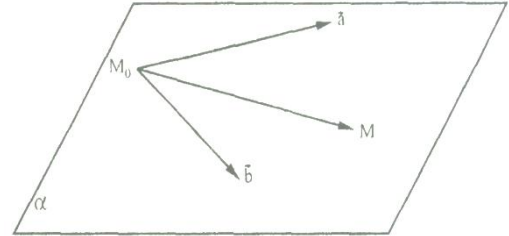
Əgər elə $A, B \in \alpha$ -nöqtələri varsa ki, $\vec{p} = \vec{AB}$ olsun, onda $\vec{p}$ -vektora α **müstəvisinə paralel vektor** deyilir.

Fərz edək ki, bizə α müstəvisi və bu müstəvi üzərində M , nöqtəsi verilmişdir. Kollinear olmayan $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları bu müstəvinin vektorları olsun. Onda M nöqtəsi yalnız və yalnız o zaman α müstəvisinin nöqtəsi olar ki, $\vec{M_0M}$ vektoru bu müstəvinin $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları ilə komplanar olsun (şəkil 66).

$$M \in \alpha \Leftrightarrow \vec{M_0M} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

Burada λ və μ əmsalları həqiqi ədədlərdir. Deməli, α müstəvisini vermək üçün onun bir nöqtəsini və kollinear olmayan iki vektorunu vermək kifayətdir.

Eləcə də əgər α müstəvisinin bir düz xətt üzərində olmayan M_1, M_2 və M_3 nöqtələri verilmişsə, onda M nöqtəsi yalnız və yalnız o zaman α müstəvisinin nöqtəsi olar ki, $\vec{M_1M_2}$,



Şəkil 66

$\vec{M_1M_3}$ və $\vec{M_1M}$ vektorları komplanar vektorlar olsunlar, yəni

$$M \in \alpha \Leftrightarrow \vec{M_1M} = \lambda \vec{M_1M_2} + \mu \vec{M_1M_3}$$

Beləliklə, α müstəvisi aşağıdakı verilənlərə görə birqiymətli təyin olunur.

a) M_0 **nöqtəsi və kollinear olmayan iki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektora verildikdə.** Bu zaman α müstəvisini $\alpha = [M_0, \vec{a}, \vec{b}]$ kimi işarə edəcəyik. Bu $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarına α müstəvisinin yönəldici vektorları da deyirlər.

b) **Biz düz xətt üzərində yerləşməyən üç M_1, M_2 və M_3 nöqtələri verildikdə.** Bu zaman müstəvini $\alpha = [M_1, M_2, M_3]$ kimi işarə edəcəyik.

Bunlar fəzada **müstəvinin verilməsi üsulları adlanır.**

Yuxarıda verilənlərə görə müstəvinin müxtəlif tənliklərini yazaq.

2. Bir nöqtəsi və yönəldici vektorlarına görə müstəvi tənliyi. Fərz edək ki, α müstəvisi özünün M_0 nöqtəsi və kollinear olmayan iki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları vasitəsi ilə verilmişdir.

Fəzada hər hansı $R = \{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ümumi dekart koordinat sistemi götürüb, M_0 nöqtəsinin və

$\bar{a}, \bar{b}$ vektorlarının bu koordinat sisteminə nəzərən koordinatlarını aşağıdakı kimi işarə edək:

$$M_0(x_0, y_0, z_0), \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Yuxarıda qeyd etdik ki, M nöqtəsi yalnız və yalnız o zaman α müstəvisinin nöqtəsi olar ki,

$$\vec{M_0M} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{b} \quad (1)$$

şərti ödənməmiş olsun. Bu ayrılışı koordinatlarla yazaq

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y - y_0 = \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z - z_0 = \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases} \quad (2)$$

$\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları kollinear olmadığından

$$\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$$

olar.

Aşkardır ki, koordinatları (2) tənliyini ödəyən hər bir nöqtə (1) münasibətini ödəyir, yəni α müstəvisi üzərində yerləşir. Deməli, (2) müstəvinin tənliyidir. Bu tənlik müstəvinin **parametrik tənliyi** adlanır.

Bilirik ki, üç vektor yalnız və yalnız o zaman komplanar olar ki, onların qarışıq hasili sıfıra bərabər olsun. Başqa sözlə

$$\left[\vec{M_0M}, \bar{a}, \bar{b} \right] = 0$$

və yaxud

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Koordinatları (3) tənliyini ödəyən hər bir nöqtə (1) münasibətini də ödədiyindən, M nöqtəsi α müstəvisi üzərində yerləşəcəkdir. Bu isə o deməkdir ki, (3) tənliyi də α müstəvisinin tənliyidir.

Qeyd edək ki, müstəvinin (2) tənliyində λ, μ parametrlərini yox etsək, (3) tənliyində isə determinantı açıb, x, y və z dəyişənlərinə görə qruplaşdırsaq, hər iki tənliyin bu dəyişənlərə nəzərən birdərəcəli olduğunu görürük.

3.Üç nöqtədən keçən müstəvi tənliyi. Fərz edək ki, α müstəvisi özünün üç M_1, M_2 və M_3 nöqtələri vasitəsi ilə verilmişdir.

$R = \{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən bu nöqtələrin koordinatlarını

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ ilə işarə edək.

Əgər biz $\vec{M_1M_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$ və $\vec{M_1M_3} = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{bmatrix}$ vektorlarını α müstəvisinin yönəldici vektorları qəbul etsək, (3) tənliyinə görə müstəvinin tənliyi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

şəklində olar. Bu tənliyə **üç nöqtədən keçən müstəvinin tənliyi** deyilir.

4. Müstəvinin parçalarla tənliyi. Fərz edək ki, α müstəvisi verilmiş $R = \{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ümumi

dekart koordinat sisteminin oxlarından heç birinə paralel deyil və koordinat başlanğıcından keçmir. Onda bu müstəvi koordinat oxlarının hər birini kəsəcəkdir. Kəsişmə nöqtələrini uyğun olaraq $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ və $C(0,0,c)$ ilə işarə edək. (4) tənliyinə görə bu nöqtələrdən keçən müstəvinin tənliyi aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$\begin{vmatrix} x - ay - 0z - 0 \\ 0 - ab - 00 - 0 \\ 0 - a0 - 0c - 0 \end{vmatrix} = 0$$

və yaxud

$$\begin{vmatrix} x - ayz \\ -ab0 \\ -a0c \end{vmatrix} = 0$$

Bu determinantı açıb bütün hədləri $abc \neq 0$ hasilinə bölsək, aşağıdakı tənliyi alırıq.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (5)$$

Bu tənliyə müstəvinin **parçalarla tənliyi** deyilir. Koordinat sistemi burada düzbucaqlı olduqda a , b və c ədədləri müstəvinin koordinat oxlarından ayırdığı parçalar olacaq.

§ 41. Müstəvinin ümumi tənliyi və onun araşdırılması.

1. Müstəvinin ümumi tənliyi. Biz yuxarıda yazdığımız müstəvi tənliklərinə nəzər yetirsək, onların hər birinin x , y və z dəyişənlərinə nəzərən birdərəcəli olduğunu görürük. Təbii olaraq belə bir sual meydana çıxır: x , y , z dəyişənlərinə nəzərən bir dərəcəli olan hər bir tənlik fəzada müstəvinin təyin edirmi?

Göstərək ki, məchulları əmsallarının üçü də birdən sıfır olmayan hər bir

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (6)$$

üçməchullu birdərəcəli tənlik hər hansı $R = \{e_1, e_2, e_3\}$ ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən müəyyən müstəvinin tənliyidir.

Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $A \neq 0$ (6) tənliyini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$x = -\frac{D}{A} - \frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z.$$

Əgər bu tənlikdə $y = \lambda$, $z = \mu$ qəbul etsək, onda (6) tənliyini aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$\begin{cases} x = -\frac{D}{A} - \frac{B}{A}\lambda - \frac{C}{A}\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Bu sistemi müstəvinin parametrik tənliyi olan (2) sistemi ilə müqayisə etsək, görürük ki, bu sistem $M_0 \left[-\frac{D}{A}; 0; 0 \right]$ nöqtəsindən keçib

$$\bar{a} = \left\{ -\frac{B}{A}; 1; 0 \right\} \text{ və } \bar{b} = \left\{ -\frac{C}{A}; 0; 1 \right\}$$

yönəldici vektorlarına malik olan müstəvinin tənlikləridir.

Qeyd edək ki, bu vektorlar əvəzinə onlarla kollinear olan $(-B, A, 0)$ və $(-C, 0, A)$ vektorlarını da bu müstəvinin yönəldici vektorları qəbul etmək olar.

Beləliklə, biz göstərdik ki, (6) tənliyi hər hansı afin koordinat sisteminə nəzərən $M_0 \left[-\frac{D}{A}; 0; 0 \right]$

nöqtəsindən keçib, $\vec{a} = \begin{bmatrix} -A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ və $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -A \\ 0 \end{bmatrix}$ yönəldici vektorlarına malik olan müstəvinin tənliyidir. Bu tənliyə müstəvinin **ümumi tənliyi** deyilir. Eyni qayda ilə $B \neq 0$ və ya $C \neq 0$ olduqda da (6) tənliyinin müstəvi tənliyi olduğunu göstərmək olar.

2. Müstəvinin ümumi tənliyinin araşdırılması. Əvvəlcə hər hansı ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən koordinatları ilə verilmiş $\vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$ vektorunun $Ax + By + Cz + D = 0$ ümumi tənliyinə malik α müstəvisinə paralellik şərtini müəyyən edək.

Fərz edək ki, $\vec{p} \parallel \alpha$. Onda α müstəvisi üzərində elə $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri vardır ki,

$$\vec{M_1 M_2} = \vec{p} \quad \text{şərtini ödəyir.}$$

Bu bərabərliyi koordinatlarla yazaq:

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x_1 &= p_1 \\ y_2 - y_1 &= p_2 \\ z_2 - z_1 &= p_3 \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

$M_1 \in \alpha$, $M_2 \in \alpha$ olduğundan bu nöqtələrin koordinatları α müstəvisinin tənliyini ödəməlidir.

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

Bunları tərəf-tərəfə çıxıb (*) münasibətini burada nəzərə alsaq

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \quad (7)$$

şərtinin ödənildiyini görürük.

İndi də göstərək ki, (7) şərti ödənildikdə $\vec{p} \parallel \alpha$. Bunun üçün α müstəvisi üzərində hər hansı M_1 nöqtəsi götürüb $\vec{p}$ vektorunu bu nöqtəyə köçürək və son nöqtəsini M_2 ilə işarə edək. Alınan $\vec{M_1 M_2}$ vektorunun M_2 uc nöqtəsinin α müstəvisi üzərində olduğunu göstərək. Bunun üçün $\vec{M_1 M_2} = \vec{p}$ bərabərliyinin (*) koordinatlarla ifadəsindən M_1 nöqtəsinin (x_1, y_1, z_1) koordinatlarını tapıb müstəvinin tənliyində yerinə yazsaq, $M_1 \in \alpha$ olduğundan bu ifadə sıfıra çevrilməlidir.

$$A(x_2 + p_1) + B(y_2 + p_2) + C(z_2 + p_3) + D = 0$$

və ya

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D - (Ap_1 + Bp_2 + Cp_3) = 0$$

(7) ifadəsini burada nəzərə alsaq, $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$ olduğunu alırıq ki, bu da M_2 nöqtəsinin α müstəvisi üzərində olması deməkdir. Deməli, (7) şərti ödənildikdə α müstəvisi üzərində elə M_1 və M_2 nöqtələri tapmaq olar ki, $\vec{M_1 M_2} \parallel \vec{p}$ olsun.

Beləliklə, biz göstərdik ki, $\vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$ vektoru $Ax + By + Cz + D = 0$ ümumi tənliyinə malik α müstəvisinə yalnız və yalnız o zaman paralel olar ki, (7) şərti ödənilmiş olsun. Bu şərtə $\vec{p}$ vektorunun α müstəvisinə **paralellik şərti** deyilir.

İndi müstəvinin ümumi tənliyinin araşdıraraq. Ümumi tənliyi ilə verilmiş α müstəvisinin A , B , C , D əmsallarından biri və ya bir neçəsi sıfıra bərabər olanda $R = \left\{ 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən onun vəziyyətini müəyyən edək.

Fərz edək ki, (7) tənliyində

a) $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D = 0$. Onda müstəvinin tənliyi

$$Ax + By + Cz = 0$$

şəklinə düşür. Koordinat başlanğıcının koordinatları bu tənliyi ödədiyindən müstəvi koordinat başlanğıcından keçir. Tərsinə, əgər α müstəvisi koordinat başlanğıcından keçirsə, onda koordinat başlanğıcının koordinatları onun tənliyini ödəməlidir:

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

Beləliklə, $D = 0 \Leftrightarrow O \in \alpha$

b) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ olduqda müstəvinin tənliyi $By + Cz + D = 0$ şəklinə düşəcəkdir.

Onda $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektoru bu tənliklə təyin olunan müstəviyə paralel olacaqdır. Doğrudan da, (7) şərtindən

$$0 \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0$$

yəni $A=0$ olduqda α müstəvisi (ox) oxuna paralel olacaqdır. Əksinə, əgər α müstəvisi (ox) oxuna paralel olsa, onda $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektorunun koordinatları (7) şərtini ödəməlidir:

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Beləliklə,

$$A = 0 \Leftrightarrow \alpha // (ox).$$

Analoji qayda ilə göstərilir ki,

$$B = 0 \Leftrightarrow \alpha // (oy).$$

$$C = 0 \Leftrightarrow \alpha // (oz).$$

Deməli,

$Ax + Cz + D = 0$ tənliyi (oy) oxuna, $Ax + By + D = 0$ tənliyi isə (oz) oxuna paralel olan müstəvilərin tənlikləridir.

v)

$$A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D = 0$$

Bu halda müstəvinin ümumi tənliyi

$$Bx + Cz = 0$$

şəklinə düşəcəkdir. Birinci iki halı nəzərə alsaq, deyə bilərik ki, bu tənlik (ox) oxundan keçən müstəvinin tənliyidir. Yəni

$$(A = 0, D = 0) \Leftrightarrow (ox) \subset \alpha$$

Eləcə də

$$(B = 0, D = 0) \Leftrightarrow (oy) \subset \alpha$$

$$(C = 0, D = 0) \Leftrightarrow (oz) \subset \alpha$$

q)

$$A = 0, B = 0, C = 0, D \neq 0.$$

Bu halda müstəvinin tənliyi

$$Cz + D = 0$$

şəklinə düşəcəkdir. B) halına görə bu tənliklə təyin olunan müstəvi həm (ox) oxuna, həm də (oy) oxuna paraleldir. Deməli, bu tənlik (xoy) müstəvisinə paralel müstəvinin tənliyidir və (xoy) müstəvisinə paralel olan hər bir müstəvinin tənliyi bu şəkildədir. Yəni:

$$(A = 0, B = 0) \Leftrightarrow \alpha // (xoy)$$

Eləcə də

$$(A = 0, C = 0) \Leftrightarrow \alpha // (xoz)$$

$$(B = 0, C = 0) \Leftrightarrow \alpha // (yoz)$$

d)

$$A = 0, B = 0, C \neq 0, D = 0.$$

Bu halda müstəvinin tənliyi

$Cz=0$ və ya $z=0$ şəklinə düşəcəkdir.

$A=0, B=0$ olmasından alınır ki, bu tənliklə təyin olunan müstəvi (xoy) müstəvisinə paralel olar. $D=0$ olmasından alınır ki, koordinat başlanğıcından keçir. Deməli, $z=0$ tənliyi ilə təyin olunan

müstəvi (xoy) müstəvisi ilə üst-üstə düşür. Məlumdur ki, tərsi də doğrudur. Deməli, $z=0$ tənliyi (xoy) müstəvisinin tənliyidir. Eləcə də $y=0$ tənliyi (xoz) müstəvisinin, $x=0$ tənliyi isə (yoz) müstəvisinin tənliyi olacaqdır.

§ 42. $Ax+By+Cz+D$ -çoxhədlinin işarəsinin həndəsi mənası.

Fəzada hər hansı $R = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ümumi dekart koordinat sistemi götürüb

$P(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$ ifadəsinə baxaq. Bilirik ki, koordinatları bu ifadəni sıfıra çevirən nöqtələr çoxluğu müstəvidir. Bu müstəvini α ilə işarə edək. α müstəvisi öz üzərində yerləşməyən fəzanın nöqtələr çoxluğunu iki hissəyə ayıracaqdır. Bu hissələrin hər biri α müstəvisi ilə birlikdə qapalı yarımfəza adlanır. Başlanğıcı α müstəvisi üzərində olan hər hansı B_0 nöqtəsində yerləşən

$$\vec{B_0B} = \vec{b} = A, B, C$$

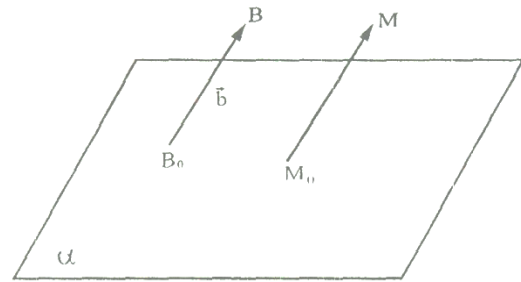
vektoru götürək. Bu vektor α müstəvisinə paralel olmadığından onun B uc nöqtəsi yarımfəzalardan yalnız birində yerləşəcəkdir. α müstəvisi üzərində olmayan hər hansı $M(x, y, z)$ nöqtəsi götürüb, bu nöqtədən $\vec{b} = \vec{B_0B}$ vektoruna paralel düz xətt çəkək. Bu düz xəttin müstəvi ilə kəsişmə nöqtəsini $M_0(x_0, y_0, z_0)$ -la işarə edək (şəkil 67).

Aşkardır ki, $\vec{M_0M} = \lambda \vec{b}$. Burada $\lambda > 0$ yalnız və yalnız o zaman olar ki, M nöqtəsi B nöqtəsi ilə eyni yarımfəzada yerləşsin.

$$\vec{M_0M} = \lambda \vec{b}$$

şərtini koordinatlarla yazaq:

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda A \\ y - y_0 = \lambda B \\ z - z_0 = \lambda C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda A \\ y = y_0 + \lambda B \\ z = z_0 + \lambda C \end{cases}$$



Şəkil 67.

x, y, z dəyişənlərinin bu ifadələrini $P(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$ çoxhədlisində nəzərə alsaq

$$A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C(z_0 + \lambda C) + D = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + \lambda(A^2 + B^2 + C^2)$$

alırıq.

$M_0 \in \alpha$ olduğundan

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

olar. Onda

$$P(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$$

ifadəsinin işarəsi yalnız λ -nın işarəsindən asılı olar. Deməli, $\lambda > 0$ olduqda

$$Ax + By + Cz + D > 0 \quad (8)$$

olar. Bu isə o deməkdir ki, (8) bərabərsizliyi B nöqtəsi yerləşən yarımfəzanı təyin edir.

$$Ax + By + Cz + D < 0$$

bərabərsizliyi isə digər açıq yarımfəzanı (B nöqtəsi yerləşməyən) təyin edən şərt olacaqdır.

§ 43. İki və üç müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti.

1. Əvvəlcə iki müstəvinin qarşılıqlı vəziyyətinə baxaq.

Məlumdur ki, fəzada iki müstəvi 3 cür vəziyyətdə ola bilər:

- a) bir düz xətt boyunca kəsişər;
- b) paralel olar;
- v) üst-üstə düşər.

Fərz edək ki, α və β müstəviləri hər hansı $R = \{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ümumi dekart koordinat

sisteminə nəzərən aşağıdakı tənlikləri ilə verilmişdir:

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Bu tənliklər vasitəsi ilə müstəvilərin fəzadakı qarşılıqlı vəziyyətini təyin edək. Bu isə müstəvilərin tənliklərindən ibarət olan aşağıdakı sistemin həlli ilə əlaqədardır.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Aşağıdakı kimi işarələmə aparaq:

$$r_1 = \text{rang} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \text{rang} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

Məlumdur ki, $r_1 \leq r_2 \leq 2$.

Kronekker-Kapelli teoreminə görə (9) sisteminin həllinin olması üçün $r_1 = r_2$ olmalıdır.

a) Əgər $r_1 = r_2 = 2$ olarsa. Onda (9) sistemi birgədir. Bu halda, α və β müstəviləri heç olmazsa, bir ortaq nöqtəyə malikdir. Bu isə müstəvilərin bir düz xətt boyunca kəsişməsi deməkdir.

b) $r_1 = 1, r_2 = 2$ olduqda (9) sistemi uyuşan deyil, bu halda α və β müstəviləri heç bir ortaq nöqtəyə malik deyildir. Başqa sözlə, $\alpha \parallel \beta$.

v) $r_1 = r_2 = 1$ olduqda (9) sistemindəki tənliklərin əmsalları mütənasib olacaqdır, başqa sözlə, bu tənliklər eyni nöqtələr çoxluğunu təyin edəcəkdir. Bu halda müstəvilər üst-üstə düşəcəkdir.

2. İndi üç müstəvinin qarşılıqlı vəziyyətinə baxaq. Fərz edək ki, α, β və γ müstəviləri hər

hansı $R = \{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən aşağıdakı tənliklərilə verilmişdir:

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\gamma : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

Aşkardır ki, bu müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti onların tənliklərindən ibarət olan

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

sisteminin həllinin araşdırılması ilə əlaqədardır. Aşağıdakı kimi işarələr aparaq:

$$r_1 = \text{rang} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix} \quad r_2 = \text{rang} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \text{rang} \begin{bmatrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_1 B_1 C_1 \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \text{rang} \begin{bmatrix} A_1 B_1 C_1 D_1 \\ A_1 B_1 C_1 D_1 \end{bmatrix}$$

Məlumdur ki, $r_1 \leq r_2 \leq 3$; $r_0 \leq r_\mu \leq 2$.

1) $r_1 = r_2 = 3$ olarsa, (10) sistemi yeganə həllə malikdir, deməli, α, β və γ müstəviləri yalnız bir ortaq nöqtəyə malikdir.

2) $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ olarsa, (10) sistemi uyuşan deyil, deməli bu üç müstəvinin ortaq nöqtəsi yoxdur. $r_1 = 2$ olduğundan r_0 -lardan heç olmazsa, biri 2-yə bərabərdir. Bu halda, müstəvilərdən ikisi kəsişir. Üçüncüsü isə onların kəsişmə xəttindən keçir. Burada iki hal ola bilər:

a) r_0 -ların hamısı 2-yə bərabər olduqda müstəvilər cüt-cüt kəsişib, kəsişmə xətləri bir-birinə paralel olacaq.

b) r_0 -lardan biri 1-ə bərabər olduqda, bu matrisə uyğun olan müstəvilər (məsələn, $r_{12} = 1$ olduqda α və β müstəviləri) bir-birinə paralel olub, üçüncü müstəvi bunları kəsəcəkdir.

3) $r_1 = r_2 = 2$ olduqda (9) sistemi uyuşan olub, sonsuz sayda həllə malik olacaqdır. Bu halda, müstəvilər bir düz xətt boyunca kəsişəcəkdir.

4) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ olan halda tənliklər sistemi uyuşmayandır, deməli, müstəvilər heç bir ortaq nöqtəyə malik deyildir. Burada iki hal ola bilər:

a) r_0 -lardan heç olmasa biri 1-ə bərabərdir. Onda bu matrisə uyğun olan müstəvilər üst-üstə düşüb, qalan üçüncü bunlara paralel olacaqdır.

b) r_0 -ların hamısı 2-yə bərabərdir. Bu halda müstəvilərin üçü də bir-birinə paralel olacaqdır.

5) $r_1 = r_2 = 1$ olduqda (9) sisteminin tənliklərinin üçü də eynigüclü olacaqlar, deməli, onların təyin etdiyi müstəvilər üst-üstə düşəcəklər.

§ 44. Müstəvilər dəstəsi və müstəvilər bağılı.

1.Eyni bir d düz xəttindən keçən müstəvilər çoxluğuna d oxuna malik **müstəvilər dəstəsi** deyilir. d oxuna malik dəstəni $\pi(d)$ ilə işarə edəcəyik.

Əgər müstəvilər dəstəsinin oxu verimişsə, onda bu dəstə birqiymətli təyin olunur və fəzanın istənilən nöqtəsindən bu dəstənin yeganə müstəvisi keçir. Belə ki, hər bir nöqtə və düz xətdən yeganə müstəvi keçirmək olar. Asanlıqla göstərmək olar ki, əgər $\pi(d)$ dəstəsinin istənilən iki α və

β müstəvisi hər hansı $R = \left\{ 0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \right\}$ afin koordinat sisteminə nəzərən

$$\alpha : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$\beta : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Tənlikləri ilə verilmişsə, onda dəstənin istənilən müstəvinin tənliyi

$$\lambda(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \mu(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$$

şəklindədir. Burada λ və μ ikisi də birdən sıfır olmayan həqiqi ədədlərdir.

2.Eyni bir müstəviyə paralel olan müstəvilər çoxluğuna **paralel müstəvilər dəstəsi** deyilir.

Aşkardır ki, əgər paralel müstəvilər dəstəsinin hər hansı α müstəvisi

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

tənliyi ilə verilmişsə, onda bu dəstənin istənilən müstəvisinin tənliyi

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

şəklində olacaq. Belə ki, paralel müstəvilərin tənlikləri yalnız sərbəst hədləri ilə fərqlənilirlər.

3.Eyni bir M_0 nöqtəsindən keçən müstəvilər çoxluğuna M_0 **mərkəzli müstəvilər bağılı** deyilir. Bu cür bağlı mərkəzli və yaxud məxsusi bağlı adlanır.

Göstərmək olar ki, fəzada götürülmüş ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən məxsusi bağlının M_0 mərkəzi (x_0, y_0, z_0) koordinatlarına malikdirsə, onda bu bağlının istənilən müstəvisinin tənliyi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

şəklindədir.

Eləcə də əgər mərkəzli bağlının 3 müstəvisi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

tənliklərinə maliksə, onda bu bağlının istənilən müstəvisinin tənliyi

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + k(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0$$

şəklindədir. Burada λ, μ və k üçü də birdən sıfır olmayan həqiqi ədədlərdir.

Beləliklə, bağlının mərkəzi onun vəziyyətini fəzada birqiymətli təyin edir.

§ 45. Müstəvilər nəzəriyyəsinin bəzi metrik məsələləri.

Həndəsədə elə məsələlər var ki, onlar bilavasitə **parçanın uzunluğu** və ya **bucağın ölçüsü** ilə əlaqəlidir. Bu cür məsələlər həndəsənin metrik məsələləri adlanır. Müstəvilər nəzəriyyəsinin əvvəlki paraqraflarında öyrəndiyimiz məsələlər ümumi dekart koordinat sistemində sadəcə həll olunurdu. Onlardan fərqli olaraq metrik məsələlər ümumi dekart koordinat sistemində bir qədər mürəkkəb həll olunur. ona görə də biz müstəvilər nəzəriyyəsinin metrik məsələlərini, bir paraqrafa yığıb, onların həllinə düzbucaqlı dekart koordinat sistemində baxacağıq.

1. Müstəvinin normalının vektoru. Tərif: Müstəviyə $\perp$ olan hər bir düz xəttə müstəvinin normalı, bu düz xəttin yönəldici vektoruna isə müstəvinin normalının vektoru və ya müstəvinin normal vektoru deyilir və $\vec{n}$ ilə işarə edilir.

Göstərək ki, əgər hər hansı $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən α müstəvisi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (11)$$

tənliyinə malikdirsə, onda

$$\vec{n} = [A, B, C]$$

vektoru bu müstəvinin normalının vektorudur. Doğrudan da, əgər $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ vektoru müstəvi üzərindədirsə, onda vektorun müstəviyə paralellik şərtindən

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$$

münasibəti ödənilməlidir. Lakin bu bərabərliyin sol tərəfi $\vec{n}$ vektoru ilə müstəvinin ixtiyari $\vec{a}$ vektorunun skalyar hasilı olduğundan deməli,

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{a}.$$

Başqa sözlə, $\vec{n}$ vektoru düzbucaqlı dekart koordinat sistemində (1) tənliyi ilə verilmiş α müstəvisinin normalının vektorudur.

2. Müstəvinin daha bir tənliyini düzbucaqlı dekart koordinat sistemində çıxaraq. Müstəvini yuxarıda göstərilmiş verilmə üsullarından başqa, aşağıdakı daha 2 üsulla vermək olar:

a) Bir nöqtəsi və normal vektoruna görə.

Fərz edək ki, α müstəvisi üzərində hər hansı M_0 nöqtəsi və bu müstəvinin $\vec{n}$ normal vektoru verilmişdir. Aşkardır ki, M nöqtəsi yalnız və yalnız o zaman α müstəvisi üzərində yerləşər ki, $\vec{M_0M}$ vektoru müstəvinin $\vec{n}$ normal vektoru ilə ortoqonal olsun (şəkil 68).

Deməli, bu verilənlər müstəvinin vəziyyətini fəzada birqiymətli təyin edir.

Bu verilənlərə görə müstəvinin tənliyini yazaq:

Fəzada hər hansı $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemi götürüb, M_0, M

nöqtələrinin və $\vec{n}$ normal vektorunun koordinatlarını aşağıdakı kimi işarə edək:

$$M_0(x_0, y_0, z_0), M(x, y, z)$$

$$\vec{n} = [A, B, C]$$

Onda yuxarıda dediyimiz kimi,

$$M \in \alpha \Leftrightarrow \vec{M_0M} \perp \vec{n} \quad (12)$$

başqa sözlə,

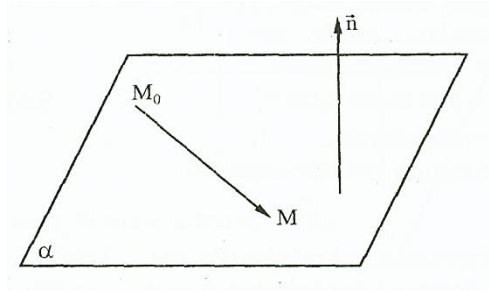
$$\vec{M_0M} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{və ya}$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (13)$$

Aşkardır ki, koordinatları (13) tənliyini ödəyən hər bir nöqtə (12) münasibətini də ödəyir, yəni α müstəvisi üzərində yerləşir. Deməli, (13) α müstəvisinin tənliyidir.

Bu tənliyə müstəvinin **bir nöqtəsinə və normal vektoruna görə tənliyi deyilir.**

b) Müstəvinin, koordinat başlanğıcından bu müstəviyə qədər olan P məsafəsinə və koordinat başlanğıcından keçən normalının $\vec{n}_0$ vahid vektoruna görə də vermək olar.



Şəkil 68.

Doğrudan da koordinat başlanğıcından α müstəvisinə endirilmiş perpendikulyarın oturacağını H ilə işarə etsək, M nöqtəsi yalnız və yalnız o zaman α müstəvisi üzərində yerləşər ki, $\vec{HM}$ vektoru $\vec{OH}$ və ya onun vahid $\vec{n}_0$ ilə ortoqonal olsun (şəkil 69), başqa sözlə

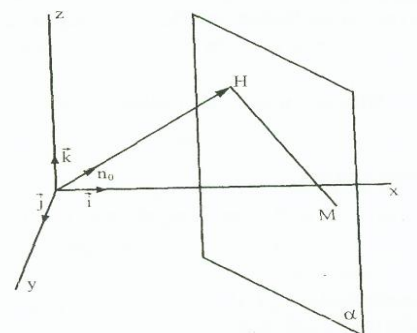
$$M \in \alpha \Leftrightarrow \vec{HM} \perp \vec{n}_0 \quad (14)$$

Deməli, bu verilənlər də müstəvinin vəziyyətini birqiymətli təyin edir.

Bu verilənlərə görə müstəvi tənliyini yazaq.

Fərz edək ki, $\vec{n}_0$ vahid normal vektoru koordinat oxları ilə uyğun olaraq α, β, γ bucaqları əmələ gətirir. Onda bu

vektor $\vec{n}_0 = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$ koordinatlarına, H nöqtəsinin koordinatları isə $\vec{OH} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$ vektorunun koordinatlarına bərabər olacaqdır. M nöqtəsinin koordinatlarını (x, y, z) ilə işarə etsək, $\vec{HM} = [x - \cos \alpha, y - \cos \beta, z - \cos \gamma]$ olar.



Şəkil 69.

(14) münasibətindən

$$\begin{aligned} \vec{HM} \cdot \vec{n}_0 &= 0 \quad \text{və ya} \\ (x - p \cos \alpha) \cos \alpha + (y - p \cos \beta) \cos \beta + (z - p \cos \gamma) \cos \gamma &= 0 \\ x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Burada $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ olduğu nəzərə alınmışdır.

Aşkardır ki, koordinatları (15) tənliyini ödəyən hər bir nöqtə (14) münasibətini də ödəyir, yəni α müstəvisi üzərində yerləşir. Deməli, (15) tənliyi α müstəvisinin tənliyidir. Ona müstəvinin **normal tənliyi** deyilir.

3.Nöqtədən müstəviyə qədər olan məsafə. Fərz edək ki, bizə hər hansı $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən α müstəvisi özünün

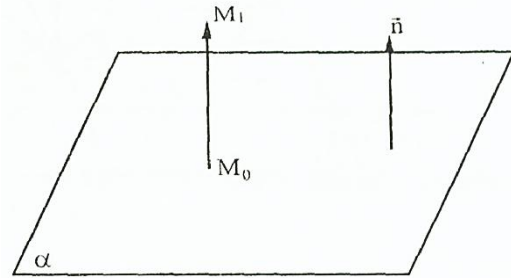
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ümumi tənliyi və M_1 nöqtəsi (x_1, y_1, z_1) koordinatları ilə verilmişdir. M_1 nöqtəsindən bu müstəviyə qədər olan məsafəni hesablayaq.

M_1 nöqtəsindən α müstəvisinə endirilmiş perpendikulyarın oturacağını $M_0(x_0, y_0, z_0)$ -la işarə edək:

Aşkardır ki, M_1 nöqtəsindən α müstəvisinə qədər

olan $\rho(M_1, \alpha)$ məsafəsi $\vec{M_1M_0}$ vektorunun uzunluğuna bərabər olacaqdır (şəkil 70).



Şəkil 70.

$$\rho(M_1, \alpha) = |\vec{M_1M_0}|$$

Verilmiş müstəvinin $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ normalının vektoru $\vec{M_1M_0}$ vektoru ilə kollinear olduğundan

$$\vec{M_1M_0} \cdot \vec{n} = |\vec{M_1M_0}| \cdot |\vec{n}| (\pm 1) \quad \text{və ya}$$

$$\rho(M_1, \alpha) = \frac{|\vec{M_1M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Bu ifadəni koordinatlarla yazıb,

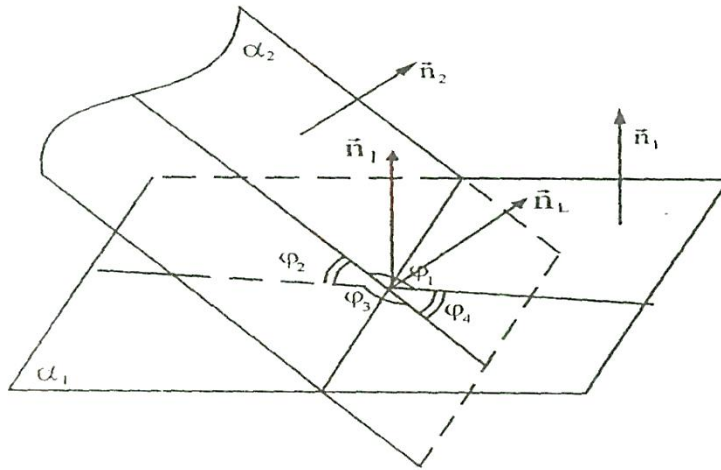
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

olduğunu nəzərə alsaq; belə ki,

$$M_0 \in \alpha$$

$$\rho(M_1, \alpha) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (16)$$

Bu düstur **nöqtədən müstəviyə qədər olan məsafə düsturu** adlanır. Müstəvinin tənliyi normal şəkildə verildikdə (16) düsturu sadə şəkil alır. Bu halda



Şəkil 71.

$$A = \cos \alpha, B = \cos \beta, c = \cos \gamma, D = -P$$

Onda

$$\rho(M_1, \alpha) = |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - P|$$

Belə ki,

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = 1$$

4. İki müstəvi arasındakı bucağın hesablanması. Fərz edək ki, α_1 və α_2 müstəviləri hər hansı düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən aşağıdakı tənliklərlə verilmişdir:

$$\alpha_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$\alpha_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Bu müstəvilər arasında qalan bucağı hesablayaq.

Aşkardır ki, 2 müstəvi kəsişirsə, onda cüt-cüt qarşılıqlı olan dörd ikiüzlü bucaq əmələ gətirir ki, bu bucaqlardan birinin ədədi qiyməti məlum olsa, qalan bucaqları asanlıqla tapmaq olar (şəkil 71). Belə ki, $\varphi_1 = \varphi_3, \varphi_2 = \varphi_4, \varphi_1 + \varphi_3 = \pi$. Bu bucaqlardan biri müstəvilərin

$$\vec{n}_1 = [A_1, B_1, C_1] \text{ və}$$

$$\vec{n}_2 = [A_2, B_2, C_2]$$

normal vektorları arasında qalan bucağa bərabərdir. Bizim şəkildə bu bucaq φ_2 -yə bərabər olacaqdır.

$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \theta$ ilə işarə etsək,

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

alırıq ki, bu da iki **müstəvi arasındakı bucağı hesablama düsturudur.**

§ 46. Fəzada düz xəttin verilməsi üsulları və müxtəlif tənlikləri.

1. Fəzada düz xəttin verilməsi üsulları. Biz müstəvi üzərində düz xəttin verilməsi üsullarından danışarkən qeyd etdik ki, düz xəttin bir nöqtəsi və yönəldici vektoru, eləcə də üst-üstə düşməyən iki nöqtəsi onun vəziyyətini birqiymətli təyin edir. Bu üsullar elə fəzada da doğrudur.

Fəzada düz xətti daha bir üsulla vermək olar. Paralel olmayan iki müstəvi yeganə düz xətt boyunca kəsişdiyindən, bu müstəvilər kəsişmə xəttinin vəziyyətini fəzada birqıymətli təyin edir. Beləliklə, müstəvi üzərində olduğundan fərqli olaraq fəzada düz xətti aşağıdakı üç üsulla vermək olar:

a) Bir nöqtəsinə və yönəldici vektoruna görə.

b) İki nöqtəsinə görə

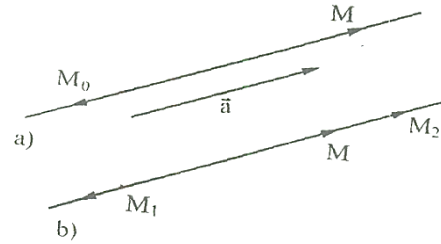
v) İki müstəvinin kəsişməsi kimi.

İndi bu verilənlərə görə düz xəttin müxtəlif tənliklərini yazaq.

2. Düz xəttin parametrik və kanonik tənliyi. Fərz

edək ki, düz xətt özünün M_0 nöqtəsi və $\vec{a}$ yönəldici vektoru vasitəsi ilə verilmişdir. Aşkardır ki, M nöqtəsi yalnız və yalnız o zaman d düz xətti üzərində yerləşər ki, $\vec{M_0M}$ vektoru $\vec{a}$ vektoru ilə kollinear olsun (şəkil 72).

Başqa sözlə



Şəkil 72.

$$M \in d \Leftrightarrow \vec{M_0M} = t\vec{a}$$

olsun.

Fəzada hər hansı ümumi dekart koordinat sistemi götürüb, M_0, M nöqtələrinin və $\vec{a}$ yönəldici vektorunun koordinatlarını

$$M_0(x_0, y_0, z_0), M(x, y, z), \vec{a} = \vec{a_1}, a_2, a_3$$

kimi işarə edək.

Onda (17) münasibətindən

$$\begin{cases} x - x_0 = a_1 t \\ y - y_0 = a_2 t \\ z - z_0 = a_3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (18)$$

Aşkardır ki, koordinatları (18) tənliklərini ödəyən hər bir $M(x, y, z)$ nöqtəsi (17) münasibətini də ödəyir. Bu isə o deməkdir ki, (18) tənliklər sistemi d düz xəttinin tənliyidir. Ona **düz xəttin parametrik tənliyi** deyilir. Əgər d düz xətti koordinat oxlarından heç birinə paralel olmasa, başqa sözlə $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$ olsa, (18) tənliyini

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

şəklində yazmaq olar. Bu tənliyə düz xəttin **kanonik tənliyi** deyilir.

3. İki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyi. İndi fərz edək ki, d düz xətti özünün iki nöqtəsi ilə verilmişdir. Onda aşkardır ki, M nöqtəsi yalnız və yalnız o zaman bu düz xətt üzərində yerləşər ki, $\vec{M_1M}$ vektoru $\vec{M_1M_2}$ vektoru ilə kollinear olsun (şəkil 72). Başqa sözlə

$$M \in d \Leftrightarrow \vec{M_1M} = t\vec{M_1M_2} \quad (19)$$

Fəzada verilmiş hər hansı ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən M_1, M_2 və M nöqtələrinin koordinatlarını uyğun olaraq (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) və (x, y, z) işarə edək, (19) münasibətindən alarıq:

$$\begin{cases} x - x_1 = t(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = t(y_2 - y_1) \\ z - z_1 = t(z_2 - z_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

d düz xətti koordinat oxlarından heç birinə paralel olmadıqda, yəni $x_2 - x_1 \neq 0$, $y_2 - y_1 \neq 0$, $z_2 - z_1 \neq 0$ olduqda bu tənlikləri

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

şəklində yazmaq olar ki, bu da **2 nöqtədən keçən düz xəttin tənliyi** adlanır.

4.Fəzada düz xəttin ümumi tənliyi. Fərz edək ki, d düz xətti kəsişən α_1 və α_2 müstəvilərinin kəsişmə xətti kimi verilmişdir (şəkil 73) və ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən bu müstəvilər aşağıdakı tənliklərə malikdir:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$$

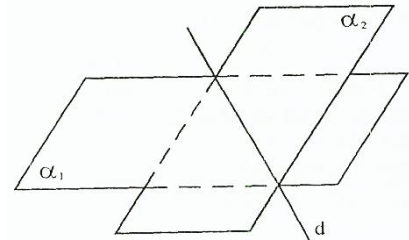
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D = 0$$

göstərək ki,

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

sistemi d düz xəttinin tənliyidir. Doğrudan da, əgər hər hansı M nöqtəsi d düz xətti üzərindədirsə, onda bu nöqtə həm α_1 -in, həm də α_2 -nin üzərində yerləşdiyindən onun koordinatları müstəvilərin hər ikisinin tənliyini ödəyəcəkdir. Başqa sözlə, $M \in d$ olduqda onun koordinatları (20) sistemini ödəyəcəkdir.

Əksinə, əgər M nöqtəsinin koordinatları (20) sistemini ödəyirsə, onda bu nöqtə həm sistemin birinci tənliyi ilə təyin α_1 müstəvisi üzərində, həm də ikinci tənliklə təyin olunan α_2 müstəvisi üzərində yerləşəcəkdir. Başqa sözlə, M nöqtəsi bu müstəvilərin kəsişmə xətti olan d düz xətti üzərindədir.



Şəkil 73.

Beləliklə, göstərdik ki, (20) sistemi $d = \alpha_1 \cap \alpha_2$ düz xəttinin tənliyidir.

Ona düz xəttin **ümumi tənliyi** deyilir.

Qeyd edək ki, burada α_1 və α_2 müstəviləri kəsişdiyindən

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = 2$$

İndi düz xəttin (20) ümumi tənliyini parametrik şəkllə gətirək.

Fərz edək ki, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ düz xətt üzərində yerləşən hər hansı nöqtədir. Onda bu nöqtənin koordinatları (20) sistemini ödəyəcəkdir.

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 \end{cases}$$

Bu sistemin tənliklərini (20) sisteminin uyğun tənliklərindən tərə-tərəfə çıxsaq, aşağıdakı sistemi alırıq:

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0$$

$$A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0$$

Məlumdur ki, düz xətt eyni zamanda koordinat oxlarının üçünə də paralel ola bilməz.

Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $z - z_0 \neq 0$ (yəni düz xətt (oz) oxuna paralel deyil). Onda bu tənliklərin hər ikisini $(z - z_0)$ -a bölsək,

$$\begin{cases} A_1 \frac{x - x_0}{z - z_0} + B_1 \frac{y - y_0}{z - z_0} = -C_1 \\ A_2 \frac{x - x_0}{z - z_0} + B_2 \frac{y - y_0}{z - z_0} = -C_2 \end{cases} \quad (21)$$

İkiməchullu xətti tənliklər sistemini alarıq.

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \end{bmatrix} = 2$$

olduğundan bu matrisin ünsürlərindən düzəldilmiş determinantlardan heç olmazsa, biri sıfırdan fərqlidir.

Fərz edək ki,

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

(21) sistemini $\frac{x - x_0}{z - z_0}$ və $\frac{y - y_0}{z - z_0}$ məchullarına görə həll edək.

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = \frac{\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}}; \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = \frac{\begin{vmatrix} C_1 A_1 \\ C_2 A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}}$$

Burada $\frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}} = t$ işarə etsək, aşağıdakı tənliklər sistemini alarıq:

$$\begin{cases} x - x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}} \cdot t \\ y - y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 A_1 \\ C_2 A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}} \cdot t \\ z - z_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}} \cdot t \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0 + \frac{\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}} \cdot t \\ y = y_0 + \frac{\begin{vmatrix} C_1 A_1 \\ C_2 A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}} \cdot t \\ z = z_0 + \frac{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}} \cdot t \end{cases}$$

Əgər bu tənlikləri düz xəttin parametrik tənliyi ilə müqayisə etsək, görərik ki, düz xətt (20) ümumi tənliyi ilə verildikdə onun yönəldici vektorunun koordinatları aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 A_1 \\ C_2 A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Buradan görünür ki, xüsusi halda d düz xəttinin (20) tənliyi $R = \left\{ 0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$ düzbucaqlı dekart

koordinat sisteminə nəzərən verilərsə, onda onun $\vec{n}$ normal vektoru bu müstəvilərin normal vektorlarının vektorial hasilinə bərabər olur:

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

§ 47. Fəzada iki düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti.

Məlumdur ki, fəzada iki düz xətt aşağıdakı 4 vəziyyətlərdən birində ola bilərlər:

a) Çarpaz ola bilərlər;

b) Kəsişə bilərlər;

v) Paralel ola bilərlər;

q) Üst-üstə düşərlər;

İndi tənlikləri ilə verilmiş düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyətini təyin edək.

Fərz edək ki, d_1 və d_2 düz xətləri hər hansı afin koordinat sisteminə nəzərən özlərinin aşağıdakı parametrik tənlikləri ilə verilmişdir:

$$d_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + a_2 t \\ z = z_1 + a_3 t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = x_2 + b_1 t \\ y = y_2 + b_2 t \\ z = z_2 + b_3 t \end{cases}$$

a) Əvvəlcə bu düz xətlərin bir müstəvi üzərində olması şərtini müəyyən edək.

Aşkardır ki, düz xətlər yalnız və yalnız o zaman bir müstəvi üzərində yerləşər ki, bu düz xətlərin $\vec{a}$ və $\vec{b}$ yönəldici vektorları ilə $\vec{M_1 M_2}$ vektoru komplanar olsun (şəkil 74). Burada M_1 və M_2 nöqtələri uyğun olaraq d_1 və d_2 düz xətləri üzərində verilmiş nöqtələrdir. Bu üç vektorun komplanarlıq şərti

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan d_1 və d_2 düz xətlərinin çarpaz olması şərti

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

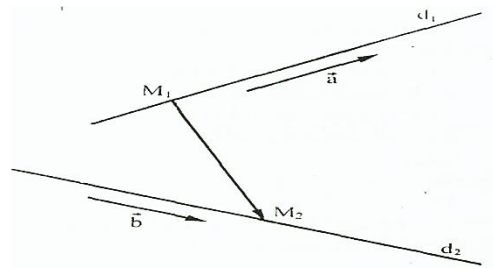
olacaqdır.

b) İki düz xətt yalnız və yalnız o zaman kəsişər ki, bir müstəvi üzərində yerləşib paralel olmasınlar. Bu isə o zaman olar ki,

$$\begin{vmatrix} \vec{a}, \vec{b}, \vec{M_1 M_2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{a} \neq \lambda \vec{b}$$

şərtləri ödənilmiş olsun. Başqa sözlə,



Şəkil 74.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$$

şərtləri d_1 və d_2 düz xətlərinin kəsişmə şərtləri olacaqdır.

v) məlumdur ki, iki düz xətt yalnız və yalnız o zaman paralel olar ki, onların yönəldici vektorları kollinear olsun. $\vec{M_1 M_2}$ vektoru isə bu vektorlarla kollinear olmasın (şəkil 74).

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}, \quad \vec{M_1 M_2} \neq \lambda \vec{a}$$

və ya

$$\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix} = 1, \quad \text{rang} \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ x_2 - x_1 y_2 - y_1 z_2 - z_1 \end{bmatrix} = 2$$

şərtləri düz xətlərin paralellik şərtləri olacaqdır.

q) Əgər $d_1 = d_2$ olarsa, onda aşkardır ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear olmaqla yanaşı, $\vec{M_1 M_2}$ vektoru da bu vektorlarla kollinear olmalıdır və əksinə $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{M_1 M_2}$ vektorları bir-biri ilə kollinear olarsa, onda bu düz xətlər üst-üstə düşər. Beləliklə,

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} = \rho \vec{M_1 M_2}$$

və ya

$$\text{rang} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 y_2 - y_1 z_2 - z_1 \\ a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix} = 1$$

şərti d_1 və d_2 düz xətlərinin üst-üstə düşmə şərtidir.

§ 48. Düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti.

Məlumdur ki, düz xətlə müstəvi aşağıdakı vəziyyətlərdən birində ola bilərlər: **a) kəsişər, b) paralel olar, c) üst-üstə düşər.**

İndi tənlikləri ilə verilmiş düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyətini müəyyən edək.

Fərz edək ki, hər hansı ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən d düz xətti və α müstəvisi özlərinin aşağıdakı tənlikləri ilə verilmişdir:

$$d : \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

Bunların qarşılıqlı vəziyyətini müəyyən etmək üçün onların tənliklərini birlikdə həll etməklə ortaq nöqtələrini axtaraq:

Bunun üçün müstəvinin tənliyindəki x, y, z -in düz xəttin tənliyindəki ifadəsini nəzərə alaraq

$$A(x_0 + a_1 t) + B(y_0 + a_2 t) + C(z_0 + a_3 t) + D = 0$$

Bu tənliyi t -yə nəzərən qruplaşdıraraq

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) \quad (22)$$

tənliyini alırıq.

(22) tənliyinin hər bir kökünə d düz xətti ilə α müstəvisinin bir ortaq nöqtəsi uyğun gələcəkdir. Burada aşağıdakı hallardan biri ola bilər:

a) tənliyin yalnız bir kökü var. Bu isə yalnız və yalnız o zaman olar ki,

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0 \quad (23)$$

şərti ödənilmiş olsun. Uyğun olaraq d düz xətti α müstəvisi ilə yalnız və yalnız o zaman yeganə ortaq nöqtəyə malik olar ki, (23) şərti ödənilmiş olsun. Deməli, (23) şərti d düz xəttinin α müstəvisi ilə **kəsişmə şərti** olacaqdır.

b) Tənliyin heç bir kökü yoxdur. Bu isə yalnız və yalnız o zaman olar ki,

$$\left. \begin{aligned} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 &= 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

şərtləri ödənilmiş olsun. Bu halda uyğun olaraq d düz xətti ilə α müstəvisinin heç bir ortaq nöqtəsi olmayacaqdır. Başqa sözlə (24) şərti d düz xətti ilə α müstəvisinin **paralellik şərtidir**.

v) Tənliyin sonsuz sayda həlli var. Bu isə yalnız və yalnız o zaman olar ki,

$$\left. \begin{aligned} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 &= 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

şərtləri ödənilmiş olsun. Bu halda d düz xətti ilə α müstəvisinin sonsuz sayda ortaq nöqtəsi olacaq. Başqa sözlə, düz xətt müstəvinin üzərində yerləşəcək. beləliklə, (25) şərti **d düz xəttinin α müstəvisi üzərində yerləşmə şərtidir**.

§ 49. Fəzada düz xəttə aid əsas metrik məsələlər.

1. İki düz xətt arasındakı bucaq. Fərz edək ki, d_1 və d_2 düz xətləri hər hansı düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən aşağıdakı tənlikləri ilə verilmişdir:

$$d_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + a_2 t \\ z = z_1 + a_3 t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = x_2 + b_1 t \\ y = y_2 + b_2 t \\ z = z_2 + b_3 t \end{cases}$$

Fəzanın hər hansı nöqtəsindən uyğun olaraq d_1 və d_2 düz xətlərinə paralel çəkilmiş, d_1 və d_2 düz xətlərinin əmələ gətirdiyi bucaqlara bu düz xətlər arasında qalan bucaq deyilir. Məlumdur ki, bu bucaqlardan birini bildikdə qalanlarını tapmaq mümkündür. Bu bucaqlardan biri isə düz xətlərin yönəldici vektorları arasında qalan bucağa bərabər olduğundan, verilmiş d_1, d_2 düz xətləri arasındakı φ bucağı

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

düsturu ilə hesablanır. Düz xətlərin verilmiş tənliklərindən $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ koordinatlarını tapıb sonuncuda nəzərə alsaq, iki düz xətt arasında qalan bucaq üçün aşağıdakı düsturu alırıq.

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (26)$$

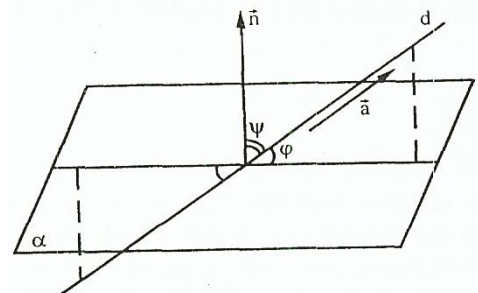
Burada xüsusi halda d_1 və d_2 düz xətləri bir-birinə perpendikulyar olduqda $\cos \varphi = 0$ və tərsinə, $\cos \varphi = 0$ olduqda isə bu düz xətlər perpendikulyar olacaqdır. Başqa sözlə, (16) düsturundan

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

bu düz xətlərin **perpendikulyarlıq şərtidir**.

2. Düz xətlə müstəvi arasında qalan bucaq. Fərz edək ki, bizə hər hansı α müstəvisi və bu müstəviyə perpendikulyar olmayan d düz xətti verilmişdir.

Məktəb kursundan bilirik ki, düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq dedikdə düz xəttin bu müstəvi üzərindəki ortoqonal proyeksiyası ilə əmələ gətirdiyi iti bucaq başa düşülür. Tutaq ki, fəzada verilmiş hər hansı düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən d düz xətti və α müstəvisi aşağıdakı tənliklərə malikdir:



Şəkil 75.

$$d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

Bunlar arasındakı bucaqları hesablayaq. d -düz xəttinin müstəvi ilə əmələ gətirdiyi bucağı φ , müstəvinin $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ normal vektorunun bu düz xəttin $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ yönəldici vektoru ilə əmələ gətirdiyi bucağı ψ ilə işarə edək. Onda ψ bucağı iti bucaq olduqda

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$$

ψ bucağı kor bucaq olduqda isə

$$\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$$

olacaqdır (şəkil 75).

Bu iki halı birləşdirsək:

$$\sin \varphi = |\cos \psi|$$

alırıq. Onda

$$\sin \varphi = |\cos \psi| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| |\vec{a}|}$$

Bu ifadəni koordinatlarla yazsaq

$$\sin \varphi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

düsturunu alırıq ki, buna da **düz xətlə müstəvi arasında qalan bucağın hesablanması düsturu** deyilir.

3.Nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə. M_1 nöqtəsindən d düz xəttinə qədər olan məsafə dedikdə, M_1 nöqtəsindən düz xəttə endirilmiş perpendikulyarın bu düz xətlə məhdud edilmiş parçasının uzunluğunu başa düşülür.

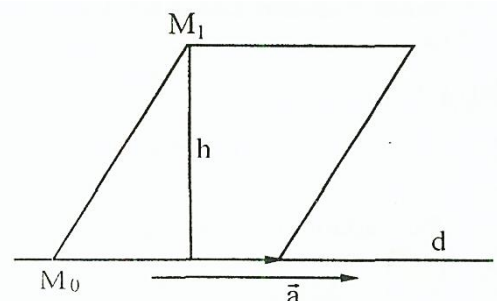
Fərz edək ki, bizə d düz xətti və M_1 nöqtəsi verilmişdir və hər hansı düzbucaqlı dekart koordinat sistemində nəzərə alsaq bu düz xətt

$$d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

tənliyinə, M_1 nöqtəsi isə (x_1, y_1, z_1) koordinatlarına malikdir. M_2 nöqtəsindən d düz xəttinə qədər olan $\rho(M_1, d)$ məsafəsini hesablayaq. bunun üçün d düz xətti üzərində verilmiş (tənliyə bax) $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsi ilə M_1 nöqtəsini birləşdirib,

$\vec{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ vektorunu təyin edək. Aşkardır ki, axtarılan məsafə $M_0\vec{M_1}$

vektoru ilə düz xəttin $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ yönəldici vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın hündürlüyünə bərabərdir (şəkil 76).



Digər tərəfdən bu paraleloqramın sahəsi həmin vektorların vektorial hasilinin uzunluğuna bərabər olduğundan M_1 nöqtəsindən d düz xəttinə qədər olan məsafə

Şəkil 76.

$$h = \rho(M_1, d) = \frac{\left| \vec{M_0 M_1} \times \vec{a} \right|}{\left| \vec{a} \right|}$$

və ya

$$\rho(M_1, d) = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_2 & a_3 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ a_3 & a_1 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

düsturu ilə təyin olunacaqdır.

Düz xətlər bağılı. 1. Eyni bir M_0 nöqtəsindən keçən fəzanın bütün düz xətlər çoxluğuna M_0 mərkəzli düz xətlər bağılı deyilir.

Bağlının mərkəzi fəzada bağlının vəziyyətini birqiymətli təyin edir və fəzanın hər bir M nöqtəsindən bağlının yeganə (MM_0) düz xətti keçir.

2. Eyni bir düz xəttə paralel olan fəzanın bütün düz xətlər çoxluğuna **paralel düz xətlər bağılı** deyilir.

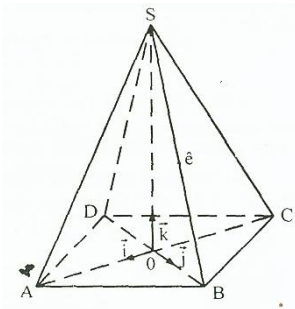
Paralel düz xətlər bağılına daxil olan hər hansı bir düz xəttin $\vec{a}$ yönəldici vektorunun istiqaməti bağlının vəziyyətini fəzada birqiymətli təyin edir. Mərkəzli bağlıda olduğu kimi, burada da fəzanın hər bir M nöqtəsindən bağlının bir $d = \left[M, \vec{a} \right]$ düz xətti keçir.

§ 50. Fəzada düz xətlər və müstəvilər nəzəriyyəsinin məktəb həndəsə kursunun stereometriya məsələləri həllinə tətbiqləri.

Bu fəsildə öyrəndiyimiz fəzada düz xətlər və müstəvilər nəzəriyyəsinin köməyiylə məktəb həndəsə kursunun mürəkkəb hesab olunan bəzi isbat və eləcə də hesablama məsələləri müvəffəqiyyətlə həll olunur. Bu zaman əlverişli düzbucaqlı dekart koordinat sistemi seçməklə, verilənlər vasitəsilə fiqurun əsas nöqtələrinin koordinatları təyin olunur ki, bu da məsələnin həllini asanlaşdırır.

İndi biz bu paragrafda belə məsələlərdən bir neçəsini həll edəcəyik.

Məsələ 1. Düzgün dördbucaqlı SABCD piramidanın yan üzünü oturmaq müstəvilə α bucağı əmələ gətirir. SB tiliinin orta nöqtəsi olduqda AKC və SAB müstəviləri arasındakı φ bucağını tapın.



xeyli

K

Şəkil 1.

Həlli:

S təpəsindən ABCD müstəvisinə endirilən hündürlüyün oturacağını O ilə işarə edək. Düzbucaqlı dekart koordinat sistemini elə seçək ki, koordinat başlanğıcı O nöqtəsində, koordinat oxları isə AC və BD diaqonalları və SO hündürlüyü ilə üst-üstə düşməklə oxların istiqaməti şəkiləki kimi olsun (şəkil 1)

$AC = BD = 2a$, $SO = h$ qəbul etsək, onda həmin düzbucaqlı dekart koordinat sistemində nəzərən piramidanın təpələrinin və K nöqtəsinin koordinatları aşağıdakı kimi olacaqdır. $A(a, 0, 0)$,

$B(0,a,0)$, $C(-a,0,0)$, $D(0,-a,0)$, $S(0,0,h)$, $K(0,\frac{a}{2},\frac{h}{2})$, SAB, ABC və AKC müstəvilərin tənliyini təyin edək. ABC müstəvisi xoy koordinat müstəvilə üst-üstə düşdüyü üçün onun tənliyi $z=0$ (ABC) olur. SAB müstəvisi (ox), (oy) və (oz) koordinat oxlarından uyğun olaraq a, a və h parçalarını ayırdığından, onun parçalarla tənliyini yazı bilərik:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (\text{SAB})$$

AKC müstəvisi (ox) oxundan və K nöqtəsindən keçdiyi üçün onun tənliyi aşağıdakı kimi olar:

$$-hy + az = 0 \quad (\text{KAC})$$

İki müstəvi arasında qalan bucaq düsturundan istifadə edib, SAB və ABC müstəviləri üçün yazı bilərik:

$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{h^2}}} = \frac{a}{\sqrt{2h^2 + a^2}}$$

SAB və KAC müstəvilərin tənliklərindən istifadə edib, onlar arasında qalan ikiüzlü bucaq üçün alırıq:

$$\cos \varphi = \frac{\frac{-h}{a} + \frac{a}{h}}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{1}{h^2}} \cdot \sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{a^2 - h^2}{\sqrt{2h^2 + a^2} \cdot \sqrt{a^2 + h^2}}$$

$\frac{h}{a} = m$ işarə edək. Onda yuxarıdakı ifadələrdən təyin edərik:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\left[\frac{h}{a}\right]^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2 + 1}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1 - \left[\frac{h}{a}\right]^2}{\sqrt{2\left[\frac{h}{a}\right]^2 + 1} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{h}{a}\right]^2}} = \frac{1 - m^2}{\sqrt{2m^2 + 1} \cdot \sqrt{1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2 + 1}} \cdot \frac{1 - m^2}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2m^2 + 1}}$ ifadəsindən m üçün alırıq:

$$m^2 = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha}.$$

Bunu aldığımız ifadə ($\cos \varphi$ üçün) yerinə yazıb, sadə elementar çevirmələr aparsaq, alırıq:

$$\cos \varphi = \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{\sqrt{2(1 + \cos^2 \alpha)}}$$

Cavab

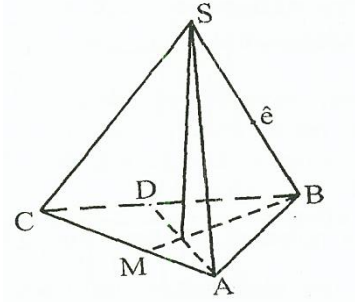
$$\cos \varphi = \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{\sqrt{2(1 + \cos^2 \alpha)}};$$

Məsələ 2. Düzgün üçbucaqlı SABC piramidanın SO hündürlüyü h oturacağı O tərəfi isə a -dır. SB tilinin orta nöqtəsi K olduqda AKC və OBC müstəviləri arasında qalan φ bucağını tapın.

Həlli:

SABC piramidanın SO hündürlüyünün oturacağı O və SB tilinin orta nöqtəsi K olsun. $AB=BC=CA=a$, $SO=h$. Onda O nöqtəsi AD və BM medianların kəsişmə nöqtəsi olar (şəkil 2).

$ON \parallel AC$ olmaqla ON çəkək. Düzbucaqlı dekart koordinat sistemini elə seçək ki, (ox) , (oy) , (oz) oxları uyğun olaraq ON , OB , OS istiqamətində olsun. Onda piramidanın təpələrini və K nöqtəsinin koordinatlarını təyin edə bilərik:



$$S(0,0,h), A\left[-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0\right], C\left[\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0\right], B\left[0, \frac{a\sqrt{3}}{3}, 0\right], K\left[0, \frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{h}{2}\right], M\left[0, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0\right]$$

OBC müstəvisi (xoy) koordinat müstəvisi ilə üst-üstə düşdüyü üçün onun tənliyi $Z=0$ (OBC) olar.

KM düz xəttin tənliyini yazaq:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-a\sqrt{3}}{6} = \frac{z-\frac{h}{2}}{-\frac{h}{2}} \quad (\text{KM})$$

və ya

$$\frac{x}{0} = \frac{y-\frac{a\sqrt{3}}{6}}{-\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{z-\frac{h}{2}}{-\frac{h}{2}} \quad (\text{KM})$$

AKC ilə OBC müstəviləri arasında qalan bucaq, bu müstəvilərin əmələ gətirdiyi ikiüzlü bucağın KMB xətti bucağına bərabərdir.

OBC müstəvisinin normal vektoru $\vec{n} = \left[0, 1, 0\right]$ və KM düz xəttinin yönəldici vektorunun koordinatları $\vec{p} = \left\{0, -\frac{a\sqrt{3}}{3}, -\frac{h}{2}\right\}$ olduğundan yazı bilərik.

$$\sin \varphi = \frac{\left|-\frac{h}{2}\right|}{\sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{h^2}{2}}} = \frac{h\sqrt{6}}{2\sqrt{2a^2 + 3h^2}}$$

Cavab: $\frac{h\sqrt{6}}{2\sqrt{2a^2 + 3h^2}}.$

Məsələ 3: OA, OB, OS tilləri cüt-cüt perpendikulyar və uzunluqları $OA=a$, $OB=b$, $OS=h$ olan SOABC düzbucaqlı piramida verilmişdir. oturacağı OABC düzbucaqlı, $AK=C$ olmaqla AC tərəfi üzərində K nöqtəsi götürülmüşdür. SBC və SOA müstəviləri arasında qalan φ bucağını tapın.

Həlli:

Düzbucaqlı dekart koordinat sistemini elə seçək ki, (oy), (oz) koordinat oxları uyğun olaraq OA, OB və OS istiqamətində olsunlar (şəkil 3).

Bu koordinat sistemində piramidanın təpələri və K nöqtəsinin koordinatları aşağıdakı kimi olar:

O(0,a,0), A(a,0,0), B(0,b,0), C(a,b,0), S(0,0,h), K(a,c,0), SBC və SOK müstəviləri arasındakı bucaq, uyğun olaraq bu müstəvilərə perpendikulyar olan vektorlar arasındakı bucağa bərabərdir.

Belə vektorlar əvəzinə

$$\vec{p} = [\vec{BC}, \vec{SB}] \text{ və}$$

$$\vec{q} = [\vec{OS}, \vec{OK}] \text{ vektorlarını götürsək, onda } \varphi = (\vec{p}, \vec{q}) \text{ olar. } \vec{BC}, \vec{SB}, \vec{OS} \text{ və } \vec{OA} \text{ vektorlarının}$$

koordinatlarını təyin edək: $\vec{BC} = [0,0]$, $\vec{SB} = [b,-h]$, $\vec{OS} = [0,h]$, $\vec{OK} = [a,0]$.

İki vektorun vektorial hasili düsturunu tətbiq etsək, $\vec{p}$ və $\vec{q}$ vektorların koordinatları üçün alırıq:

$$\vec{p} = [\vec{BC}, \vec{SB}] = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & -h \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0a & a0 \\ -h0 & 0b \end{vmatrix} \right\} = [ah, ab]$$

$$\vec{q} = [\vec{OS}, \vec{OA}] = \left\{ \begin{vmatrix} 0h & h0 \\ c0 & 0a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 00 & 00 \\ ac & ac \end{vmatrix} \right\} = [hc, ah, 0]$$

İki vektor arasında qalan bucaq haqqında bildiyimiz düstura əsasən yazı bilərik:

$$\cos \varphi = \frac{a^2 h^2}{\sqrt{a^2 h^2 + a^2 b^2} \sqrt{a^2 h + c^2 h^2}}$$

Bu ifadəni sadələşdirsək tələb olunan SOK və SBC müstəviləri arasındakı bucağın kosinusunu üçün alınar:

$$\cos \varphi = \frac{a^2 h^2}{\sqrt{(a^2 + c^2) \cdot (b^2 + h^2)}}$$

Cavab: SOK və SBC müstəviləri arasındakı bucaq $\cos \varphi = \frac{ah}{\sqrt{(a^2 + c^2) \cdot (b^2 + h^2)}}$ olur.

Məsələ 4. Yan tilləri a, b, c olmaqla qarşılıqlı perpendikulyar olan üçbucaqlı OABC piramidanın h hündürlüyü üçün

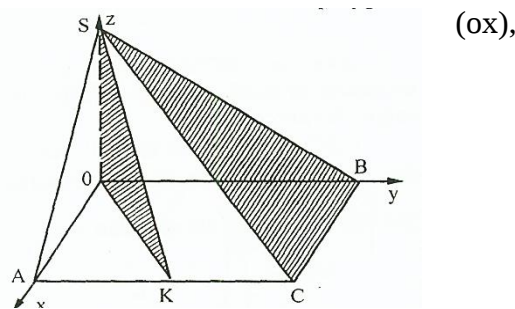
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

münasibətinin doğru olduğunu isbat edin.

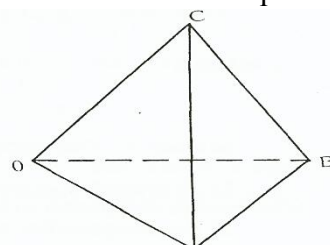
Həlli:

OABC üçbucaqlı piramidanın O nöqtəsindən çıxan OA, OB və OC tillərinin uzunluqları uyğun olaraq a, b və c olmaqla qarşılıqlı perpendikulyar olduğunu fərz edək. h piramidanın hündürlüyüdür.

Oxyz düzbucaqlı dekart koordinat sistemini elə quraq ki, O koordinat başlanğıcı, OA, OB, OC isə uyğun olaraq (ox), (oy), (oz), koordinat oxları istiqamətində olsun (şəkil 4).



Şəkil 3.



Şərtə görə $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ olduğundan həmin koordinat sisteminə nəzərən piramidanın təpə nöqtələrinin koordinatlarını təyin edə bilərik:

Şəkil 5.

$$O(0,0,0), A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$$

ABC müstəvisinin koordinat oxlarından ayırdığı a, b və c parçalarından istifadə edib, onun parçalarla tənliyini yazaq:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\text{və ya} \quad bcx + acy + abz - abc = 0 \quad (ABC)$$

O koordinat başlanğıcından ABC müstəvisinə qədər olan məsafə h hündürlüyünə bərabərdir. Digər tərəfdən verilən nöqtədən müstəviyə qədər olan məsafə düsturuna əsasən yazıla bilər:

$$h = \frac{|-abc|}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}} = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}$$

hər tərəfi kvadrata yüksəldək:

$$h^2 = \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$$

Buradan da alırıq:

$$\frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{h^2}$$

və ya

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

Məsələ 5. Düzbucaqlı paralelepipedin tərlərinin uzunluğu a, b və c -dir.

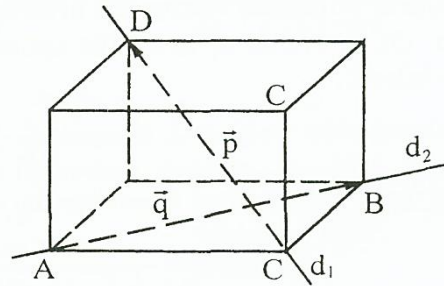
- 1) Oturacağın diaqonalı ilə onunla çarpaz olan paralelepipedin diaqonalı arasındakı məsafəni;
- 2) B diaqonallar arasındakı bucağı tapın.

Həlli:

Düzbucaqlı paralelepipedin oturacağına a, b yan tili isə c olsun. $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ (şəkil 5). Düzbucaqlı dekart koordinat sistemini elə götürək ki O koordinat başlanğıcı, OA , OB , OC isə uyğun olaraq, (ox) , (oy) , (oz) oxları istiqamətində olsun. OD diaqonalı ilə üst-üstə düşən düz xətti d_1 , AB ilə üst-üstə düşən isə d_2 ilə işarə edək. Həmin koordinat sisteminə $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$, $D(a,b,c)$ koordinatlara malik olar. Onda d_1 düz xəttin yönəldici vektoru $\vec{p} = [a, b, c]$,

d_2 düz xəttin isə yönəldici vektoru $\vec{q} = [a, b, 0]$ olar.

d_1 və d_2 düz xətlərin uyğun olaraq $O(0,0,0)$ və $A(a,0,0)$ nöqtələrindən keçdiyini nəzərə alsaq, onların parametrik tənliklərini yazıla bilər:



Şəkil 5.

$$d_1 : \begin{cases} x = at \\ y = bt, (t \in R) \\ z = ct \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = a - at \\ y = bt, (t \in R) \\ z = 0 \end{cases}$$

- 1) İki çarpaz düz xətt arasındakı məsafə düsturuna əsasən yazıla bilər:

$$\rho(d_1, d_2) = \frac{\left| \left[\vec{OA}, \vec{p}, \vec{q} \right] \right|}{\left| \left[\vec{p}, \vec{q} \right] \right|}$$

Digər tərəfdən $\vec{p}, \vec{q}$ və $\vec{OA} = (a, 0, 0)$ vektorların koordinatlarını nəzərə alsaq, alarıq:

$$\left| \left[\vec{OA}, \vec{p}, \vec{q} \right] \right| = \sqrt{\begin{vmatrix} bc \\ bo \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} ca \\ 0-a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} ab \\ -ab \end{vmatrix}^2} = \sqrt{b^2 c^2 + a^2 c^2 + 4a^2 b^2}$$

Bu xətləri yuxarıdakı düsturda nəzərə alsaq

$$\rho(d_1, d_2) = \frac{abc}{\sqrt{4a^2 b^2 + c^2 (a^2 + b^2)}}$$

olur.

2) Fəzada iki çarpaz düz xətt arasında qalan bucaq, onların yönəldici vektorları arasında qalan bucağa bərabərdir. Ona görə də d_1 və d_2 düz xətləri arasındakı φ bucağı yaza bilərik:

$$\cos \varphi = \frac{\left| \vec{p} \cdot \vec{q} \right|}{\left| \vec{p} \right| \left| \vec{q} \right|}$$

$\vec{p}$ və $\vec{q}$ vektorların koordinatlarını nəzərə alsaq, alarıq:

$$c \cos \varphi = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Alınan düsturdan görünür ki, d_1 və d_2 düz xətlərin biri-birinə perpendikulyar olması üçün $a=b$ olmalıdır. Yəni paralelepipedin oturacağı kvadrat olduqda, oturacaqdakı diaqonalı onunla çarpaz olan paralelepipedin diaqonalına perpendikulyar olur.

Fəzada müstəvi və düz xətlərə aid müxtəlif məsələlərə baxaq.

Məsələ 1. Verilən tənliklərinə görə müstəviləri qurun:

a) $2x + 3y + 4z - 16 = 0$

b) $3x + 2y - 6 = 0$

v) $2z - 5 = 0$

q) $x - 4y + 2z = 0$

Həlli:

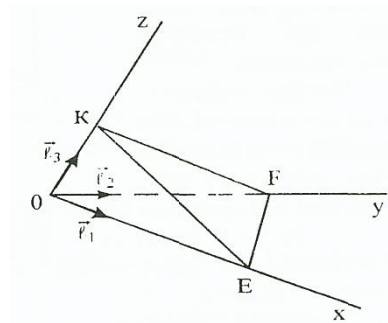
a) $2x + 3y - 4z - 16 = 0$ tənliyində $D = -16 \neq 0$ olduğundan, müstəvi koordinat başlanğıcından keçmir.

$R = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ afin reperində tələb olunan müstəvinin

qurmaq üçün onun koordinat oxlarından ayırdığı parçaları tapmaq lazımdır. Müstəvinin (ox) oxundan ayırdığı parçanı tapmaqdan ötrü verilmiş müstəvinin tənliyi ilə (ox) oxunun

$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ tənliyini birlikdə həll etmək lazımdır. Onda

$$2x - 16 = 0 \Rightarrow x = a = 8 \text{ olur.}$$



Şəkil 1.

Deməli, müstəvi (ox) oxunu $E(8, 0, 0)$ nöqtəsində kəsəcəkdir.

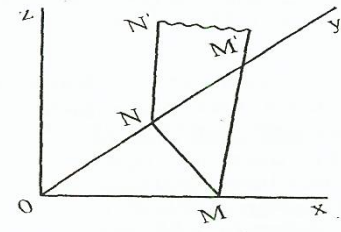
Analoji qayda ilə bu müstəvinin tənliyini (oy) oxunun $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ tənliyi ilə birlikdə həll etsək,

bu müstəvinin (oy) oxu ilə $F\left[0, 5\frac{1}{3}, 0\right]$ nöqtəsində kəsişdiyini və (oz) oxunun tənliyi ilə birlikdə həll etsək, bu oxla $K(0, 0, 4)$ nöqtəsində kəsişdiyini müəyyən etmiş olaraq (şəkil 1).

b) $3x + 2y - 6 = 0$ müstəvi tənliyində $C = 0$ olduğundan, onda müstəvi (oz) oxuna paraleldir. Digər oxlardan isə sonlu parçalar ayırır.

Yuxarıdakı üsulla müstəvinin (ox) və (oy) oxlarından ayırdığı parçaları tapsaq, $a = 2$, $b = 3$ olur.

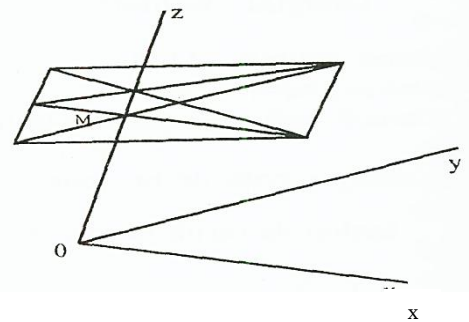
Bu parçaları (ox) və (oy) oxlarında ayırır, onların M və N uc nöqtələrini birləşdirsək, müstəvinin (xoy) koordinat müstəvisində (MN) düz xətti onun izi (kəsişmə xətti) olacaqdır. Verilən müstəvinin (xoy) və (yoz) koordinat müstəvilərindəki izləri (oz) oxuna paralel olduğundan (MM)//(NN)//(oz) olar (şəkil 2).



Şəkil 2.

v) $2z - 5 = 0$ tənliyində $A = B = 0$ olduğundan, müstəvi (xoy) koordinat müstəvisinə, eyni zamanda (ox) və (oy) oxlarına paralel olur. (oz)

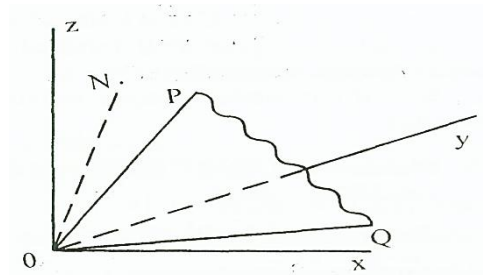
oxundan müstəvi $c = \frac{5}{2}$ parçasını ayırır. Onun (xoy) və (yoz) koordinat müstəvilərindəki izləri (ox) və (oy) oxlarına paralel olacaqdır (şəkil 3).



Şəkil 3.

q) $x - 4y + 2z = 0$ müstəvisi, $D = 0$ olduğundan koordinat başlanğıcından keçir. Müstəvini qurmaq üçün onun koordinat müstəviləri ilə kəsişmə xəttini tapmaq lazımdır.

Müstəvinin (xoy) müstəvisi ilə kəsişmə xətti $\begin{cases} x - 4y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (xoz) müstəvisi ilə $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ və (yoz) müstəvisi ilə $\begin{cases} 2y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ düz xətləri olacaqdır.



Şəkil 4.

Alınan düz xətləri müvafiq koordinat müstəvilərində qursaq, uyğun olaraq (OQ), (ON) və (OP) düz xətlərini qurmuş oluruq (şəkil 4).

Məsələ 2. Aşağıdakı hallarda:

a) $N(3; -5; 4)$ nöqtəsindən keçən və (xoy) koordinat müstəvisinə paralel olan;

b) $P(2; -3; -2)$ nöqtəsindən və (oz) oxundan keçən;

v) $M_1(1, 3, 4)$ və $M_2(2; 5; -6)$ nöqtələrindən keçən və (oy) oxuna paralel olan müstəvi tənliyini yazın.

Həlli:

a) (xoy) koordinat müstəvisinə paralel olan müstəvi tənliyi

$$Cz + D = 0$$

olur. Müstəvi $N(3;-5;4)$ nöqtəsindən keçdiyi üçün bu nöqtənin koordinatları verilmiş müstəvinin tənliyini ödəməlidir: $4C+D=0$.

Buradan da $D=-4C$ olur. D sərbəst həddin qiymətini yerinə yazaq

$$Cz - 4C = 0$$

$$C(z - 4) = 0, \quad C \neq 0 \text{ olduğundan}$$

$$z - 4 = 0 \text{ tələb olunan}$$

müstəvi tənliyi olacaqdır.

b)(oz) oxundan keçən müstəvi tənliyi aşağıdakı şəkildə olur:

$$Ax + By = 0$$

Müstəvi $P(2,-3,-2)$ nöqtəsindən keçdiyi üçün

$$2A - 3B = 0 \text{ və ya}$$

$$B = \frac{2}{3}A \quad (A \neq 0) \text{ olur. Bu qiyməti tənlikdə yerinə yazaq}$$

$$Ax + \frac{2}{3}Ay = 0$$

$$A(3x + 2y) = 0$$

$A \neq 0$ olduğundan $3x + 2y = 0$ olur.

v) Müstəvi (oy) koordinat oxuna paralel olduğundan, tənliyi

$$Ax + Cz + D = 0$$

olur. $M_1(1,3,4)$ və $M_2(2,5,-6)$ nöqtələri müstəvi üzərində yerləşdiyindən, onların koordinatları müstəvi tənliyini ödəməlidir.

$$\begin{cases} 3A + 4C + D = 0 \\ 5A - 6C + D = 0 \end{cases}$$

A, C və D -yə görə alınan bircinsli tənliklər sistemini həll etsək

$$A : C : D = 5 : 1 : (-19) \text{ alırıq.}$$

Mütənasiblik əmsalını $\lambda, (\lambda \neq 0)$ ilə işarə edək. Onda

$$A = 5\lambda; \quad C = \lambda; \quad D = -19\lambda \text{ olur.}$$

Bu qiymətləri müstəvi tənliyində yerinə yazaq və $\lambda \neq 0$ olduğunu nəzərə alsaq

$$5\lambda \cdot x + \lambda z - 19\lambda = 0$$

$$\lambda(5x + z - 19) = 0, \quad \lambda \neq 0$$

$$5x + z - 19 = 0$$

tələb olunan müstəvi tənliyi olar.

Məsələ 3. $M_1(3,0,4)$ və $M_2(5,2,6)$ nöqtələrindən keçən və $2x+4y+6z-7=0$ müstəvisinə perpendikulyar olan müstəvi tənliyini yazın.

Həlli:

Tələb olunan müstəvinin ixtiyari nöqtəsi $M(x,y,z)$ olsun. Onda $\vec{M_1M} = \begin{bmatrix} x-3 \\ y-0 \\ z-4 \end{bmatrix}$ və $\vec{M_1M_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektorları həmin müstəvi üzərində yerləşəcəkdir. $2x+4y+6z-7=0$ müstəvisinin $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ normal vektoru, $\vec{M_1M}$ və $\vec{M_1M_2}$ vektorları komplanar olduğundan, onların qarışıq hasilini

$$(\vec{M_1M} \cdot \vec{M_1M_2} \cdot \vec{n}) = 0$$

olur. Vektorların qarışıq hasilini koordinatlarla yazsaq, alırıq:

$$\begin{vmatrix} x-3yz-4 \\ 222 \\ 246 \end{vmatrix} = 0$$

Determinantı açıb, sadələşdirsək

$$x - 2y + z - 7 = 0$$

tələb olunan müstəvi tənliyi olur.

Adığımız cavabın doğrulduğunu yoxlamaq üçün məsələni başqa üsulla həll edək. $M_1(3,0,4)$ nöqtəsindən keçən müstəvi tənliyi

$$A(x-3) + B(y-0) - C(z-4) = 0$$

Bu müstəvinin $M_2(5,2,6)$ nöqtəsindən keçdiyini və $2x+4y-6z-7=0$ müstəvisinə perpendikulyar olduğunu nəzərə alsaq, alarıq:

$$\begin{cases} 2A + 2B + 2C = 0 \\ 2A + 4B + 6C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ A + 2B + 3C = 0 \end{cases}$$

$C \neq 0$ olsa, sistemin birinci və ikinci tənliyini C -yə bölüb, alınan

$$\begin{cases} \frac{A}{C} + \frac{B}{C} + 1 = 0 \\ \frac{A}{C} + \frac{2B}{C} + 3 = 0 \end{cases}$$

sistemi həll etsək $\frac{A}{C} = 1, \frac{B}{C} = -2$ və ya $A=C, B=-2C$ olur. Onda tələb olunan müstəvi tənliyi

$$C(x-3) + (-2C)(y-0) + C(z-4) = 0$$

və ya

$$x - 2y + z - 7 = 0$$

olur.

Məsələ 8. Koordinat müstəviləri ilə kəsişməsindən alınan üçbucağın tərəfləri $AB = 3\sqrt{2}$, $BC=AC=5$ olan müstəvi tənliyini yazın.

Həlli:

Tələb olunan müstəvinin $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ parçalarla tənliyini yazaq. Tutaq ki, ABC üçbucağının təpələri $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ nöqtələrindədir. İki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna əsasən üçbucağın tərəflərinin uzunluğunu tapaq:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad BC = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad AC = \sqrt{a^2 + c^2}$$

Onda aşağıdakı sistemi alarıq:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{2} \\ \sqrt{b^2 + c^2} = 5 \\ \sqrt{a^2 + c^2} = 5 \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = \pm 3 \\ c = \pm 4 \end{cases}$$

olur.

Beləliklə, məsələnin şərtini ödəyən

$$\frac{x}{\pm 3} + \frac{y}{\pm 3} + \frac{z}{\pm 4} = 1$$

və ya

$$\pm 12x \pm 12y \pm 9z \pm 6 = 0$$

səkkiz müstəvi almış oluruq.

Məsələ 5. Ümumi tənliyi ilə verilmiş düz xətti qurun və onun üzərində bir neçə nöqtənin koordinatlarını təyin edin:

$$\begin{cases} x + 3y + 3z - 6 = 0 \\ 3x + 3y + 4z - 10 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Həlli:

I üsul. Düz xətti təyin edən müstəvilər biri-birinə paralel olmadığından onların kəsişmə xətti tələb olunan düz xətt olacaqdır. Sadəlik üçün düz xəttin düzbucaqlı dekart koordinat sistemində verildiyini qəbul edək.

Bu müstəvilərin parçalarla tənliklərini yazsaq, görürük ki, birinci müstəvi koordinat oxlarından uyğun olaraq $a_1 = 6$; $b_1 = 2$; $c_1 = 2$ parçalarını, ikinci müstəvi isə $a_2 = 3\frac{1}{3}$, $b_2 = 3\frac{1}{3}$, $c_2 = 2\frac{1}{2}$ parçalarını ayırır.

Koordinat oxları üzərində qeyd olunan parçaları ayırmaqla, başqa sözlə, verilmiş müstəvilərin koordinat oxları ilə uyğun olaraq $A_1(6,0,0)$, $B_1(0,2,0)$, $C_1(0,0,2)$ və $A_2\left[\frac{10}{3}, 0, 0\right]$, $B_2\left[0, \frac{10}{3}, 0\right]$, $C_2\left[0, 0, \frac{5}{2}\right]$ nöqtələrini qurmaqla verilmiş müstəviləri və onların kəsişmə xəttini asanlıqla qurmaq olar.

Düz xətt üzərində yerləşən nöqtənin koordinatlarını tapmaq üçün verilən sistemi həll etmək lazımdır.

$$N = \begin{bmatrix} 133 \\ 334 \end{bmatrix}$$

matrisin rəngi ikiyə bərabər olduğundan iki tərtibli determinantlardan heç olmasa biri sıfırdan fərqli olmalıdır.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 33 & 34 \end{vmatrix} = 3 - 9 = -6 \neq 0$$

Onda z dəyişəninə qiymətlər verib, həmin sistemdən x və y tapa bilərik.

$$a) z=0 \text{ olsun. Onda } \begin{cases} x + 3y = 6 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases}$$

olur.

Alınan sistemi həll etsək, $x = 2, y = \frac{4}{3}$ olur. Onda $M_1\left[2; \frac{4}{3}; 0\right]$ nöqtəsi düz xətt üzərində yerləşir.

b) $z=2$ olsun. Onda

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$$

olur.

Alınan sistemin həlli $x = 1, y = -\frac{1}{3}$. Bu halda $M_2\left[1; -\frac{1}{3}; 2\right]$ nöqtəsi düz xətt üzərində olacaqdır.

II üsul. Verilən düz xəttin koordinat müstəviləri üzərindəki izlərindən istifadə etməklə də düz xətti qurmaq olar.

Düz xətt boyunca müstəviləri üzərində yerləşmirsə, onda onun izi nöqtə olacaqdır. (xoz) müstəvisi üzərində düz xəttin izini tapmaq üçün, onun tənliyində $y=0$ yazmaq lazımdır.

$$\begin{cases} x + 3z - 6 = 0 \\ 3x + 4z - 10 = 0 \end{cases}$$

Alınan sistemi həll etsək, $x=1,2$; $z=1,6$ olur. beləliklə $E(1,2; 0; 1,6)$ nöqtəsi düz xətlə (xoz) müstəvisinin kəsişməsidir.

Analoji, (xoy) müstəvisində düz xəttin izini tapmaq üçün onun tənliyində $z=0$ yazmaq lazımdır:

$$\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ 3x + 3y - 10 = 0 \end{cases}$$

Alınan sistemin həlli $x = 2$; $y = \frac{4}{3}$ olur. Onda düz xəttin (xoy) müstəvisi üzərində izi $F\left[2; \frac{4}{3}; 0\right]$

olacaqdır.

Bu iki nöqtə tələb olunan düz xətti qurmaq üçün kifayət edir.

Analoji yolla düz xəttin (yoz) müstəvisi üzərində izini təyin etsək, onda (EF) düz xətti üzərində olan nöqtə olduğunu görürük.

Məsələ 6. $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$ düz xətt tənliyini kanonik şəkə gətirin.

Həlli:

Bu məsələni həll etmək üçün düz xəttin hər hansı nöqtəsini və istiqamətləndirici vektorunu bilmək lazımdır.

Sistemdə iştirak edən məchulun əmsallarından düzəlmiş matrisin ranqı ikiyə bərabər olduğundan, məchullardan birini, məsələn $x=0$ qəbul edib, alınan

$$\begin{cases} -2y + 3z - 4 = 0 \\ 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$$

sistemi həll edə bilərik.

Buradan da $y=-8$, $z=-4$ olur. Deməli, $M(0,-8,-4)$ nöqtəsi verilən düz xəttin üzərindədir. Onun istiqamətləndirici vektoru isə

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k} = 4[1, 14, 8]$$

olur.

Onda düz xəttin kanonik tənliyini yaza bilərik.

$$\frac{x}{4} = \frac{y+8}{14} = \frac{z+4}{8} \quad \text{və ya} \quad \frac{x}{2} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+4}{4}$$

Məsələ 7. $\frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-7}$ düz xəttin $2x-y-3z+6=0$ müstəvisi üzərində proyeksiyanı tapın.

Həlli:

Proyeksiyalanan Q müstəvisi verilən düz xətdən keçib, verilən P müstəvisinə perpendikulyardır. Düz xətt tənliyindən görünür ki, $M_0(1,-1,0)$ nöqtəsi onun üzərindədir. Onda Q müstəvisi də həmin nöqtədən keçər:

$$A(x-1) + B(y+1) + Cz = 0$$

Düz xətt Q müstəvisinə paralel olduğundan $9A-4B-7C=0$ olur.

Proyektlenen müstəvi ilə verilən müstəvinin perpendikulyarlıq şərtinə əsasən yaza bilərik: $2A-B-3C=0$.

Son iki tənliyi birgə götürüb, alınan

$$\begin{cases} 9A - 4B - 7C = 0 \\ 2A - B - 3C = 0 \end{cases}$$

sistemi həll etsək

$$\frac{A}{C} = -5, \frac{B}{C} = -13 \text{ və ya } A = -5C, B = -13C \text{ olur.}$$

Bu qiymətləri proyektlenen müstəvi tənliyində yerinə yazaq:

$$-5C(x-1) - 13C(y+1) + Cz = 0 \text{ və ya} \\ 5x + 13y - z + 8 = 0 \text{ olur.}$$

$$\text{Onda } \begin{cases} 2x - y - 3z + 6 = 0 \\ 5x + 13y - z + 8 = 0 \end{cases} \text{ tələb olunandır.}$$

Məsələ 8. İki çarpaz düz xətt arasındakı ən qısa məsafəni hesablayın. $x=2+t$, $y=-2+3t$, $z=-1-2t$, $x=t$, $y=t$, $z=1+t$.

Həlli:

Düz xətlərin tənliklərindən istifadə edib onların çarpaz olduğunu göstərmək olar. Verilən düz xətlərin yönəldici vektorları $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ və $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olur. Onda $\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ vektoru həmin vektorlara paralel olan müstəvinin normalı olar. $M_1(2, -2, -1)$ və $M_3(0, 0, 1)$ düz xətləri üzərindəki nöqtələri birləşdirsək, $\vec{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ vektorunun $\vec{n}$ normal vektor üzərindəki proyeksiyası tələb olunan məsafə olacaqdır.

$$d = \frac{|\vec{M_1M_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 4(-2)}{\sqrt{1 + 3^2 + 4^2}} \\ d = \frac{2\sqrt{26}}{13};$$

ÇALIŞMALAR.

1. $M_0(1, 2, -1)$ nöqtəsindən keçən, $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ və $\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorlarına paralel olan müstəvi tənliyini yazın.

2. $M_1(3, 2, 1)$ və $M_2(2, -3, 1)$ nöqtələrindən keçən, $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektoruna paralel olan müstəvi tənliyini yazın.

3. (ox) və (oy) koordinat oxlarından müsbət bərabər parçalar ayıran və $M_1(3, -2, 1)$, $M_2(0, 3, 5)$ nöqtələrindən müstəvi tənliyini yazın.

4. $M_1(3, 1, 1)$ nöqtəsindən keçib, $3x - y + 2z + 4 = 0$ və $x + 2y - z + 5 = 0$ müstəvilərinə perpendikulyar olan müstəvi tənliyini yazın.

5. Koordinat başlanğıcından olan məsafəsi 10 və müstəviyə endirilən perpendikulyar vektor $\vec{n} = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right\}$ olduqda müstəvinin tənliyini yazın.

6. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ vektoruna perpendikulyar və koordinat başlanğıcından $P=3$ məsafədə yerləşən müstəvi tənliyini yazın.

7. $M_1(1,1,-2)$ və $M_2(-2,4,1)$ nöqtələrindən keçib, $x-z=1$ müstəvisi ilə 60° bucaq əmələ gətirən müstəvi tənliyini yazın.

8. İki kəsişən $5x-2y+5z-3=0$ və $2x+y-7z+2=0$ müstəvilərin əmələ gətirdiyi ikiüzlü bucağı yarıya bölən müstəvi tənliyini yazın.

9. $3x+y-2z-6=0$ və $x-2y+5z-1=0$ müstəvilərin kəsişmə xəttindən keçən müstəvilər dəstəsindən $M(2,-3,4)$ nöqtəsindən keçən müstəvinin tənliyini yazın.

10. Koordinat oxlarından 2,8,1 ədədləri ilə mütənasib parçalar ayıran və $M(1,-6,0)$ nöqtəsindən 2 vahid məsafədə olan müstəvi tənliyini yazın.

$$11. \begin{cases} 3x-4y-27=0 \\ 2x+y-2z+1=0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 4x+y-6z-2=0 \\ y-3z-2=0 \end{cases}$$

düz xətləri arasındakı bucağı təyin edin.

12. Düz xətlərin bir müstəvi üzərində yerləşdiyini göstərin.

$$\begin{cases} 2x-3z+2=0 \\ 2y-z-6=0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-12z+49=0 \\ 4x-37z+148=0 \end{cases}$$

13. $A(2,-2,0)$ nöqtəsindən keçib, (oy) oxu ilə 60° bucaq əmələ gətirən və $x=1+t$, $y=-3$, $z=2-2t$ düz xətti ilə kəsişən düz xətt tənliyini yazın.

$$14. M(2,-3,4) \text{ nöqtəsindən keçib, } \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1} \quad \vee \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{3} \text{ düz xətlərinə}$$

perpendikulyar olan düz xətt tənliyini yazın.

15. $M(4,-3,1)$ nöqtəsindən keçib $x=6t$, $y=2t$, $z=-3t$ və $x=-1+5t$, $y=3+4t$, $z=4+2t$ düz xətlərinə paralel olan müstəvi tənliyini yazın.

16. $6x+3y-z-41=0$ müstəvisi üzərində $A(1,-3,2)$ nöqtəsinin proyeksiyasını tapın.

17. $x+2y=0$ müstəvisi üzərində yerləşən, $x=t$, $y=4t$, $z=1-t$ və $x=4+2t$, $y=1$, $z=2-t$ düz xətlər ilə kəsişən düz xətt tənliyini yazın.

18. $A(1,3,5)$ nöqtəsindən $x=-30+6t$, $y=2t$, $z=-2,5-t$ düz xəttə qədər olan məsafəni təyin edin.

IX FƏSİL

İKİTƏRTİBLİ SƏTHLƏRİN KANONİK TƏNLİKLƏRİNƏ GÖRƏ ÖYRƏNİLMƏSİ

§ 51. İkitərtibli səth. Kəsişmə metodu.

Biz 7-ci fəsil 39-cu §-da fəzada «həndəsi fiquru təyin edən şərt» anlayışını verərkən, göstərdik ki, hər hansı ümumi dekart koordinat sisteminə nəzərən səthin tənliyi

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

şəklindədir.

Əgər bu tənliyin sol tərəfi x, y, z -dəyişənlərinə nəzərən ikidərəcəli çoxhədlidirsə, onda bu tənliyə **ikitetərtibli səthin tənliyi** deyilir. Başqa sözlə, ikitetərtibli səthin fəzada verilmiş hər hansı

$R = \{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ reperinə nəzərən ümumi tənliyi

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0 \quad (2)$$

şəklində olacaqdır.

Burada yüksək dərəcəli hədlərin $a_0(i, j=1,2)$ əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqli olmalıdır və $a_{ij}=a_{ji}$.

Biz ikitetərtibli səthin ümumi xüsusi tiplərini araşdıracağıq. Bunun üçün **kəsişmə metodu** adlanan aşağıdakı anlayışla tanış olaq.

Bu metodun tətbiqi zamanı düzbucaqlı dekart koordinat sistemindən istifadə etmək daha məqsədyönlüdür. Kəsişmə metodunun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, S ikitərtibli səthin koordinat müstəvilərinə paralel müstəvilər ilə kəsib alınan kəsişmə xəttini müəyyən edirlər. Həmin xətlərin növünə görə verilmiş ikitərtibli səthin forması haqqında mühakimə yürüdürlər.

Kəsişmə metodunun tətbiqi aşağıdakı teoremə əsaslanır.

Teorem: *Fərz edək ki, bizə hər hansı $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ortonormal reperinə nəzərən (1)*

tənliyində malik S səthi və (xoy) müstəvisinə paralel, $z=h$ müstəvisi verilmişdir. Onda S ikitərtibli səthinin verilmiş müstəvi ilə kəsişmə xəttinin (xoy) müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyası $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ reperində

$$F(x, y, h) = 0 \quad (3)$$

tənliyinə malik olur.

İsbatı: Tutaq ki, S ikitərtibli səthi (xoy) müstəvisinə paralel olan π müstəvisi ilə kəsilmişdir. Alınan xətti γ ilə, onun (xoy) müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyasını isə γ' ilə işarə edək

(şəkil 77). İsbat etməliyik ki, γ xətti $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ reperində (3) tənliyinə malikdir. Bunun üçün

göstərmək lazımdır ki, γ xəttinin (xoy) müstəvisi üzərindəki hər bir nöqtəsinin koordinatları (3) tənliyini ödəyir, lakin (xoy) müstəvisinin γ xətti üzərində olmayan nöqtələrinin koordinatları isə həmin tənliyi ödəmir. γ əyrisi üzərində ixtiyari A nöqtəsi götürək. Tutaq ki, A nöqtəsi (xoy)

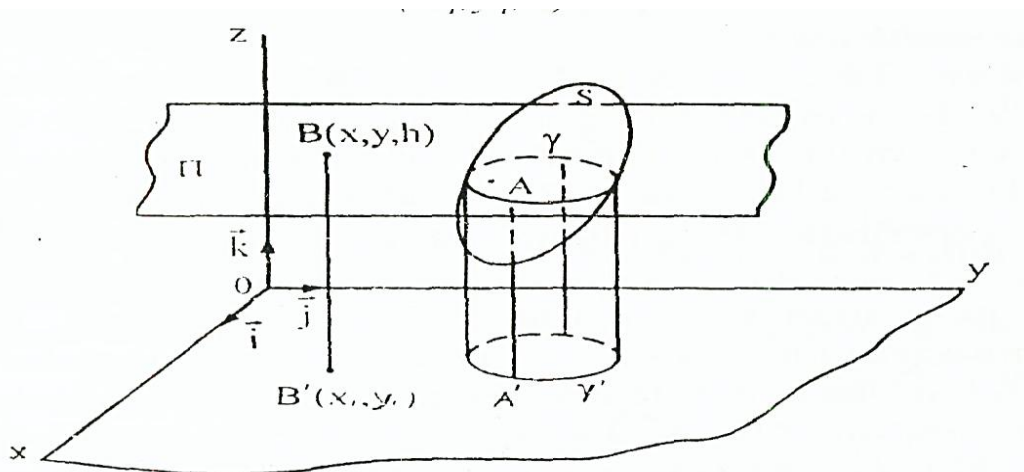
müstəvisində $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ reperinə nəzərən (x, y) koordinatlarına malikdir. Həmin nöqtə $\{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$

reperində $(x, y, 0)$ koordinatlarına malik olar. A nöqtəsi γ əyrisi üzərində olduğundan, o, γ əyrisinin hər hansı A nöqtəsinin ortoqonal proyeksiyasıdır. A və A nöqtələri (oz) oxuna paralel olan bir düz xətt üzərində olduqlarından, onların birinci iki koordinatları eyni olar, bundan əlavə, A nöqtəsi π müstəvisi üzərində olduğundan, o, $A(x, y, h)$ koordinatlarına malik olar. A nöqtəsi eyni zamanda (2) səthinin üzərindədir, ona görə də $F(x, y, h) = 0$. Buradan görün ki, $A(x, y)$ nöqtəsinin koordinatları (3) tənliyini ödəyir.

İndi (xoy) müstəvisində γ xətti üzərində olmayan ixtiyari $B(x_1, y_1)$ nöqtəsi götürək. Göstərək ki, B nöqtəsinin koordinatları (2) tənliyini ödəmir. B nöqtəsindən (oz) oxuna paralel düz xətt keçirib, onun π müstəvisi ilə kəsişdiyi nöqtəni B ilə işarə edək. B nöqtəsi $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ reperinə

nəzərən $(x_1, y_1, 0)$ koordinatlarına malik olduğundan, B nöqtəsi (x_1, y_1, h) koordinatlarına malik olar. Lakin B nöqtəsi γ xətti üzərində olmaz, yəni B nöqtəsinin koordinatları S ikitərtibli səthinin tənliyini ödəməz:

$$F(x_1, y_1, h) \neq 0.$$



Şəkil 77.

Beləliklə, göstərdik ki, müstəvinin nöqtəsi γ xətti üzərində deyilsə, onda onun koordinatları (3) tənliyini ödəmir.

Nəticə. (xoy) müstəvisinin (2) səthi ilə kəsişmə xətti $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ reperində $F(x,y,0)=0$ tənliyinə malikdir.

Eyni qayda ilə S ikitərtibli səthinin (xoy) və (yoz) koordinat müstəviləri ilə kəsişmə halları üçün də bu teoremi isbat etmək olar.

§ 52. Ellipsoid.

Tərif: Fəzada verilmiş hər hansı $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ortonormal reperinə nəzərən koordinatları

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

tənliyini ödəyən fəzanın bütün nöqtələri çoxluğuna ellipsoid deyilir, burada $a>0$, $b>0$, $c>0$ ixtiyari həqiqi ədədlərdir (1) tənliyinə ellipsoidin kanonik tənliyi deyilir.

(1) tənliyinə x, y, z məchulları kvadrlarla daxil olduğundan, ellipsoid ikitərtibli səthdir.

Ellipsoidin (1) kanonik tənliyinə görə onun həndəsi xassələrini və formasını araşdıraraq.

Koordinat başlanğıcının, yəni $O(0,0,0)$ nöqtəsinin koordinatları (1) tənliyini ödəmədiyindən ellipsoid koordinat başlanğıcından keçmir.

(1) ellipsoidinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapaq. (ox) oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını təyin etmək üçün ellipsoidin tənliyi ilə (ox) oxunun tənliyini birlikdə həll etmək lazımdır:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0, z = 0 \end{cases}$$

Bu sistemi həll edib, kəsişmə nöqtələrini alırıq: $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$. Eyni qayda ilə (oy) oxu ilə $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$ və (oz) oxu ilə $C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$ kəsişmə nöqtələrini tapırıq.

Beləliklə, ellipsoid koordinat oxlarının hər biri ilə koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olan iki nöqtədə kəşir. $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ nöqtələrinə ellipsoidin **təpə nöqtələri** $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{B_1 B_2}$, $\overline{C_1 C_2}$ parçalarına onun **oxları**, bu oxların kəsişmə nöqtəsinə isə ellipsoidin **mərkəzi** deyilir. a, b və c ədədlərinə ellipsoidin yarımxlarının uzunluqları deyilir. Bu ədədlər cüt-cüt fərqli olduqda, (1) ellipsoidinə **üçoxlu ellipsoid** deyilir.

x, y, z məchulları (1) tənliyinə yalnız kvadrlarla daxil olduğundan, bu tənliyi $M(x,y,z)$ nöqtəsinin koordinatları ilə yanaşı aşağıdakı nöqtələrin koordinatları da ödəyir:

$$M_1(-x, y, z), M_2(x, -y, z), M_3(x, y, -z), M_4(x, -y, -z),$$

$$M_5(-x, y, -z), M_6(-x, y, z), M_7(-x, y, -z).$$

Bu onu göstərir ki, ellipsoid koordinat müstəvilərinə, koordinat oxlarına və koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. Burada koordinat başlanğıcı ellipsoidin mərkəzidir.

Ellipsoidin nöqtələrinin koordinatlarının dəyişmə oblastını təyin edək, (1) tənliyindən alırıq:

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

ona görə

$$x^2 \leq a^2, y^2 \leq b^2, z^2 \leq c^2$$

və ya

$$-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c.$$

olar. Bu onu göstərir ki, ellipsoid 78-ci şəkildə təsvir olunan düzbucaqlı paralelipeddən kənara çıxmayan məhdud çoxluqdur. Buradan ellipsoidin bütün müstəvi kəsiklərinin də məhdud ikitərtibli xətlər olduğu alınır.

Ellipsoidin (xoy) müstəvisinə paralel olan

$$z = h \quad (2)$$

müstəvisi ilə kəsiklərinə baxaq.

(1)ellipsoidi ilə (2) müstəvisinin kəsişməsindən alınan xəttin (xoy) müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyası, § 51-dəki teoremə görə $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ reperində

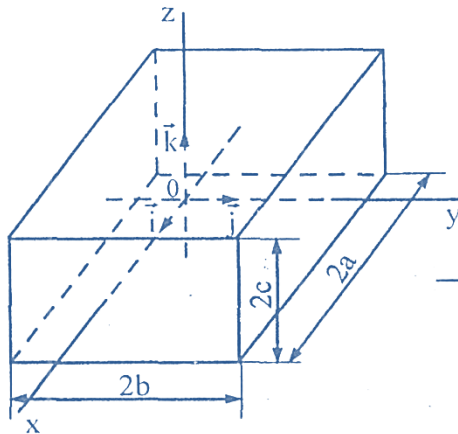
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \quad (3)$$

tənliyinə malik olar.

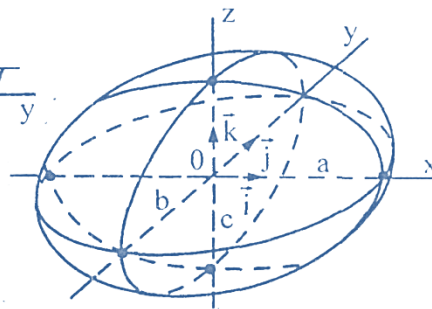
Tutaq ki, $h=0$, yəni (1) ellipsoidi ilə (xoy) müstəvisinin kəsişmə xəttinə baxaq. Bu halda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olduğunu alırıq: bu isə yarımoxları a, b olan ellipsdir. $a=b$ olarsa, onda $x^2 + y^2 = a^2$ çevrəsini alırıq.



Şəkil 78.



Şəkil 79

İndi $|h| < c$ bərabərsizliyini ödəyən h -ın ixtiyari qiymətlərinə baxaq: (3) tənliyini aşağıdakı kimi yazaq:

$$\frac{x^2}{a^2 \left[1 - \frac{h^2}{c^2} \right]} + \frac{y^2}{b^2 \left[1 - \frac{h^2}{c^2} \right]} = 1$$

və ya

$$a_1 = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$$

işarə etsək

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

Beləliklə, (2) müstəvisi ilə (1) ellipsoidinin kəsişmə xətti, yarımoxları a_1, b_1 olan ellipsdir. h hərfi 0-dan c -yə qədər artdıqda a_1 və b_1 yarımoxları kiçilir, ona görə ellips də kiçilir və $h=c$ olduqda $C(0,0,c)$ nöqtəsinə yığılır. Ellipsoid ilə yalnız bir C ortaq nöqtəsi olan $z=c$ müstəvisinə C nöqtəsində ellipsoidə toxunan müstəvi deyilir. h ədədi 0-dan c -yə qədər azaldıqda ellips kiçilib, $h=c$ olduqda $C_1(0,0,-c)$ nöqtəsinə yığılır. Onda, $z=-c$ müstəvisi (oz) oxu üzərində olan C_1 nöqtəsində ellipsoidə toxunar.

$|h| > c$ olduqda (2) müstəvisi ilə (1) ellipsoidinin kəsişməsi boş çoxluq olar.

Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, (1) ellipsoidinin (yoz) və (xoz) müstəvilərinə paralel olan $x=1$ və $y=m$ müstəviləri ilə kəsişməsində də eyni nəticələr alınır.

Beləliklə, (1) ellipsoidi 79-cu şəkildə təsvir olunan səthdir.

Qeyd edək ki, $a=b=c$ olduqda (1) ellipsoidi a radiuslu sfera olar:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

§ 53. Hiperboloidlər.

1. Biroyuqlu hiperboloid. Fəzada verilmiş hər hansı $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ortonormal reperinə

nəzərən koordinatları

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

tənliyini ödəyən fəzanın bütün nöqtələri çoxluğuna biroyuqlu hiperboloid deyilir. a, b, c sıfırdan böyük ixtiyari həqiqi ədədlərdir.

(1)tənliyinə biroyuqlu hiperboloidin **kanonik tənliyi** deyilir.

(1)tənliyinə x, y, z məchulları kvadrlarla daxil olduğundan, biroyuqlu hiperboloid ikitərtibli səthdir.

Biroyuqlu hiperboloidin (1) kanonik tənliyinə görə onun həndəsi xassələrini və formasını araşdırmaq.

Koordinat başlanğıcının, yəni $O(0,0,0)$ nöqtəsinin koordinatları (1) tənliyini ödəmədiyindən biroyuqlu hiperboloid koordinat başlanğıcından keçmir.

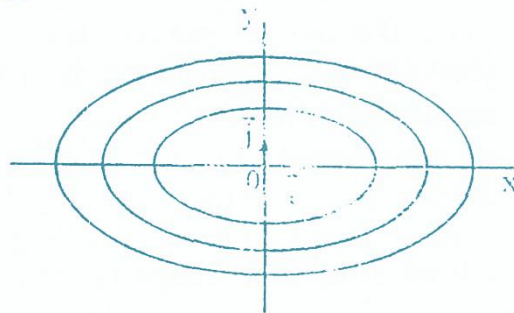
(1)biroyuqlu hiperboloidinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını təyin edək. Bunun üçün biroyuqlu hiperboloidin (1) tənliyi ilə oy oxunun $y=0, z=0$ tənliyini birlikdə həll etmək lazımdır.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0, z = 0 \end{cases}$$

Bu sistemi həll edib, kəsişmə nöqtələrini tapırıq. $A_1(a,0,0), A_2(-a,0,0)$. oy oxu ilə biroyuqlu hiperboloidinin isə kəsişmə nöqtələri $B_1(0,b,0), B_2(0,-b,0)$ olar. oz oxu ilə biroyuqlu hiperboloidin həqiqi kəsişmə nöqtələri yoxdur.

A_1, A_2, B_1, B_2 nöqtələrinə biroyuqlu hiperboloidin

təpə nöqtələri, $[A_1 A_2]^-$, $[B_1 B_2]^-$ parçalarına onun həqiqi oxları, bu oxların kəsişmə nöqtəsinə isə hiperboloidin **mərkəzi** deyilir. a, b və c ədədləri biroyuqlu hiperboloidin yarımoxları adlanır. a, b həqiqi yarımoxlar, c isə xəyali yarımoxdur. Bu ədədlər cüt-cüt fərli olduqda, ona **üçoxlu biroyuqlu hiperboloid** deyilir.



Şəkil 80.

x, y, z məchulları (1) tənliyinə yalnız kvadratlar ilə daxil olduğundan, ellipsoiddə olduğu kimi, biroyuqlu hiperboloid də koordinat müstəvilərinə, koordinat oxlarına və koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.

(1)biroyuqlu hiperboloidinin (xoy) müstəvisinə paralel olan

$$z = h \quad (2)$$

müstəvisi ilə kəsiklərinə baxaq.

(1)biroyuqlu hiperboloidi ilə (2) müstəvisinin kəsişməsindən alınan xəttin (xoy) müstəvisi üzərində ortoqonal proyeksiyası $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ reperində

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \quad (3)$$

tənliyinə malik olar.

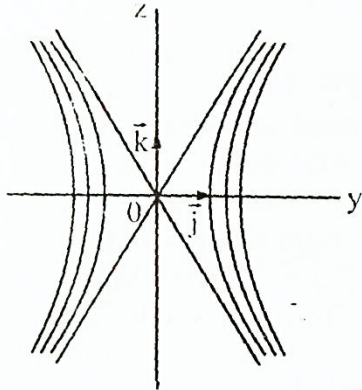
Burada

$$a_1 = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}}.$$

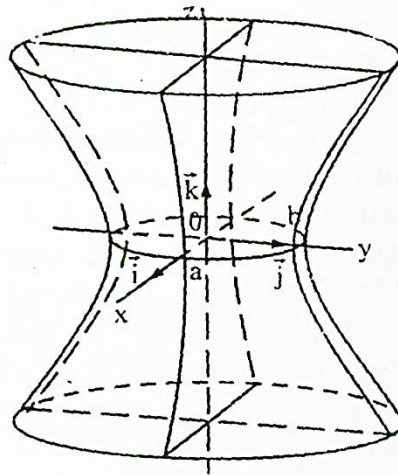
Bu isə ixtiyari h üçün ellips tənliyidir. $h=0$ olduqda, yəni (1) biroyuqlu hiperboloidi ilə (xoy) müstəvisinin kəsişməsi nəticəsində

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipsi alınır. Bu ellipsə (1) səthinin **boğaz ellipsi** deyilir. h -ın



Şəkil 81.



Şəkil 82.

artması ilə a_1 və b_1 yarımxoxları (3) ellipsi ilə birlikdə böyüyür. (1) səthi ilə (2) müstəvisinin kəsiklərinin xəritəsi 80-cı şəkildə göstərilmişdir.

İndi (1) biroyuqlu hiperboloidi ilə (yoz) müstəvisinə paralel olan

$$x = t \quad (4)$$

müstəvisinin kəsişməsinə baxaq. Kəsişmə nəticəsində alınan xəttin (yoz) müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyası $\{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ reperində

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{l^2}{a^2} \quad (5)$$

tənliyinə malik olar. $a > |l|$ olan müxtəlif qiymətlərində (yoz) müstəvisində hiperbolalar ailəsi alınır; bu hiperbolaların asimptotları eyni olub, (oy) həqiqi oxuna malik olar. $l = a$ olduqda həmin

hiperbolaların asimptotları alınar. $|l| > a$ olduqda (5) tənliyi həqiqi oxu (oz) oxu ilə üst-üstə düşən ortaq asimptotlu hiperbolalar ailəsinə verər. (1) biroyuqlu hiperboloidinin (4) müstəvisi ilə kəsişmə xəritəsi 81-ci şəkildə göstərilmişdir. Biroyuqlu hiperboloid 82-ci şəkildə təsvir olunmuşdur.

(1)biroyuqlu hiperboloidi ilə (xoz) müstəvisinə paralel olan $y=m$ müstəvisinin kəsişməsində də eyni nəticə alınır.

2. İkiroyuqlu hiperboloid. Hər hansı $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ortonormal reperinə nəzərən koordinatları

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (6)$$

tənliyini ödəyən fəzanın bütün nöqtələr çoxluğunu ikiroyuqlu hiperboloid deyilir. burada a, b, c -sıfırdan böyük ixtiyari həqiqi ədədlərdir; $a>0, b>0, c>0$ qəbul olunur.

(6)tənliyinə ikiroyuqlu hiperboloidin **kanonik tənliyi** deyilir.

x, y, z məchulları (6) tənliyinə kvadratlarla daxil olduğundan, ikiroyuqlu hiperboloid ikitərtibli səthdir.

Kanonik tənliyinə görə ikiroyuqlu hiperboloidi araşdırmaq.

Koordinat başlanğıcının $(0,0,0)$ koordinatları (6) tənliyini ödəmədiyindən ikiroyuqlu hiperboloid koordinat başlanğıcından keçmir.

İkiroyuqlu hiperboloid (oz) oxunu iki nöqtədə kəsir: $C_1(0,0,c)$ və $C_2(0,0,-c)$. C_1 və C_2 nöqtələrinə ikiroyuqlu hiperboloidin **təpə nöqtələri**, $[C_1, C_2]$ parçasına isə onun **həqiqi oxu deyilir**. (ox) və (oy) oxları ikiroyuqlu hiperboloidi həqiqi nöqtələrdə kəsmir. c ədədinə ikiroyuqlu hiperboloidin həqiqi yarımxu, b və a ədədlərinə isə xəyali yarımxları deyilir. a, b, c ədədləri fərqli olduqda (6) ikiroyuqlu hiperboloid **üçoxlu hiperboloid** adlanır.

x, y, z məchulları (6) tənliyinə yalnız kvadratlarla daxil olduğundan, ikiroyuqlu hiperboloid koordinat müstəvilərinin hər birinə koordinat oxlarının hər birinə və koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. Simmetriya oxlarının kəsişmə nöqtəsinə **ikiroyuqlu hiperboloidin mərkəzi deyilir**.

Burada koordinat başlanğıcı ikiroyuqlu hiperboloidin mərkəzi olacaqdır.

(6)tənliyindən çıxır ki, $\frac{z^2}{c^2} \geq 1$, ona görə $z \geq c$ və $z \leq -c$. Beləliklə, ikiroyuqlu hiperboloidin bütün nöqtələri $z=c$ və $z=-c$ paralel müstəviləri arasında qalan zolaqdan kənarda yerləşmişdir.

(6)ikiroyuqlu hiperboloidinin (xoy) müstəvisinə paralel olan

$$z = h \quad (7)$$

müstəvisi ilə kəsiklərinə baxaq.

(6)ikiroyuqlu hiperboloidi ilə (7) müstəvisinin kəsişməsindən alınan xəttin (xoy) müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyası $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ reperində

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \quad (8)$$

tənliyinə malikdir. $h=0$ olduqda (xoy) müstəvisi ilə (6) ikiroyuqlu hiperboloidinin heç bir ortaq nöqtəsi yoxdur. $|h| < c$ olduqda da (7) müstəvisi üçün eyni nəticə alınır. $|h| = c$ olduqda, (8) tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

şəklinə düşər. Bu tənliyi x, y məchullarının yalnız sıfır qiymətləri ödəyir, yəni

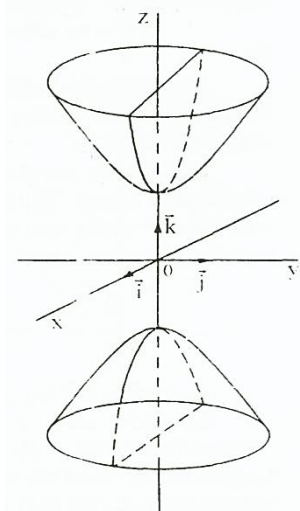
$$z = c \quad (9)$$

müstəvisinin (6) ikiroyuqlu hiperboloidi ilə yalnız bir $C_1(0,0,c)$ ortaq nöqtəsi vardır. (9) müstəvisi (6) ikiroyuqlu hiperboloidinə C_1 nöqtəsində toxunur. Eyni qayda ilə $z=-c$ müstəvisi (6) ikiroyuqlu hiperboloidinə $C_2(0,0,-c)$ nöqtəsində toxunur.

$|h| > c$ olduqda, (8) xətti yarımoxları $a_1 = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ və

$b_1 = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ olan ellipsdir. h artdıqda a_1 və b_1 yarımoxları və ona

görə də ellips qeyri-məhdud böyüyür. $H < c$ olduqda da simmetrik vəziyyət alınır. Beləliklə, (6) səthi iki oyuqdan ibarətdir. (6) ikiyüzlü hiperboloidi 83-cü şəkildə təsvir olunmuşdur. Göstərmək olar ki, ikiyüzlü hiperboloidi hiperbolalar və parabolalar üzrə kəsən müstəvilər də vardır.



Şəkil 83.

§ 54. Paraboloidlər.

1. Elliptik paraboloid. Hər hansı $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ortonormal reperinə nəzərən koordinatları

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (1)$$

tənliyini ödəyən fəzanın bütün nöqtələr çoxluğuna **elliptik paraboloid** deyilir. Burada p və q həqiqi ədədlər olub, $p > 0$, $q > 0$.

(1)tənliyinə elliptik paraboloidin **kanonik tənliyi** deyilir.

(1)tənliyini $O(0,0,0)$ koordinat başlanğıcının koordinatları ödədiyindən elliptik paraboloid koordinat başlanğıcından keçir.

(1)elliptik paraboloidinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapaq. Elliptik paraboloidin (ox) oxu ilə kəsişmə nöqtələrini təyin etmək üçün onların tənliklərini birlikdə həll etmək lazımdır:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \\ pq \\ y = 0, z = 0. \end{cases} = 2z.$$

Ayındır ki, bu sistemin yeganə həlli var: $x=0$, $y=0$, $z=0$. Beləliklə, elliptik paraboloidin (ox) oxu ilə bir ortaq nöqtəsi vardır ki, o da koordinat başlanğıcıdır. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, koordinat başlanğıcı (1) elliptik paraboloidi ilə (oy) və (oz) oxlarının yeganə kəsişmə nöqtəsidir. O nöqtəsinə elliptik paraboloidin təpəsi deyilir.

x, y məchulları (1) tənliyinə yalnız kvadrlarla daxil olduğundan, elliptik paraboloid (xoy) və (yoz) koordinat müstəvilərinə nəzərən simmetrik olub, (xoy) müstəvisinə nəzərən simmetrik deyil. Buradan alınır ki, elliptik paraboloid (oz) oxuna nəzərən simmetrikdir, lakin (ox), (oy) oxlarına və koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik deyildir.

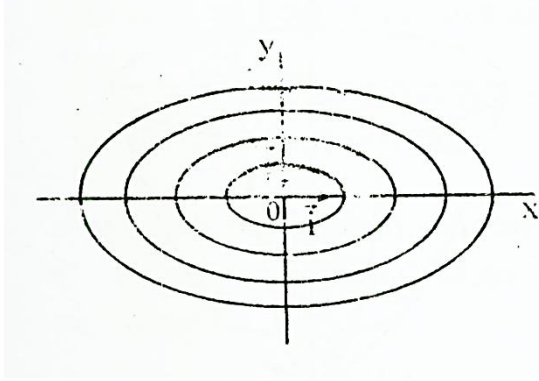
Elliptik paraboloidin (1) tənliyindən çıxır ki, səthin bütün nöqtələri üçün $z \geq 0$ olar; bərabərlik yalnız nöqtə koordinat başlanğıcına düşəndə ödənilir. Buradan alırıq ki, elliptik paraboloidin təpəsindən başqa bütün nöqtələri (xoy) müstəvisindən eyni bir tərəfdə yerləşir.

(1)elliptik paraboloidin (xoy) müstəvisinə paralel olan

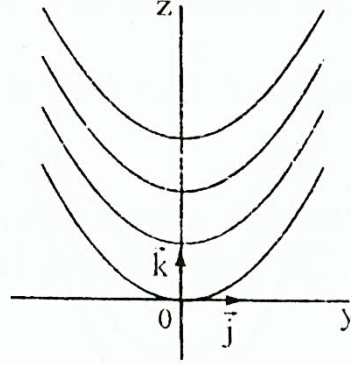
$$z = h \quad (2)$$

müstəvisi ilə kəsişməsindən alınan xəttə baxaq. Həmin xəttin (xoy) müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyası $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ reperində

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$



Şəkil 84.



Şəkil 85.

tənliyinə malik olar. Yuxarıdakı mühakiməmizdən bu nəticəyə gəlirik ki, yalnız $h>0$ qiymətləri üçün kəsiklərə baxmaq mənalıdır. $h>0$ olduqda (3) xətti, yəni (1) elliptik paraboloidi ilə (2) müstəvisinin kəsişmə xətti $a = \sqrt{2hq}$, $b = \sqrt{2hq}$ yarımoğlu ellips olar. h artdıqda, a və b yarımoğları və ona görə də kəsikdə alınan ellips qeyri-məhdud olaraq böyüyür (şəkil 84).

İndi (1) elliptik paraboloidinin (yoz) müstəvisinə paralel olan

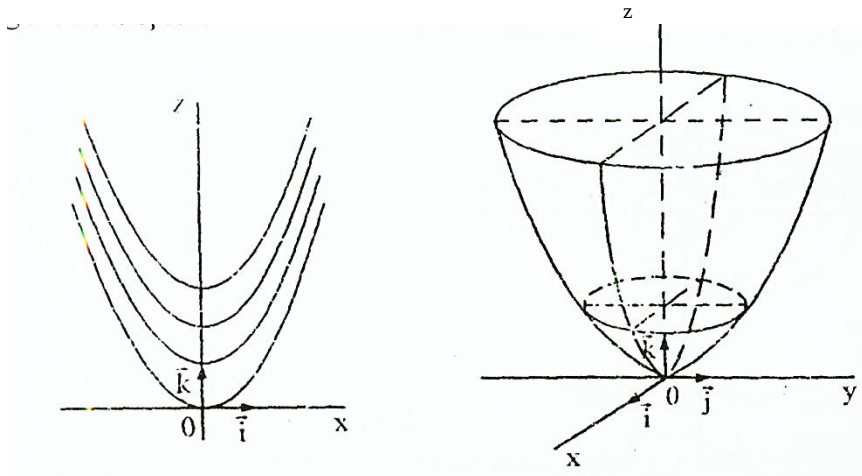
$$x = 1$$

müstəvisi ilə kəsişməsindən alınan xəttə baxaq. Həmin xəttin (yoz) müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyası $\{0, \vec{i}, \vec{k}\}$ reperində

$$y^2 = 2qz - \frac{q}{p}l^2 \quad (4)$$

tənliyinə malik olar. l -in ixtiyari qiymətlərində (4) xətti q parametrlili parabola olar. həmin parabolalar 85-ci şəkildə təsvir olunmuşdur.

Eyni qayda ilə (1) elliptik paraboloidini $y=m$ müstəvisi ilə kəssək, onda m -in müxtəlif qiymətlərində kəsişmə xətləri eyni oxlu parabolalar olar. həmin parabolalar 86-cı şəkildə göstərilmişdir.



Şəkil 86.

Şəkil 87.

Elliptik paraboloid 87-ci şəkildə təsvir olunmuşdur. p və q kəmiyyətlərinə elliptik paraboloidin parametrləri deyilir.

2.Hiperbolik paraboloid. Hər hansı $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ortonormal reperinə nəzərən koordinatları

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

tənliyini ödəyən fəzanın bütün nöqtələri çoxluğuna hiperbolik paraboloid deyilir, burada $p > 0$, $q > 0$ ixtiyari həqiqi ədədlərdir.

(5)tənliyinə hiperbolik paraboloidin **kanonik tənliyi** deyilir.

(5)hiperbolik paraboloidi koordinat başlanğıcından keçir.

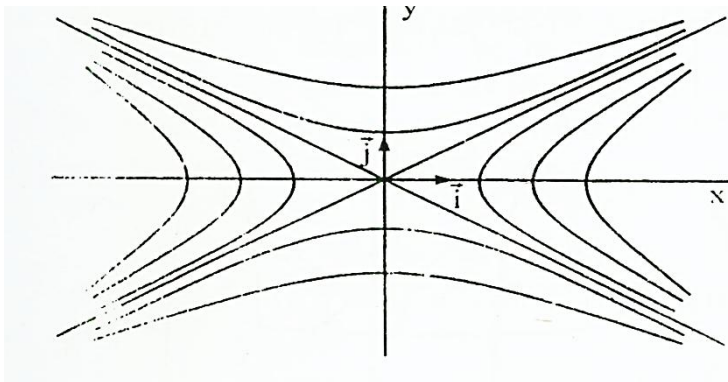
(5)hiperbolik paraboloidi koordinat oxları ilə yeganə nöqtədə koordinat başlanğıcında kəşir.

(5)hiperbolik paraboloidi (xoz) , (yoz) koordinat müstəvilərinə nəzərən simmetrikdir, (xoy) müstəvisinə nəzərən simmetrik deyildir. Buradan alınır ki, hiperbolik paraboloid (oz) oxuna nəzərən simmetrikdir, lakin (oy) , (ox) oxlarına və koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik deyildir.

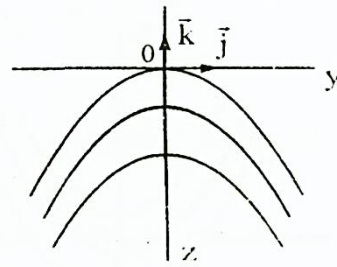
İndi (5) hiperbolik paraboloidi ilə (xoy) koordinat müstəvisinə paralel olan

$$z = h \quad (6)$$

müstəvisinin kəsişməsindən alınan xəttə baxaq. Bu xəttin (xoy) müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyası $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ reperində



Şəkil 88.



Şəkil 89.

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \quad (7)$$

tənliyinə malik olar. $h=0$ olarsa, (7) aşağıdakı iki düz xəttə parçalanır:

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{və} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad (8)$$

Beləliklə, (xoy) koordinat müstəvisi (5) hiperbolik paraboloidini (8) düz xətləri boyunca kəsir. $h > 0$ olduqda (7) tənliyi ortaq asimptotlu və təpələri (ox) oxu üzərində olan hiperbolalar ailəsini ifadə edir. $h < 0$ olduqda isə həmin hiperbolalarla qoşma olan hiperbolalar alınır (şəkil 88).

(5) səthinin $x=l$ müstəvisi ilə kəsişmə xətti parabola verir ki, onun da (yoz) koordinat müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyası, $\{0, \bar{j}, \bar{k}\}$ reperində

$$y^2 = -2pz + \frac{q}{p} l^2$$

tənliyinə malik olar. Bu parabolaların hamısı eyni oxa malikdirlər (şəkil 89).

$$M_0M = M_0M_1 = M_0M_2 = r$$

olduğundan (xoz) müstəvisi üzərində yerləşən M_1 və M_2 nöqtələrinin koordinatları uyğun olaraq $M_2(r,0,z)$ və $M_2(-r,0,z)$

olacaqdır. Buradakı z M nöqtəsinin **aplikatıdır**.

Belə ki, (xoy) müstəvisinə paralel olan çevrə üzərində yerləşən hər bir M nöqtəsinin aplikatı eyni olmaqla

$$r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (*)$$

olacaqdır.

Aşkardır ki, $M(x,y,z)$ yalnız və yalnız o zaman bu səth üzərində yerləşər ki, M_1 və M_2 nöqtələrindən biri γ xətti üzərində yerləşsin. Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, bu nöqtə M_1 -dir. Onda bu nöqtənin koordinatları γ xəttinin $x = f(z)$ tənliyini ödəməlidir. Başqa sözlə,

$$r = f(z)$$

şərti ödənməlidir. r -in $(*)$ -dakı qiymətini burada nəzərə alaraq

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(z) \quad (1)$$

Beləliklə, biz göstərdik ki, (xoz) müstəvisi üzərində yerləşən və

$$x = f(z)$$

tənliyinə malik olan xəttin (oz) oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin tənliyi (1) və ya

$$x^2 + y^2 = f^2(z) \quad (1)$$

şəklində olacaqdır.

Analoji qayda ilə göstərmək olar ki, (xoy) müstəvisi üzərində yerləşən və tənliyinə malik olan γ xəttinin (ox) oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin tənliyi

$$x^2 + z^2 = f^2(x) \quad (2)$$

şəklində olacaqdır.

İndi aşağıdakı fırlanma səthlərinə baxaq.

1.Fırlanma ellipsoidi. Tutaq ki, γ ellipsi (xoz) müstəvisində yerləşib və $\{0, \bar{i}, \bar{k}\}$ reperinə

nəzərən

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (9)$$

tənliyinə malikdir. Bu ellipsin (oz) oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthə **fırlanma ellipsoidi deyilir**. (2) bərabərliyindən istifadə edib, onun tənliyini taparaq:

(9) tənliyindən

$$x^2 = a^2 \left[1 - \frac{z^2}{c^2} \right],$$

onda (1) tənliyinə əsasən bu əyrinin (oz) oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin tənliyi

$$x^2 + y^2 = a^2 \left[1 - \frac{z^2}{c^2} \right] \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (10)$$

şəklində olacaqdır. Bu tənlik fırlanma ellipsoidinin tənliyidir.

2.Fırlanma hiperboloidləri. Tutaq ki, γ hiperbolası (xoz) müstəvisində yerləşib və $\{0, \bar{i}, \bar{k}\}$

reperində

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (11)$$

tənliyinə malikdir.

a) γ hiperbolasını (ox) oxu ətrafında fırladaq, onda ikioyuqlu fırlanma hiperboloidi alınar. Onun tənliyini taparaq. (11) tənliyindən

$$z^2 = c^2 \left[\frac{x^2}{a^2} - 1 \right].$$

Onda bu xəttin (ox) oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin tənliyi

$$y^2 + z^2 = c^2 \left[\frac{x^2}{a^2} - 1 \right] \text{ və ya } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

olduğunu alırıq ki, bu da **ikiöyüqlü hiperboloidin tənliyidir**.

b) İndi γ hiperbolasını (oz) oxu ətrafında fırlatsaq, biöyüqlü hiperboloid alırıq. Doğrudanda (11) tənliyindən

$$x^2 = a^2 \left[1 + \frac{z^2}{c^2} \right]$$

Bunu (1) tənliyində nəzərən alsaq,

$$x^2 + y^2 = a^2 \left[1 + \frac{z^2}{c^2} \right] \text{ və ya } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tənliyini alırıq ki, bu da **biöyüqlü hiperboloidin** tənliyidir.

3. Fırlanma paraboloidi. Tutaq ki, γ parabolası (xoz) müstəvisində olub, $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ reperinə nəzərən

$$x^2 = 2pz$$

tənliyinə malikdir. γ parabolasını (oz) oxu ətrafında fırlatsaq, **fırlanma paraboloidini** alırıq. Onun tənliyi

$$x^2 + y^2 = 2pz \text{ və ya } \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z$$

şəklində olacaqdır.

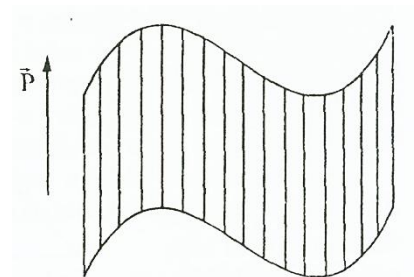
§ 56. Silindrik səthlər.

1. Əgər səth üzərindəki hər bir M nöqtəsilə yanaşı bu nöqtədən keçib, verilmiş $\bar{p} \neq 0$ vektoruna paralel olan düz xətt də bu səth üzərində yerləşərsə, onda belə səthlərə **silindrik səthlər** və ya **silindr** deyilir.

Silindrik səth üzərində yerləşib, $\bar{p}$ vektoruna paralel olan düz xətlərə bu **səthin doğuranları** deyilir.

Silindrik səthi başqa cür də təyin etmək olar.

Fərz edək ki, bizə hər hansı γ xətti və $\bar{P} \neq 0$ vektoru verilmişdir. Bu əyrinin istənilən nöqtəsindən keçib, $\bar{p}$ vektoruna paralel olan düz xətlər çoxluğunun əmələ gətirdiyi səth silindrik səth olacaqdır. Burada γ xətti səthin yönəldicisi, $\bar{P}$ vektoruna paralel olan düz xətlər isə səthin doğuranları adlanır (şəkil 93).



Şəkil 93.

İndi göstərək ki, γ yönəldicisi fəzada götürülmüş hər hansı $\{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminin (xoy) koordinat müstəvisi üzərində yerləşib, bu müstəvi üzərindəki $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ reperinə nəzərən

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

tənliyinə malik və doğuranları (oz) oxuna parallel olan silindrik səthin $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən tənliyi də (1) şəklindədir.

Bunun üçün qeyd olunan səth üzərində hər hansı $M(x, y, z)$ cari nöqtəsi götürüb, onun (oz) oxu istiqamətindəki ortoqonal proyeksiyasını M -lə işarə edək (şəkil 94). Aşkardır ki, belə nöqtənin birinci iki koordinatı M nöqtəsinin uyğun koordinatları ilə eyni olub, üçüncü koordinatı $z=0$ olacaqdır və bu $M(x, y, 0)$ nöqtəsi yalnız və yalnız o zaman səth üzərində yerləşəcək ki, M nöqtəsi γ yönəldicisi üzərində yerləşsin.

Beləliklə, biz göstərdik ki, (1) tənliyi fəzada götürdüyümüz $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən qeyd olunan silindrik səthin tənliyidir.

Adətən belə silindrik səthlər öz yönəldicilərinin adı ilə adlanır. Bu cür səthlərdən bir neçəsinə baxaq.

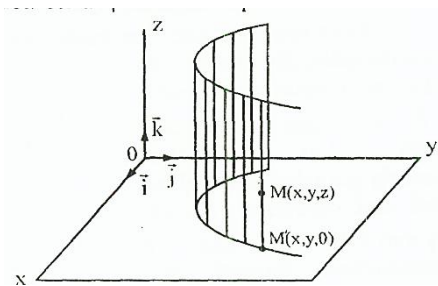
1.Elliptik silindr. Hər hansı $\{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ortonormal

reperində koordinatları

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(2)

tənliyini ödəyən fəzanın bütün nöqtələri çoxluğuna **elliptik silindr** deyilir.



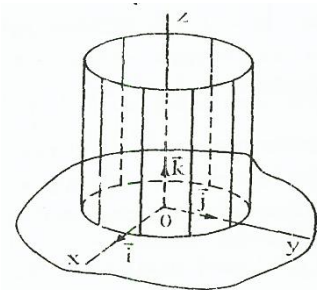
Şəkil 94.

(2)tənliyi elliptik silindrin **kanonik tənliyi** adlanır. x, y məchulları elliptik silindrin (2) tənliyinə kvadratlarla daxil olduğundan elliptik silindr ikitərtibli səthdir.

(2)elliptik silindrinin yönəldicisi (xoy) müstəvisi üzərində olub

$\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ reperində həmin (2) tənliyi ilə ifadə olunan ellipsdir. (2)

elliptik silindri 95-ci şəkildə göstərilmişdir.



Şəkil 95.

(2)elliptik silindri: 1) koordinat müstəvilərindən hər birinə, 2) (xoy) müstəvisinə paralel olan hər bir müstəviyə, 3) koordinat oxlarından hər birinə, 4) (oz) oxunu kəsib, (ox) və ya (oy) oxuna paralel olan hər bir düz xəttə, 5) (oz) oxu üzərində olan hər bir nöqtəyə nəzərən simmetrikdir. (oz) oxuna **elliptik silindrin oxu** deyilir.

$a=b$ olduqda (2) silindrinə **düz dairəvi silindr** deyilir.

(2)elliptik silindri ilə müxtəlif müstəvilərin kəsişmə xətlərini araşdıraraq. (oz) oxuna paralel olan π müstəvisi götürək. $\pi \cap (xoy) = d$ olsun. Onda d düz xətti (2) ellipsini ya müxtəlif iki nöqtədə kəsər, ya ona bir nöqtədə toxunar, ya da onunla heç bir ortaq nöqtəsi olmaz. Bununla əlaqədar olaraq, (oz) oxuna paralel olan π müstəvisi (2) elliptik silindriyi iki doğuranı boyunca kəsə bilər və ya ona bir doğuran boyunca toxuna bilər və yaxud da onu kəsməz.

(oz) oxuna paralel olmayan müstəvi (2) elliptik silindrinin bütün doğuranlarını kəsməlidir, ona görə nəticədə məhdud ikitərtibli xətt, yəni ellips alınar. Buradan çıxır ki, (2) elliptik silindrin (oz) oxuna paralel olmayan müstəvilərlə kəsiyi ellips olar.

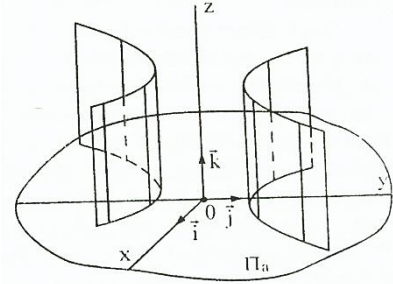
2.Hiperbolik silindr. Hər hansı $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormal reperinə nəzərən koordinatları

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

tənliyini ödəyən fəzanın bütün nöqtələri çoxluğuna **hiperbolik silindr** deyilir. (3) tənliyi hiperbolik silindrin **kanonik tənliyi** adlanır.

Hiperbolik silindrin (3) tənliyinə x, y məchulları kvadratlarla daxil olduqlarından, o, ikitərtibli səthdir.

(3)hiperbolik silindrinin yönəldicisi, (xoy) müstəvisində və $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ koordinat sistemində (3) tənliyi ilə ifadə olunan hiperboladır. (3) hiperbolik silindri 96-cı şəkildə təsvir olunur.



olub

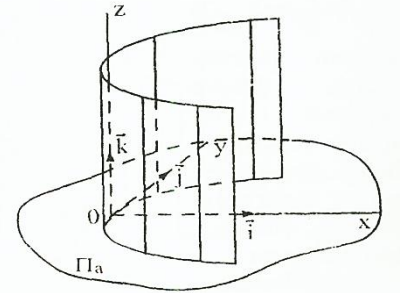
Şəkil 96.

Qeyd edək ki, hiperbolik silindr iki oyuqdan ibarətdir.

(3)hiperbolik silindri; 1) koordinat müstəvilərindən hər birinə, 2) (xoy) müstəvisinə paralel olan hər bir müstəviyə, 3) koordinat oxlarından hər birinə, 4) (oz) oxunu kəsib, (ox) və ya (oy) oxuna paralel olan hər bir düz xəttə, 5) (oz) oxu üzərində olan hər bir nöqtəyə nəzərən simmetrikdir. (oz) oxuna (3) hiperbolik **silindrinin oxu** deyilir.

İndi (3) hiperbolik silindri ilə müxtəlif müstəvilərin kəsişmə xətlərini araşdıraraq. (oz) oxuna paralel olan π müstəvisi götürək. $\pi \cap (xoy) = d$ olsun. Onda d düz xətti (xoy) müstəvisi üzərində olan (3) hiperbolasını ya iki nöqtədə, ya da bir nöqtədə (bu halda d düz xətti asimptotlardan birinə paralel olar) kəsər və ya ona bir nöqtədə toxunar və yaxud da onunla heç bir ortaq nöqtəsi olmaz. Bununla əlaqədar olaraq, (oz) oxuna paralel olan π müstəvisi (3) hiperbolik silindrini iki doğuran boyunca və ya bir doğuran boyunca kəsə bilər, ona bir doğuran boyunca toxuna bilər, onu kəsməyə bilər.

(oz) oxuna paralel olmayan müstəvilərlə hiperbolik silindrinin kəsiklərinə baxaq. Belə müstəvilər (3) hiperbolik silindrinin bütün doğuranlarını kəsər, ona görə, nəticədə iki budaqdan ibarə olan ikitərtibli xətt alınar. Aydınır ki, bu xətt hiperbola olar. Deməli, (oz) oxuna paralel olmayan müstəvilər (3) hiperbolik silindrini hiperbolalar üzrə kəsir.



Şəkil 97.

3.Parabolik silindr. Hər hansı $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormal reperinə nəzərən koordinatları

$$y^2 = 2px, \quad p > 0. \quad (4)$$

tənliyini ödəyən fəzanın bütün nöqtələri çoxluğuna **parabolik silindr** deyilir. (4) tənliyi parabolik silindrin kanonik tənliyi adlanır. Aydınır ki, parabolik silindr ikitərtibli səthdir.

(4)parabolik silindrinin yönəldicisi (xoy) müstəvisi üzərində olub, $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ ortonormal reperində (4) tənliyi ilə ifadə olunan paraboladır.

(4)tənliyindən görünür ki, parabolik silindrin nöqtələrinin x koordinatı yalnız mənfi olmayan qiymətlər alır; ona görə (4) səthinin bütün nöqtələri (yoz) müstəvisindən bir tərəfdə, özü də (ox) müsbət yarımxunun yönəldiyi tərəfdə olur.

(4)parabolik silindri: 1) (xoz) müstəvisinə, 2) (xoy) müstəvisinə və ona paralel olan ixtiyari müstəviyə, 3) (ox) oxuna və ona paralel olub, (oz) oxunu kəsən ixtiyari düz xəttə nəzərən simmetrikdir.

(4)parabolik silindri 97-ci şəkildə verilmişdir.

(4)parabolik silindri ilə müxtəlif müstəvilərin kəsişmə xətlərini araşdıraraq. Əvvəlcə (oz) oxuna paralel olan π müstəvisi götürək $\pi \cap (xoy) = d$ olsun. Onda d düz xətti (xoy) müstəvisi üzərində olan (4) parabolasını ya iki nöqtədə, ya da bir nöqtədə (bu halda d düz xətti (oy) oxuna paralel olur) kəsər və ya ona bir nöqtədə toxunar və yaxud da onunla ortaq nöqtəsi olmaz. Bununla əlaqədar olaraq, (oz) oxuna paralel olan π müstəvisi (4) parabolik silindrini iki doğuran boyunca və ya bir doğuran boyunca kəsə bilər, ona bir doğuran boyunca toxuna bilər, onu kəsməyə bilər.

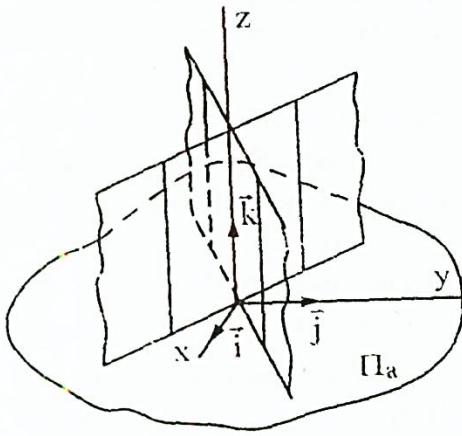
İndi (oz) oxuna paralel olmayan müstəvilərlə (4) parabolik silindrinin kəsişmə xətlərinə baxaq. Belə müstəvilər parabolik silindrin bütün doğuranlarını kəsər, ona görə nəticədə bir budaqdan ibarət olub, qeyri-məhdud ikitərtibli xətt, yəni parabola alırıq. Deməli (oz) oxuna paralel olmayan müstəvilər (4) parabolik silindrini parabolalar boyunca kəsir.

4.İki kəsişən və ya iki paralel müstəvidən ibarət olan silindr. Hər hansı $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$

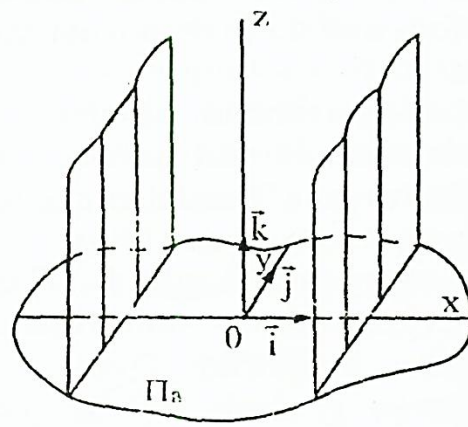
ortonormal reperində koordinatları

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (5)$$

tənliyini ödəyən fəzanın bütün nöqtələri çoxluğu iki kəsişən müstəvi olar. Bu halda silindrik səth iki kəsişən müstəvidən ibarətdir. (5) tənliyinə həmin silindrik səthin kanonik tənliyi deyilir. (5) səthi 98-ci şəkildə təsvir olunmuşdur.



Şəkil 98.



Şəkil 99.

$R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ortonormal reperində koordinatları

$$x^2 - a^2 = 0 \quad (6)$$

tənliyini ödəyən fəzanın bütün nöqtələri çoxluğu iki paralel müstəvi olar. Bu halda silindrik səth iki paralel müstəvidən ibarətdir. (6) tənliyinə həmin silindrik səthin kanonik tənliyi deyilir. (6) səthi 99-cu şəkildə göstərilmişdir.

§ 57. İkitərtibli konus. Konus kəsikləri.

1. Fəzada verilmiş hər hansı $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ortonormal reperinə nəzərən koordinatları

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (1)$$

tənliyini ödəyən fəzanın bütün nöqtələri çoxluğuna **ikitetərtibli konus** deyilir, burada a,b,c-sıfırdan fərqli ixtiyari ədədlərdir. $a>0$?, $b>0$, $c>0$ olduğunu qəbul edək. (1) tənliyinə ikitərtibli konusun **kanonik tənliyi** deyilir.

Göstərək kki, (1) tənliyi təpəsi koordinat başlanğıcında olan konus səthini təyin edir, yəni konus səthi koordinat başlanğıcından keçən düz xətlər vasitəsi ilə əmələ gəlir.

Koordinatları (1) tənliyini ödəyən və koordinat başlanğıcından fərqli olan ixtiyari $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsi götürək. Onda

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0$$

olar. Aydınır ki, $M(tx_0, ty_0, tz_0)$ nöqtələrinin də koordinatları (1) tənliyini ödəyər:

$$t^2 \left[\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} \right] = 0,$$

burada t-ixtiyari həqiqi ədəddir. Lakin bütün $M(tx_0, ty_0, tz_0)$ nöqtələri çoxluğu (OM_0) düz xəttini əmələ gətirir. Deməli, (1) ikitərtibli konusu koordinat başlanğıcından keçən düz xətlərdən ibarət olan səthdir. Bu zaman koordinat başlanğıcı konusun **təpə nöqtəsi** adlanır. Aydınır ki, (1) ikitərtibli konusu koordinat oxları ilə koordinat başlanğıcında kəşisir.

x, y, z məchulları (1) tənliyinə yalnız kvadratlarla daxil olduğundan, onu $M(x, y, z)$ nöqtəsinin koordinatları ödəyirsə, onda

$$M_1(-x, y, z), M_2(x, -y, z), M_3(x, y, -z), M_4(x, -y, -z),$$

$$M_5(-x, y, -z), M_6(-x, -y, z), M_7(-x, -y, -z)$$

nöqtələrinin koordinatları da bu tənliyi ödəyər. Bu onu göstərir ki, (1) ikitərtibli konusu koordinat müstəvilərinə, koordinat oxlarına və koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. (oz) oxuna (1) ikitərtibli konusunun oxu deyilir.

İndi (1) konusu ilə (xoy) müstəvisinə paralel olan

$$z = h \quad (2)$$

müstəvisinin kəsişmə xəttini araşdıraq. Bu xəttin (xoy) müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyası

$\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ reperində

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} \quad (3)$$

tənliyinə malik olar. $h=0$ olduqda (3) tənliyini yalnız bir $O(0,0,0)$ nöqtəsi ödəyəcək. həmin bu nöqtədə (xoy) koordinat müstəvisi (1) konusu ilə kəşisir. $h \neq 0$ olarsa, onda (3) xətti, yarımoxları

$$a_1 = \frac{a|h|}{c} \quad \text{və} \quad b_1 = \frac{b|h|}{c} \quad (4)$$

olan ellipsdir. (2) müstəvisi ilə (1) konusunun kəsişmə xətləri bu ellipsin (oz) oxu üzrə irəliyə doğru hərəkəti nəticəsində alınır.

İndi də (1) konusu ilə (xoz) müstəvisinə paralel olan $y=1$ müstəvisinin kəsişmə xəttini araşdıraq.

Bu xəttin (xoz) koordinat müstəvisi üzərindəki ortoqonal proyeksiyasının $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ reperində tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{t^2}{b^2} \quad (5)$$

olar. $t=0$ olarsa, onda koordinat başlanğıcında kəsişən

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \quad (6)$$

düz xətlərini alırıq. Deməli, (xoz) koordinat müstəvisi ilə (1) konusu (6) düz xətləri (onlar konusun doğuranlarıdır) boyunca kəsişir. $t \neq 0$ olduqda, (5) tənliyi hiperbolası təyin edir. Buradan alırıq ki, (xoz) müstəvisinə paralel olan $y = 1 \neq 0$ müstəviləri (1) konusunu hiperbolası üzrə kəsir.

Aydındır ki, $x=m$ müstəvisi ilə (1) konusunun kəsişmə xətlərinə baxsaq, eyni nəticələr alınır.

(1)konusuna, bu konusun $O(0,0,0)$ təpə nöqtəsindən və ellipsin nöqtələrindən keçən bütün düz xətlər çoxluğu kimi də baxmaq olar. Həmin düz xətlərə **konusun doğuranları**, ellipsə isə **yönəldicisi** deyilir. Konus 100-cü şəkildə göstərilmişdir.

$a=b$ olarsa, onda konusa **düz dairəvi** və **fırlanma** konusu deyilir.

Bu fəslin 53-cü paragrafında göstərdik

ki,

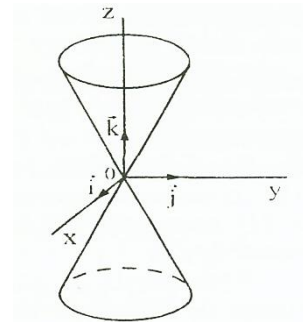
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (7)$$

biroyuqlu hiperboloidi də (2) müstəvisinin kəsişməsi nəticəsində yarımxları $a = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$,

$b = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ olan ellips alınır. (4) bərabərliklərinə görə $a_1 < a$,

$b_1 < b$ olar. Buradan görünür ki, a_1, b_1 yarımxlı ellips (2) müstəvisi ilə (7) biroyuqlu hiperboloidinin kəsişməsindən alınan ellipsin tamamilə daxilində olar. Deməli, (1) konusu (7) biroyuqlu hiperboloidinin bütövlükdə daxilində yerləşir.

Göstərək ki, $|h|$ -ın qeyri-məhdud artması ilə $a - a_1$, $b - b_1$ fərqləri sıfıra yaxınlaşır. Doğrudan da,



Şəkil 100.

$$a = a_1 = \left[a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} - \frac{a|h|}{c} \right] \times \frac{a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} + \frac{a|h|}{c}}{a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} + \frac{a|h|}{c}} = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} + \frac{|h|}{c}} \rightarrow \lim_{|h| \rightarrow \infty} (a - a_1) = 0.$$

Eyni qayda ilə

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} (b - b_1) = 0$$

olduğunu göstərmək olar.

Bu deyilənlərdən çıxır ki, (2) müstəvisinin (7) biroyuqlu hiperboloidi və (1) konusu ilə kəsişməsindən alınan ellipslər qeyri-məhdud artdıqda bir-birinə yaxınlaşırlar. Bu halda biroyuqlu hiperboloid istənilən qədər konusa yaxınlaşır. (1) konusuna (7) biroyuqlu hiperboloidinin **asimptotik konusu** deyilir.

Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, $|h|$ -ın qeyri-məhdud artması ilə ikioyuqlu hiperboloid (1) konusunun oyularlarından birində olmaqla, ona qeyri-məhdud olaraq yaxınlaşır.

2.Konus kəsikləri. Tutaq ki, $R = \left\{ 0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$ ortonormal reperində tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (1)$$

olan ikitərtibli konusu verilmişdir.

yuxarıda göstərdik ki, $z = h \neq 0$ müstəvisi ilə (1) ikitərtibli konusunun kəsişmə xətti γ ellipsi olar. İkitərtibli konusun təpə nöqtəsindən keçən ixtiyari α müstəvisinə baxaq. Tutaq ki, bu müstəvi $z=h$ müstəvisinə paralel deyildir. Onların kəsişmə xətti l olsun. l düz xətti γ ellipsini ya müxtəlif iki nöqtədə kəsər, ya ona bir nöqtədə toxunat, ya da onunla heç bir ortaq nöqtəsi olmaz. Bununla əlaqədar olaraq konusun təpəsindən keçib, $z=h$ müstəvisinə paralel olmayan bütün müstəviləri üç növə ayıraq (şəkil 100).

1) Ellipsi iki müxtəlif nöqtədə kəsən müstəvilər (α_1), aydındır ki, belə müstəvilər konusu iki düz xətt boyunca (yəni doğuranlar boyunca) kəsər;

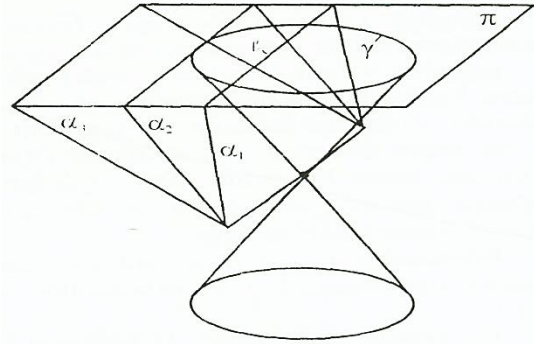
2) Ellips ilə bir ortaq nöqtəsi olan müstəvilər (α_2). Belə müstəvilər konu ilə bir ortaq düz xəttə malikdir.

3) Ellips ilə kəsişməyən müstəvilər (α_3). Belə müstəvilər konu ilə bir ortaq nöqtəyə (təpə nöqtəsinə) malikdir.

İkinci halda l düz xətti ellipsə toxunduğundan, α_2 müstəvisi konuya doğuran düz xətt boyunca toxunar. Bu müstəviyə (1) konusuna toxunan müstəvi deyilir (şəkil 100).

İndi (1) konusunun, təpə nöqtəsindən keçməyən müstəvilərlə kəsişməsinə baxaq. Tutaq ki, π_1 konusun təpəsindən keçməyən müstəvi, π -isə təpə nöqtədən keçib, π_1 müstəvisinə paralel olan müstəvidir. Konu ilə π_1 müstəvisinin ortaq nöqtələr çoxluğu T olsun, π müstəvisi 3-cü növə daxilse, onda π_1 müstəvisi konusun yalnız bir oyuğunu kəsər. Onda T çoxluğu məhdud ikitərtibli xətt, yəni ellipsdir. π müstəvisi 2-ci növə daxilse, onda π_1 müstəvisi konusun yalnız bir oyuğu ilə kəsişərək, π müstəvisi üzərindəki doğuranından başqa, bütün doğuranlarını kəsər. Deməli, T çoxluğu qeyri-məhdud ikitərtibli xətt olub, bir budaqdan ibarətdir, yəni paraboladır. Nəhayət, π müstəvisi birinci növə daxilse, onda T çoxluğu iki budaqdan ibarət olan ikitərtibli xətdir, bu budaqların hər biri, aydındır ki, düz xətt olmaz. Deməli, baxılan hal üçün T çoxluğu hiperboladır.

Beləliklə, ellips, hiperbola və parabolaya ikitərtibli konusun (xüsusi halda düz konusun) müstəvilərlə kəsişmə xətti kimi baxmaq olar. Ona görə də həmin xətlərə çox zaman **konus kəsikləri** deyilir.



Şəkil 101.

§ 58. İkitərtibli səthlərin düzxətli doğuranları.

Tərif: Fərz edək ki, bizə hər hansı S ikitərtibli səthi və I düz xətti verilmişdir. Əgər I düz xəttinin bütün nöqtələri bu səth üzərində yerləşərsə, onda bu düz xəttə S səthinin düz xətti doğurmanı deyilir.

Kanonik tənliyinə görə öyrəndiyimiz ikitərtibli səthlərdən hansının düz xətti doğurmanı olduğunu müəyyən edək:

Silindrik və konik səthlərə verdiyimiz tərifdən bilavasitə çıxır ki, bu səthin doğuranları onların düz xəttli doğuranlarıdır. Fırlanma səthinin isə doğurmanı düz xətt olduqda bu düz xəttin fırlanma oxu ətrafında fırlanmasında alınan bütün düz xətlər bu səthin düzxətli doğuranları olacaqdır. Doğuran düz xətt olmadıqda bu cür fırlanma səthlərinin düz xətti doğuranları yoxdur.

Ellipsoid məhdud fiqur olduğundan onun düz xətti doğurmanı ola bilməz. İndi hiperboloidlərə və paraboloidlərə baxaq.

İki oyuqlu hiperboloid iki hissədən ibarət olub, (xoy) müstəvisinə paralel olan $z = \pm c$ müstəviləri arasında heç bir nöqtəsi yoxdur. Başqa sözlə, bu səthin (xoy) müstəvisinə paralel olmayan heç bir düz xətləli doğuranı ola bilməz. Çünki belə düz xətlərin $z = \pm c$ müstəviləri arasında səth üzərində yerləşən nöqtələri yoxdur. Bu səthin (xoy) müstəvisinə paralel düz xətləli doğuranı da ola bilməz. Belə ki, səthin bu müstəviyə bütün paralel kəsikləri ellipsdən ibarətdir.

Elliptik paraboloidin də düz xətləli doğuranı ola bilməz. Belə ki, bu səthin də (xoy) müstəvisinə paralel kəsikləri ellips olub, bütün nöqtələri $z \geq 0$ yarımfəzasında yerləşir.

İndi göstərek ki, biroyuqlu hiperboloidin və hiperbolik paraboloidin düz xətləli doğuranları vardır. Bunu həmin səthlər üzərində müəyyən düz xətlərin olması ilə göstərəcəyik. Bunu analitik üsulla icra edək.

Fərz edək ki, bizə hər hansı $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

tənliyinə malik biroyuqlu hiperboloidi verilmişdir. Bu tənliyi aşağıdakı şəkllə salaq:

$$\left[\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1 - \frac{y}{b} \right] \cdot \left[\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1 + \frac{y}{b} \right] \quad (2)$$

Buradan

$$\begin{cases} \lambda_1 \left[\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right] = \mu_1 \left[1 - \frac{y}{b} \right] \\ \mu_1 \left[\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right] = \lambda_1 \left[1 + \frac{y}{b} \right] \\ \lambda_2 \left[\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right] = \mu_2 \left[1 + \frac{y}{b} \right] \\ \mu_2 \left[\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right] = \lambda_2 \left[1 - \frac{y}{b} \right] \end{cases} \quad (3_1)$$

(3₂)

Tamamilə aşkardır ki, ixtiyari M nöqtəsinin verilmiş düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən koordinatları (1) tənliyini ödəyirsə, bu koordinatları (3₁) və (3₂) tənliklərini də ödəyəcəkdir. Və tərsinə hər bir M nöqtəsinin koordinatları (3₁) və (3₂) tənliklərindən birini ödəyirsə, onda (1) tənliyini də ödəyəcəkdir.

Digər tərəfdən (3₁) və (3₂) tənlikləri düz xətt tənlikləridir. Biz göstərdik ki, bu düz xətlərin bütün nöqtələri (1) ikitərtibli səth üzərində yerləşir. Başqa sözlə (1) ikitərtibli səthinin düzxətli doğuranlarıdır. Bu tənliklərin hər birində uyğun olaraq, $(\lambda_1 : \mu_1)$ və $(\lambda_2 : \mu_2)$ nisbətində bir dənə düz xətt uyğun gələcəkdir.

Bu sistemlərin hər biri uyğun olaraq $(\lambda_1 : \mu_1)$ və $(\lambda_2 : \mu_2)$ nisbətlərinin bütün mümkün qiymətlərində düzxətli doğuranlar çoxluqlarını təyin edir ki, onlara da uyğun olaraq birinci və ikinci növ **düz xətləli doğuranlar ailəsi** deyilir.

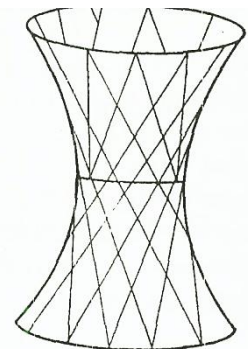
Biroyuqlu hiperboloidin düzxətli doğuranlarının əsas xassələrini qeyd edək:

1°. Biroyuqlu hiperboloidin hər bir nöqtəsindən yalnız iki düzxətli doğuran keçir ki, bunlardan biri birinci növ ailəyə, digəri isə ikinci növ ailəyə daxildir.

2°. Eyni ailəyə daxil olan istənilən iki düz xətləli doğuran çarpazdır.

3°. Müxtəlif ailədən götürülən istənilən iki düzxətli doğuran bir müstəvi üzərində yerləşir.

Bu xassələri analitik yolla asanlıqla isbat etmək olar. Biroyuqlu hiperboloid özünün düz xətləli doğuranları ilə birlikdə 102-ci şəkildə təsvir olunmuşdur.



Şəkil 102.

Tamamilə eyni qayda ilə göstərmək olar ki, hər hansı $\{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə nəzərən

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (4)$$

tənliyinə malik hiperbolik paraboloid

$$\begin{cases} \lambda_1 \left[\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right] = \mu_1 \cdot z \\ \mu_1 \left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right] = 2\lambda_1 \end{cases}$$

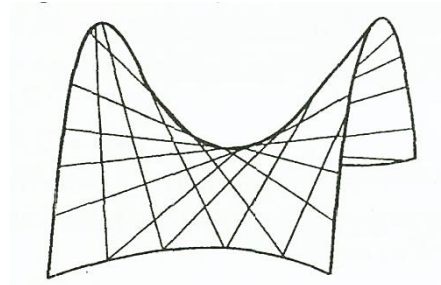
və

$$\begin{cases} \lambda_2 \left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right] = \mu_2 \cdot z \\ \mu_2 \left[\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right] = 2\lambda_2 \end{cases}$$

tənlikləri ilə təyin olunan düz xətti doğuranlar ailəsinə aiddir. Başqa sözlə bu tənliklərdə hər bir $(\lambda_1 : \mu_1)$ və $(\lambda_2 : \mu_2)$ nisbətinə uyğun olaraq hər ailədən götürülmüş düzxətli doğuran uyğun gəlir.

Qeyd edək ki, hiperbolik paraboloidin düzxətli doğuranları biroyuqlu hiperboloidin doğuranları üçün söylədiyimiz eyni xassələrə malikdir.

Hiperbolik paraboloid özünün düz xətti doğuranları ilə birlikdə 103-cü şəkildə verilmişdir.



bir

Şəkil 103.

Düz xətti doğuranların tapılmasına aid bir məsələ həll edək:

Məsələ:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1.$$

biroyuqlu hiperboloidinin $M(6;2;8)$ nöqtəsindən keçən düzxətli doğuranlarının tənliyini yazın.

Həlli:

Biroyuqlu hiperboloidin (3_1) tənliyindən

$$\begin{cases} \lambda_1 \left[\frac{x}{3} + \frac{z}{4} \right] = \mu_1 \left[1 + \frac{y}{2} \right] \\ \mu_1 \left[\frac{x}{3} - \frac{z}{4} \right] = \lambda_1 \left[1 - \frac{y}{2} \right] \end{cases} \quad (5)$$

tənliklər sistemini alırıq. Verilmiş M_0 nöqtəsinin koordinatlarını bu sistemdə nəzərə alsaq:

$$\begin{cases} \lambda_1 \left[\frac{6}{3} + \frac{8}{4} \right] = \mu_1 \left[1 + \frac{2}{2} \right] \\ \mu_1 \left[\frac{6}{3} - \frac{8}{4} \right] = \lambda_1 \left[1 - \frac{2}{2} \right] \end{cases}$$

və ya

$$4\lambda_1 = 2\mu_1 \Rightarrow \mu_1 = 2\lambda_1$$

Bunu (5) tənliklər sistemində nəzərə alıb və sadələşdirək:

$$\begin{cases} 4x - 12y + 3z - 24 = 0 \\ 4x + 3y - 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

M_0 nöqtəsinin koordinatlarını (3_2) tənliklər sistemində nəzərə alsaq, verilmiş səthin digər ailəyə daxil olan düzxətli doğuranının

$$\begin{cases} 4x - 3z = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

tənliyinə malik olduğunu alarıq.

İkitərtibli səthlərin kanonik tənliklərinin yazılmasına aid aşağıdakı məsələ həlli nümunələrinə baxaq:

Məsələ 1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 22 = 0$ kürə səthinin mərkəzinin koordinatlarını və radiusunu təyin edin.

Həlli:

Kürə səthinin verilmiş tənliyini aşağıdakı kimi yazaq:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 - 22 - 1 - 4 - 9 = 0$$

və ya

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 36$$

Bu tənlikdən görünür ki, kürə səthinin mərkəz $S(1;-2;3)$ nöqtəsi, radiusu isə $R=6$ -dır.

Məsələ 2. Təpəsi $S(4;0;-3)$ nöqtəsində yerləşən və yönəldicisi $\begin{cases} \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ ellipsi olan

konusun tənliyini yazın.

Həlli:

Konusun bütün doğuranları S nöqtəsindən keçdiyinə görə, onun ixtiyari doğuranının tənliyi $\frac{x-4}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z+3}{a_3}$ və ya $\frac{x-4}{1} = \frac{y}{m} = \frac{z+3}{n}$ yaxud da $y=m(x-4)$, $z=n(x-4)-3$ şəklində olar, burada

$m = \frac{a_2}{a_1}$, $n = \frac{a_3}{a_1}$. Axırıncı iki tənlikdən və konusun yönəldicisinin tənliyindən alarıq:

$$18m^2 + 50n^2 + 75n = 0.$$

Doğuranın tənliklərindən m və n üçün tapdığımız $m = \frac{y}{x-4}$, $n = \frac{z+3}{x-4}$ qiymətlərini axırıncı bərabərlikdə yerinə yazsaq, taparıq:

$$18\left[\frac{y}{x-4}\right]^2 + 50\left[\frac{z+3}{x-4}\right]^2 + 75\left[\frac{z+3}{x-4}\right] = 0$$

$$18y^2 + 50z^2 + 75xz + 225x - 450 = 0$$

Məsələ 3. Yönəldicisi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$ çevrəsi olan və doğuranının istiqaməti

$a_1 : a_2 : a_3 = 5 : 3 : 2$ nisbəti ilə verilmiş silindrin tənliyini yazın.

Həlli:

Silindrin doğuranının tənliyini $\frac{x-x_0}{5} = \frac{y-y_0}{3} = \frac{z}{2}$ şəklində yazmaq olar. Bu tənlikdən və silindrin yönəldicisinin tənliyindən istifadə edib x, y, z dəyişənlərini islah etsək alarıq: $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

Doğuranın tənliklərinə əsasən $x_0 = x - \frac{5}{2}z$, $y_0 = y - \frac{3}{2}z$ olar. Bunları x_0 və y_0 -dan asılı axırıncı tənlikdə yerlərinə yazsaq, alarıq:

$$\left[x - \frac{5}{2}z\right]^2 + \left[y - \frac{3}{2}z\right]^2 = 25$$

$$4x^2 + 4y^2 + 34z^2 - 20xz - 12yz - 100 = 0$$

ÇALIŞMALAR.

1. $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(0;5;0)$, $C(0;0;3)$ tetraedrinin xaricinə çəkilmiş kürə səthinin tənliyini təyin edin.

2. Aşağıdakı kürə səthlərindən hər birinin mərkəzinin koordinatlarını və radiusunu tapın:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 2z + 10 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10 = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 2z + 41 = 0$

e) $36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 36x + 24y - 72z - 95 = 0$

3. $(x-4)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 225$ kürə səthinə toxunan və $10x - 11y - 2z + 3 = 0$ müstəvisinə paralel olan müstəvinin tənliyini yazın.

4. Konusun $S(-3;0;0)$ təpəsi və yönəldicisinin $\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 - z = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ tənliyi verilmişdir. Onun tənliyini yazın.

5. $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ düz xəttinin (ox) oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin tənliyini təyin edin.

6. Təpəsi $S(1;2;4)$ nöqtəsində yerləşən və doğuranları $2x + 2y + z = 0$ müstəvisi ilə 45° bucaq əmələ gətirən konusun tənliyini yazın.

7. Təpəsi $S(1;2;3)$ nöqtəsində yerləşən, oxu $2x + 2y - z + 1 = 0$ müstəvisinə perpendikulyar olan doğuranları onun oxu ilə 30° bucaq əmələ gətirən konusun tənliyini təyin edin.

8. Oxu $x=7+3t$, $y=1+4t$, $z=3+2t$ parametrik tənliklər ilə verilmiş və $M_0(2;-1;0)$ nöqtəsindən keçən dairəvi silindrin tənliyini tapın.

9. Fırlanma oxu (oz) oxu ilə üst-üstə düşən və radiusu $r=5$ olan fırlanmadan alınan silindrin tənliyini təyin edin.

10. $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, $x=0$ ellipsinin (oz) oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin tənliyini yazın.

11. $x-2=0$ müstəvisi ilə $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$ ellipsoidinin kəsişmə xəttinin yarımoxlarını və təpələrini təyin edin.

12. Simmetriya oxları koordinat oxları ilə üst-üstə düşən, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z=0$ ellipsindən və $M(1;2;\sqrt{23})$ nöqtəsindən keçən ellipsoidinin tənliyini yazın.

13. Oxları koordinat oxları ilə üst-üstə düşən və a) (oxy) koordinat müstəvisini $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$ ellipsi üzrə kəsən və $M(2;0;1)$ nöqtəsindən keçən; b) (oyz) koordinat müstəvisini $\frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{20} = 1$ ellipsi üzrə kəsən və $M_2(1;\sqrt{3};\sqrt{3})$ nöqtəsindən keçən ellipsoidin tənliyini təyin edin.

14. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ ellipsoidinin (oxz) müstəvisi və ona paralel olub, ondan iki vahid məsafədə olan müstəvi ilə kəsiklərinin nisbətini yazın.

15. m-in hansı qiymətində $x-2y-2z+m=0$ müstəvisi $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ ellipsoidinə toxunur?.

16. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1$ biroyuqu hiperboloidin yarımxlarını və təpələrini təyin edin.

17. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = -1$ ikioyuqlu hiperboloidinin yarımxlarını və təpələrini təyin edin.

18. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{9} = -1$ səthinin $M_0\left[4; -\frac{8}{9}; \frac{8}{3}\right]$ nöqtəsindən keçən diametrinin uzunluğunu təyin edin.

19. Aşağıdakı düz xətlərin hər birindən $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ səthinə toxunan müstəvi keçirin:

a) $\frac{x}{3} = \frac{y+9}{3} = \frac{z}{1}$; b) $\frac{x-9}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$; c) $\frac{x}{6} - \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{4}$.

20. $M_0(0;0;-1)$ nöqtəsindən keçən və (oxy) müstəvisinə paralel olan müstəvi ilə $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{1} = 1$ biroyuqlu hiperboloidinin kəsiyini təyin edin.

21. $M_1(3;1;2)$, $M_2(2;\sqrt{11};3)$ və $M_3(6;2;\sqrt{15})$ nöqtələrindən ikioyuqlu hiperboloidin kanonik tənliyini təyin edin.

22. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ hiperbolik paraboloidin $y+6=0$ müstəvisi ilə kəsiyinin parametrini və təpəsini təyin edin.

23. $\vec{n} = (2;-1;-2)$ vektoruna perpendikulyar olan, $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 2z$ elliptik parabolidə toxunan müstəvinin tənliyini yazın.

24. $4x^2 - z^2 = y$ hiperbolik paraboloidin üzərində yerləşən $M(1;3;-1)$ nöqtəsi verilmişdir. Onun M nöqtəsindən keçən düzxətli doğuranının tənliyini yazın.

25. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 2z$ hiperbolik paraboloidinin $6x+4y-8z+1=0$ müstəvisinə paralel düzxətli doğrunlarının tənliyini yazın.

26. $Ax+By+Cz+D=0$ müstəvisinin $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ paraboloidinə toxunması üçün zəruri və kafi şərti təyin edin.

27. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$ hiperbolik paraboloidin üzərində yerləşən və $3x+2y-4z=0$ müstəvisinə paralel olan düzxətli doğuranların tənliyini yazın.

III HİSSƏ.

n-ÖLÇÜLÜ FƏZALARDA ANALİTİK HƏNDƏSƏ

X FƏSİL

n-ÖLÇÜLÜ AFİN VƏ EVKLİD FƏZALARI.

§ 59. n-ölçülü afin fəzası.

1. Tutaq ki, «nöqtələr», «vektorlar» və «ədədlər» adlanan üç növ obyektlər çoxluğu verilmişdir. Bu obyektlərə əsas (ilkin) obyektlər deyilir. Məlumdur ki, həqiqi ədədlər çoxluğu həqiqi ədədlərin aksiomlarını ödəyir. Sonra, tutaq ki, ədədlər ilə vektorlar arasında aşağıdakı əsas münasibətlər təyin olunmuşdur:

- a) İstənilən iki vektora, bu vektorların cəmi adlanan üçüncü bir vektor uyğun qoyulmuşdur;
- b) Hər bir vektor və hər bir ədədə, «vektorun ədədə vurulması» və ya «ədədin vektora vurulması» adlanan vektor uyğun qoyulmuşdur.

Bu iki əsas münasibətə «insidentlik» (üzərində olma) münasibətini də daxil etsək, üç əsas münasibət alırıq.

Əsas münasibətlərlə əsas obyektlərə birlikdə **əsas anlayışlar** deyilir.

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının cəmini $\vec{a} + \vec{b}$ ilə, $\vec{a}$ vektorunun λ ədədinə hasilini isə $\vec{a}\lambda$ və ya $\lambda\vec{a}$ ilə işarə edəcəyik.

Vektorların toplanması, vektorun ədədə vurulması və insidentlik münasibətləri aşağıdakı aksionlar vasitəsilə təyin olunur:

I. Toplama aksiomları

1,1. İxtiyari iki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

1,2. İxtiyari üç $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üçün

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

1,3. Elə $\vec{0}$ vektoru vardır ki, ixtiyari $\vec{a}$ vektoru üçün

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

$\vec{0}$ -a sıfır vektor deyilir.

1,4. İxtiyari $\vec{a}$ vektoru üçün elə $\vec{a}$ vektoru vardır ki,

$$\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}.$$

$\vec{a}$ vektoruna $\vec{a}$ vektorunun əks vektoru deyilir və $-\vec{a}$ ilə işarə olunur.

1,1-1,4 aksiomları göstərir ki, vektorlar çoxluğu toplama əməlinə görə kommutativ qrup əmələ gətirir.

II. Vektorun ədədə vurulması aksiomları.

II,1. İxtiyari $\vec{a}$ vektoru üçün $1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$.

II,2. İxtiyari $\vec{a}$ vektoru və ixtiyari k, l həqiqi ədədləri üçün

$$k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}.$$

II,3.İhtiyari $\vec{a}$ vektoru və ihtiyari k, l həqiqi ədədləri üçün

$$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}.$$

II,4.İhtiyari $\vec{a}, \vec{b}$ vektorları və ihtiyari k ədədi üçün

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

Yuxarıda göstərdiyimiz I,I-4, II,I-4 aksiomlarını ödəyən bütün vektorlar çoxluğuna **xətti vektorlar fəzası** deyilir.

Qeyd etdiyimiz aksiomlardan bir sıra nəticələr alınır. Onlardan əsaslarını göstərək.

1)I,3 və I,4 aksiomlarından çıxır ki, göstərdiyimiz $\vec{0}$ və $-\vec{a}$ vektorları yeganədir.

2)İhtiyari $\vec{a}$ vektoru və ihtiyari λ ədədi üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

a) $-(-\vec{a}) = \vec{a}$; b) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; v) $-\vec{a} = 1(\vec{a})$; q) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$; d) $\lambda \vec{a} = \vec{0}$ isə, onda $\lambda = 0$, ya da $\vec{a} = \vec{0}$ olmalıdır.

3)İhtiyari iki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün yeganə $\vec{x}$ vektoru vardır ki, $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ olur.

Bu şərti ödəyən $\vec{x}$ vektoruna $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının fərqi deyilir və $\vec{b} - \vec{a}$ ilə işarə olunur.

Asanlıqla göstərmək olar ki, $\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$.

Xətti vektorlar fəzasında vektorların xətti asılılığı anlayışını verək.

Tərif. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorları üçün heç olmasa bir sıfırdan fərqli olan elə $k_1, k_2, \dots, k_n$ ədədləri varsa ki, $k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \dots + k_n \vec{a}_n = \vec{0}$ şərti ödənilsin, onda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sisteminə **xətti asılı vektorlar sistemi** deyilir.

Bu şərt ödənilmədikdə. Başqa sözlə bu münasibət k -ların yalnız sıfır qiymətində ödənildikdə bu vektorlar sisteminə **xətti asılı olmayan vektorlar sistemi** deyilir.

Xətti asılı vektorların aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

1)Sıfır vektorun daxil olduğu ihtiyari vektorlar sistemi xətti asılıdır.

2) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ sisteminin hər hansı alt sistemi xətti asılıdırsa, onda bütün vektorlar sistemi xətti asılı olar.

3)Vektorlar sisteminin xətti asılı olması üçün zəruri və kafi şərt, verilmiş sistemin vektorlarından birinin qalan vektorların xətti kombinasiyasından ibarət olmasıdır.

III.Ölçü aksiomları.

III,1.Xətti asılı olmayan n sayda vektor vardır.

III,2.İhtiyari $n+1$ sayda vektor xətti asılıdır.

I,1-4, II,1-4, III,1-2 aksiomlarını ödəyən vektorlar çoxluğuna **n -ölçülü xətti vektorlar fəzası** deyilir və V_n ilə işarə olunur. n ədədi bu **fəzanın ölçüsü** adlanır.

n sayda xətti asılı olmayan nizamla götürülmüş vektorların hər bir sisteminə V_n fəzasının **bazisi** deyilir.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorları V_n fəzasının bazisidirsə, onda bu fəzanın hər bir $\vec{p}$ vektoru III,2 aksiomuna görə birqiymətli olaraq

$$\vec{p} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \quad (1)$$

şəklində təyin olunur. bu ifadəyə $\vec{p}$ vektorunun $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorları üzrə ayrılışı deyilir.

V_n xətti vektorlar fəzasının W altfəzası, V_n fəzasının elə vektorları çoxluğuna, deyilir ki, bu çoxluq vektorların toplanması və vektorun ədədə vurulması əməllərinə görə xətti vektorlar fəzası əmələ gətirsin.

İndi də «insidentlik» münasibətini təyin edən aksiomları verək.

IV,1. Heç olmazsa bir nöqtə vardır.

IV,2. İki A və B nöqtəsi müəyyən ardıcılıqla verilmişsə, onda yalnız bir $\vec{a}$ vektoru vardır ki, A, B nöqtələri $\vec{a}$ vektoruna insidentdir (uyğundur).

A, B nöqtələrinə insident olan $\vec{a}$ vektoru $\vec{AB}$ kimi işarə olunur.

IV,3. İxtiyari A nöqtəsi və ixtiyari $\vec{a}$ vektoru verilmişsə, onda $\vec{AB} = \vec{a}$ şərtini ödəyən yalnız və yalnız bir B nöqtəsi vardır.

IV,4. A, B, C nöqtələri necə olarsa, olsun $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ münasibəti doğrudur.

Bu aksiom «üçbucaq aksiomu» adlanır.

I,1-4, II,1-4, III,1-2, IV,1-4 aksiomlarını ödəyən vektorlar və nöqtələr çoxluğuna n -ölçülü **afin fəzası** deyilir və ++++ ilə işarə edilir.

Yuxarıda göstərdiyimiz aksiomlardan çıxan bir sıra nəticələri qeyd edək.

1. n -ölçülü afin fəzasında sonsuz sayda nöqtə vardır.

2. A və B nöqtələri üst-üstə düşürsə $\vec{AB} = \vec{0}$, A nöqtəsi B ilə üst-üstə düşmürsə, $\vec{AB} \neq \vec{0}$ olar.

3. A, B, C, D nöqtələri $\vec{AB} = \vec{CD}$ şərtini ödəyən ixtiyari dörd nöqtədirsə, onda $\vec{BD} = \vec{AC}$ olar.

4. A və B nöqtələr cütü $\vec{a}$ vektorunu təyin edirsə onda B və A nöqtələr cütü $(-\vec{a})$ vektorunu təyin edir.

Bu nəticələrin hamısı IV qrup aksiomlardan alınır. Məsələn, IV,4 aksiomunu tətbiq edərək, 3-cü nəticəni isbat edək.

B, C, D nöqtələr üçlüyünə IV,4 aksiomunu tətbiq etsək, $\vec{BC} + \vec{CD} = \vec{BD}$ və ya $\vec{CD} + \vec{BC} = \vec{BD}$ olar. $\vec{AB} = \vec{CD}$ olduğundan, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{BD}$, digər tərəfdən $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ olduğu üçün $\vec{AC} = \vec{BD}$ olur.

n -ölçülü afin fəzası üçün göstərdiyimiz dörd qrup aksiomlara afin fəzasının **Veyl aksiomlar sistemi** deyilir.

2. n -ölçülü afin fəzada koordinat sistemi. n -ölçülü A_n afin fəzasında ixtiyari O nöqtəsi qeyd edib onu koordinat başlanğıcı adlandıraraq. A -fəzanın ixtiyari nöqtəsidirsə, onda IV,2 aksiomuna görə, A nöqtəsinin radius-vektoru adlanan $\vec{OA}$ vektoru birqiymətli təyin olunur. Tərsinə, $\vec{a}$ -ixtiyari vektorsa, onda IV,3 aksiomuna görə $\vec{OA} = \vec{a}$ şərtini ödəyən yalnız və yalnız bir A nöqtəsi vardır. Beləliklə, nöqtələrlə vektorlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq təyin olunur. Aydındır ki, O nöqtəsinə $\vec{0}$ vektoru uyğundur.

Fəzada O nöqtəsi və $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisini qeyd etsək, onda (1) münasibətinə görə hər bir vektora, müəyyən ardıcılıqla götürülmüş n sayda ədəd uyğun olar və tərsinə.

O nöqtəsi və $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazis vektorları çoxluğuna A_n fəzasında koordinat sistemi deyilir və $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ilə və ya qısa olaraq $\{O, \vec{e}_1\}$ ilə işarə olunur. O nöqtəsinə koordinat başlanğıcı, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ vektorlarına isə koordinat vektorları deyilir.

Hər hansı $\vec{a}$ vektorunun $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazis vektorlarına nəzərən ayrılışı

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

olarsa, onda götürdüyümüz koordinat sistemində həmin ayrılışdakı $x_1, x_2, \dots, x_n$ əmsallarına $\vec{a}$ vektorunun koordinatları deyilir. M nöqtəsinin OM radius vektorunun $\{\vec{e}_1\}$ bazisinə nəzərən ayrılış əmsallarına isə başqa sözlə

$$\vec{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

Ifadəsindəki $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ədədlərinə M nöqtəsinin $\{O, \vec{e}_1\}$ koordinat sistemində nəzərən koordinatları deyilir və $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kimi işarə olunur.

Bu tərifi görə O koordinat başlanğıcının koordinatları $(0, 0, \dots, 0)$.

$$\vec{OE}_1 = \vec{e}_1, \vec{OE}_2 = \vec{e}_2, \dots, \vec{OE}_n = \vec{e}_n$$

şərtlərini ödəyən $E_1, E_2, \dots, E_n$ nöqtələrinin koordinatları isə uyğun olaraq $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, \dots, 1)$ olar.

Tutaq ki, A_n fəzasında iki koordinat sistemi verilmişdir:

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \text{ və } \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

O nöqtəsi və $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ vektorlarının $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ koordinat sistemində nəzərən koordinatları

uyğun olaraq $O(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, $\vec{e}_1 = \vec{e}_{11}, c_{21}, \dots, c_{n1}$, $\dots$, $\vec{e}_n = \vec{e}_{1n}, c_{2n}, \dots, c_{nn}$ olsun. Onda

$$\vec{e}_1 = c_{11} \vec{e}_1 + c_{21} \vec{e}_2 + \dots + c_{n1} \vec{e}_n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\vec{e}_n = c_{1n} \vec{e}_1 + c_{2n} \vec{e}_2 + \dots + c_{nn} \vec{e}_n$$

olar. Sonra, fərz edək ki, M nöqtəsinin $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ koordinat sistemində koordinatları

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ sistemində isə $\vec{x}_1, x_2, \dots, x_n$ -dir. IV,4 aksiomundan çıxır ki,

$$\vec{OM} = \vec{OO} + \vec{OM} \tag{1}$$

Aydındır ki,

$$\vec{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n,$$

$$\vec{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n = (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n)\vec{e}_1 + (c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n)\vec{e}_2 + \dots +$$

$$+ (c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n)\vec{e}_n$$

$$\vec{OO} = -(x_1^0 \vec{e}_1 + x_2^0 \vec{e}_2 + \dots + x_n^0 \vec{e}_n).$$

Bu qiymətləri (1) bərabərliyində yerlərinə yazsaq, onda alırıq:

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ vektorları xətti asılı olmadığından, bu axırındı bərabərlik yalnız və yalnız onda doğru olar ki, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ vektorlarının uyğun əmsalları bərabər olsun:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + x_1^0 \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + x_n^0 \end{cases}$$

§ 60. A_n fəzasında k -ölçülü müstəvilər və onların qarşılıqlı vəziyyəti.

$$\vec{M}_0\vec{M}_1,\vec{M}_0\vec{M}_2,...,\vec{M}_0\vec{M}_m \quad (1)$$
$$\vec{M}_1\vec{M}_0, \vec{M}_i\vec{M}_i \vec{M}_i\vec{M}_i, \vec{M}_i\vec{M} \vec{M}_i\vec{M}_m \quad (2)$$
$$\vec{M}_0 \vec{M}_1 = \vec{M}_0 \vec{M}_i + \vec{M}_i \vec{M}_1 = (-1) \vec{M}_i \vec{M}_0 + \vec{M}_i \vec{M}_1,$$

$$\vec{M}_0 \vec{M}_2 = \vec{M}_0 \vec{M}_i + \vec{M}_i \vec{M}_2 = \vec{M}_i \vec{M}_2 + (-1) \vec{M}_i \vec{M}_0,$$

$$\vec{M}_0 M_i = (-1) M_i \vec{M}_0,$$

$$\overrightarrow{M_0} M_m = \overrightarrow{M_0} M_i + \overrightarrow{M_i} M_m = \overrightarrow{M_i} M_m + (-1) \overrightarrow{M_i} M_0.$$

(1)vektorlar sistemi xətti asılı deyilsə, onda $M_0, M_1, M_2, \dots, M_m$ nöqtələr sisteminə **xətti asılı olmayan** və ya sadəcə asılı olmayan nöqtələr, əks halda isə **xətti asılı nöqtələr sistemi** deyilir.

Tutaq ki, A-fəzanın hər hansı nöqtəsi, W_k isə k -ölçülü alt vektorlar fəzasıdır.

$k = l$ olduqda π_i -ə düz xətt, $k = n \cdot l$ olduqda isə hipermüstəvi deyilir. Hər bir nöqtəyə sıfır ölçülü müstəvi kimi baxacağıq.

k-ölçülü müstəvinini təyin edən nöqtələr çoxluğuna və W_k fəzasının vektorlarına onun **nöqtələri** və **vektorları** deyilir. A nöqtəsi başlanğıc nöqtə adlanır. tərifi-dən çıxır ki, başlanğıc nöqtə müstəviyə daxildir, çünki $\vec{AA} = \vec{0} \subset W_k$.

Asanlıqla görmək olar ki, π_k müstəvisində sonsuz sayda nöqtə var və bu nöqtələr arasında heç olmazsa bir dənə xətti asılı olmayan $(k+1)$ nöqtələr sistemi vardır.

Göstərmək olar ki, k-ölçülü müstəvinin tərifi-də başlanğıc nöqtənin seçilməsi vacib deyil, π_k müstəvisinin ixtiyari nöqtəsini başlanğıc nöqtə qəbul etmək olar.

k-ölçülü müstəvinin verilməsi üçün onun hər hansı A nöqtəsinin və W_k altfəzasının verilməsi lazımdır. W_k altfəzası, ona daxil olan k sayda xətti asılı olmayan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ vektorları ilə birqiymətli təyin olunduğundan, k-ölçülü müstəvi, bu müstəvinin hər hansı A nöqtəsinin və k sayda xətti asılı olmayan vektorların verilməsi ilə birqiymətli təyin olunur və tərsinə, A nöqtəsi və k sayda xətti asılı olmayan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ vektorları necə olursa olsun, A nöqtəsinin və $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ vektorlarının daxil olduqları yalnız və yalnız bir k-ölçülü müstəvi vardır. Buradan alınır ki, k+1 sayda xətti asılı olmayan $M_0, M_1, \dots, M_k$ nöqtələri necə olurlarsa olsunlar bu nöqtələrin daxil olduqları yalnız və yalnız bir π_k müstəvisi vardır.

Yuxarıda göstərdik ki, π_k müstəvisi, bu müstəviyə daxil olan A nöqtəsinin və k sayda xətti asılı olmayan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ vektorlarının verilməsi ilə birqiymətli təyin olunur. Fəzada koordinat sistemi götürüb, A nöqtəsi və $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ vektorlarının koordinatlarını aşağıdakı kimi (nöqtənin və vektorun sırasını yuxarıdakı, onların koordinatlarının sırasını isə aşağıdakı indekslə işarə edək) işarə edək:

$$A(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \quad \vec{a}_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}\}, \\ \vec{a}_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_n^{(2)}\}, \dots, \vec{a}_k = \{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}\}.$$

$M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -fəzanın ixtiyari nöqtəsi olsun. Bu nöqtə yalnız və yalnız o zaman π_k müstəvisinə daxil olar ki, $\vec{AM}$ vektoru həmin müstəvinin W_k altfəzasına daxil olsun, yəni

$$\vec{AM} = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 + \dots + t_k \vec{a}_k,$$

burada $t_1, t_2, \dots, t_k$ həqiqi qiymətlər alan parametrlərdir.

Bu şərti koordinatlarla yazaq. $\vec{AM}$ vektorunun koordinatlarını nəzərə alsaq,

$$\{x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots, x_n - x_n^0\} \\ = \{t_1 a_1^{(1)} + t_2 a_1^{(2)} + \dots + t_k a_1^{(k)}, t_1 a_2^{(1)} + t_2 a_2^{(2)} + \dots + t_k a_2^{(k)}, \dots, t_1 a_n^{(1)} + t_2 a_n^{(2)} + \dots + t_k a_n^{(k)}\}.$$

və ya

$$x_i = x_i^0 + t_1 a_i^{(1)} + t_2 a_i^{(2)} + \dots + t_k a_i^{(k)}, \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

Bu tənliklərə k-müstəvinin **parametrik tənlikləri** deyilir. Bunların mənası aşağıdakından ibarətdir. $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nöqtəsi müstəviyə daxildirsə, həmişə elə $t_1, t_2, \dots, t_k$ parametrləri tapmaq olar ki, onları (3) tənliklərində yazdıqda M nöqtəsinin koordinatları alınır. Tərsinə, $t_1, t_2, \dots, t_k$ parametrləri necə olursa olsun, onları (3) tənliklərində yazdıqda müstəvinin hər hansı bir nöqtəsinin koordinatlarını alırıq.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ vektorları xətti asılı olmadığından, (3) tənliklərində $t_1, t_2, \dots, t_k$ parametrlərinin əmsallarından düzəldilmiş matrisin ranqı k-ya bərabər olar. Fərz edək ki, birinci k sayda bərabərliyin əmsallarından düzəldilmiş determinant sıfırdan fərqlidir.

(A, W_k) müstəvisi yuxarıda göstərdiyimizə görə həm π_k müstəvisinə, həm də π_m müstəvisinə daxildir. Tərsinə, π_k və π_m müstəvilərinin hər bir ortaq nöqtəsi və hər bir ortaq vektoru, aydındır ki, (A, W_k) müstəvisinə daxildir. Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq.

Teorem. π_k və π_m müstəvilərinin heç olmazsa bir ortaq nöqtəsi varsa, onda həmin müstəvilər, A nöqtəsi və W_s altfəzası ilə təyin olunan π_s ortaq müstəviyə malik olar, burada

$$W_s = W_k \cap W_m$$

Tutaq ki, π_k və π_m -iki müstəvi ($m \geq k$) və W_s isə onların W_k və W_m altfəzalarına daxil olan ən böyük ölçülü vektorlar altfəzasıdır. W_s altfəzasına π_k və π_m müstəvilərinin **paralellik** fəzası, bu fəzanın s ölçüsünə isə həmin müstəvilərin **paralellik indeksi** deyilir. $J = \frac{s}{k}$ ədədinə verilmiş

müstəvilərin **paralellik dərəcəsi** deyilir. Aydındır ki, $J = \frac{s}{k} \leq 1$. Müstəvilər heç bir ortaq nöqtəyə malik deyilsə və $s=k$ isə, yəni $J=1$ isə müstəvilərə **tamamilə paralel müstəvilər**, müstəvilərin heç bir ortaq nöqtəsi olmayıb və $J=0$ olarsa, onda onlara **çarpaz müstəvilər** deyilir.

π_k və π_m ($k \leq m$) müstəvilərinin qarşılıqlı vəziyyəti üçün aşağıdakı hallar mümkündür.

1. π_k və π_m müstəviləri yeganə A ortaq nöqtəyə malikdir ($J=0$).
2. π_k və π_m müstəviləri hər hansı π_s müstəvisi üzrə kəşşirlər, burada $k > s > 0$ ($0 < J < 1$).
3. π_k müstəvisi π_m müstəvisinə daxildir ($J=1$).
4. π_k və π_m müstəviləri qismən paraleldir, yəni ortaq nöqtələri yoxdur və $0 < J < 1$.
5. π_k və π_m müstəviləri tamamilə paraleldir, yəni ortaq nöqtələri yoxdur və $J=1$.
6. π_k və π_m çarpazdırlar, yəni ortaq nöqtələri yoxdur və $J=0$.

Qeyd edək ki, A_j fəzasında verilmiş iki müstəvi üçün 6 halının hamısı ola bilməz. Məsələn. π_1 düz xətti və π_2 ikiölçülü müstəvi üçün 1,3,5 halları iki π_1 və π_1 düz xətləri üçün 1,3,5,6, halları; π_2 və π_2 müstəviləri üçün 2,3,5, halları mümkündür.

İndi ümumi tənliyi ilə verilmiş iki müstəvinin kəsişmə kriteriyasını verək. Tutaq ki, $\{0, \bar{e}_1\}$

sistemində π_{n-k} və π_{n-c} müstəviləri ümumi tənlikləri ilə verilmişdir:

$$(\pi_{n-k}) \begin{cases} a_1 x_i + a_{10} = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{20} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{ki} x_i + a_{k0} = 0; \end{cases} \quad (\pi_{n-c}) \begin{cases} b_{1i} x_i + b_{10} = 0, \\ b_{2i} x_i + b_{20} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ b_{ei} x_i + b_{e0} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

(1)sistemlərindən düzəldilmiş bütün $k+1$ tənliklərinin $\sum$ sisteminə baxaq. π_{n-k} və π_{n-c} müstəviləri yalnız və yalnız o zaman kəsişər ki, $\sum$ sistemi uyğun olsun, yəni $r=k$ olsun, burada r və k həmin sistemin əsas və genişlənmiş matrisinin ranqlarıdır.

§ 61. n-ölçülü evklid fəzası.

1.n-ölçülü evklid fəzasını təyin etmək üçün, n-ölçülü afin fəzasının əsas münasibətlərinə daha bir münasibət daxil edək. Bu münasibətə «iki vektorun skalyar hasili» deyilir.

Fəzanın hər bir vektorlar cütünə bu vektorların **skalyar hasili** adlanan hər hansı α ədədi qarşı qoyulur.

Skalyar hasil belə işarə olunur: $\alpha = \vec{a} \cdot \vec{b}$ və ya $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$. Skalyar hasil aşağıdakı V qrup aksiomlar vasitəsilə təyin olunur:

V,1.İxtiyari iki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektoru üçün $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ bərabərliyi doğrudur.

V,2.İxtiyari üç $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektoru üçün $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ bərabərliyi doğrudur.

V.3.İxtiyari $\vec{a}, \vec{b}$ vektorları və həqiqi k ədədi üçün $(k \vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ bərabərliyi doğrudur.

V,4. $\vec{a} \neq \vec{0}$ isə, onda $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$.

Beləliklə, I,1-4, II,1-4, II,1-2,IV,1-4, V,1-4 aksiomlarını ödəyən bütün nöqtələr və bütün vektorlar çoxluğuna **n-ölçülü evklid fəzası** deyilir və E_n ilə işarə olunur.

V qrup aksiomlarından çıxan bir sıra sadə nəticələri göstərək.

V,2 aksiomunun tələbini asanlıqla sonlu sayda toplananlar üçün genişləndirmək olar, yəni ixtiyari $\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ vektorları üçün $\vec{a} \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \dots + \vec{b}_n) = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \vec{a} \cdot \vec{b}_2 + \dots + \vec{a} \cdot \vec{b}_n$.

Doğrudan da, $\vec{c} = \vec{b}_2 + \vec{b}_3 + \dots + \vec{b}_n$ olsun, onda

$\vec{a} \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \dots + \vec{b}_n) = \vec{a} \cdot (\vec{b}_1 + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \vec{a} \cdot (\vec{b}_2 + \dots + \vec{b}_n)$ olar $\vec{d} = (\vec{b}_3 + \dots + \vec{b}_n)$ işarə etsək onda

$\vec{a} \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \dots + \vec{b}_n) = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \vec{a} \cdot (\vec{b}_2 + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \vec{a} \cdot \vec{b}_2 + \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \vec{a} \cdot \vec{b}_2 + \vec{a} \cdot (\vec{b}_3 + \dots + \vec{b}_n)$

alırıq. Əməliyyatı bu qayda ilə davam etdirsək, nəticədə

$$\vec{a} \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \dots + \vec{b}_n) = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \vec{a} \cdot \vec{b}_2 + \dots + \vec{a} \cdot \vec{b}_n$$

olduğunu alırıq.

Sonra, V,3 aksiomundan ixtiyari $\vec{a}$ vektoru üçün alırıq:

$\vec{0} \cdot \vec{a} = (\vec{0} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0(\vec{b} \cdot \vec{a}) = 0$. Ona görə $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$.

V,4 aksiomundan çıxır ki, $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ belə ki, yalnız və yalnız onda $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ olar ki, $\vec{a} = \vec{0}$ olsun.

Buradan alırıq ki, $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ ədədi həmişə həqiqidir. Bu ədədə $\vec{a}$ vektorunun **modulu** deyilir və $|\vec{a}|$ ilə

işarə olunur: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$. Buradan $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ olduğu alınır, onu $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ ilə işarə edib, vektorunun

skalyar kvadratı adlandırırlar. $\vec{a} \neq \vec{0}$ isə, onda $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$ olur, ona görə $|\vec{a}| \neq 0$.

$|\vec{a}_0| = 1$ olarsa, $\vec{a}_0$ vektoruna **vahid vektor** deyilir. Aydınır ki, $\vec{a}_0$ vahid vektoru üçün $\vec{a}_n = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

və ya $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}_0$ yazmaq olar. $\vec{a} = \vec{0}$ isə, $|\vec{a}| = 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ isə, onda $|\vec{a}| \neq 0$ olar. $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ isə, onda

$$|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|.$$

İndi ortoqonallıq və ortonormallaşdırılmış koordinat sistemi haqqında anlayış verək.

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasili sıfır bərabər olarsa, onda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarına **ortoqonal (perpendikulyar) vektorlar** deyilir. Bu tərifdən çıxır ki, sıfır vektor fəzanın ixtiyari vektoru ilə ortoqonaldır.

Sıfır olmayan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sisteminin ixtiyari iki vektoru ortoqonalsa, onda bu vektorlar sisteminə **ortoqonal sistem** deyilir. bazisin ixtiyari iki vektoru ortoqonalsa, onda ona **ortoqonal bazis** deyilir.

Ortoqonal vektorlar sisteminin bəzi xassələrini qeyd edək:

1. Ortoqonal vektorlar sistemi xətti asılı deyildir.
2. E_n fəzasında ortoqonal vektorlar sistemi n sayda vektordan çox olmaz.
3. İxtiyari W_k vektorlar fəzasında ortoqonal bazis vardır, burada $1 < k \leq n$.
4. E_n evklid fəzasında heç olmasa bir dənə ortoqonal bazis vardır.

Bütün vektorları vahid vektorlar olan ortoqonal bazisə **ortonormal** bazis deyilir. Ortonormal bazisi $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ ilə işarə edəcəyik. 3 və 4 xassələrindən istifadə edərək, göstərmək olar ki, E_n fəzasında həmişə ortonormal bazis vardır.

Doğrudan da, 3 xassəsinə görə E_n -də ortoqonal $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisi vardır. Bazisin hər bir vektoru sıfırdan fərqli vektor olduğundan,

$$\vec{g}_1 = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}, \quad \vec{g}_2 = \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}, \dots, \vec{g}_n = \frac{\vec{e}_n}{|\vec{e}_n|}$$

vektorları vardır ki, ortonormal bazis əmələ gətirirlər.

Ortonormal bazisi əmələ gətirdiyi koordinat sistemi **ortonormal koordinat sistemi** adlanır.

2. İki vektor arasındakı bucaq. Sıfır olmayan iki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorunun əmələ gətirdiyi bucağın qiyməti

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad \text{və} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad (1)$$

şərtlərini ödəyən φ həqiqi ədədinə deyilir.

Bundan sonra $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucağın qiymətini sadəcə olaraq, onlar arasındakı bucaq adlandırılıb (++++) kimi işarə edəcəyik.

İsbat edək ki, sıfır olmayan ixtiyari iki vektor arasında həmişə bucaq vardır. Bunun üçün aşağıdakı teoremi isbat etmək lazımdır.

Teorem. E_n evklid fəzasında sıfır olmayan $\vec{x}$ və $\vec{y}$ vektorları necə olursa-olsun

$$\frac{|\vec{x} \cdot \vec{y}|}{|\vec{x}| |\vec{y}|} \leq 1 \quad (2)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. Tutaq ki, $\vec{x} \neq \vec{0}$ və $\vec{y} \neq \vec{0}$ -ixtiyari iki vektordur. V,4 aksiomundan çıxan nəticəyə görə ixtiyari t üçün

$$(\vec{x} - t\vec{y}) \cdot (\vec{x} - t\vec{y}) \geq 0 \quad \text{və ya} \quad \vec{x} \cdot \vec{x} - 2t\vec{x} \cdot \vec{y} + t^2\vec{y} \cdot \vec{y} \geq 0$$

olar. t -yə nəzərən $t^2\vec{y} \cdot \vec{y} - 2t\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{x}$ kvadrat üçhədlisi yalnız mənfi olmayan qiymətlər aldığından, onun müxtəlif həqiqi kökləri ola bilməz; ona görə onun diskriminantı müsbət olmayan qiymətlər alır:

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 - (\vec{x} \cdot \vec{x})(\vec{y} \cdot \vec{y}) \leq 0$$

Buradan

$$(\bar{x} \cdot \bar{y})^2 \leq (\bar{x} \cdot \bar{x})(\bar{y} \cdot \bar{y})$$

$$\text{və ya } \frac{(\bar{x} \cdot \bar{y})^2}{(\bar{x} \cdot \bar{x})(\bar{y} \cdot \bar{y})} \leq 1 \text{ yaxud } \frac{\left| \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} \sqrt{\bar{y} \cdot \bar{y}}} \right|}{\left| \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} \sqrt{\bar{y} \cdot \bar{y}}} \right|} \leq 1. \text{ Qeyd edək ki, } \frac{(\bar{x} \cdot \bar{y})^2}{(\bar{x} \cdot \bar{x})(\bar{y} \cdot \bar{y})} \leq 1 \text{ bərabərsizliyinə } \mathbf{Ko\ddot{s}i-}$$

Bunyakovski bərabərsizliyi deyilir.

$$(1) \text{münasibətindən } \bar{a} \cdot \bar{b} = \left| \bar{a} \right| \left| \bar{b} \right| \cos \varphi \text{ olduğu alınır.}$$

İndi tutaq ki, $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n$ ortonormal bazisində

$$\bar{a} = \bar{a}_1, a_2, \dots, a_n, \quad \bar{b} = \bar{b}_1, b_2, \dots, b_n$$

vektorları verilmişdir. Asanlıqla göstərmək olar ki,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \quad (3)$$

olur.

Ortonormal bazisdə koordinatları ilə verilmiş iki $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorunun ortoqonal olması üçün onların eyni adlı koordinatlarının hasilləri cəminin sıfıra bərabər olması həm zəruri və həm də kafidir:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 0.$$

(3)bərabərliyində $\bar{a} = \bar{b}$ göstərsək, onda

$$\left| \bar{a} \right| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \quad (4)$$

olduğunu alırıq.

(3)və (4) bərabərliklərini nəzərə alsaq, onda ortonormal bazisdə koordinatları ilə verilmiş

$$\bar{a} = \bar{a}_1, a_2, \dots, a_n, \quad \bar{b} = \bar{b}_1, b_2, \dots, b_n$$

vektorları arasındakı bucaq

$$\cos(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}$$

düsturu ilə hesablanır.

3.İki nöqtə arasındakı məsafə. $\left| \bar{AB} \right|$ parçasının uzunluğu $\left[\vec{AB} \right]$ -na yəni $\sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$

ifadəsinə deyilir. $\left| \bar{AB} \right|$ parçasının uzunluğuna həmçinin A və B nöqtələri arasındakı məsafə də deyilir.

$\left| \bar{AB} \right|$ və $\left| \bar{CD} \right|$ parçalarının uzunluqları bərabərsə, onda onlara konqruent parçalar deyilir.

$\left| \bar{AB} \right|$ parçasının uzunluğunu $\left| \bar{CD} \right|$ parçasının uzunluğundan böyük (kiçik) olarsa. Onda

$\left| \bar{AB} \right|$ parçası $\left| \bar{CD} \right|$ parçasından böyük (kiçik) olar.

E_n evklid fəzasında ümumi koordinat sistemi ilə yanaşı düzbucaqlı dekart koordinat sistemindən də istifadə olunur. $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ bazisi ortonormal bazis olarsa, onda

$\{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ koordinat sisteminə düzbucaqlı dekart koordinat sistemi deyilir və $\{0, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\}$ ilə işarə olunur.

İndi fərz edək ki, $\{0, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemində iki nöqtə öz koordinatları ilə verilmişdir.

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ və } B(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Tərifə görə $\rho(A, B) = \left| \overrightarrow{AB} \right|$. Məlumdur ki,

$$\overrightarrow{AB} = \bar{A} - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n$$

Onda (4) bərabərliyinə görə

$$\rho(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

Bu fəslə aid aşağıdakı məsələlərə baxaq:

Məsələ 1: A_4 fəzasının ixtiyari bazisində $\bar{a}_1 = \bar{3}; 4; 1; 0$, $\bar{a}_2 = \bar{1}; 2; -3; 0$, $\bar{a}_3 = \bar{1}; 2; 3$, $\bar{a}_4 = \bar{2}; -6; 0; 2$ vektorları verilmişdir. $\bar{p} = 2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3 + 3\bar{a}_4$ vektorunun koordinatlarını tapın.

Həlli:

Vektorun koordinatlarının tərifinə əsasən yazı bilərik:

$$\bar{a}_1 = -3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3 + 0\bar{e}_4, \quad \bar{a}_2 = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3 + 0\bar{e}_4,$$

$$\bar{a}_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 + 3\bar{e}_4, \quad \bar{a}_4 = 2\bar{e}_1 - 6\bar{e}_2 + 0\bar{e}_3 + 2\bar{e}_4.$$

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ vektorlarının bu qiymətlərini $\bar{p}$ vektorunun ifadəsində yerinə yazsaq və vektorların koordinatlarının xassələrini nəzərə alsaq tapa bilərik:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= 2(-3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3 + 0\bar{e}_4) + (-\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3 + 0\bar{e}_4) - (\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 + 3\bar{e}_4) + \\ &+ 3(2\bar{e}_1 - 6\bar{e}_2 + 0\bar{e}_3 + 2\bar{e}_4) = (-6\bar{e}_1 + 8\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 + 0\bar{e}_4) - (\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3 + 0\bar{e}_4) - \\ &-(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 + 3\bar{e}_4) + (6\bar{e}_1 - 18\bar{e}_2 + 0\bar{e}_3 + 6\bar{e}_4) = (-6 - 1 - 1 + 6)\bar{e}_1 + (8 + 2 - 1 - 18)\bar{e}_2 + \\ &+ (2 - 3 - 2 + 0)\bar{e}_3 + (0 + 0 - 3 + 6)\bar{e}_4 = -2\bar{e}_1 - 9\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3 + 3\bar{e}_4 / \\ \bar{p} &= \bar{-2}; -9; -3; 3 \end{aligned}$$

Məsələ 2: A_4 fəzasında iki $A(2; 3; -1; 0)$ və $B(-1; 2; 1; 3)$ nöqtəsi verilmişdir. AB parçasını $\lambda = -2$ nisbətində bölən $M(x_1)$ nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

Həlli:

(3)düsturlarına əsasən tapa bilərik:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2 + (-2)(-1)}{1 - 2} = \frac{2 + 2}{-1} = -4; \quad x_2 = \frac{3 + (-2) \cdot 2}{1 - 2} = \frac{3 - 4}{-1} = 1; \\ x_3 &= \frac{-1 + (-2) \cdot 1}{1 - 2} = \frac{-1 - 2}{-1} = 3; \quad x_4 = \frac{0 + (-2) \cdot 3}{1 - 2} = \frac{-6}{-1} = 6. \end{aligned}$$

Deməli, $M(-4; 1; 3; 6)$.

ÇALIŞMALAR

1. A_4 afin fəzasında ixtiyari bazisdə $\bar{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektorları verilmişdir. Aşağıdakı vektorların koordinatlarını təyin edin:

a) $\bar{p}_1 = \bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + \bar{a}_4$; b) $\bar{p}_2 = \bar{a}_1 - \bar{a}_2 + 2\bar{a}_3 + \frac{1}{2}\bar{a}_4$; c) $\bar{p}_3 = \frac{1}{3}\bar{a}_1 + \frac{1}{2}\bar{a}_2 - \bar{a}_3 + \frac{1}{2}\bar{a}_4$.

2. A_5 fəzasında koordinatları ilə verilmiş aşağıdakı vektorlar sistemlərinin xətti asılı olub-olmadığını yoxlayın:

a) $\bar{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$;

b) $\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{b}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ \frac{5}{2} \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, $\bar{b}_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$;

c) $\bar{c}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}; -1; 1; \frac{2}{7} \right\}$, $\bar{c}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$, $\bar{c}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\bar{c}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$.

3. A_5 afin fəzasında vektorlar koordinatları ilə verilmişdir. Aşağıdakı hallardan hər birində xətti asılı olmayan vektorların sayını müəyyən edin:

a) $\bar{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_6 = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix}$;

b) $\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$, $\bar{b}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; -\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2} \right\}$, $\bar{b}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\bar{b}_5 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$;

c) $\bar{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\bar{c}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\bar{c}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\bar{c}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

d) $\bar{d}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{d}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$, $\bar{d}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; -\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2} \right\}$, $\bar{d}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\bar{d}_5 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4. A_5 fəzasında koordinatları ilə verilmiş aşağıdakı nöqtələr sistemlərinin xətti asılı olub-olmadığını yoxlayın:

a) $A_1(2; -4; -1; 3; 0)$, $A_2(26; 7; 12; 20; 19)$, $A_3(53; 9; 31; 43; 46)$, $A_4(63; 7; 13; 53; 56)$;

b) $B_1(1; 0; 0; 0; 0)$, $B_2(62; 11; 14; 50; 56)$, $B_3(80; 24; 45; 57; 70)$;

c) $C_1(1; 0; 0; 0; 0)$, $C_2(0; 2; 0; 0; 0)$, $C_3(0; 0; 1; 0; 0)$, $C_4(0; 0; 0; -3; 1)$, $C_5(0; 0; 0; 0; 1)$, $C_6(0; 0; 0; 0; 0)$.

5. A_4 fəzasında $A(2; 3; -1; 0)$ və $B(2; 1; 3; -4)$ nöqtələri verilmişdir. $\overline{AB}$ parçasını a) $\lambda = 2$; b) $\lambda = -3$; c) $\lambda = \frac{1}{2}$ nisbətində bölən nöqtənin koordinatlarını tapın.

6. $\left\{ \bar{0}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5 \right\}$ koordinat sisteminin $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5$ koordinat vektorlarının

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5$ bazisində koordinatları və 0 koordinat başlanğıcının $\left\{ \bar{0}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5 \right\}$ koordinat sistemində koordinatları verilmişdir:

a) $\bar{e}_1 = 1\bar{2};3;4;5$; $\bar{e}_2 = 2\bar{3};7;10;13$, $\bar{e}_3 = 3\bar{5};11;16;21$, $\bar{e}_4 = 4\bar{7};7;7;2$, $\bar{e}_5 = 1\bar{4};5;3;10$,
 $0 = 1\bar{2};3;1;-2$;

b) $\bar{e}_1 = 3\bar{6};5;6;4$, $\bar{e}_2 = 5\bar{9};7;8;6$, $\bar{e}_3 = 6\bar{12};13;9;7$, $\bar{e}_4 = 4\bar{6};6;5;4$, $\bar{e}_5 = 2\bar{5};1;5;3$,
 $0 = 1\bar{1};0;3;2;6$.

c) $\bar{e}_1 = 1\bar{0};0;0;0$, $\bar{e}_2 = 6\bar{0};1;1;1$, $\bar{e}_3 = 6\bar{10};1;1$, $\bar{e}_4 = 6\bar{1};1;0;1$, $\bar{e}_5 = 6\bar{1};1;1;0$,
 $0 = 1\bar{0};2;0;3$. Çevirmə düsturlarını yazın.

7. A_5 fəzasında $M_0(1;-2;3;1;0)$ nöqtəsindən keçən və $\bar{a}_1 = 1\bar{2};3;1;-2$, $\bar{a}_3 = 6\bar{1};2;-1;3$,
 $\bar{a}_4 = 6\bar{0};2;1;-1$, $\bar{a}_5 = 6\bar{0};0;1;1$ vektorlarına paralel olan $k=4$ ölçülü müstəvinin yeni
hipermüstəvinin ümumi tənliyini təyin edin.

8. A_4 fəzasında $M_0(1;3;-1;2)$ nöqtəsindən keçən və $\bar{a}_1 = 1\bar{2};-1;3$, $\bar{a}_2 = 6\bar{1};2;1$ vektorlarına
paralel olan $k=2$ ölçülü müstəvinin tənliyini qurun.

9. E_4 fəzasında $\bar{a} = 1\bar{1};3;1$, $\bar{b} = 1\bar{1};2;0;-1$, $\bar{c} = 1\bar{3};4;-1;1$ və $\bar{d} = 6\bar{1};-1;-4;0$ vektorları
verilmişdir. Onların cüt-cüt hasilərini hesablayın və həmin cütlərin iti bucaq, düz bucaq və kor
bucaq əmələ gətirdiyini müəyyən edin.

10. E_5 fəzasında düzbucaqlı koordinat sistemində üçbucağın təpələri verilmişdir:
 $A(-11;5;8;1;4)$, $B(-1;5;-7;1;-1)$, $C(9;5;-2;1;4)$. ABC üçbucağının düzbucaqlı olub-olmadığını
yoxlayın.

11. Düzbucaqlı koordinat sistemində $M_0(2;0;-3;6)$ nöqtəsi verilmişdir. Bu nöqtənin radius-
vektorunun koordinat vektorları ilə əmələ gətirdiyi bucaqların kosinusunu təyin edin.

12. Düzbucaqlı koordinat sistemində koordinatları ilə verilmiş aşağıdakı vektorlar arasındakı
bucağın kosinusunu tapın:

a) $\bar{a}_1 = 1\bar{1};1;1$, $\bar{b}_1 = 4\bar{0};3;-3$;

b) $\bar{a}_2 = 1\bar{2};1;2$, $\bar{b}_2 = 1\bar{8};-3;-5;0$;

c) $\bar{a}_3 = 4\bar{1};2;1$, $\bar{b}_3 = 8\bar{2};5;-1$;

d) $\bar{a}_4 = 1\bar{3};2;0$, $\bar{b}_4 = 1\bar{5};-3;-4;0$.

XI FƏSİL

KVADRATİK FORMALAR VƏ KVADRİKLƏR.

§ 62. Bixətti formalar.

Kvadratik forma anlayışı vermək üçün əvvəlcə bixətti forma anlayışını verək.
Fərz edək ki, bizə V_n vektorlar fəzası və R həqiqi ədədlər çoxluğu verilmişdir. Əgər bu vektorlar
fəzasının ixtiyari iki $\bar{x}, \bar{y}$ vektorlarına müəyyən həqiqi ədədi qarşı qoyan

$$g : V_n \times V_n \rightarrow R$$

inikası aşağıdakı şərtləri ödəyərsə, onda, bu $g(\bar{x}, \bar{y})$ inikasına V_n vektorlar fəzasında təyin olunmuş
bixətti forma deyilir.

$$g(\alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2, \bar{y}) = \alpha g(\bar{x}_1, \bar{y}) + \beta g(\bar{x}_2, \bar{y}),$$

$$g(\bar{x}, \alpha \bar{y}_1 + \beta \bar{y}_2) = \alpha g(\bar{x}, \bar{y}_1) + \beta g(\bar{x}, \bar{y}_2) \quad (1)$$

burada α, β -həqiqi ədədlərdir.

V vektorlar fəzasında hər hansı $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n\}$ bazisi götürüb, bixətti formanın koordinatlarla

ifadəsini verək: $\bar{x}$ və $\bar{y}$ vektorlarının bazis vektor üzrə ayrılışını uyğun olaraq: $\bar{x} = x_i \cdot \bar{e}_i$ və $\bar{y} = y_i \cdot \bar{e}_i$ $i, \overline{1, n}$ kimi işarə edək. (Bu yazılışı həddlərin 1-dən n-ə qədər cəmi kimi başa düşəcəyik). Bunları bixətti formada yerinə yazsaq;

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = g(x_i \bar{e}_i, y_i \bar{e}_i) = x_i y_i g(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$$

Burada $\bar{e}_i$ və $\bar{e}_j$ bazis vektorlarına uyğun olan ədədi g_0 ilə işarə etsək, bixətti forma üçün

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = g_0 x_i y_i \quad (2)$$

ifadəsini alırıq. Burada $i, j = \overline{1, n}$ olduğundan

$$G = \|g_0\|$$

n-tərtibli kvadrat matris olacaqdır. Bu matrisə **bixətti formanın matrisi** deyilir.

Beləliklə, əgər V_n fəzasında hər hansı $\{\bar{e}_i\}$ bazisi verilmişsə, onda hər bir g bixətti forması n tərtibli G matrisini təyin edir və tərsinə, burada verilmiş hər bir n-tərtibli G matrisi hər hansı $g(\bar{x}, \bar{y})$ bixətti formasını təyin edir.

Əgər $g(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{y}, \bar{x})$ şərti ödənilərsə, onda belə g-bixətti formasına **simmetrik bixətti forması** deyilir. Aşkardır ki, simmetrik bixətti formanın matrisi də simmetrik olacaqdır.

Doğrudan da $g(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = g(\bar{e}_j, \bar{e}_i)$ olduğundan $g_0 = g_{ji}$ olacaqdır. Eləcə də, tərsinə, hər bir simmetrik matrisin təyin etdiyi bixətti forma da simmetrikdir.

Əgər simmetrik bixətti forma $\forall \bar{x} \neq \bar{0}$ vektoru üçün $g(\bar{x}, \bar{x}) > 0$ şərti ödənilərsə, onda belə bixətti formaya **müsbət-müəyyən bixətti forma** deyilir.

§ 63. Kvadratik formalar və onların normal şəkli gətirilməsi.

1. Fərz edək ki, bizə $g(\bar{x}, \bar{y})$ simmetrik bixətti forması verilmişdir.

$$q(\bar{x}) = g(\bar{x}, \bar{x}) \quad (3)$$

ifadəsinə g bixətti formasına uyğun **kvadratik forma** deyilir.

Əgər n-ölçülü V vektorlar fəzasında hər hansı $\{\bar{e}_i\}$ bazisi götürsək, onda (2) ifadəsinə əsasən

$$q(\bar{x}) = g_{ij} x_i x_j \quad (4)$$

Buradakı $G = \|g_{ij}\|$ matrisinə g bixətti formasına uyğun **q-kvadratik formasının matrisi** deyilir. Aşkardır ki, bu matris simmetrik matrisdir.

Bir bazisdən digər bazisə keçid zamanı kvadratik formanın matrisinin necə dəyişdiyinə nəzər yetirək.

Fərz edək ki, $\bar{q}(x)$ bixətti forması V_n vektorlar fəzasında götürülmüş digər $\left\{\bar{e}\right\}$ bazisinə nəzərən $\bar{G} = \|g_0\|$ matrisinə malikdir və bu bazis vektorlar əvvəl götürdüyümüz $\left\{\bar{e}_i\right\}$ bazisinə nəzərən

$$\bar{e}_i = c_{ij} \bar{e}_j \quad (4)$$

ayrılışına malikdir. Onda

$$\bar{g}_{ij} = g(c_{ik} \bar{e}_k, c_{il} \bar{e}_l) \quad \text{və ya} \quad \bar{g}_{il} = c_{ik} g_{kl} c_{il} \quad (5)$$

Bu bərabərliyi matris şəklində yazsaq,

$$\bar{G} = CGC. \quad (6)$$

Burada $C = \left\{ \begin{matrix} c_{11}c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21}c_{23} \dots c_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ c_{n1}c_{n2} \dots c_{nn} \end{matrix} \right\}$ matrisi $\left\{\bar{e}\right\}$ bazisindən

$\left\{\bar{e}_i\right\}$ bazisinə keçid matrisi, C matrisi isə onun transponirə edilmiş matrisidir.

Burada C matrisi bir bazisdən digər bazisə keçid matrisi olduğundan, bu matris cırlaşmayan matrisdir. Onda (6) ifadəsindən görünür ki, $\bar{G}$ matrisinin rəngi G matrisinin rənginə bərabərdir. Başqa sözlə, bir bazisdən başqa bazisə keçid zamanı kvadratik formanın matrisinin rəngi dəyişmir.

Əgər kvadratik formanın r rəngi fəzanın ölçüsü n-dən kiçikdirsə, belə kvadratik formalara cırlaşan, r=n olduqda isə cırlaşmayan kvadratik formalar deyilir.

Biz yuxarıda göstərdik ki, bir bazisdən digər bazisə keçid zamanı kvadratik formanın matrisi (6) şəklində dəyişir. Təbii olaraq belə bir sual meydana çıxır: n-ölçülü V vektorlar fəzasında elə bazis seçmək olarmı ki, bu bazisdə kvadratik formanın matrisi diaqonal şəklinə, başqa sözlə, kvadratik forma

$$\bar{q}(y) = a_{11}(y_1)^2 + a_{22}(y_2)^2 + \dots + a_{nn}(y_n)^2 \quad (7)$$

şəklinə düşsün.

Aşağıdakı teorem bu suala cavab verir:

Teorem 1. V_n vektorlar fəzasında həmişə elə bazis seçmək olar ki, bu bazisdə kvadratik forma (7) şəklinə düşsün.

İsbatı: Elə $\left\{\bar{e}_i\right\}$ bazisi seçək ki, aşağıdakı şərti ödəsin:

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} i \neq j & 0 \\ i = j & g_0 \end{cases}$$

Biz yuxarıda göstərdik ki, belə bazis həmişə vardır.

Tamamilə aşkardır ki, seçdiyimiz bu bazisdə kvadratik forma

$$q(x) = g_{11}(x_1)^2 + g_{22}(x_2)^2 + \dots + g_n(x_n)^2 \quad (8)$$

şəklinə düşər. burada r-kvadratik formanın rəngidir.

Kvadratik formanın (8) şəklinə onun **kanonik forması** deyilir.

2. Bir bazisdən digər bazisə keçid zamanı vektorun koordinatlarının çevrilməsi düsturlarını çıxaraq:

Fərz edək ki, bizə iki $\left\{ \bar{e}_i \right\}$ və $\left\{ \bar{e}_i \right\}$ bazisləri verilmişdir. İkinci bazisin vektorlarının birinci bazisə nəzərən koordinatlarını

$$\left\{ \bar{e}_i \right\} = \left[\bar{c}_{i1}, \bar{c}_{i2}, \dots, \bar{c}_{in} \right]$$

kimi işarə edək. onda birinci bazisdən ikinci bazisə keçid matrisi $\| \bar{c}_{ij} \|$ şəklində olacaqdır.

Əgər $\bar{x}$ vektoru birinci bazisə nəzərən $\left[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \right]$, ikinci bazisə nəzərən $\left[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n \right]$ koordinatlarına malikdirsə, onda $\bar{x} = x_i \bar{e}_i$ və digər tərəfdən $\bar{x} = y_i \bar{e}_i = y_i \bar{c}_{ij} \bar{e}_j$

Buradan

$$x_j = c_{ij} y_j \quad (9)$$

(9) düsturlarına $\left\{ \bar{e}_i \right\}$ bazisindən $\left\{ \bar{e}_i \right\}$ bazisinə keçid zamanı $\bar{x}$ vektorunun koordinatlarının çevrilməsi düsturları deyilir.

İndi fərz edək ki, $q(\bar{x})$ kvadratik forması hər hansı $\left\{ \bar{e}_i \right\}$ bazisinə nəzərən (8) şəklində malikdir.

Buradakı $g_{11}, g_{22}, g_{33}, \dots, g_{nn}$ əmsallarından bir hissəsi müsbət, digər hissəsi isə mənfi ola bilər.

Fərz edək ki, bu əmsallardan k-dənəsi müsbət, yerdə qalan r-k dənəsi isə mənfidir. Onda müsbət hədləri əvvəllə yığmaqla kvadratik formanı

$$q(\bar{x}) = b_1 \cdot (x_1)^2 + b_2 \cdot (x_2)^2 + b_3 \cdot (x_3)^2 + \dots + b_k (x_k)^2 - b_{k+1} (x_{k+1})^2 - \dots - b_r (x_r)^2$$

və ya $x_i = \frac{1}{\sqrt{b_i}} y_i$ çevirməsi vasitəsilə

$$q(\bar{x}) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2 \quad (11)$$

şəklinə gətirmək olar.

Beləliklə, biz göstərdik ki, V_n vektorlar fəzasında həmişə elə bazis seçmək olar ki, bu bazisdə kvadratik forma (11) şəklində düşsün. Kvadratik formanın bu şəklində onun **normal şəkli** deyilir.

§ 64. Müsbət-müəyyən kvadratik formalar. Kvadratik formalar üçün ətalət qanunu.

Tərif: Əgər $q(x) = g(\bar{x}, \bar{x})$ kvadratik forması istənilən $x \neq 0$ üçün $q(\bar{x}) > 0$ olarsa, onda belə kvadratik formaya **g simmetrik bixətti formasına uyğun müsbət müəyyən kvadratik forma** deyilir.

Göstərək ki, kvadratik forma yalnız və yalnız o zaman müsbət müəyyən olar ki, $r=n$ və $l=0$ olsun.

Burada r-kvadratik formanın rəngi, l isə mənfi hədlərin sayıdır.

Fərz edək ki, seçilmiş hər hansı $\left\{ \bar{e}_i \right\}$ bazisində kvadratik forma aşağıdakı normal şəkli malikdir.

$$q(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_l^2 \quad (6)$$

Fərz edək ki, q-kvadratik forması müsbət müəyyəndir. Başqa sözlə istənilən $\bar{x} \neq 0$ üçün $q(\bar{x}) > 0$ olmalıdır. Bu isə yalnız o zaman olar ki, (6) ifadəsində bütün hədlər müsbət olsun. Başqa

Sonuncu iki halda kvadriklər **mərkəzsiz kvadriklər** adlanır.

§ 66. Kvadriklərin kanonik şəklə gətirilməsi və təsnifatı.

Fərz edək ki, bizə A_n fəzasında verilmiş hər hansı $\left\{0, e_i\right\}$ sisteminə nəzərən

$$a_{ij}x_i x_j + 2a_{i0}x_i + a_{00} = 0 \quad (1)$$

tənliyinə malik Q kvadriki verilmişdir.

Göründüyü kimi bu tənlikdəki yüksək tərtibli hədlər

$$q(\bar{x}) = a_{ij} x_i x_j$$

kvadratik formasını təyin edir.

Bilirik ki, elə $\left\{e_i\right\}$ bazisi seçmək olar ki, bu bazisdə qeyd olunan kvadratik forma kanonik

şəklə düşsün. Bu zaman $\left\{e_i^-\right\}$ bazisindən $\left\{e_i^-\right\}$ bazisinə keçid düsturlarını Q kvadrikinin (1)

tənliyindəki $(a_{ij}x_j)$ xətti hissəsində nəzərə alsaq, kvadrik mərkəzlidirsə, onun tənliyi

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_r^2 = \varepsilon \quad (2)$$

şəklinə, kvadrik mərkəzsizdirsə, onun tənliyi

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2 = 2x_{r+1} \quad (3)$$

şeklinə gətirilir. Burada r -kvadrikin rəngi, ε -ya vahid, ya da sıfırdır, $0 < k < r$.

(2) və (3) tənlikləri A_7 fəzasında kvadriklərin **normal tənliyi** adlanır.

İndi kvadriklərin təsnifatını verək. Biz yuxarıda göstərdik ki, əgər kvadrik mərkəzlidirsə, onun tənliyi (2) şəklinə gətirilir. Bu zaman kvadrikin rəngi $r < n$ olarsa belə kvadriklər **silindrik kvadriklər** adlanır.

Əvvəlcə fərz edək ki, mərkəzli kvadrik silindrik səth deyil. Bu halda $r=n$ olmalıdır və (2) tənliyi

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2 = \varepsilon \quad (3)$$

şəklinə düşəcəkdir. Onda k -nın bütün mümkün qiymətləri üçün bu tənlikdən aşağıdakı $n+1$ sayda tənlikləri alırıq

[illegible]

$\varepsilon = 1$ olduqda bu tənliklər sistemində $n+1$ sayda tənlik alacağıq ki, onların da hər biri A_n fəzasında müəyyən kvadriki təyin edir.

Daha dəqiq desək, burada birinci tənliyin təyin etdiyi səth A_n fəzasında ellipsoid, sonuncu tənliyin təyin etdiyi səth isə xəyali ellipsoid adlanır. Qalan tənliklərin təyin etdiyi səth isə l indeksli hiperboloid adlanır. Burada l -bu tənliklərdəki mənfi hədlərin sayıdır.

$\varepsilon = 0$ olduqda sondakı $\frac{n+1}{2}$ sayda tənliyi (-1) -ə vurmaqla ilk $\frac{n+1}{2}$ sayda tənlik almış olaraq.

Ona görə bu sistemdəki tənliklərin sayı, n cüt olduqda $\frac{n}{2} + 1$, n -tək olduqda isə $\frac{n+1}{2}$ -yə bərabər olacaqdır.

şərti ödənilərsə, onda $\varphi(\bar{x})$ -a **simmetrik xətti operator** deyilir.

(3) münasibətini $\{\bar{e}_i\}$ bazis vektorlar üçün yazsaq,

$$\varphi(\bar{e}_i)\bar{e}_j = \bar{e}_i\varphi(\bar{e}_j) \quad \text{və ya} \quad c_{ik}\bar{e}_k\bar{e}_j = \bar{e}_i c_{jk}\bar{e}_k \quad (4)$$

ifadəsini alırıq.

Sonuncu bərabərlikdən görünür ki, $\{\bar{e}_i\}$ bazisi ortonormal bazis olduqda $c_{ij} = c_{ji}$. Başqa sözlə,

$\|c_{ij}\|$ matrisi **simmetrik matris** olar.

Beləliklə, göstərdik ki, simmetrik operatorun ortonormal bazisdə matrisi simmetrikdir. Eləcə də, asanlıqla göstərmək olar ki, hər hansı ortonormal bazisdə simmetrik bazisə malik olan operator simmetrikdir.

Əgər istənilən $\bar{x} \neq 0$ vektoru üçün

$$\varphi \bar{x} = \lambda \bar{x}$$

şərti ödənilərsə, onda bu vektora φ operatorunun **məxsusi vektoru** deyilir. λ -ədədinə isə bu operatorun **məxsusi qiyməti** deyilir.

Asanlıqla göstərmək olar ki, V_n n-ölçülü Evklid vektorlar fəzasında elə $\{\bar{e}_i\}$ bazisi seçmək olar ki, onun bütün vektorları verilmiş hər hansı operatorun məxsusi vektorları olsun.

Bu faktdan istifadə edib aşağıdakı teoremi asanlıqla isbat etmək olar:

Teorem: V_n n-ölçülü Evklid vektorlar fəzasında heç olmasa bir dənə elə bazis seçmək olar

ki, bu bazisin ixtiyari 2 vektoru verilmiş $a(\bar{x}, \bar{y}) = a_{ij}x_i y_j$ simmetrik bixətti formasına nəzərən qoşma olsun. Başqa sözlə $a(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0$.

İsbatı: $\varphi(\bar{x}) = x_i a_{ij} \bar{e}_j$ düsturu ilə verilmiş φ xətti operatoruna baxaq.

$$a(\bar{x}, \bar{y}) = a_{ij} x_i y_j \quad (5)$$

bixətti formasındakı $\|a_{ij}\|$ matrisi simmetrik olduğundan (5) ifadəsini

$$a(\bar{x}, \bar{y}) = a_{i1}x_i y_1 + a_{i2}x_i y_2 + \dots + a_{in}x_i y_n = \varphi(\bar{x}) \cdot \bar{y} \text{ kimi yazmaq olar.}$$

Əgər biz $\{\bar{e}_i\}$ ortonormal bazisini $\varphi(\bar{x})$ operatorunun məxsusi vektorlarından təşkil etsək, asanlıqla görmək olar ki, bu axtarılan bazisdir.

İndi fərz edək ki, bizə E_n -Evklid fəzasında hər hansı $\{0, \bar{e}_i\}$ ortonormal reperinə nəzərən

$$a_{ij}x_i y_j + 2a_{i0}x_i + a_{00} = 0$$

tənliyinə malik Q kvadriki verilmişdir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi bu tənlikdəki yüksək tərtibli hədlər $q(\bar{x}) = a_{i1}x_i y_j$ kvadratik formasını təyin edir.

Elə $\{\bar{e}_i\}$ bazisi seçək ki, bu kvadrik forma kanonik şəkllə düşsün (Yuxarıda isbat etdiyimiz

teoremə görə bu cür bazisi həmişə seçmək olar). Onda $\{0, \bar{e}_i\}$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemində kvadrikin tənliyi

$$a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + \dots + a_{nn}y_n^2 + 2a_{i0}y_i + a_{00} = 0 \quad (6)$$

şəklinə düşər.

Bu tənliyin sonrakı sadələşdirilməsi afin fəzada olduğu kimi aparılır. Belə ki, əgər Q kvadriki heç olmasa bir mərkəzə malikdirsə, (6) tənliyi

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_rx_r^2 = \varepsilon \quad (7)$$

şəklinə, kvadrikin heç bir mərkəzi yoxdursa,

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_rx_r^2 = 2x_{r+1} \quad (8)$$

şəklinə salınır. Burada r-kvadrikin rənqidir və $\varepsilon = 1$ və ya $\varepsilon = 0$.

Bu tənliklərə E_n fəzasında kvadriklərin **kanonik tənlikləri** deyilir.

E_n fəzasında kvadriklərin təsnifatı ++++ fəzasında olduğu kimi aparılır. Ona görə də biz E_3 fəzasında kvadriklərin təsnifatını daha ətraflı verməyi lazım bildik.

(7) və (8) tənliklərində

$$a_1 = \pm \frac{1}{a^2}, \quad a_2 = \pm \frac{1}{b^2}, \quad a_3 = \pm \frac{1}{c^2} \quad \text{və} \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$

aparsaq, üçölçülü Evklid fəzasında kvadriklərin aşağıdakı 17 kanonik tənliyini alarıq:

I. Kvadrikin rənqi 3 olduqda:

- 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoid
- 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ xəyali ellipsoid
- 3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ biroyuqlu hiperboloid.
- 4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ ikioyuqlu hiperboloid.
- 5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ konus
- 6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ xəyali konus.

II. Kvadrikin rənqi 2 olduqda

- 7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elliptik silindr.
- 8) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ xəyali silindr
- 9) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolik silindr
10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ həqiqi düz xətt boyunca kəsişən iki xəyali müstəvi
- 11) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ kəsişən iki müstəvi
- 12) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ elliptik paraboloid
- 13) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ hiperbolik paraboloid

III. Kvadrikin rənqi I olduqda:

- 14) $y^2 = 2px$ parabolik silindr.
- 15) $x^2 - a^2 = 0$ paralel müstəvi

16) $x^2 + a^2 = 0$ iki xəyali paralel müstəvi

17) $x^2 = 0$ üst-üstə düşən iki müstəvi.

Kvadratik forma və kvadriklərə aid aşağıdakı məsələ həlli nümunələrinə baxaq:

Məsələ 1: E_3 -evklid fəzasının ixtiyari ortonormal bazisində $7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ kvadratik forması verilmişdir. Bazisin ortonormal çevirməsilə kvadratik formanın kanonik şəklini tapın və çevirmə düsturlarını yazın.

Həlli:

Kvadratik formanın xarakteristik tənliyini yazaq:

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda - 20 \\ -26 - \lambda - 2 \\ 0 - 25 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^3 - 18\lambda^2 - 99\lambda - 162 = 0$$

Xarakteristik tənliyin kökləri $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 6$ olar. Ona görə verilmiş kvadratik formanın kanonik şəkli aşağıdakı kimi olacaq:

$$3 \cdot y_1^2 + 9y_2^2 + 6y_3^2.$$

Xarakteristik tənliyin köklərinə uyğun vektorları tapaq. Bu vektorları

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

tənliklər sistemindən istifadə edərək tapırıq:

$$\begin{cases} (7-3)x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + (6-3)x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 + (5-3)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Axırıncı sistemdən tapa bilərik:

$x_2 = 2$ qiyməti versək, $x_1 = 1$, $x_3 = 2$ alınar. Deməli, $\lambda_1 = 3$ kökünə uyğun vektor $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ -dir. Eyni qayda ilə tapa bilərik:

$$\begin{cases} (7-9)x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + (6-9)x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_3 + (5-9)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2, \quad \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix};$$

İndi ortonormal $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlarını tapaq:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \frac{1}{3}\vec{a}_1 = \frac{1}{3}(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3), \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|} = \frac{1}{3}(2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3),$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{a}_3}{|\vec{a}_3|} = \frac{1}{3}(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3)$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlarından istifadə edərək verilmiş kvadratik formanın kanonik şəkli gətirilməsi üçün lazım olan çevirmə düsturlarını aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$\begin{aligned} x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3 &= y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + y_3 \bar{e}_3 = \frac{1}{3} y_1 (\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3) + \frac{1}{3} y_2 (2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 + \\ &+ \frac{1}{3} y_3 (2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3) = \frac{1}{3} (y_1 + 2y_2 + 2y_3) \bar{e}_1 + \frac{1}{3} (2y_1 - 2y_2 + y_3) \bar{e}_2 + \frac{1}{3} (2y_1 + y_2 - 2y_3) \bar{e}_3 \end{aligned}$$

Vektorların bərabərliyinə əsasən yazı bilərik:

$$x_1 = \frac{1}{3} (y_1 + 2y_2 + 2y_3),$$

$$x_2 = \frac{1}{3} (2y_1 - 2y_2 + y_3),$$

$$x_3 = \frac{1}{3} (2y_1 + y_2 - 2y_3).$$

Məsələ 2: A_3 afin fəzasında

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0$$

tənliyi ilə təyin olunan kvadrikin mərkəzini tapın.

Həlli:

(2) sistemini $i, j = 1, 2, 3$ qiymətləri üçün yazıq:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{10} = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{20} = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{30} = 0. \end{cases}$$

məsələnin şərtində verilmiş tənliyə görə yazı bilərik:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 1 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases} \Delta \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= -16, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -113 \\ 31 & -1 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} = -16, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -13 \\ 13 & -1 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} &= -16, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ 113 \\ 3 & -11 \end{vmatrix} = 16 \end{aligned}$$

Bu sistemi həll edib, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$ olduğunu tapırıq. Deməli, kvadrikin mərkəzi $C(1;1;-1)$ koordinatlara malikdir.

Məsələ 3: E_3 fəzasının hər hansı düzbucaqlı koordinat sistemində kvadrikin

$5x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 - 4 = 0$ tənliyi verilmişdir. Oxların döndərilməsi və koordinat başlanğıcının köçürülməsi vasitəsi ilə kvadrikin tənliyini kanonik şəkə gətirin.

Həlli:

Kvadrikin xarakteristik tənliyini yazıq:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda - 11 \\ -13 - \lambda - 1 \\ 1 - 13 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{və ya} \quad \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$$

Xarakteristik tənliyin kökləri $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 3$ olar.

Xarakteristik tənliyin köklərindən istifadə edərək aşağıdakı qayda da onlara uyğun vektorları tapıq:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Axırıncı tənliyi həll edərək tapa bilirik:

$x_3 = l$ qəbul etsək alarıq: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Deməli, $\lambda_1 = 2$ kökünə uyğun vektor

$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olar. Buna oxşar olaraq tapa bilirik:

$$\begin{cases} (5-6)x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + (3-6)x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + (3-6)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = -2x_2$, $x_3 = -x_2$, $x_2 = -1$ olduqda $x_1 = 2$, $x_3 = 1$ olur və

$$\begin{cases} (5-3)x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + (3-3)x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + (3-3)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Burada da $x_3 = -x_1$, $x_2 = x_1$ alınır, $x_1 = 1$ olduqda $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ olur, ona görə də

$\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ alınır.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlarından istifadə edərək aşağıdakı kimi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlarını təyin edək:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3), \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3), \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{a}_3}{|\vec{a}_3|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3).$$

Onda yazı bilirik:

$$\begin{aligned} x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 &= y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3)y_2 + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3)y_3 = \left[0y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3\right]\vec{e}_1 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3\right]\vec{e}_2 + \\ &+ \left[\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_3\right]\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Vektorların bərabərliyinə əsasən tapırıq:

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3; \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_3.$$

Bu çevirmələri tətbiq etdikdə kvadrikin tənliyi

$$2 \cdot y_1^2 + 6y_2^2 + 3y_3^2 + \frac{20}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{12}{\sqrt{6}}y_2 - 4 = 0$$

şəklində olar. Bu tənliyi aşağıdakı kimi də yazı bilirik:

$$2\left[y_1 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right]^2 + 6\left[y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^2 + 3y_3^2 - 30 = 0.$$

$x_1 = y_1 - \frac{5}{\sqrt{2}}$, $x_2 = y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}$, $x_3 = y_3$ qəbul etsək, axırıncı tənlik aşağıdakı şəkli alar:

$$2x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 30 = 0 \quad \text{və ya} \quad \frac{x_1^2}{15} + \frac{x_2^2}{5} + \frac{x_3^2}{10} = 1.$$

Bu da verilmiş kvadrikin, yəni üçoxlu ellipsoidin kanonik tənliyidir.

ÇALIŞMALAR.

1. A_n fəzasının ümumi bazisində kvadratik forma aşağıdakı tənliklərlə verilmişdir. bazisin çevirməsi vasitəsilə kvadratik formanın normal şəklini tapın və çevirmə düsturlarını yazın:

a) $A_2 : 9x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$;

b) $A_3 : x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

c) $A_3 : x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

d) $A_4 : 4x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4$;

e) $A_5 : 4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_4^2 + x_5^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_5 + 2x_3x_4 - 8x_3x_4 + 2x_4x_5$;

2. A_3 fəzasının ümumi bazisində verilmiş aşağıdakı kvadratik formaların müsbət müəyyən olub-olmadığını yoxlayın:

a) $3x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2$;

b) $5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 2x_1x_2$;

c) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$.

3. E_n fəzasının ortonormal bazisində aşağıdakı tənliklərə malik kvadratik formalar verilmişdir. Bazisin ortonormal çevirməsi vasitəsilə kvadratik formanın kanonik şəklini tapın və çevirmə düsturlarını yazın:

a) $E_2 : x_1^2 - 14x_1x_2 + 49x_2^2$;

b) $E_3 : x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

$E_4 : 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4$;

4. A_3 fəzasında aşağıdakı tənliklərlə verilmiş kvadrikin mərkəzini tapın:

a) $3x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - 4x_1 - 8x_3 - 8 = 0$

b) $2x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2x_3 - 10x_1 + 14x_3 + 7 = 0$

c) $2x_1^2 + 10x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_3 + 8x_2x_3 + 12x_1 + 4x_2 - 8x_3 - 1 = 0$.

5. Düzbucaqlı koordinat sisteminin oxlarının döndərilməsi vasitəsilə, kvadrikin E_j evklid fəzasında verilmiş

a) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - 24 = 0$;

b) $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 12 = 0$;

c) $5x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 9 = 0$.

tənliklərini kanonik şəklə gətirin.

6. Düzbucaqlı koordinat sisteminin başlanğıcının köçürülməsi vasitəsilə kvadrikin E_3 fəzasında verilmiş aşağıdakı tənliklərini kanonik şəklə gətirin:

a) $x_1^2 - 6x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 9 = 0$;

b) $3x_1^2 - 2x_3^2 + 12x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6 = 0$;

c) $2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1 + 6x_2 + 16x_3 - 1 = 0$;

d) $2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 12x_2 - 2x_3 + 2 = 0$.

7. Düzbucaqlı koordinat sisteminin oxlarının döndərilməsi və koordinat başlanğıcının köçürülməsi vasitəsilə kvadrikin E_3 fəzasında verilmiş aşağıdakı tənliklərini kanonik şəklə gətirin:

a) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 8x_1 + 4x_2 - 5 = 0$;

b) $5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 36x_1 + 36x_2 - 18x_3 = 18 = 0$;

c) $4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 8x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0$;

d) $2x_1x_2 + 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 2 = 0$.

ƏDƏBİYYAT.

1. Александров Р.С. Лекции по аналитической геометрии. «Наука», Москва 1968.
2. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия 1ч. Москва «Просвещение», 1974.
3. Бахвалов С.В., Бабушкин Л.И., Иваницкая В.П. Аналитическая геометрия. Москва. «Просвещение». 1970.
4. Qasimov Q.M. Həndəsə (müstəvi üzərində) API-nin nəşriyyatı, 1976.
5. Qasimov Q.M., Axundov S.S. və başq. Həndəsə (evklid) fəzasında xətlər və səthlər. API-nin nəşriyyatı, Bakı-1978.
6. Qasimov Q.M., Axundov S.S., Paşayev X.X. Çoxölçülü həndəsəyə aid dərslər vəsaiti API-nin nəşriyyatı. Bakı-1979.

MÜNDƏRİCAT

I HİSSƏ.

MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ ANALİTİK HƏNDƏSƏ

I FƏSİL. VEKTORLAR CƏBRİNİN ELEMENTLƏRİ.

§ 1. Vektorlar. Vektorlar üzərində xətti əməllər.....	4
§ 2. Vektorların xətti asılılığı.....	12
§ 3. Vektorlar fəzası. Fəzanın bazisi və verilmiş bazisə nəzərən vektorun koordinatları.....	15
§ 4. İki vektorun skalyar hasilı.....	19
Məsələlər həlli.....	22
Çalışmalar.....	26

II FƏSİL. MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ KOORDİNAT ÜSULU

§ 5. Müstəvi üzərində afin koordinat sistemi.....	30
§ 6. Müstəvi üzərində koordinat metodu.....	43
§ 7. Vektorlar cəbrinin koordinat metodunun məktəb həndəsə kursunun məsələlərinə tətbiqi.....	46
Koordinat metoduna aid məsələlər həlli.....	52
Çalışmalar.....	55

III FƏSİL. MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ DÜZ XƏTT

§ 8. Düz xəttin verilməsi üsulları və müxtəlif tənlikləri.....	59
§ 9. Düz xəttin ümumi tənliyi və onun araşdırılması.....	63
§ 10. $\delta(x, y) = Ax + By + C$ ifadəsinin həndəsi mənası.....	66
§ 11. İki düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti.....	67
§ 12. İki düz xətt arasında qalan bucağın hesablanması.....	69
§ 13. Nöqtədən düz xəttə qədər məsafə.....	71
§ 14. Düz xətlərə aid əsas məsələlər.....	72
Məsələlər həlli.....	76
Çalışmalar.....	81

IV FƏSİL. İKİTƏRTİBLİ XƏTLƏRİN KANONİK TƏNLİKLƏRİNƏ GÖRƏ ÖYRƏNİLMƏSİ

§ 15. Ellips, kanonik tənliyi və onun formasının təyin edilməsi.....	86
§ 16. Hiperbola, kanonik tənliyi və onun formasının təyin edilməsi.....	92
§ 17. Parabola, kanonik tənliyi və onun formasının təyin edilməsi.....	98
§ 18. Ellipsin, hiperbolanın direktrisləri və direktrial xassələri.....	100
§ 19. Ellips, hiperbola və parabolanın polyar koordinatlarla tənliyi.....	103
Məsələlər həlli.....	106
Çalışmalar.....	116

V FƏSİL. İKİTƏRTİBLİ XƏTLƏRİN ÜMUMİ NƏZƏRİYYƏSİ.

§ 20. İkitərtibli xətlərin düz xətlə kəsişməsi.....	121
§ 21. İkitərtibli əyriyə nəzərən asimptotik istiqamətlər və asimptotlar.....	124
§ 22. İkitərtibli xətlərin mərkəzi.....	125
§ 23. İkitərtibli xəttin toxunanı.....	129

§ 24. İkitərtibli xəttin diametri.....	131
§ 25. Qoşma diametrlər. qoşmalılıq şərti. İkitərtibli əyriyə nəzərən qoşma istiqamətlər.....	133
§ 26. İkitərtibli əyriyə nəzərən baş istiqamətlər. Əyrinin baş diametrləri.....	134
§ 27. İkitərtibli xətlərin təsnifatı.....	136
§ 28. İkitərtibli xətlərin ümumi tənliyinin sadələşdirilməsi.....	138
§ 29. Ümumi tənliyinə görə ikitərtibli əyrinin qurulması.....	142
Məsələlər həlli.....	145
Çalışmalar.....	149

VI FƏSİL. MÜSTƏVİNİN ÇEVİRMƏLƏRİ

§ 30. İnikas və çevirmələr.....	151
§ 31. Müstəvinin hərəkəti.....	154
§ 32. Oxşar çevirmə.....	164
§ 33. Afin çevirmə.....	167
Məsələlər həlli.....	170
Çalışmalar.....	173

II HİSSƏ

FƏZADA ANALİTİK HƏNDƏSƏ

VII FƏSİL. FƏZADA KOORDİNAT SİSTEMLƏRİ VƏ BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİN KOORDİNATLARLA HƏLLİ

§ 34. Fəzada ümumi dekart koordinat sistemi.....	175
§ 35. Dekart koordinat sistemlərinin çevrilməsi düsturları.....	181
§ 36. Fəzanın orintasiya edilməsi.....	185
§ 37. İki vektorun vektorial hasili.....	186
§ 38. Üç vektorun qarışıq hasili.....	191
§ 39. Fəzada koordinat metodu. Səthin tənliyi.....	194
Məsələlər həlli.....	197
Çalışmalar.....	202

VIII FƏSİL. FƏZADA MÜSTƏVİLƏR VƏ DÜZ XƏTLƏR.

§ 40. Müstəvinin verilməsi üsulları və müxtəlif tənlikləri.....	206
§ 41. Müstəvinin ümumi tənliyi və onun araşdırılması.....	210
§ 42. $Ax+By+Cz+D=0$ -çoxhədli işarəsinin həndəsi mənası.....	215
§ 43. İki və üç müstəvinin qarşılıqlı bağılısı.....	217
§ 44. Müstəvilər dəstəsi və müstəvilər bağılısı.....	220
§ 45. Müstəvilər nəzəriyyəsinin bəzi metrik məsələləri.....	221
§ 46. Fəzada düz xəttin verilməsi üsulları və müxtəlif tənlikləri.....	227
§ 47. Fəzada iki düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti.....	233
§ 48. Düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti.....	235
§ 49. Fəzada düz xəttə aid əsas metrik məsələlər.....	237
§ 50. Fəzada düz xətlər və müstəvilər nəzəriyyəsinin məktəb həndəsə kursunun stereometriya məsələləri həllinə tətbiqləri.....	241
Məsələlər həlli.....	251
Çalışmalar.....	261

IX FƏSİL. İKİTƏRTİBLİ SƏTHLƏRİNİN KANONİK TƏNLİKLƏRİNƏ GÖRƏ ÖYRƏNİLMƏSİ

§ 51. İkitərtibli səth. Kəsişmə metodu.....	264
§ 52. Fırlanma səthləri.....	267
§ 53. Silindrik səthlər.....	270
§ 54. İkitərtibli konus, konus kəsikləri.....	276
§ 55. Ellipsoid.....	281
§ 56. Hiperboloidlər.....	285
§ 57. Paraboloidlər.....	291
§ 58. İkitərtibli səthlərin düzxətli doğuranları.....	296
Məsələlər həlli.....	300
Çalışmalar.....	302

III HİSSƏ

n-ÖLÇÜLÜ FƏZALARDA ANALİTİK HƏNDƏSƏ

X FƏSİL. n-ÖLÇÜLÜ AFİN VƏ EVKLİD FƏZALARI

§ 59. n-ölçülü Afın fəzası.....	306
§ 60. An-fəzasında k-ölçülü müstəvilər və onların qarşılıqlı vəziyyəti.....	313
§ 61. n-ölçülü Evklid fəzası.....	319
Məsələlər həlli.....	325
Çalışmalar.....	326

XI FƏSİL. KVADRATİK FORMALAR VƏ KVADRİKLƏR

§ 62. Bixətti formalar.....	330
§ 63. Kvadratik formalar və onların normal şəklə gətirilməsi.....	331
§ 64. Müsbət-müəyyən kvadratik formalar. Kvadratik formalar üçün ətalət qanunu.....	334
§ 65. A_n afın fəzasında kvadriklər.....	337
§ 66. Kvadriklərin kanonik şəklə gətirilməsi və təsnifatı.....	339
§ 67. Evklid fəzasında kvadriklər.....	341
Məsələlər həlli.....	345
Çalışmalar.....	350
Ədəbiyyat.....	353