Məhəmməd Quliyev

İNTEQRAL ÇEVİRMƏLƏR VƏ ONLARIN BƏZİ TƏTBİQLƏRİ

(Dərs vəsaiti)

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin 01.05.2008-ci il tarixli 522 saylı əmri ilə dərslik kimi təsdiq edilmişdir.

Bakı - 2008

Elmi redaktor: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru,
professor H.F.Quliyev

Rəy verənlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru,
professor Ə.M.Əhmədov
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi,
dosent Y.T.Mehrəliyev

Quliyev Məhəmməd Əhməd oğlu, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor. İnteqral çevirmələr və onların bəzi tətbiqləri. Dərs vəsaiti.

Dərs vəsaiti Furye, Laplas və digər inteqral çevirmələrinə və onların tətbiqinə həsr olunmuşdur. Vəsait universitetin «Geofizika» ixtisası üzrə bakalavr təhsil pilləsinin tədris proqramına uyğundur.

Kitabdan universitetlərin riyaziyyat, fizika, mexanika, tətbiqi riyaziyyat, informatika ixtisaslarının və həmçinin texniki uniaersitetlərin tələbələri istifadə edə bilərlər.

MÜNDƏRİCAT

ÖN SÖZ

Adi və xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsi, sərhəd məsələsi və qarışıq məsələləri həll etmək üçün klassik və funksional üsullarla yanaşı inteqral çevirmələr üsulu geniş tətbiq olunur. İnteqral çevirmələr və onların tətbiqi haqqında xarici ədəbiyyatlarda xeyli sayda dərs vəsaiti yazılmışdır, lakin ayrılıqda bu dərs vəsaitlərində baxılan mövzu mükəmməl şərh olunmamışdır. Bu dərs vəsaitləri, bir tərəfdən məzmun etibarı ilə bakalavr təhsil pilləsinin tədris proqramını tam əhatə etmir, digər tərəfdən, bunların hamısı xarici dillərdə yazılmışdır. Göstərilən bu səbəblərdən bakalavr tədris proqramına uyğun Azərbaycan dilində dərs vəsaitinin yazılmasına olan ehtiyac bu kitabın yazılmasını zəruri etmişdir. Kitabın əsasını müəllifin Bakı Dövlət Universitetinin «Geofizika» ixtisası üzrə oxuduğu mühazirələr təşkil edir.

Kitabda funksiyalar nəzəriyyəsindən lazım olan məlumatlar verilmiş, vəzi fəzalarda Furye və tərs Furye çevirmələri tədqiq olunmuş, verilmiş funksiyaların hamarlığından və azalma süratindənasılı olaraq Furye çevirməsinin hamarlığı və sonsuzluqda azalma sürəti öyrənilmişdir. Sonra analitik funksiyaların Furye çevirməsi şərh olunaraq, Furye çevirməsinin xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsi, qarışıq məsələlərin həllinə və eləcə də inteqral tənliyin həlinə tətbiqi öyrənilmişdir. Dərs vəsaitində həmçinin Laplas çevirməsi və orjinalın varlığı üçün şərtlər verilmiş, çevirmənin adi və xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsi və sərhəd məsələlərinin inteqral tənliyinin həllinə tətbiqi göstərilmişdir. Axırıncı fəsildə başqa inteqral çevirmələrdə şərh olunmuşdur.

Dərs vəsaitini diqqətlə hxuyub, onun məzmununun yaxşılaşdırılmasına kömək edək, qeyd və dəyərli məsləhətlərinə görə professor K.Q.Həsənova, professor H.F.Quliyevə öz minnətdarlığımı bildirirəm.

FƏSİL 1
FUNKSİYALAR NƏZƏRİYYƏSİNDƏN BƏZİ MƏLUMATLAR

§1. L_p fəzası

Kitabda funksiyalar nəzəriyyəsində istifadə olunan bəzi nəticələri qeyd edək. Bu nəticələrin mükəmməl isbatı [10] dərsliyində verilmişdir.

1. L_p fəzasının təyini [10].

L_p, $p \geq 1$-ilə həqiqi oxda təyin olunmuş həqiqi qiymətli və sonlu

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

normasına malik ölçülən $f(x)$, $x \in R$ funksiyalar fəzasını işarə edəcəyik.

Qeyd olunan L_p fəzasında inteqral Lebeq mənasında başa düşülür. Əgər p vahidə bərabərdirsə onda L_1 fəzasını alırıq və sadəlik üçün L ilə işarə olunur. Əgər p ikiyə bərabər olarsa L_2 Hilbert fəzasıdır. Verilmiş $f(x)$ funksiyası sonlu $[a,b]$ ədədi parçada təyin olunmuşdursa belə funksiyalar üçün L_p fəzası $L_p(a,b)$ ilə işarə olunur.

2. Normanın xassələri.

Norma aşağıdakı xassələri ödəyir:

a) mənfi deyil, yəni $\|f\| \geq 0$, bununla belə $\|f\| = 0$ bərabərliyi yalnız və yalnız $f(x)$ funksiyası sıfra ekvivalent olduqda doğrudur.

b) bircinsdir, α kompleks ədəd olduqda
$\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ ödənilir.

c) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ üçbucaq bərabərsizliyi ödənilir, və bu L_p fəzasında Minkovski bərabərsizliyi adlanır [10].

Qeyd olunan b) və c) xassələrindən alınır ki, istənilən α və β kompleks ədədləri üçün $f(x)$ və $g(x)$ L_p fəzasındandırlarsa, onda $\alpha f(x) + \beta g(x)$ funksiyası da L_p fəzasına daxildir, başqa sözlə L_p xətti fəzadır.

Norma inteqral vasitəsilə təyin olunduğundan $\|f-g\| = 0$ münasibətindən bütün x-lər üçün $f(x) = g(x)$ bərabərliyi alınmır. Əgər $\|f-g\| = 0$ ödənilərsə, onda $g(x)$ funksiyasına $f(x)$-ə ekvivalent funksiya deyilir, başqa sözlə bu funksiyaların bir-birindən fərqli olduğu nöqtələr çoxluğunun ölçüsü sıfırdır. Aşağıdakı tərifi qeyd edək.

Tərif 1. Ədəd oxunda verilmiş nöqtələr çoxluğunun ölçüsü o vaxt sıfırdır ki, bu çoxluğu uzunluqları cəmi kafi qədər kiçik olan intervallar sistemi vasitəsilə örtmək mümkün olsun.

Onda üçbucaq bərabərsizliyindən alınır ki, ekvivalent funksiyaların norması bərabərdir.

Norma anlayışı, vektorun uzunluğu anlayışına ekvivalent olduğundan L_p fəzasında yeni növ yığılmanın təyin olunmasına imkan verir.

Tərif 2. L_p fəzasından götürülmüş $\{f_n(x)\}$, $n=1,2,3,\ldots$ funksiyalar ardıcıllığı $f(x)\in L_p$ funksiyasına o vaxt p tərtibdən orta yığılır ki,

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$$

münasibəti ödənilsin. Onda $f(x)$ funksiyasına $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığının p tərtibdən orta limiti deyilir və

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$$

münasibəti

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

şəklində də yazılır.

Əgər $p=2$ olarsa, onda orta yığılma orta kvadratik yığılma adlanır.

Qeyd olunan L_p fəzasına daxil olan $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığının $f(x) \in L_p$ funksiyasına orta yığılmasından, $\{\|f_n(x)\|\}$ ədədi ardıcıllığının $\|f\|$ ədədinə yığılması alınır. Bu xassə normanın kəsilməzliyi adlanır və üçbucaq bərabərsizliyinin köməyi ilə isbat olunur.

Qeyd edək ki, orta yığılmadan nöqtəvi yığılma və nöqtəvi yığılmadan orta yığılma alınmır.

3. L_p fəzasının tamlığı.

Tərif 3. L_p fəzasına daxil olan $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı o vaxt fundamental adlanır ki,

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\| = 0$$

münasibəti ödənilsin.

Lemma 1. Əgər L_p fəzasından götürülmüş $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı $f(x) \in L_p$ funksiyasına orta yığılırsa, onda bu funksiyalar ardıcıllığı fundamentaldır.

Lemmanın isbatı

$$\|f_n - f_m\| = \|f_n - f + f - f_m\| \le \|f_n - f\| + \|f - f_m\|$$

bərabərsizliyindən alınır.

Teorem 1 [10]. Əgər L_p fəzasından götürülmüş $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı fundamentaldırsa, onda bu ardıcıllıq yığılandır, başqa sözlə, ekvivalentlik dəqiqliyi ilə, yeganə $f(x) \in L_p$ var ki,

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$$

bərabərliyi ödənilir.

Bu teoremdə qeyd olunan L_p fəzasının xassəsi, həmin fəzanın tamlığını xarakterizə edir. Deməli, L_p fəzası xətti normallı və tam fəzadır.

4. L_p fəzasında funksiyalar ailəsinin sıxlığı.

Tərif 4. Verilmiş $[a,b]$ parçasını

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ nöqtələri vasitəsilə hissələrə bölək.

Onda c_k və d_k kompleks ədədlər olduqda

$$h(x) = \begin{cases} c_k, & x \in (x_k, x_{k+1}); \\ d_k, & x = x_k; \\ 0, & x \overline{\in} [a,b] \end{cases}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $h(x)$ funksiyasına pilləvari funksiya deyilir.

Tərif 5. Bütün ədəd oxunda təyin olunmuş $\varphi(x)$ funksiyası sonlu parçadan kənarda sıfırdırsa, onda finit funksiya adlanır.

Tərif 6. Əgər A_0, A_k, B_k sabitləri kompleks ədədlərdirsə, onda

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx),$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $T(x)$ funksiyasına triqonometrik çoxhədli deyilir.

Tərif 7. L_p fəzasından götürülmüş A funksiyalar ailəsi L_p fəzasında o vaxt sıx adlanır ki, ixtiyari $f(x) \in L_p$ funksiyası və ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $g(x) \in A$ funksiyası tapılır ki, $\|f - g\| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilsin.

Bu tərifə aşağıdakı ekvivalent formanı vermək olar: L_p fəzasında verilmiş A ailəsi L_p-də o vaxt sıxdır ki, ixtiyari $f(x) \in L_p$ funksiyası A ailəsindən götürülmüş funksiyalar ardıcıllığının orta limiti olsun.

Teorem 2 [10]. Pilləvari funksiyalar ailəsi, finit funksiyalar ailəsi, sonlu sayda kəsilməz törəmələri olan finit funksiyalar ailəsi ixtiyari $p \geq 1$ üçün L_p fəzasında sıxdır.

Teorem 3 [10]. Triqonometrik çoxhədlilər ailəsi $p \geq 1$ olduqda L_p $(-\pi, \pi)$ fəzasında sıxdır.

5. L_2 fəzası.

Qeyd olunan L_2 fəzası əlavə xassələrə malik olduğundan o, L_p fəzasından fərqlənir. Bu xassələr əsasən skalyar hasillə əlaqədardır.

Tərif 8. Əgər $f(x), g(x) \in L_2$ isə, onda

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x)dx$$

(burada $\overline{g}(x), g(x)$ funksiyasının kompleks qoşmasını göstərir) ədədinə $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının skalyar hasili deyilir.

Skalyar hasil aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) $\|f\| = (f,f)$;

b) $(f,g) = \overline{(g,f)}$;

c) $(\alpha f, g) = \alpha(f,g)$, $(f, \beta g) = \overline{\beta}(f,g)$,

burada α və β kompleks ədədlərdir;

d) $(f+g,h) = (f,h)+(g,h)$, $(f,g+h) = (f,g)+(f,h)$;

e) $\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k, \sum_{i=1}^{m}\beta_i g_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_k\overline{\beta}_i(f_k, g_i)$.

Bu xassələr skalyar hasilin təyinindən və inteqralın xassəsindən alınır, həmçinin e) xassəsi c) və d) xassələrinin nəticəsidir.

Skalyar hasili vuruqların L_2-də norması vasitəsilə qiymətləndirmək olur. Bu qiymətlənmə Bunyakovski bərabərsizliyi [10] adlanır və aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$|(f,g)| \le \|f\| \cdot \|g\|, \quad f(x), g(x) \in L_2 .$$

Aydındır ki, daha güclü formada

$$(|f|, |g|) \le \|f\| \cdot \|g\|$$

bərabərsizliyi də doğrudur.

Axırıncı bərabərsizlikdən alınır ki, $f(x) \cdot g(x)$ hasili o vaxt L fəzasına daxildir ki, vuruqlardan hər biri L_2 fəzasına daxil olsun.

Tərif 9. L_2 fəzasından götürülmüş $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı o vaxt $f(x) \in L_2$ funksiyasına zəif yığılır ki, ixtiyari $g(x) \in L_2$ funksiyası üçün

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, g) = (f, g)$$

münasibəti ödənilsin.

Teorem 4. Orta kvadratik yığılmadan zəif yığılma alınır.

Teoremin isbatı Bünyakovski bərabərsizliyinin tətbiqi ilə

$$|(f_n, g) - (f, g)| = |(f_n - f; g)| \le \|f_n - f\| \cdot \|g\|$$

bərabərsizliyindən alınır.

Bu teoremin tərsi doğru deyil. L_2 fəzasına daxil olan aşağıdakı

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in(n,n+1)\\ 0, & x\overline{\in}(n,n+1)\end{cases}$$

funksiyalar ardıcıllığına baxaq.

İsbat edək ki, bu funksiyalar ardıcıllığı bütün ədəd oxunda sıfır olan funksiyaya zəif yığılır. Tutaq ki, $g(x)\in L_2$. Skalyar hasili hesablayaq:

$$|(f_n,g)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)\overline{g(x)}dx\right|=\left|\int_n^{n+1}f_n(x)\overline{g(x)}dx\right|\le$$

$$\le\left(\int_n^{n+1}1^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_n^{n+1}|g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_n^{n+1}|g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Şərtə görə $g(x)\in L_2$ olduğundan $n\to\infty$ yaxınlaşdıqda axırıncı inteqral sıfra yaxınlaşar. Buradan zəif yığılma alınır.

Verilən ardıcıllıq sıfra orta kvadratik yığılmır, doğurdan da hər bir $f_n(x)$ funksiyasının norması vahid olduğundan

$$\|f_n-0\|=\|f_n\|=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_n^{n+1}1dx\right)^{\frac{1}{2}}=1.$$

alarıq.

§2. İnteqral altında limitə keçmə

Tərif 1. $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı ədəd oxunda $f(x)$ funksiyasına o vaxt sanki hər yerdə yığılır ki, ölçüsü sıfır olan x nöqtələr çoxluğundan başqa bütün x-lər üçün

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

münasibəti ödənilsin.

Teorem 1 (Fatu) [10]. Əgər L fəzasına daxil olan, mənfi olmayan $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı $f(x)$ funksiyasına sanki hər yerdə yığılırsa, onda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \le \sup_n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx \right\}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Fatu teoremi imkan verir ki, limit funksiyanın inteqralı, ardıcıllığın funksiyalarının inteqralları vasitəsilə qiymətləndirilsin. Sonrakı teorem isə inteqral altında limitə keçməyə imkan verir.

Teorem 2 (Lebeq). Əgər L fəzasına daxil olan $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı $f(x)$ funksiyasına sanki hər yerdə yığılırsa və

$$f(x) \le F(x) \in L$$

bərabərsizliyi ödənilirsə, onda

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

münasibəti doğrudur.

§3. Yuxarı sərhəddi dəyişən inteqralın diferensiallanması

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $L(a,b)$ fəzasına daxildir. Onda bu funksiya $L(a,x)$ $x\in(a,b)$ fəzasına daxil olacaq, deməli

$$\int_{a}^{x} f(t)dt \tag{1}$$

inteqralı x-in kəsilməz funksiyasıdır və onu yuxarı sərhəddə nəzərən diferensiallamaq olar. Bu deyilənlər aşağıdakı teoremdən alınır

Teorem [10]. Əgər $f(x)$ funksiyası $L(a,b)$ fəzasına daxildirsə, onda (1) inteqralı sanki bütün x-lər üçün sonlu törəməsi vardır və bu törəmə sanki hər yerdə inteqralaltı funksiya ilə üst-üstə düşür.

§4. İnteqrallama növbəsinin dəyişdirilməsi

Bu paraqrafda bütün Π müstəvisində təyin olunmuş iki dəyişənli kompleks qiymətli funksiyaya baxacağıq. Bu funksiyalar üçün L fəzası dedikdə, Π müstəvisi üzrə mütləq qiymətinin qeyri-məxsusi inteqralının sonlu olduğu funksiyalar çoxluğu başa düşülür.

Aşağıdakı teoremi qeyd edək

Teorem 1 (Fubini) [10]. Əgər $f(x,y)$ funksiyası L fəzasına daxildirsə, onda ölçüsü sıfır olan çoxluqdan başqa ədəd oxunun bütün x- nöqtələri üçün, y-ə nəzərən $f(x,y)$ funksiyası L fəzasına daxildir və

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \iint_{\Pi} f(x,y)dxdy$$

bərabərliyi ödənilir.

Anoloji olaraq

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \iint_{\Pi} f(x,y)dxdy$$

münasibəti də ödənilir.

Fubini teoreminin köməyi ilə ikiqat inteqral təkrar inteqralın hesablanmasına gətirilir. Bundan başqa təkrar inteqralların bərabərliyi alınır ki, bununla inteqrallama növbəsinin dəyişilməsi göstərilir.

Teorem 2 [10]. Əgər bütün müstəvidə $f(x,y) \geq 0$ bərabərsizliyi ödənilirsə və təkrar inteqrallardan biri vardırsa, onda digər təkrar inteqral da vardır, onlar bir-birinə bərabərdir və bunların ümumi qiyməti iki qat inteqralla üst-üstə düşür.

§5. Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsindən bəzi nəticələr

1. Kompleks dəyişənli funksiyanın diferensiallanması və inteqralı.

Tutaq ki, Z kompleks müstəvisinin G oblastında $f(z)$ funksiyası verilmişdir. Aşağıdakı tərifi qeyd edək

Tərif 1. Əgər $z_0 \in G$ nöqtəsində

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

nisbətinin $\Delta z \to 0$ yaxınlaşdıqda limiti vardırsa, onda bu limit $f(z)$ funksiyasının z kompleks dəyişəninə nəzərən z_0 nöqtəsində törəməsi adlanır, başqa sözlə

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \tag{1}$$

Bu halda $f(z)$ funksiyası z_0 nöqtəsində diferensiallanan adlanır.

Teorem 1 [6,9,11]. Əgər $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ funksiyası $z_0=x_0+iy_0$ nöqtəsində diferensiallanandırsa, onda (x_0,y_0) nöqtəsində $u(x,y)$, $v(x,y)$ funksiyalarının x,y dəyişənlərinə nəzərən xüsusi törəmələri vardır və

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y},\quad \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} \tag{2}$$

münasibətləri ödənir.

Teoremdə (2) münasibətləri Koşi-Riman şərtləri adlanır.

Teorem 2 [6,9,11]. Əgər (x_0, y_0) nöqtəsində $u(x,y)$ və $v(x,y)$ funksiyaları diferensiallanandırsa, onların xüsusi törəmələri (2) münasibətini ödəyirsə, onda $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiyası $z_0 = x_0 + iy_0$ nöqtəsində z kompleks dəyişəninə nəzərən diferensiallanan funksiyadır.

Aşağıdakı tərifi qeyd edək

Tərif 1. Əgər $f(z)$ funksiyası G oblastının hər bir nöqtəsində diferensiallanandırsa, onda $f(z)$ funksiyası G oblastında analitik funksiya adlanır.

Tutaq ki, z kompleks müstəvisində hissə-hissə hamar C əyrisi verilmişdir. C əyrisinin parametrik şəkildə tənliyindən istifadə edək, başqa sözlə onun hər bir nöqtəsinin ξ, η koordinatlarını $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ tənlikləri ilə verək, burada $\xi(t)$ və $\eta(t)$ $|\xi'(t)|^2 + |\eta'(t)|^2 \neq 0$, $\alpha \le t \le \beta$ şərtini ödəyən (α və β uyğun olaraq $\pm\infty$ qiymətini də ala bilər) t həqiqi parametrinin hissə-hissə hamar funksiyasıdır. Onda C əyrisinin ξ, η koordinatlarının verilməsi həqiqi t dəyişənli $\varsigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ kompleks funksiyasının verilməsi ilə ekvivalentdir.

Tutaq ki, C əyrisinin hər bir ς nöqtəsində $f(\varsigma)$ funksiyasının qiyməti təyin olunmuşdur. Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsində əsas anlayışlardan biri $f(\varsigma)$ funksiyasının C əyrisi üzrə inteqralı anlayışıdır. Bu anlayış aşağıdakı şəkildə verilir. Bunun üçün C əyrisini t parametrinin artma $(t_{i+1} > t_i)$ qiymətinə uyğun olaraq $\varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_n$ nöqtələri vasitəsilə n qövsə ayıraq. Sonra $\Delta\varsigma_i = \varsigma_i - \varsigma_{i-1}$ işarə edib

$$S(\varsigma_i, \varsigma_i^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i^*)\Delta\varsigma_i \tag{3}$$

cəmi düzəldək, burada ς_i^* i-ci qövsdə ixtiyari nöqtədir.

Aşağıdakı tərifi qeyd edək

Tərif 3. Əgər $\max|\Delta\varsigma_i| \to 0$ olduqda (2) cəminin limiti vardırsa, bu limit C əyrisinin hissələrə bölünmə qaydasından, ς_i^* nöqtəsinin seçilməsindən asılı deyildirsə, onda bu limitə $f(\varsigma)$ funksiyasının C əyrisi üzrə inteqralı deyilir və o

$$\int_C f(\varsigma)d\varsigma \tag{4}$$

ilə işarə olunur.

Biz əsasən məhdud oblastda analitik olan funksiyanın özünü kəsməyən hissə-hissə hamar qapalı əyri üzrə inteqralına baxacağıq. Özünü kəsən nöqtələri olmayan, hissə-hissə hamar qapalı əyriyə, qapalı kontur deyilir. Onda qapalı kontur üzrə götürülmüş (4) inteqralına kontur inteqralı deyəcəyik. Kontur inteqralının qiyməti inteqrallanma istiqamətindən asılı olduğundan, şərtləşək ki, kontur üzərində müsbət istiqamət olaraq, kontur üzərində hərəkət edildikdə qapalı konturla əhatə olunmuş daxili oblast sol tərəfdə qalsın. Kontur üzrə müsbət istiqamətdə inteqrallamanı

$$\int_{C^+} f(z)dz,$$

mənfi istiqamətdə inteqrallamanı isə

$$\int_{C^-} f(z)dz$$

ilə işarə edəcəyik.

Teorem 3 (Koşi teoremi) [6,8,9,11]. Tutaq ki, birrabitəli G oblastında birqiymətli analitik $f(z)$ funksiyası verilmişdir. Onda bütünlüklə G oblastında yerləşən, ixtiyari qapalı Γ konturu üzrə $f(z)$ funksiyasının inteqralı sıfra bərabərdir.

Teorem 4 [8,11]. Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası xaricdən C_0 konturu, daxildən isə $C_1, C_2, ..., C_n$ konturları ilə məhdud olan çoxrabitəli G oblastında analitikdir və $f(z)$ funksiyası qapalı $\overline{G}$ oblastında kəsilməzdir. Onda

$$\int_C f(\xi)d\xi = 0$$

burada C - qeyd olunan G oblastının tam sərhəddidir və $C_0, C_1, ..., C_n$ konturlarından ibarət olub, bu kontur üzrə istiqamət müsbət istiqamətdir.

2. Koşi inteqralı.

Qeyd olunan Koşi teoremindən bəzi nəticələr alınır. Belə ki, bu teorem verilmiş oblastda analitik olan funksiyanın oblastın daxili nöqtəsindəki qiyməti ilə bu funksiyanın oblastın sərhəddəki qiyməti arasında əlaqə yaratmağa imkan verir. Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası C konturu ilə məhdud olan birrabitəli G oblastında analitikdir. Bu oblastda z_0 daxili nöqtə götürək və z_0 nöqtəsini daxilində saxlayan, tamamilə G oblastında yerləşən qapalı Γ konturu quraq. Aşağıdakı köməkçi

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} \tag{5}$$

funksiyasına baxaq.

Aydındır ki, $\varphi(z)$ funksiyası z_0 nöqtəsindən başqa G oblastında analitikdir. Ona görə əgər biz G oblastında

z_0 nöqtəsini daxilində saxlayan və Γ konturu ilə əhatə olunmuş oblastın daxilində yerləşən qapalı γ konturu götürsək, onda $\varphi(z)$ funksiyası Γ konturu ilə γ konturunun arasında qalan iki-rabitəli G^* oblastında analitik olacaq. Onda Koşi teoreminə görə $\varphi(z)$ funksiyasının $\Gamma+\gamma$ konturu üzrə inteqralı

$$\int_{\Gamma^+}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi+\int_{\gamma^-}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi=0$$

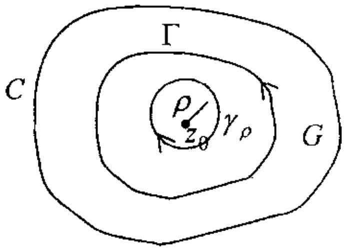
sıfır olur.

İkinci inteqralda inteqrallama istiqamətini dəyişsək, onda bu bərabərliyi

$$\int_{\Gamma^+}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi=\int_{\gamma^+}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi \qquad (6)$$

şəklində yaza bilərik.

Burada sol və sağ tərəfdəki inteqrallar inteqrallama konturundan asılı olmadığından γ konturu əvəzinə mərkəzi z_0 nöqtəsində,



Şəkil 1.

radiusu ρ olan γ_ρ çevrəsi götürək (şəkil 1). Onda

$\xi=z_0+\rho e^{i\varphi}$ götürsək

$$\int_{\Gamma^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = i \int_0^{2\pi} f(\xi) d\varphi$$

alarıq.

Axırıncı inteqralı aşağıdakı kimi çevirək:

$$\int_0^{2\pi} f(\xi) d\varphi = \int_0^{2\pi} [f(\xi) - f(z_0)] d\varphi + \int_0^{2\pi} f(z_0) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} [f(\xi) - f(z_0)] d\varphi + 2\pi f(z_0) \qquad (7)$$

Burada $\rho \to 0$ yaxınlaşdırmaqla limitə keçək. Belə ki, $f(z)$ funksiyası analitik olduğundan o, G oblastında kəsilməzdir, onda ixtiyari müsbət ε ədədinə qarşı ρ-nun elə qiymətini seçmək olar ki,

$$|\xi - z_0| < \rho \text{ olduqda}$$

$$|f(\xi) - f(z_0)| < \varepsilon$$

olar. Buradan $\rho \to 0$ olduqda

$$\lim_{\rho \to 0} \int_0^{2\pi} [f(\xi) - f(z_0)] d\varphi = 0$$

alarıq.

(7) münasibətində axırıncı hədd ρ-dan asılı olmadığından

$$\int_0^{2\pi} f(\xi)d\varphi = 2\pi f(z_0)$$

və ya

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi \qquad (8)$$

münasibətini alarıq. Alınmış (8) düsturuna Koşi inteqralı deyilir.

Aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem 5 [6,8,9,11]. Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası G oblastında analitik və qapalı $\overline{G}$ oblastında kəsilməzdir. Onda G oblastının daxili nöqtələrində $f(z)$ funksiyasının istənilən tərtibdən törəmələri var və

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi \qquad (9)$$

düsturu doğrudur.

3. Loran sırası.

Aşağıdakı

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad (10)$$

sırasına baxaq, burada z_0 - kompleks müstəvidə qeyd olunmuş nöqtə, c_n - müəyyən kompleks ədəddir, cəmləmə n indeksinin həm müsbət, həm də mənfi qiymətləri üçün aparılır. Qeyd olunan (10) sırasına Loran sırası deyilir. Bu sıranın yığılma oblastını təyin edək. Bunun üçün (10) sırasını aşağıdakı

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \tag{11}$$

şəklində yazaq. Aydındır ki, (10) sırasının yığılma oblastı (11) sırasında sağ tərəfdəki hər bir cəmin yığılma oblastlarının ümumi hissəsi olacaq. Onda

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

sırasının yığılma oblastı mərkəzi z_0 nöqtəsində, radiusu müəyyən R_1 olan dairə olacaq ([11]-də qeyd olunduğu kimi R_1 xüsusi halda sıfır və ya sonsuzluq ola bilər). Baxdığımız sıra yığıldığı dairənin daxilində kompleks dəyişənli analitik

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \qquad |z-z_0| < R_1 \tag{12}$$

funksiyaya yığılacaq.

İndi isə

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

sırasının yığılma oblastını təyin edək, bunun üçün $\xi = \dfrac{1}{z-z_0}$ əvəzləməsini aparaq. Onda bu sıra

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\xi^{n}$$

şəklində olacaq. Başqa sözlə bu sıra adi qüvvət sırasıdır və yığılma dairəsinin daxilində ξ kompleks dəyişəninin $\varphi(\xi)$ analitik funksiyasına yığılır. Alınmış qüvvət sırasının yığılma radiusunu $\frac{1}{R_2}$-lə işarə edək. Onda

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\xi^{n}, \quad |\xi| < \frac{1}{R_2} \tag{13}$$

Buradan alırıq ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^{n}}$$

sırasının yığılma oblastı $|z-z_0| = R_2$ çevrəsinin xarici oblastıdır (R_1-in təyinindəki kimi, xüsusi halda R_2 sıfır və ya sonsuzluq ola bilər).

Bu qayda ilə (11) münasibətində sağ tərəfdəki hər bir qüvvət sırası, öz yığılma oblastında uyğun olaraq bir analitik funksiyaya yığılır. Əgər $R_2 < R_1$ olarsa, onda bu sıraların ümumi yığılma oblastı var ki, bu dairəvi $R_2 < |z-z_0| < R_1$ halqadır və (10) sırası analitik

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \; R_2 < |z - z_0| < R_1 \quad (14)$$

$f(z)$ funksiyasına yığılır. Alınmış (12) və (13) sıraları adi qüvvət sıraları olduğu üçün, qeyd olunan oblastda $f(z)$ funksiyası qüvvət sırasının cəmi üçün olan bütün xassələri ödəyir. Bu onu göstərir ki, (10) Loran sırası öz yığılma halqasında analitik olan müəyyən $f(z)$ funksiyasına yığılır.

Əgər $R_2 > R_1$ olarsa, onda (12) və (13) sıralarının ümumi yığılma oblastları olmayacaq. Bu halda (10) sırası heç bir funksiyaya yığılmayacaq.

Aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem 6 [9,11]. Əgər $f(z)$ funksiyası dairəvi $R_2 < |z - z_0| < R_1$ halqasında analitikdirsə, onda bu halqada onu birqiymətli olaraq yığılan Loran sırası şəklində göstərmək olar.

4. Birqiymətli analitik funksiyanın izolə edilmiş məxsusi nöqtələrinin təsnifatı.

Əgər z_0 nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının məxsusi nöqtəsidirsə və $f(z)$ funksiyası $0 < |z - z_0| < R_1$ halqasında analitikdirsə onda z_0 nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının izolə edilmiş məxsusi nöqtəsi deyilir. Aydındır ki, z_0 nöqtəsində $f(z)$

funksiyası təyin olunmaya bilər. Onda z_0 nöqtəsinin ətrafında $f(z)$ funksiyasının özünü aparmasını öyrənək. Qeyd etdiyimiz kimi, $f(z)$ funksiyasını z_0 nöqtəsinin ətrafında, $0<|z-z_0|<R_1$ halqasında yığılan Loran sırasına ayırmaq olar. Bu halda aşağıdakı üç müxtəlif hal mümkündür. Alınmış Loran sırası:

1⁰. $(z-z_0)$ fərqinə nəzərən mənfi qüvvətli hədlərə malik deyil.

2⁰. $(z-z_0)$ fərqinə nəzərən sonlu sayda mənfi qüvvətli hədlərə malikdir.

3⁰. $(z-z_0)$ fərqinə nəzərən sonsuz sayda mənfi qüvvətli hədlərə malikdir.

Qeyd olunmuş hallara uyğun olaraq məxsusi nöqtələrin təsnifatını aparaq. Hər bir halı ayrılıqda nəzərdən keçirək.

1⁰. Bu halda izolə edilmiş məxsusi z_0 nöqtəsi ətrafında $f(z)$ funksiyasının Loran sırası $(z-z_0)$ fərqinə nəzərən mənfi qüvvətli hədlərə malik deyil, başqa sözlə

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n .$$

Aydındır ki, $z \to z_0$ yaxınlaşdıqda $f(z)$ funksiyasının limiti vardır və bu limit c_0-a bərabərdir. Əgər $f(z)$ funksiyası z_0 nöqtəsində təyin olunmayıbsa, onda $f(z_0) = c_0$ qəbul etməklə onu təyin etmək olar. Bu qayda ilə təyin olunmuş $f(z)$ funksiyası $|z - z_0| < R_1$ dairəsinin daxilində, hər yerdə analitikdir. Bu halda z_0 nöqtəsinə aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtə deyilir.

Aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem 7 [6,8,11]. Əgər $f(z)$ funksiyası $0 < |z - z_0| < R_1$ dairəvi halqada analitikdirsə və məhduddursa ($0 < |z - z_0| < R_1$ olduqda $|f(z)| < M$), onda z_0 nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir.

2^0. Verilmiş $f(z)$ funksiyasının izolə edilmiş məxsusi z_0 nöqtəsi ətrafında Loran sırası $(z - z_0)$ fərqinin mənfi qüvvətinə görə sonlu m sayda həddə malikdir, başqa sözlə $f(z)$ funksiyası

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

münasibətilə təyin olunur.

Bu halda z_0 nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının m tərtibdən polyusu adlanır.

Analitik funksiyanın öz polyus nöqtəsi ətrafında özünü aparması aşağıdakı teoremlə təyin olunur.

Teorem 8 [6,8,9,11]. Əgər z_0 nöqtəsi $f(z)$ analitik funksiyasının polyusudursa, onda z-in z_0-a yaxınlaşma qaydasından asılı olmayaraq, z z_0-a yaxınlaşdıqda $f(z)$ funksiyasının modulu qeyri-məhdud artır.

Bu teremə tərs olan aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem 9 [6,8,11]. Əgər $f(z)$ funksiyası öz izolə edilmiş məxsusi z_0 nöqtəsi ətrafında, z nöqtəsi z_0 nöqtəsinə ixtiyari qaydada yaxınlaşdıqda, $f(z)$-in modulu qeyri-məhdud artarsa, onda z_0 nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının polyusudur.

3^0. Verilmiş $f(z)$ funksiyasının izolə edilmiş məxsusi z_0 nöqtəsi ətrafında Loran sırası $(z-z_0)$ fərqinin mənfi qüvvətinə görə sonsuz sayda həddə malikdir, başqa sözlə $f(z)$ funksiyası

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

münasibətilə təyin olunur.

Bu halda z_0 nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının mühüm məxsusi nöqtəsi adlanır.

Analitik funksiyanın mühüm məxsusi nöqtənin ətrafında özünü aparması aşağıdakı teoremdə verilmişdir.

Teorem 10 (Soxotsko-Veyerştras) [8,9,11]. Əgər $z = z_0$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının mühüm məxsusi nöqtəsidirsə, onda istənilən sonlu və ya sonsuz B ədədi üçün z_0-a yığılan elə $\{z_n\}$- ardıcıllığı var ki, $\{f(z_n)\}$ ardıcıllığı B-yə yığılır.

Bu teoremdən alınır ki, z_0 mühüm məxsusi nöqtəsində analitik $f(z)$ funksiyasının sonlu və ya sonsuz limiti yoxdur. Beləliklə, z_0 nöqtəsinə yığılan nöqtələr ardıcıllığından asılı olaraq, biz müxtəlif limitə yığılan funksiyanın qiymətlər ardıcıllığını almış olarıq.

İndi isə sonsuz uzaqlaşmış nöqtənin ətrafında analitik funksiyanın özünü necə aparmasını araşdıraq.

Kompleks müstəvinin sonsuz uzaqlaşmış nöqtəsi birqiymətli analitik $f(z)$ funksiyasının izolə edilmiş məxsusi nöqtəsi o vaxt olur ki, əgər R-in elə qiyməti varsa ki, $|z| > R$ dairəsindən kənarda $f(z)$ funksiyasının $z = 0$ nöqtəsindən sonlu məsafədə məxsusi nöqtəsi olmasın.

Onda $f(z)$ funksiyası $R<|z|<\infty$ dairəvi halqada analitik olduğundan, onu həmin halqada $f(z)$ funksiyasına yığılan

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n, \quad R<|z|<\infty \tag{15}$$

Loran sırasına ayırmaq olar.

Sonlu izolə edilmiş z_0 məxsusi nöqtəsi üçün olduğu kimi, burada üç hal mümkündür:

1⁰. Əgər (15) ayrılışında z-in müsbət qüvvətli hədləri iştirak etməzsə, onda $z=\infty$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsi adlanır, başqa sözlə

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}$$

və ya limitə keçmə qaydasından asılı olmayaraq z ∞-a yaxınlaşdıqda $f(z)$ funksiyasının sonlu limiti olsun.

Əgər $c_0=c_{-1}=\ldots=c_{-m+1}=0,\ c_{-m}\neq 0$ olarsa, onda sonsuz uzaqlaşmış nöqtə $f(x)$ funksiyasının m-ci tərtibdən sıfrı olur.

2⁰. Əgər (15) ayrılışında z-in m sayda müsbət qüvvətli hədləri iştirak edirsə, onda $z=\infty$ nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının m tərtibdən polyusu adlanır, başqa sözlə

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{m}c_n z^n$$

və ya limitə keçmə qaydasından asılı olmayaraq z ∞-a yaxınlaşdıqda $f(z)$ funksiyasının modulu qeyri-məhdud artır.

3^0. Əgər (15) ayrılışında z-ə nəzərən sonsuz sayda müsbət qüvvətli hədlər vardırsa, onda $z=\infty$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının mühüm məxsusi nöqtəsi adlanır, başqa sözlə

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

və ya $\{z_n\}\to\infty$ ardıcıllığının seçilməsindən asılı olaraq, ixtiyari qabaqcadan verilən limitə yığılan $\{f(z_n)\}$ qiymətlər ardıcıllığını seçmək mümkün olsun.

5. İzolə edilmiş məxsusi nöqtədə analitik funksiyanın çıxığı.

Gələcəkdə geniş tətbiq olunan, birqiymətli analitik funksiyanın izole edilmiş məxsusi nöqtədə çıxığı anlayışını verək.

Tutaq ki, z_0 nöqtəsi birqiymətli analitik $f(z)$ funksiyasının izole edilmiş məxsusi nöqtəsidir. Onda $f(z)$ funksiyasını bu nöqtənin ətrafında yeganə qaydada

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad (16)$$

Loran sırasına ayırmaq olar, burada

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}d\varsigma$$

və xüsusi halda

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(\varsigma)d\varsigma \qquad (17)$$

təyin olunur.

Analitik $f(z)$ funksiyasının izolə olunmuş z_0 nöqtəsində çıxığı, $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\varsigma)d\varsigma$ inteqralının qiymətinə bərabər olan kompleks ədədə deyilir. Burada γ yeganə z_0 məxsusi nöqtəsini daxilində saxlayan, müsbət istiqamətli, $f(z)$ funksiyasının analitik olduğu oblasta yerləşən ixtiyari qapalı konturdur. Çıxığı işarə etmək üçün $res\,[f(z), z_0]$ ifadəsindən istifadə olunur.

Aydındır ki, əgər z_0 nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidirsə, onda $f(z)$ funksiyasının bu nöqtədə çıxığı sıfra bərabərdir. Verilmiş $f(z)$ funksiyasının izolə olunmuş z_0 nöqtəsində çıxığını hesablamaq, üçün (17) düsturundan

$$res[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(\varsigma)d\varsigma = c_{-1} \qquad (18)$$

alarıq.

Ancaq bəzi hallarda çıxığı sadə qaydalarla hesablamaq olar. Beləki, analitik funksiyanın kontur inteqralını hesablamaq əvəzinə, həmin funksiyanın törəməsinin inteqrallama konturuna daxil olan müəyyən nöqtələrdə qiymətini hesablamaq olar. Bu halı nəzərdən keçirək.

1^0. Tutaq ki, z_0 nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının birinci tərtibdən polyusudur.

Onda bu nöqtənin ətrafında

$$f(z) = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \qquad (19)$$

ayrılışı doğrudur.

Alınmış (19) münasibətinin hər tərəfini $(z - z_0)$ vuraq və z z_0-a yaxınlaşmaqla limitə keçsək

$$c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \qquad (20)$$

münasibətini alarıq.

Qeyd edək ki, bu halda $f(z)$ funksiyasını z_0 nöqtəsinin ətrafında iki analitik funksiyanın

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \qquad (21)$$

nisbəti kimi yaza bilərik, belə ki, $\varphi(z_0) \neq 0$ və z_0 nöqtəsi $\psi(z)$ funksiyasının birinci tərtibdən sıfırıdır, başqa sözlə

$$\psi(z) = (z - z_0)\psi'(z_0) + \frac{\psi''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \dots, \; \psi'(z_0) \neq 0. \qquad (22)$$

Onda (19)-(22) münasibətlərindən birinci tərtib polyus nöqtəsində çıxığı hesablamaq üçün

$$res[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \quad \left(f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right) \tag{23}$$

düsturunu alarıq.

2⁰. Tutaq ki, z_0 nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının m-ci tərtibdən polyusudur. Onda, həmin nöqtənin ətrafında aşağıdakı

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \ldots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots \tag{24}$$

ayrılış doğrudur.

Alınmış (24) münasibətinin hər tərəfini $(z - z_0)^m$ vursaq

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \ldots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \ldots \tag{25}$$

alarıq.

Bu bərabərliyin hər tərəfindən $(m-1)$ tərtibdən törəmə alsaq və z z_0-a yaxınlaşmaqla limitə keçsək m-ci tərtibdən polyus nöqtəsində çıxığı hesablamaq üçün

$$res[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \tag{26}$$

düsturunu alarıq.

Asanlıqla görmək olar ki, (20) düsturu (26) düsturunun xüsusi halıdır.

Aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem 11 [6,8,9,11]. Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası G oblastının daxilində sonlu sayda $z_k (k = 1,...,N)$ izolə edilmiş məxsusi nöqtələrdən başqa qapalı $\overline{G}$ oblastında analitikdir. onda

$$\int_{\Gamma^+} f(\varsigma)d(\varsigma) = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k] \tag{27}$$

münasibəti doğrudur. Burada Γ^+ müsbət istiqamətə malik olub G oblastının tam sərhəddidir.

Bu teoremin çox böyük praktiki əhəmiyyəti vardır, belə ki, oblastın daxilində yerləşən məxsusi nöqtədə $f(z)$ funksiyasının çıxığının hesablanması (27) münasibətində sol tərəfdə yerləşən inteqralın hesablanmasından olduqca asandır.

İndi isə sonsuz uzaqlaşmış nöqtədə çıxıq anlayışını verək.

Tutaq ki, $z = \infty$ nöqtəsi $f(z)$ analitik funksiyasının izolə edilmiş məxsusi nöqtəsidir. Verilmiş $f(z)$ analitik funksiyasının $z = \infty$ nöqtəsində çıxığı

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(\varsigma)d\varsigma = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\varsigma)d\varsigma$$

inteqralın qiymətinə bərabər olan kompleks ədədə deyilir, burada C elə ixtiyari qapalı konturdur ki, bu konturdan kənarda $f(z)$ funksiyası analitikdir və kontur daxilində ∞-dan başqa heç bir məxsusi nöqtəsi yoxdur. Aydındır ki, Loran sırasının əmsallarının təyinindən

$$res[f(z),\infty] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\varsigma)d(\varsigma) = -c_{-1} \qquad (28)$$

alarıq.

Alınmış (27) və (28) düsturlarından aşağıdakı teoremin isbatı alınır.

Teorem 12 [6,8,9,11]. Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası sonlu sayda $z_k \quad (k = 1,2,...,N)$ və $z = \infty \ (z_n = \infty)$ daxil olmaqla izolə edilmiş məxsusi nöqtələrdən başqa bütün kompleks müstəvidə analitikdir. Onda

$$\sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k] = 0 . \qquad (29)$$

münasibəti ödənilir.

6. Müəyyən inteqralın çıxıqlar vasitəsilə hesablanması.

Cıxıqlar haqqındakı qeyd etdiyimiz teoremlərin köməyi ilə kompleks dəyişənli funksiyanın inteqralı ilə yanaşı həqiqi dəyişənli funksiyanın inteqralını da hesablamaq olar.

Bizə gələcəkdə lazım olan bəzi inteqralların hesablanmasına baxaq.

1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ inteqralının hesablanması.

Biz burada çıxıqlar nəzəriyyəsinin köməyilə birinci növ qeyri-məxsusi $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ şəklində inteqralın hesablanmasına baxaq. Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur, bu funksiyanı yuxarı yarım müstəviyə analitik davam etdirmək mümkündür və davam funksiya müəyyən əlavə şərtləri ödəyir. Bu şərtlər aşağıda veriləcəkdir.

İndi isə aşağıdakı köməkçi lemmanı qeyd edək.

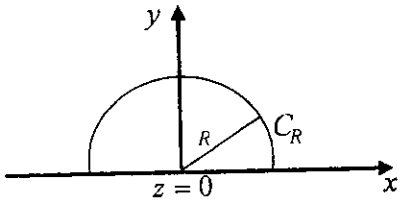
Lemma 1. Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası sonlu sayda izolə edilmiş məxsusi nöqtələrdən başqa $Jmz > 0$ yuxarı yarım müstəvidə hər yerdə analitikdir və elə müsbət R_0, M və δ sabitləri var ki, yuxarı yarım müstəvinin $|z| > R_0$ şərtini ödəyən nöqtələri üçün

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, |z| > R_0 \qquad (30)$$

qiymətlənməsi doğrudur. Onda

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(\varsigma)d\varsigma = 0 \tag{31}$$

münasibəti ödənilir, burada inteqrallama konturu C_R z-ə nəzərən $\operatorname{Im} z > 0$ yuxarı yarım müstəvidə $|z| = R$ yarım



Şəkil 2.

çevrəsidir (şək.2).

Doğrudan da lemmanın şərtləri daxilində $R > R_0$ olduqda

$$\left|\int_{C_R} f(\varsigma)d\varsigma\right| \le \int_{C_R} |f(\varsigma)|ds,$$

burada ds – C_R çevrəsində qövsün diferensialıdır [bax 11].

Onda $R \to \infty$ olduqda

$$\int_{C_R} |f(\varsigma)|ds \le \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{\pi M}{R^{\delta}} \to 0 .$$

Buradan lemmanın isbatını almış olarıq.

Qeyd. Əgər $f(z)$ funksiyası sonsuz uzaqlaşmış nöqtənin ətrafında analitikdirsə və $z = \infty$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının ikinci tərtibdən sıfırdırsa, onda bu funksiya üçün lemmanın şərtləri ödənilir.

Doğrudan da, bu halda $f(z)$ funksiyasının $z=\infty$ nöqtəsinin ətrafında Loran sırası

$$f(z)=\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-3}}{z^3}+\ldots=\frac{\psi(z)}{z^2},$$

şəklindədir, burada $|\psi(z)|<M$.

Bu dediklərimizdən aydındır ki, $\delta=1$ olduqda (30) qiymətlənməsi alınır. Qeyd olunmuş lemma 1 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralın hesablanmasında geniş tətbiq olunur. Bununla əlaqədar aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem 13 [11]. Tutaq ki, bütün $-\infty<x<\infty$ ədəd oxunda verilmiş $f(x)$ funksiyası yuxarı $Jmz\geq 0$ yarım müstəviyə davam etdirilə bilər, belə ki, bu funksiyanın analitik davamı olan $f(z)$ funksiyası lemmanın şərtlərini ödəyir və həqiqi oxda heç bir məxsusi nöqtəsi yoxdur. Onda birinci növ qeyri-məxsusi $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ inteqralı vardır və o

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n} res[f(z),z_k], \tag{32}$$

düsturu ilə hesablanır, burada $z_k-f(z)$ funksiyasının yuxarı yarım müstəvidə məxsusi nöqtəsidir.

2) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx$ inteqralının hesablanması.

Qeyd olunan qeyri-məxsusi inteqralın çıxıqlar nəzəriyyəsi vasitəsilə hesablanması aşağıda qeyd olunan Jordan lemmasına əsaslanır.

Lemma 2 (Jordan lemması). Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası sonlu sayda izolə edilmiş məxsusi nöqtələrdən başqa yuxarı $Jmz > 0$ yarımmüstəvisində analitikdir və $|z| \to \infty$ olduqda $\arg z$-ə $(0 \le \arg z \le \pi)$ nəzərən müntəzəm olaraq sıfra yaxınlaşır. Onda $a > 0$ olduqda

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C'_R} e^{ia\xi} f(\varsigma)d\varsigma = 0, \tag{33}$$

burada C'_R - yuxarı yarım müstəvidə $|z| = R$ yarım çevrəsidir.

İsbatı. Verilmiş $f(z)$ funksiyasının müntəzəm olaraq sıfra yaxınlaşmasından alınır ki,

$$|f(z)| < \mu_R, \ |z| = R \tag{34}$$

qiymətlənməsi doğrudur, burada R ∞-a yaxınlaşdıqda $\mu_k \to 0$. Onda (34) qiymətlənməsinin köməyilə verilmiş inteqralı qiymətləndirək. Bunun üçün $\varsigma = \mathrm{Re}^{i\varphi}$ əvəzləməsini aparaq və $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ olduqda $\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi$ məlum münasibətindən istifadə edək. Onda $R \to \infty$

$$\left| \int_{C'_R} e^{ia\varsigma} f(\varsigma)d\varsigma \right| < \mu_R \cdot R \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi = 2\mu_R \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi \le$$

$$\le 2\mu_R \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{aR\varphi}{\pi}} d\varphi = \frac{\pi}{a}\mu_R(1 - e^{-aR}) \to 0 \qquad (35)$$

münasibətini alarıq ki, bununla lemma isbat olunur.

Qeyd olunan Jordan lemması geniş sinif qeyri-məxsusi inteqralların hesablanmasında tətbiq olunur. Aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem 14. Tutaq ki, bütün $-\infty < x < \infty$ həqiqi oxda təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası yuxarı $\operatorname{Im} z \ge 0$ yarım müstəvisinə analitik davam olunandır, funksiyanın analitik davamı olan $f(z)$ funksiyası yuxarı yarım müstəvidə Jordan lemmasının şərtlərini ödəyir və həqiqi oxda heç bir məxsusi nöqtəsi yoxdur. Onda $a > 0$ olduqda $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx$ inteqralı vardır və

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[e^{iaz} f(x), z_k], \tag{36}$$

düsturu ilə hesablanır, burada z_k, $f(x)$ funksiyasının z-ə nəzərən yuxarı yarım müstəvidə məxsusi nöqtəsidir.

İsbatı. Teoremin şərtinə görə $f(z)$ funksiyasının z_k - məxsusi nöqtəsi $|z_k| < R_0$ şərtini ödəyir. İndi z-ə nəzərən yuxarı yarım müstəvidə, həqiqi oxun $-R \le x \le R$, $R > R_0$ parçası və z-ə nəzərən yuxarı yarım müstəvidə $|z| = R$ çevrəsinin C'_R - yarım çevrə qövsündən təşkil olunmuş qapalı kontura baxaq. Onda çıxıqlar nəzəriyyəsinə əsasən

$$\int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)dx + \int_{C'_R} e^{ia\varsigma} f(\varsigma)d\varsigma = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[e^{iaz} f(x), z_k] \tag{37}$$

münasibətini alarıq.

Jordan lemmasına görə (37) düsturunda sol tərəfdəki ikinci toplanan R ∞-a yaxınlaşdıqda sıfra bərabərdir. Buradan teoremin isbatı alınar.

FƏSİL 2

FURYE ÇEVİRMƏSİ

§1. Furye sırasının kompleks şəkli

Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası $[-\pi,\pi]$ parçasında mütləq inteqrallanandır (cəmlənəndir). Başqa sözlə $f(z)$ funksiyası $L[-\pi,\pi]$ fəzasına daxildir. Bu şərt

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \ k = 0,1,2,\ldots ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \ k = 1,2,\ldots.$$

Furye əmsallarının varlığını təmin edir. Onda $f(z)$ funksiyasına

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Furye sırasını qarşı qoyaq.

Burada $\sin kx$, $\cos kx$ triqonometrik funksiyalarını Eyler düsturundan istifadə edərək

$$\cos kx = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}, \ \sin kx = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}, \ i=\sqrt{-1}$$

şəklində yazaq.

İndi $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = \frac{a_k + ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k - ib_k}{2}$ $k \geq 1$ işarə edək.

Onda

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=$$

$$=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}+b_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right)=$$

$$=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k-ib_k}{2}e^{ikx}+\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ikx}\right)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{-ikx}\text{ alarıq.}$$

Bu qayda ilə $f(x)$ funksiyasına

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{-ikx}$$

Furye sırasını qarşı qoymaq olar.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyasının Furye sırası müntəzəm yığılır. Onda riyazi analiz kursundan məlumdur ki,

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{-ikx}$$

bərabərliyi doğrudur.

Sıranın müntəzəm yığıldığını pozmamaq şərtilə bu bərabərliyi məhdud e^{ilx} funksiyasına vuraq. Alınmış münasibəti $-\pi$-dən π-yə qədər inteqrallayaq. Sıra müntəzəm yığıldığından onu hədbə-həd inteqrallaşaq

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ilx}dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(l-k)x}\right)dx$$

alarıq.

Aydındır ki, $k \neq l$ olduqda

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)x}dx = \left.\frac{e^{i(l-k)x}}{i(l-k)}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i(l-k)\pi} - e^{-i(l-k)\pi}}{i(l-k)} = \frac{2\sin(l-k)\pi}{l-k} = 0.$$

$k = l$ olduqda isə

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-l)x}dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Bu qayda ilə

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ilx}dx = 2\pi C_l$$

münasibətini alarıq ki, buradan C_k əmsalları

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

kimi təyin olunar.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $(-\pi l, \pi l)$ parçasında təyin olunmuşdur və $L(-\pi l, \pi l)$ fəzasına daxildir. Onda $x = ul$ əvəzləməsini götürək, burada u dəyişəni $[-\pi, \pi]$ parçasında dəyişəcək. Bu halda $g(u) = f(ul)$ funksiyası $[-\pi, \pi]$ parçasında təyin olunmuşdur və $L(-\pi,\pi)$ fəzasına daxildir. Onda $g(u)$ funksiyası üçün Furye sırası

$$g(u) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-iku}, \quad C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) e^{iku} du$$

şəklində olacaq.

Burada x dəyişəninə qayıtsaq və C_k əmsallarında inteqral altında $u = \frac{x}{l}$ əvəzləməsini aparsaq

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi l}^{\pi l} g\left(\frac{x}{l}\right) e^{\frac{ikx}{l}} \cdot \frac{1}{l} dx = \frac{1}{2\pi l} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(x) e^{\frac{ikx}{l}} dx$$

münasibətini alarıq.

Aydındır ki, $f(x)$ funksiyasına

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{\frac{-ikx}{l}}$$

Furye sırası uyğundur, burada C_k

$$C_k = \frac{1}{2\pi l} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(x) e^{\frac{ikx}{l}} dx$$

münasibətilə təyin olunur.

Tutaq ki, bütün $l > 0$ üçün

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{\frac{-ikx}{l}}$$

bərabərliyi ödənilir.

Burada C_k əmsalları üçün münasibəti nəzərə alsaq

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l}f(u)e^{\frac{ik}{l}(u-x)}du,$$

alarıq. Bu münasibətin sağ tərəfinə inteqral cəmi kimi baxa bilərik. Bunu göstərmək üçün bütün ədəd oxunda təyin olunmuş aşağıdakı funksiyaya baxaq

$$\psi_l(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi l}^{\pi l}f(u)e^{i\sigma(u-x)}du.$$

Ədəd oxunu $0,\pm\frac{1}{l}\pm\frac{2}{l},\ldots$ nöqtələri vasitəsilə uzunluğu $\frac{1}{l}$ olan bərabər parçalara bölək. Sonra $\psi_l(\sigma)$ funksiyasının $\frac{k}{l}$ bölgü nöqtələrində

$$\psi_l\left(\frac{k}{l}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi l}^{\pi l}f(u)e^{i\frac{k}{l}(u-x)}du,$$

qiymətini hesablayıb $\left[\frac{k}{l},\frac{k+1}{l}\right]$ parçasının uzunluğuna vurub $-\infty$ dan ∞ kimi dəyişən bütün k-lar üçün cəmləyək.

Onda

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l}f(u)e^{i\frac{k}{l}(u-x)}du=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_l\left(\frac{k}{l}\right)\frac{1}{l},$$

münasibətini alarıq. Aydındar ki, «inteqral» cəmi bölgü parçalarının uzunluğu sıfra yaxınlaşdırqda inteqrala yaxınlaşacaq. Burada $l \to \infty$ yaxınlaşmaqla limitə keçsək, formal olaraq

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\infty}(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\sigma(u-x)} du ,$$

Furye inteqral düsturunu almış olarıq.

§2. L fəzasından olan funksiyaların Furye çevirməsi

1. Furye çevirməsinin tərifi və işarə olunması.

Furye inteqralı düsturunu aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\sigma u} du \right\} e^{-i\sigma x} d\sigma . \quad (1)$$

Aşağıdakı münasibətlə təyin olunan

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\sigma u} du \quad (2)$$

funksiyasını götürək.

Onda (1) Furye inteqral düsturu ilə təyin olunan $f(x)$ funksiyası $F(\sigma)$ funksiyası vasitəsilə

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma . \quad (3)$$

münasibətilə təyin olunar.

Alınmış (2) düsturu Furye çevirməsi adlanır. Onda $f(x)$ funksiyası vasitəsilə (2) münasibəti ilə təyin olunan $F(\sigma)$ funksiyasına $f(x)$ funksiyasının Furye çevirməsi deyilir. Biz burada əsas funksiyaları kiçik həriflərlə və onların Furye çevirmələrini isə böyük həriflərlə işarə edəcəyik. Bu işarələmələrlə yanaşı biz gələcəkdə Furye çevirməsinin operator işarələnməsindən də istifadə edəcəyik. Furye çevirməsi operatoru və ya sadəcə Furye operatoru V simvolu ilə işarə olunur və aydındır ki, $F(\sigma) = Vf(x)$.

Alınmış (3) düsturu tərs Furye çevirməsi düsturu, $f(x)$ funksiyasına isə $F(\sigma)$ funksiyasının tərs Furye çevirməsi adlanır. Tərs Furye çevirməsi operatoru V^{-1} kimi işarə olunur. Deməli $f(x) = V^{-1}F(\sigma)$ bərabərliyi doğrudur və (1) Furye inteqral düsturu onu göstərir ki, $f(x) = V^{-1}Vf(x)$.

Qeyd edək ki, Furye operatoru xəttidir, başqa sözlə V operatoru, inteqralın xassəsindən alınan

$$V[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha Vf(x) + \beta Vg(x),$$

münasibətini ödəyir.

2. Riman-Lebeq teoremi.

Aşağıdakı tərifi qeyd edək.

Tərif 1.

$$\varphi(a,b;x)=\begin{cases}1 & x\in(a,b);\\ 0 & x\overline{\in}(a,b)\end{cases}$$

təyin olunan $\varphi(a,b;x)$ funksiyasına (a,b) intervalının xarakteristik funksiyası deyilir.

Teorem 1. Əgər $f(x)$ funksiyası L fəzasındadırsa, onda onun Furye çevirməsi $F(\sigma)=Vf(x)$,

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} F(\sigma)=0$$

münasibətini ödəyən, bütün ədəd oxunda məhdud, kəsilməz funksiyadır.

İsbatı. $F(\sigma)$ funksiyasının məhdudluğu

$$|F(\sigma)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\sigma x}dx\right|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||e^{i\sigma x}|dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\frac{\|f\|_L}{\sqrt{2\pi}}<\infty$$

qiymətlənməsindən alınır.

Teoremin qalan hökmlərinin isbat etmək üçün əvvəlcə həmin hökmləri intervalın xarakteristik funksiyası, sonra isə pilləvari funksiya üçün isbat edək. Ümumi halın isbatı pilləvari funksiyalar çoxluğunun L fəzasında sıxlığından alınır. Əvvəlcə $\varphi(a,b;x)$ funksiyasının Furye çevirməsinə baxaq

$$\Phi(a,b;\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(a,b;x)e^{i\sigma x}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b}e^{i\sigma x}dx=\frac{e^{ib\sigma}-e^{ia\sigma}}{\sqrt{2\pi}i\sigma}.$$

Onda $\Phi(a,b;\sigma)$ funksiyası üçün alınmış düsturdan bu funksiyanın bütün ədəd oxunda kəsilməzliyi və

$$|\Phi(a,b;\sigma)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{|e^{ib\sigma}-e^{ia\sigma}|}{|i\sigma|}.\leq\frac{2}{\sqrt{2\pi}|\sigma|}$$

qiymətlənməsindən

$$\lim_{|\sigma|\to\infty}\Phi(a,b;\sigma)=0$$

münasibəti alınar.

İxtiyari pilləvari $h(x)$ funksiyasını $\varphi(a,b;x)$ funksiyalarının xətti

$$h(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi(a_k,b_k;x)$$

kombinasiyası şəkilində göstərmək olar.

Onda $H(\sigma)$ funksiyası

$$H(\sigma)=Vh(x)=V\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi(a_k,b_k;x)\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k V\varphi(a_k,b_k;x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\frac{e^{ib_k\sigma}-e^{ia_k\sigma}}{\sqrt{2\pi}i\sigma}$$

münasibəti ilə təyin olunur və teoremin hökmlərini ödəyir. Tutaq ki, $f(x) \in L$. Pilləvari funksiyalar sinfi L fəzasında sıxdır. Onda pilləvari elə $\{h_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı var ki, L normasında $f(x)$ funksiyasına yığılır. Başqa sözlə, bu ardıcıllıq üçün

$$\lim_{n\to\infty}\|f - h_n\| = 0$$

münasibəti ödənilir.

Onda $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N nömrəsi var ki, $n \geq N$ olduqda

$$\|f - h_n\| < \sqrt{2\pi}\,\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir.

İndi isə $Vf(x) - Vh_n(x)$ fərqinin mütləq qiymətini qiymətləndirək:

$$|F(\sigma) - H_n(\sigma)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}[f(x) - h_n(x)]e^{i\sigma x}dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x) - h_n(x)|dx = \frac{\|f - h_n\|}{\sqrt{2\pi}} < \varepsilon,\ n \geq N. \qquad (4)$$

Bu bərabərsizlik göstərir ki, $F(\sigma)$, $-\infty < \sigma < \infty$ funksiyası σ-ya nəzərən müntəzəm olaraq, $|\sigma|$ ∞-a yaxınlaşdıqda limiti sıfır olan, bütün ədəd oxunda kəsilməz funksiyalar ardıcıllığının limitidir.

Buradan alınır ki, $F(\sigma)$ funksiyası teoremdə deyilən bütün hökmləri ödəyir. Bu funksiyanın kəsilməzliyi, parçada kəsilməz funksiyalar ardıcıllığının müntəzəm yığıldığı funksiyanın kəsilməzliyi teoremindən alınır. Doğurdan da bütün ədəd oxunda müntəzəm yığılmadan istənilən sonlu parçada müntəzəm yığılma alınır. Bu isə $F(\sigma)$ funksiyasının istənilən sonlu parçada kəsilməzliyi deməkdir, başqa sözlə, istənilən σ nöqtəsində və ya bütün ədəd oxunda kəsilməzdir. Tələb olunan

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} F(\sigma) = 0$$

münasibəti aşağıdakı mühakimədən alınır. Aydındır ki, (4) münasibətindən

$$0 \le |F(\sigma)| < |H_n(\sigma)| + \varepsilon \tag{5}$$

alarıq.

Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $M > 0$ ədədi tapılar ki, $|\sigma| > M$ bərabərsizliyindən $|H_N(\sigma)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi alınar. Bu halda (5) münasibəti

$$0 \le |F(\sigma)| < 2\varepsilon$$

şəklində olar. Onda

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} F(\sigma) = 0$$

alınır. Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki,

$$F_1(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\sigma x} dx,$$

münasibətilə təyin olunan $F_1(\sigma)$ funksiyası $F(\sigma)$ funksiyasının bütün xassələrini ödəyir. Bunu asanlıqla göstərmək olar və qeyd edək ki,

$$F_1(\sigma) = F(-\sigma)$$

bərabərliyi ödənilir.

İsbat olunmuş teorem 1 Riman-Lebeq teoremi adlanır.

§3. Tərs Furye çevirməsi

Tutaq ki, $f(x) \in L$. Onda $F(\sigma)$ Furye çevirməsi L fəzasına daxil olmaya bilər. Məsələn aşağıdakı kimi təyin olunmuş

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

funksiyası L fəzasına daxildir.

Bu funksiyanın Furye çevirməsi

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{(i\sigma-1)x}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{(i\sigma-1)x}}{i\sigma-1}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-i\sigma)}.$$

Onda $F(\sigma)$ funksiyasının modulu

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}|1-i\sigma|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\sigma^2)}}$$

olar.

Bu qayda ilə $F(\sigma)$ funksiyası sonsuzluqda özünü $|\sigma|^{-1}$- kimi aparır, yəni inteqrallanan deyil. Ona görə bu funksiyanın tərs Furye çevirməsini təyin etmək mümkün deyil. Bunu təyin etmək üçün qeyri məxsusi inteqralın baş qiyməti anlayışından istifadə edəcəyik.

Məlumdur ki, bütün ədəd oxunda kəsilməz $Q(\sigma)$ funksiyasının $-\infty$-dan ∞-a qədər qeyri-məxsusi inteqralı, N və N_1 ədədlərinin bir-birindən asılı olmayaraq ∞-a yaxınlaşdıqda $\int_{-N}^{N_1}Q(\sigma)d\sigma$-nin limiti ilə təyin olunur. Əgər bu limit yoxdursa, lakin $\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}Q(\sigma)d\sigma$ vardırsa, onda bu limit, yəni $\int_{-\infty}^{\infty} Q(\sigma)d\sigma$ qeyri-məxsusi inteqralın Koşi mənada baş qiyməti adlanır. Məsələn,

$$Q(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}, & |\sigma| \geq 1, \\ \sigma\ , & |\sigma| < 1 \end{cases}$$

funksiyasının $-\infty$-dan ∞-a qədər qeyri-məxsusi inteqralının baş qiyməti sıfra bərabərdir, ancaq $\int_{-\infty}^{\infty} Q(\sigma)d\sigma$ inteqralı dağılandır.

Biz göstərəcəyik ki, $f(x)$ funksiyası əlavə şərtləri ödədikdə $F(\sigma) = Vf(x)$ funksiyasının tərs Furye çevirməsi baş qiymət mənasında vardır və $f(x)$ funksiyası ilə üst-üstə düşür.

Aşağıdakı tərifi qeyd edək.

Tərif 1. $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində Dini şərtini o vaxt ödəyir ki, əgər

$$\varphi(u) = \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u}$$

funksiyası müəyyən $\delta > 0$ üçün $L(-\delta, \delta)$ fəzasına daxil olsun.

Teorem 1. Əgər $f(x) \in L$ və müəyyən x nöqtəsində Dini şərtini ödəyirsə, onda həmin nöqtədə

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

bərabərliyi doğrudur, burada inteqral baş qiymət mənasında götürülür.

İsbatı. Əgər $f(x) \in L$ isə onda Riman-Lebeq teoreminə görə $F(\sigma) = Vf(x)$ funksiyası məhdud, bütün ədəd oxunda kəsilməz və

$$\lim_{|\sigma| \to \infty} F(\sigma) = 0$$

münasibətini ödəyir. Aşağıdakı münasibətlə təyin olunan $f_N(x)$ funksiyasına baxaq:

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} F(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

burada N - müəyyən müsbət ədəddir. Bu bərabərlikdə $F(\sigma)$ funksiyasının qiymətini yerinə yazsaq,

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) e^{i\sigma(u-x)} du$$

münasibətini alarıq.

Biz burada qeyri-məxsusi inteqralı σ-ya nəzərən inteqral altında inteqrallaya bilərik. Doğrudan da

$$\left|f(u)e^{i\sigma(u-x)}\right| \le |f(u)|,$$

qiymətlənməsi göstərir ki, qeyri-məxsusi inteqral σ parametrinə nəzərən müntəzəm yığılır.

İnteqrallama növbəsini dəyişsək,

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du \int_{-N}^{N} e^{i\sigma(u-x)}d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{e^{i\sigma(u-x)}}{i(u-x)}\Bigg|_{\sigma=-N}^{\sigma=N} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{e^{iN(u-x)} - e^{-iN(u-x)}}{i(u-x)}du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{\sin N(u-x)}{u-x}du$$

münasibətini alarıq.

Axırıncı inteqralda $t = u - x$ əvəzləməsini aparsaq

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin Nt}{t}dt \tag{1}$$

münasibətini alarıq.

Məlum

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin \alpha x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\cdot sign\alpha, \tag{2}$$

düsturundan istifadə edək, burada

$$sign\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -1, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Onda aşağıdakı

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nt}{t}dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin Nt}{t}dt+\int_{0}^{\infty}\frac{\sin Nt}{t}dt=2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin Nt}{t}dt=2\cdot\frac{\pi}{2}signN=\pi$$

bərabərliyini alarıq.

Əgər bu münasibəti π-yə bölüb, $f(x)$ funksiyasına vursaq

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\sin Nt}{t}dt \tag{3}$$

alarıq.

Sonra x nöqtəsində Dini şərti ödənildikdə

$$\lim_{N\to\infty}f_N(x)=f(x)$$

münasibətinin ödənilməsini isbat etmək lazımdır.

Bu münasibət isbat olunarsa, onda x nöqtəsində baş qiymət mənasında tərs Furye çevirməsinin varlığı və onun $f(x)$-lə üst-üstə düşməsi isbat olunmuş olur. (1) bərabərliyindən (3) bərabərliyini çıxsaq

$$f_N(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin Nt}{t}dt$$

alarıq. Burada inteqralı üç inteqrala ayırsaq,

$$f_N(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{|t|\le A}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\sin Ntdt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{|t|>A}\frac{f(x+t)}{t}\sin Ntdt-\frac{f(x)}{\pi}\int_{|t|>A}\frac{\sin Nt}{t}dt \tag{4}$$

alarıq.

Aydındır ki, $|t| \geq 1$ olduqda

$$\left|\frac{\sin Nt}{t}\right| \leq 1,$$

bərabərsizliyi doğrudur və t arqumentinə nəzərən $f(x+t) \in L$ olduğundan, istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $A(A > 1)$ ədədini elə seçmək olar ki, (4) münasibətinə daxil olan ikinci həddin mütləq qiyməti $\frac{\varepsilon}{3}$-dən kiçik olar. $N \geq 1$-ə nəzərən $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt$ qeyri-məxsusi inteqralı müntəzəm yığıldığından, A ədədini elə seçmək olar ki, alınmış (4) münasibətinə daxil olan üçüncü həddin mütləq qiyməti $\frac{\varepsilon}{3}$-dən kiçik olsun. Dini şərtinə görə

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}, & |t| \leq A \\ 0 & |t| > A \end{cases}$$

funksiyası L fəzasına daxildir, onda Riman-Lebeq teoremindən

$$\lim_{N \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \sin Nt dt = 0$$

münasibəti alınır. N -i elə seçmək olar ki, (4) bərabərliyində birinci həddin mütləq qiyməti $\frac{\varepsilon}{3}$-dən kiçik olsun. Bu qayda ilə ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə N_0 ədədi tapmaq olar ki, $N > N_0$ olduqda

$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ödənilsin. Bu isə onu göstərir ki,

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x).$$

Teorem isbat olundu.

§4. L_2 fəzasından olan funksiyaların Furye çevirməsi

Fərz edək ki, $f(x) \in L_2$. Buradan alınır ki, istənilən $N > 0$ üçün $f(x)$ funksiyası $L_2(-N, N)$ fəzasına daxildir. Onda $\int_{-N}^{N} |f(x)| dx$ inteqralına Koşi-Bünyakovski bərabərsizliyini tətbiq etsək

$$\int_{-N}^{N} |f(x)| dx \le \left(\int_{-N}^{N} dx \int_{-N}^{N} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty$$

alarıq.

Axırıncı bərabərsizlikdən $f(x)$ funksiyasının $L(-N,N)$ fəzasına daxil olduğu alınır. Aşağıdakı funksiyaya baxaq:

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), & |x|\le N \\ 0, & |x|>N. \end{cases}$$

Bu funksiya L fəzasına daxil olduğundan, onun üçün

$$F_N(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_N(x)e^{i\sigma x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} f(x)e^{i\sigma x}dx$$

Furye çevirməsi vardır.

Ola bilər ki, bu inteqralın $N\to\infty$ yaxınlaşdıqda limiti olmasın, başqa sözlə

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\sigma x}dx$$

inteqralı baş qiymət mənasında dağılsın. Biz göstərəcəyik ki, istənilən $f(x)\in L_2$ üçün orta kvadratik $\lim\limits_{N\to\infty} F_N(\sigma)=F(\sigma)$ limiti vardır. Bu limit tərifə görə $f(x)$ funksiyasının Furye çevirməsi olacaq. Qeyd edək ki, L fəzasından fərqli olaraq $f(x)\in L_2$ olduqda $F(\sigma)\in L_2$ olur.

Aşağıdakı lemmanı qeyd edək.

Lemma 1. Əgər $f(x)$ və $G(\sigma)$ funksiyaları L fəzasına daxildirsə, onda

$$(f,g)=(F,G).$$

İsbatı. Şərtə görə $G(\sigma)\in L$ olduğundan onun tərs Furye çevirməsi olan $g(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda məhduddur. Aydındır ki, bu xassəni $\bar{g}(x)$ funksiyası da ödəyəcək. Ona görə $f(x)\overline{g(x)}$ hasili L fəzasına daxildir. Onda hasil funksiyanın Furye çevirməsi vardır və aşağıdakı münasibətlə təyin olunur:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{iux}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iux}dx\,\overline{\int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iux}dx\int_{-\infty}^{\infty}\overline{G(\sigma)}e^{i\sigma x}d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{G(\sigma)}d\sigma\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i(\sigma+u)x}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+u)\overline{G(\sigma)}d\sigma.$$

Burada inteqral altında $\overline{g(x)}$ funksiyası $\overline{V^{-1}G(\sigma)}$ funksiyası vasitəsilə, inteqralın kompleks qoşması inteqral altı funksiyanın kompleks qoşması vasitəsilə əvəz olunmuş, sonra $f(x)G(\sigma)e^{i(\sigma+u)x}$ hasilinin L fəzasına daxil olduğundan inteqrallama növbəsi dəyişilmişdir. Alınmış bərabərlikdə $u=0$ qəbul etsək və hər tərəfi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$-yə bölsək lemmanın isbatını almış olarıq.

Nəticə. Əgər $f(x) \in L$ və $F(\sigma) \in L$ olarsa, onda

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma)|^2 d\sigma$$

Parseval bərabərliyi doğrudur.

İsbat üçün isbat olunmuş lemmada $G(\sigma) = F(\sigma)$ götürmək lazımdır.

Qeyd. Əgər $f(x), F(\sigma) \in L$ isə, onda $f(x) \in L_2$. Doğrudan da, $f(x) = V^{-1}F(\sigma)$ funksiyası məhduddur. Ona görə, $f(x) \in L$ və $\bar{f}(x)$ məhdud olduğundan

$$|f(x)|^2 = f(x)\bar{f}(x) \in L$$

olar.

Lemma 2. Əgər $f(x)$ funksiyası finitdirsə və bütün ədəd oxunda ikinci tərtibdən kəsilməz törəməyə malikdirsə, onda onun $F(\sigma)$ Furye çevirməsi L fəzasına daxildir.

İsbatı. Aydındırki, $f''(x)$ funksiyası finitdir onda o L fəzasındandır. Onun Furye çevrilməsi bütün ədəd oxunda məhduddur. İki dəfə hissə-hissə inteqrallamaqla $Vf''(x)$ funksiyasını hesablayaq:

$$Vf''(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f''(x)e^{i\sigma x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{i\sigma x}f'(x)-i\sigma e^{i\sigma x}f(x)\right]_{x=-\infty}^{x=\infty}+$$

$$+\frac{i^2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx=-\sigma^2F(\sigma)$$

alarıq. $f(x)$ və $f'(x)$ funksiyaları finit olduğundan, inteqraldan kənar həddlər sıfra bərabərdir. Onda

$$\left|\sigma^2F(\sigma)\right|=\left|Vf''(x)\right|\le c \text{ və ya } F|\sigma|\le\frac{c}{|\sigma|^2}$$

qiymətlənməsini alarıq. Axırıncı bərabərsizlik onu göstərir ki, $F(\sigma)$ kəsilməz olduğundan $F(\sigma)\in L$. Lemma isbat olundu.

Qeyd. Asanlıqla görmək olar ki, $f(x)$ funksiyası lemma 2-nin şərtlərini ödəyirsə $f(x)$ funksiyası kəsilməz törəməyə malikdir. Onda istənilən x üçün tərs Furye çevirməsi vardır və inteqral adi mənada başa düşülür, bundan əlavə, $F(\sigma)$ bütün oxda kəsilməzdir və L fəzasına daxildir.

§5. Planşerel nəzəriyyəsi

1. Unitar operator.

Tərif 1. Müəyyən fəzadan olan ədədi funksiyanı həmin fəzadan və ya başqa fəzadan olan ədədi funksiyaya çevirən abstrakt funksiyaya operator deyilir.

Məsələn, L fəzasında təyin olunmuş V Furye operatoru bu sinifdən olan funksiyaları bütün ədəd oxunda məhdud kəsilməz və $|\sigma|$ ∞-a yaxınlaşdıqda sıfra yaxınlaşan funksiyalar sinfinə çevirir.

Tərif 2. L_2 fəzasını bütün L_2 fəzasına çevirən xətti A operatoru o vaxt unitar adlanır ki, o normanı saxlasın, yəni $\|Af\| = \|f\|$ ödənilsin.

Misal vasitəsilə unitar operatoru araşdıraq. Bunun üçün L_2 fəzasında aşağıdakı münasibətlə təyin olunan T_ν operatoruna baxaq:

$$T_\nu f(x) = e^{i\nu} f(x)$$

burada ν - həqiqi ədəddir.

Bu operator xəttidir

$$T_\nu[\alpha f(x) + \beta g(x)] = e^{i\nu}[\alpha f(x) + \beta g(x)] =$$

$$= \alpha e^{i\nu} f(x) + \beta e^{i\nu} g(x) = \alpha T_\nu f(x) + \beta T_\nu g(x).$$

Aydındır ki, operator L_2 fəzasından olan bütün $f(x)$ funksiyaları üçün təyin olunmuşdur, belə ki, istənilən $F(x) \in L_2$ üçün elə $f(x) \in L_2$ funksiyası göstərmək olar ki, $F(x) = T_\nu f(x)$. ($f(x)$ əvəzinə $e^{-\nu} F(x)$ funksiyası götürmək olar). Beləliklə $T_\nu f(x)$, $f(x) \in L_2$ funksiyalar çoxluğu

L_2 - ilə üst-üstə düşür. İsbat edək ki, $T_\nu f(x)$ və $f(x)$ funksiyalarının norması eynidir. Doğrudanda

$$|T_\nu f(x)| = |e^{i\nu} f(x)| = |f(x)|,$$

buradan $T_\nu f(x)$ və $f(x)$ funksiyalarının mütləq qiymətlərinin bərabərliyindən isə onların normalarının bərabərliyi alınır. Bununla T_ν operatorunun unitar olması isbat olundu.

Lemma 1. Əgər A operatoru unitardırsa, onda A^{-1} tərs operatoru vardır və unitardır.

İsbatı. Aydındır ki,

$$f(x) \to g(x) = Af(x)$$

inikası qarşılıqlı birqiymətlidir. Doğrudanda, əgər $Af_1(x) = Af_2(x)$ isə onda xəttiliyə və normanın saxlanılmasına görə

$$0 = \|Af_1 - Af_2\| = \|A(f_1 - f_2\| = \|f_1 - f_2\|,$$

buradan $f_1(x)$ və $f_2(x)$ funksiyalarının üst-üstə düşməsi alınar, başqa sözlə A^{-1} operatoru var. Hər bir $g(x) = Af(x)$ funksiyasına tərs operator $f(x)$ funksiyasını qarşı qoyur, $A^{-1}g(x) = f(x)$. Belə ki, A operatoru L_2 fəzasını bütün L_2 fəzasına inikas etdirdiyindən, onda tərs operator həmçinin L_2 fəzasını bütün L_2 fəzasına inikas etdirir.

A^{-1} operatorunun unitar olması

$$\|A^{-1}g\| = \|f\| = \|Af\| = \|g\|$$

münasibətindən alınır.

Lemma isbat olundu.

2. Planşerel teoremi.

L_2 fəzasında Furye çevirməsini xarakterizə edən aşağıdakı teorem Planşerelə məxsusdur. Bu teorem operator şəklində verilmişdir.

Teorem 1. L_2 fəzasında

$$Vf(x) = F(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma x} - 1}{ix} f(x)dx, \qquad (1)$$

münasibətilə təyin olunan V operatoru ünitardır.

Tərs operator

$$V^{-1}F(\sigma) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma x} - 1}{-i\sigma} F(\sigma)d\sigma \qquad (2)$$

münasibətilə təyin olunur.

Onda V və V^{-1} operatorları uyğun olaraq L_2 fəzasında § 4-dəki tərifə əsasən Furye və tərs Furye çevirməsidir. Başqa sözlə, bu operatorlar

$$Vf(x) = F(\sigma) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(x) e^{i\sigma x} dx \ , \tag{3}$$

$$V^{-1} f(x) = f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} F(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma \tag{4}$$

münasibətlərilə təyin olunurlar.

İsbatı. Tutaq ki, $f(x) \in L_2$. $f(x)$ funksiyasına orta kvadratik yığılan iki tərtibdən kəsilməz törəməsi olan finit funksiyalar ardıcıllığı götürək. Finit funksiyalar sinfi L_2-də sıx olduğundan, belə ardıcıllıq var.

Bu ardıcıllığın ümumi həddini $f_n(x)$-lə işarə edək. Tutaq ki, $(-k_n, k_n)$ intervalından kənarda $f_n(x)$ funksiyası sıfra çevrilir. Onda §4 lemma 2-yə əsasən $f_n(x)$ və $F_n(\sigma)$ funksiyaları

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(\sigma)|^2 d\sigma \tag{5}$$

münasibətini ödəyirlər.

Furye çevrilməsi xətti olduğundan

$$V[f_n(x) - f_m(x)] = F_n(\sigma) - F_m(\sigma)$$

bərabərliyi doğrudur, buradan həmin lemmaya əsasən

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(\sigma) - F_m(\sigma)|^2 d\sigma \tag{6}$$

münasibəti doğrudur.

$\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı $f(x)$ funksiyasına orta kvadratik yığıldığından, bu ardıcıllıq fundamentaldır. Deməli (6) münasibətinin sol tərəfinin $n,m \to \infty$ olduqda sıfra yaxınlaşması alınır. Buradan sağ tərəf sıfra yaxınlaşır, başqa sözlə $\{F_n(\sigma)\}$ ardıcıllığı fundamentaldır. L_2 fəzasının tamlığından alınır ki, elə $F(\sigma) \in L_2$ funksiyası vardır ki, $\{F_n(\sigma)\}$ ardıcıllığı $F(\sigma)$ funksiyasına orta yığılır.

Beləliklə

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\sigma) = F(\sigma)$$

limitinin varlığını göstərdik.

İndi isə $F(\sigma)$ funksiyası üçün (1) münasibətini isbat edək. $F_n(\sigma)$ funksiyasını 0-dan σ-ya qədər inteqrallasaq

$$\int_0^\sigma F_n(u)du = \int_0^\sigma \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_n}^{k_n} f_n(x)e^{ixu}dx \right\} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_n}^{k_n} f_n(x)dx \int_0^\sigma e^{ixu}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_n}^{k_n} f_n(x) \frac{e^{ixu}}{ix}\Bigg|_{u=0}^{u=\sigma} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_n}^{k_n} f_n(x) \frac{e^{i\sigma x}-1}{ix}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \frac{e^{i\sigma x}-1}{ix}dx \qquad (7)$$

bərabərliyini alarıq. Alınmış bərabərliyin sol və sağ tərəfinin limitinin varlığını isbat edərək n ∞-a yaxınlaşmaqla limitə keçək.

Sol tərəfdəki ifadəyə baxaq. Aydındır ki, $F_n(u) \in L_2$ olduğundan $F_n(u) \in L_2(0,\sigma)$. Digər tərəfdən $1 \in L_2(0,\sigma)$ və

$$\left|\int_0^\sigma 1^2\,du\right| = |\sigma| < \infty .$$

$\{F_n(u)\}$ ardıcıllığı L_2 fəzasında $F(u)$ funksiyasına orta yığıldığından, həmin funksiyaya $L_2(0,\sigma)$ fəzasında da orta yığılacaq. Orta yığılmadan zəyif yığılma alınır, başqa sözlə

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\sigma F_n(u)du = \int_0^\sigma F(u)du$$

münasibəti doğrudur.

Alınmış (7) münasibətində sağ tərəfi limitinin varlığı analoji qaydada isbat olunur. $f_n(x)$ ardıcıllığı $f(x)$ funksiyasına orta yığıldığından, həmin funksiyaya zəyif yığılır.

Onda

$$\left|\frac{e^{i\sigma x}-1}{ix}\right|^2 \le \frac{\left(\left|e^{i\sigma x}\right|+1\right)^2}{|x|^2} = \frac{4}{x^2}$$

qiəmətləndirməsindən və bütün x-lər üçün $\dfrac{e^{i\sigma x}-1}{ix}$ funksiyasının kəsilməzliyindən, həmin funksiyasının x arqumentinə nəzərən L_2 fəzasına daxil olması alınır. Beləliklə

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\frac{e^{i\sigma x}-1}{ix}dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{i\sigma x}-1}{ix}dx$$

bərabərliyini alarıq.

(7) münasibətində n ∞-a yaxınlaşmaqla limitə keçsək

$$\int_0^{\sigma} F(u)du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{i\sigma x}-1}{ix}dx \tag{8}$$

bərabərliyini alarıq.

$F(u)\in L_2$, olduğundan onda $F(u)\in L_2(-N,N)$, buradan $F(u)\in L(-N,N)$ alarıq. Onda (8) münasibətində sol tərəfdəki inteqralı yuxarı sərhəddə görə diferensiallamaq olar və törəmə sanki hər yerdə inteqral altı funksiyaya bərabərdir. Nəticədə

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{i\sigma x}-1}{ix}dx$$

bərabərliyini alarıq, burada sağ tərəfdəki törəmə sanki hər yerdə var. Bununla (1) düsturu isbat olundu. Analoji qayda ilə (2) dustüru isbat olunur. Doğrudan da

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_n(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

bərabərliyini $[0,x]$ parçasında inteqrallasaq

$$\int_0^x f_n(u)du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x du\int_{-\infty}^{\infty}F_n(\sigma)e^{-i\sigma u}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_n(\sigma)d\sigma\int_0^x e^{-i\sigma u}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_n(\sigma)\frac{e^{-i\sigma x}-1}{-i\sigma}d\sigma$$

münasibətini alarıq.

Burada inteqralların yerinin dəyişilməsi qanunidir, çünki,

$$\left|F_n(\sigma)e^{-i\sigma u}\right|\le\left|F_n(\sigma)\right|$$

qiymətlənməsi doğrudur və $|F_n(\sigma)|$ funksiyası L fəzasına daxildir. Sonra $\dfrac{e^{-i\sigma x}-1}{i\sigma}$ funksiyası σ arqumentinə nəzərən L_2 fəzasına fəzasına daxildir. Qalan mühakimələr (1) münasibətinin isbatı üçün aparılan mühakimələrlə eynidir. Bu qayda ilə (2) münasibəti isbat olunur. Normanın kəsilməzliyindən istifadə edərək (5) münasibətində limitə keçsək V və V^{-1} operatorlarının unitar olduğu isbat olunar. Doğrudanda limitə keçsək

$$\|f\|=\|F\|$$

Parseval bərabərliyini alarıq ki, buradan V və V^{-1} operatorlarının unitar olduğu alınır. İndi isə $F(\sigma)$ funksiyasının Furye çevirməsi, eləcədə $f(x)$ funksiyasının tərs Furye çevirməsi olmasını xarakterizə edən (3) və (4) münasibətlərinin doğruluğunu göstərək. (3) düsturunu isbat edək ((4) düsturu analoji qaydada isbat olunur). Tutaq ki, $f(x) \in L_2$. Müəyyən $N > 0$ ədədi götürək və

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & |x| < N \\ 0, & |x| \geq N \end{cases}$$

funksiyasına baxaq.

Bu funksiaya L fəzasına daxildir. Onda bu funksianın (1) düsturuna nəzərən Furye çevirməsi

$$F_N(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) \frac{e^{i\sigma x} - 1}{ix} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\sigma} \int_{-N}^{N} f(x) \frac{e^{i\sigma x} - 1}{ix} dx$$

münasibətilə təyin olunur.

Diferensialladıqdan sonra alınan inteqral σ-ya nəzərən müntəzəm yığıldığından inteqral altında diferensiallasaq

$$F_N(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(x) e^{i\sigma x} dx,$$

alarıq. Digər tərəfdən əgər $F(\sigma)$ funksiyası (3) münasibəti vasitəsilə $f(x)$ funksiyası ilə təyin olunarsa onda Parseval bərabərliyinə əsasən

$$\|F - F_N\|^2 = \|f - f_N\|^2 = \int\limits_{|x|\geq N} |f(x)|^2 dx$$

münasibətini alarıq.

Burada N ∞-ya yaxınlaşdıqda sağ tərəfdəki inteqral sıfra yaxınlaşdığından

$$F_N(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} f(x) e^{i\sigma x} dx$$

funksiyası $F(\sigma)$ funksiyasına orta kvadratik yaxınlaşır, buradan (3) düsturunun isbatı alınır. Teorem isbat olundu.

3. Ümumiləşmiş Parseval bərabərliyi.

Tutaq ki, $f(x), g(x) \in L_2$, onda $F(\sigma), G(\sigma) \in L_2$. Burada λ müəyyən kompleks ədəd olduqda $f(x) + \lambda g(x)$ və $F(x) + \lambda G(x)$ funksiyalarına Parseval bərabərliyini tətbiq etsək

$$\|f + \lambda g\|^2 = \|F + \lambda G\|^2$$

alarıq.

Normanın kvadratını skalyar hasillə ifadə edək:

$$(f + \lambda g, f + \lambda g) = (F + \lambda G, F + \lambda G).$$

Bu skalyar hasili açsaq və $\|f\| = \|F\|$, $\|g\| = \|G\|$ bərabərliklərini nəzərə alsaq

$$\lambda(g, f) + \overline{\lambda}(f, g) = \lambda(G, F) + \overline{\lambda}(F, G).$$

Bu münasibətdə əvvəlcə $\lambda = 1$, sonra $\lambda = i$ qəbul etsək

$$(g,f)+(f,g)=(G,F)+(F,G); \qquad (10)$$

$$i(g,f)-i(f,g)=i(G,F)-i(F,G) \qquad (11)$$

bərabərliklərini alarıq.

(10) bərabərliyindən (11) çıxsaq və alınmış münasibəti i vuruğuna bölsək $(f,g)=(F,G)$ bərabərliyini alarıq ki, buna ümumiləşmiş Parseval bərabərliyi deyilir.Bu bərabərliyin inteqral şəkli

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma)\overline{G(\sigma)}d\sigma$$

münasibəti ilə təyin olunur.

4. Sinus və kosinus Furye çevirmələri.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası həqiqi dəyişənlidir və L fəzasına daxildir. Əgər $e^{i\sigma x}$ vuruğunu

$$e^{i\sigma x} = \cos\sigma x + i\sin\sigma x$$

ilə əvəz etsək, onda $f(x)$ funksiyasının Furye çevirməsi

$$Vf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\sigma x dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\sigma x dx$$

düsturu ilə təyin olunar. Fərz etsək ki, $f(x)$ funksiyası, əlavə olaraq, cüt funksiyadır, onda sağ tərəfdəki ikinci inteqral sıfra bərabərdir. Bu halda $f(x)$ funksiyasının kosinus Furye çevirməsi

$$V_c f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \sigma x dx$$

şəklində olar.

Analoji qaydada $f(x)$ tək funksiya olduqda sağ tərəfdəki birinci inteqral sıfra bərabərdir və i-nin əmsalı

$$V_s f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \sigma x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin \sigma x dx$$

sinus Furye çevirməsi adlanır.

İxtiyari həqiqi dəyişənli $f(x)$ funksiyası

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \varphi_{\text{cüt}}(x) + \varphi_{\text{tək}}(x)$$

kimi cüt və tək funksiyaların cəmi şəklində göstərildiyindən həmin funksiyanın sinus və kosinus Furye çevrilməsini yaza bilərik. Bu dediklərimizi nəzərə alsaq həqiqi dəyişənli funksiya üçün

$$Vf(x) = V\varphi_{\text{cüt}}(x) + V\varphi_{\text{tək}}(x) = V_c \varphi_{\text{cüt}}(x) + iV_s \varphi_{\text{tək}}(x)$$

münasibətini alarıq.

Kompleks qiymətli $f(x)$ funksiyası

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x)$$

cəmi şəklində yazıla bildiyindən, kompleks qiymətli funksiyanın Furye çevirməsini həqiqi dəyişənli funksiyanın

Furye çevirməsi vasitəsilə, başqa sözlə sinus və kosinus Furye çevirməsi vasitəsilə ifadə etmək olar. Əgər $f(x) \in L(0,\infty)$, onda $f(x)$ funksiyasını bütün ədəd oxuna cüt və ya tək davam etdirməklə sinusa və kosinus nəzərən Furye çevirməsini təyin etmək olar.

Əgər $f(x) \in L_2(0,\infty)$, onda sinus və kosinus Furye çevirməsinin təyini müəyyən çətinlik törədir. Dəqiq isbatı aparmadan qeyd edək ki, aşağıdakı düsturlarla təyin olunan

$$F_s(\sigma) = V_s f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{d\sigma} \int_0^\infty f(x) \frac{1-\cos\sigma x}{x} dx,$$

$$f(x) = V_s^{-1} f_s(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty F_s(\sigma) \frac{1-\cos\sigma x}{\sigma} d\sigma;$$

$$F_c(\sigma) = V_c f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{d\sigma} \int_0^\infty f(x) \frac{\sin\sigma x}{x} dx,$$

$$f(x) = V_c^{-1} F_c(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty F_c(\sigma) \frac{\sin\sigma x}{\sigma} d\sigma$$

münasibətlər $L_2(0,\infty)$ fəzasında iki V_s və V_c unitar operatorlarını təyin edir. Bu operatorların tərs operatoru $V_s^{-1} = V_s$ və $V_c^{-1} = V_c$ təyin olunur. Aperatorların unitarlığından

$$\|f\| = \|V_s f\| = \|V_c f\|$$

Parseval bərabərliyi alınır.

FƏSİL 3
VERİLMİŞ FUNKSİYANIN HAMARLIĞINDAN VƏ AZALMA SÜRƏTİNDƏN ASILI OLARAQ FURYE ÇEVRİLMƏSİNİN HAMARLIĞI VƏ SONSUZLUQDA AZALMA SÜRƏTİ

§1. Hamar funksiyanın Furye çevirməsinin sosuzluqda azalma sürəti

Aşağıdakı teoremi qeyd edək

Teorem. Əgər $f(x) \in L$, törəməsi $f'(x) \in L$ və Nyuton-Leybinis

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt, \qquad (*)$$

düsturu doğrudursa, onda

$$Vf'(x) = -(i\sigma)Vf(x)$$

münasibəti doğrudur.

İsbatı. Əvvəlcə $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ limitinin varlığını isbat edək. Törəmənin L fəzasına daxil olmasından və (*)-dan istifadə edərək x $\pm\infty$-a yaxınlaşdırmaqla limitə keçək. Onda $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ limitinin varlığını alarıq. Doğrudan da $f'(x) \in L$ və sağ tərəfin x $\pm\infty$-a yaxınlaşdıqda limiti sonludur. Aydındırki, bu limit sıfra bərabərdir, əks halda $f(x)$ funksiyası L fəzasına daxil olmaya bilər. Onda törəmənin Furye çevirməsini hissə-hissə inteqrallasaq

$$Vf'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{i\sigma x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)e^{i\sigma x}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}-\right.$$

$$\left.-i\sigma\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx\right]=(-i\sigma)Vf(x)$$

münasibətini alarıq.

Nəticə. Əgər $f(x)$ funksiyası üçün $f^{(k)}(x)\in L$, $k=0,1,2,...,m,$

onda

$$Vf^{(m)}(x)=(-i\sigma)^m Vf(x) \tag{1}$$

bərabərliyi ödənilir.

Nəticənin isbatı hissə-hissə inteqrallama ilə göstərilir, belə ki, inteqraldan kənar hədlər

$$\lim_{x\to\pm\infty}f^{(k)}(x)=0,\quad k=0,1,2,...,m-1,$$

bu münasibətinə görə sıfra bərabərdir. Bu münasibətin isbatı teoremdəki

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$$

bərabərliyinin isbatı ilə analojidir.

Şərtə görə $f^{(m)}(x)$ funksiyası L fəzasından olduğundan onun Furye çevirməsi məhduddur. Onda (1) bərabərliyindən

$$\left|(-i\sigma)^m\right|\left|Vf(x)\right| = \left|Vf^{(m)}(x)\right| \le C$$

qiəmətlənməsini və ya

$$\left|Vf(x)\right| \le \frac{C}{|\sigma|^m}$$

qiymətlənməsini alarıq ki, bu $f(x)$ funksiyasının Furye çevirməsinin sonsuzluqda $|\sigma|^{-m}$ kimi azaldığını göstərir. Deməli Furye çevirməsinin azalma sürəti verilmiş funksiyanın hamarlığından asılıdır. Digər tərəfdən (1) düsturu $f(x)$ funksiyasının kəsr tərtibdən törəməsini təyin etməyə imkan verir. Tutaq ki, α - müəyyən həqiqi ədəddir. Onda (1) bərabərliyində m-i α-ilə əvəz etsək

$$Vf^{(\alpha)}(x) = (-i\sigma)^{\alpha} Vf(x)$$

bərabərliyini alarıq.

Bu bərabərliyin hər iki tərəfinə V^{-1} Furye operatoru ilə təsir etsək, α tərtibdən törəmə üçün ifadə alarıq.

§2. Sonsuzluqda $|x|^{-m}$ kimi azalan funksiyanın Furye çevirməsinin hamarlığı

1. Furye çevirməsinin hamarlığı.

Teorem 1. Əgər $f(x)$ funksiyası $x^k f(x) \in L$, $k = 0,1,2,...,m$, şərtini ödəyərsə, onda

$$F(\sigma) = Vf(x)$$

funksiyasının m tərtibdən kəsilməz törəməsi var və

$$(-i)^m F^{(m)}(\sigma) = V[x^m f(x)] \tag{1}$$

bərabərliyi ödənilir.

İsbatı. Teoremin isbatını m nömrəsinə nəzərən riyazi induksiya metodu ilə aparaq. (1)-i $m = 1$ olduqda isbat edək. Məlum

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx$$

bərabərliyini, σ -ya nəzərən diferensiallasaq

$$F'(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ixf(x) e^{i\sigma x} dx$$

alarıq.

Burada σ -ya nəzərən diferensialladıqdan sonra alınan inteqral σ -ya nəzərən müntəzəm yığıldığından diferensiallama qanunidir. Beləliklə

$F'(\sigma) = iV[xf(x)]$ alarıq.

Tutaq ki, teorem $m-1$ nömrəsi üçün doğrudur, başqa sözlə, əgər $x^k f(x) \in L$, $k = 0,1,2,...,m-1$, isə onda $F(\sigma)$ funksiyası $m-1$ tərtibdən kəsilməz törəməyə malikdir və

$$(-i)^{m-1} F^{(m-1)}(\sigma) = V[x^{m-1} f(x)].$$

Fərz edək ki, $x^k f(x) \in L$, $k = 0,1,2,...,m$, onda buradan alırıq ki, $x^k f(x) \in L$, $k = 0,1,2,...,m-1$ və induksiyaya görə

$$(-i)^{m-1} F^{(m-1)}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{m-1} f(x) e^{i\sigma x} dx .$$

Bu bərabərliyi σ-ya nəzərən diferensiallasaq

$$(-i)^{m-1} F^{(m)}(\sigma) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{m} f(x) e^{i\sigma x} dx$$

alarıq. Diferensiallandıqdan sonra alınmış inteqral σ-ya nəzərən müntəzəm yığıldığından, diferensiallanma əməliyyatı qanunidir. Alınmış bərabərliyin hər tərəfini $(-i)$ vursaq (1)-in doğruluğunu alarıq. $F(m)$ funksiyası L fəzasına daxil olan funksiyanın Furye çevirməsi olduğundan kəsilməzdir. Teorem isbat olundu.

2. Furye çevirməsinə nəzərən invariant olan hamar funksiyalar sinfi.

Bütün ədəd oxunda sonsuz tərtibdən kəsilməz törəmələrə malik olan və

$\left|x^k \varphi^{(q)}(x)\right| \le C_{k,q}$, $k,q = 0,1,2,...$ bərabərsizliyini ödəyən $\varphi(x)$ funksiyalar sinfinə baxaq. Burada $C_{k,q}$ k və q nömrələrindən asılı olan sabittlərdir.

Bu funksiyalar sinfini S_x-lə işarə edək. Onda S_x sonsuzluqda sürətlə azalan hamar funksiyalar sinfidir. Məsələn, e^{-x^2} funksiyası S_x sinfinə daxildir.

Teorem 2.

$$V[S_x] = S_\sigma.$$

İsbatı. Əgər biz

$$V[S_x] \subset S_\sigma \quad \text{və} \quad S_\sigma \subset V[S_x]$$

münasibətlərini isbat etsək, onda

$$V[S_x] = S_\sigma$$

bərabərliyini alarıq.

Əvvəlcə $V[S_x] \subset S_\sigma$ münasibətini isbat edək. Bunun üçün ixtiyari $k, q = 0,1,2,...$ olduqda $x^k \varphi^{(q)}(x)$ hasilinin L fəzasına daxil olduğunu göstərək. Aydındır ki, S_x sinfinin təyinindən çıxır ki,

$$\left|x^{k+2}\varphi^{(q)}(x)\right| = x^2\left|x^k\varphi^{(q)}(x)\right| \le C_{k+2,q}$$

və ya

$$\left|x^k\varphi^{(q)}(x)\right| \le \frac{C_{k+2,q}}{x^2}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Buradan $x^k\varphi^{(q)}(x) \in L;\ k, q = 0,1,2,...$ olduğu alınır.

Onda (1) düsturunu $m = q$ üçün yazsaq

$$(-i)^q[V\varphi(x)]^{(q)} = V[x^q\varphi(x)] \qquad (2)$$

münasibətini alarıq.

Aydındır ki, $x^q\varphi(x)$ hasili sonsuz tərtibdən diferensiallanandır. $[x^q\varphi(x)]^{(k)}$ törəməsini hesablamaq üçün Leybinis düsturunu tətbiq etsək

$$[x^q\varphi(x)]^{(k)} \in L$$

münasibətini alarıq.

Onda §1-də (1) və (2) düsturundan

$$V\left\{[x^q\varphi(x)]^{(k)}\right\} = (-i\sigma)^k V[x^q\varphi(x)] = (-i\sigma)^k(-i)^q[V\varphi(x)]^{(q)}.$$

Hər iki tərəfdən modula keçsək

$$\left|\sigma^k[V\varphi(x)]^{(q)}\right| = \left|V\left\{[x^q\varphi(x)]^{(k)}\right\}\right| \le C^0_{k,q}.$$

L fəzasından olan funksiyaların Furye çevirmələri bütün ədəd oxunda məhdud olduğundan, axırıncı qiymətlənmədən $[x^q\varphi(x)]^{(k)} \in L$. Beləliklə, $V[S_x] \subset S_\sigma$ olduğunu isbat etdik. İndi isə $S_\sigma \subset V[S_x]$ olduğunu isbat edək.

İxtiyari $\Phi(\sigma) \in S_\sigma$ funksiyası götürək və bu funksiyanın tərs $\varphi(x) = V^{-1}\Phi(\sigma)$ Furye çevirməsinə baxaq. Onda $\varphi(x) \in S_x$, bu münasibətin isbatı $V[S_x] \subset S_\sigma$ münasibətinin isbatı ilə analojidir. $\varphi(x) = V^{-1}\Phi(\sigma)$ bərabərliyindən isə $\Phi(\sigma) = V\varphi(x)$ münasibəti alınır. Teorem isbat olundu.

§3. Sonsuzluqda eksponent kimi azalan funksiyaların Furye çevirməsi

Tutaq ki, $f(x)$ elə funksiyadır ki, $e^{\alpha|x|}f(x)$, $\alpha > 0$ hasili L fəzasına daxildir. Aydındır ki, əgər $f(x)$ hamar funksiyadırsa onda o sonsuzluqda istənilən $m > 0$ üçün $|x|^{-m}$-dən sürətlə azalır.

Təbiidir ki, $F(\sigma) = Vf(x)$ funksiyasının bütün tərtib kəsilməz törəmələrinin varlığından başqa əlavə xassələri aşağıdakı teoremlə xarakterizə olunur.

Teorem. Əgər bütün ədəd oxunda təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası üçün $f(x)e^{\alpha|x|} \in L$, $\alpha > 0$ isə, onda

$$F(z) = F(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{it(x+iy)}dt \qquad (1)$$

funksiyası $|y| < \alpha$ zolağında analitikdir və $|y| \le \alpha$ üçün y-ə nəzərən müntəzəm olaraq

$$\lim_{|x|\to\infty} F(z) = 0$$

münasibəti ödənilir.

$f(x)$ funksiyası $F(z)$ vasitəsilə

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(z)e^{-ixz}dz,$$

düsturu ilə bərpa olunur, burada inteqrallamanı həqiqi oxa paralel istənilən $z = x + ia$, $|a| < \alpha$ düz xətti üzrə aparmaq olar.

İsbatı: Əvvəlcə isbat edək ki, (1) inteqralı $|y| \le \alpha$ zolağında yığılandır və $|y| < \alpha$ zolağında isə analitik funksiyadır. İnteqralaltı $f(t)e^{it(x+iy)}$ funksiyası üçün $|y| \le \alpha$ olduqda

$$\left|f(t)e^{itx}e^{-ty}\right| \le |f(t)|e^{|ty|} \le |f(t)|e^{\alpha|t|}$$

Qiymətlənməsi doğrudur. Buradan $|y| \le \alpha$ zolağında inteqralın yığılması alınır. $F(z)$ funksiyasının $|y| < \alpha$ zolağında analitik olması aşağıdakı qaydada göstərilir. Bunun üçün $z = x + iy$, $|y| < \alpha$ nöqtəsini götürək və (1) münasibətinin təyin etdiyi $F(z)$ funksiyasını formal olaraq z-ə nəzərən diferensiallasaq

$$F'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} itf(t)e^{itz}\,dt$$

alarıq.

İndi inteqral altı funksiyanı qiymətləndirək:

$$\left|itf(t)e^{itx}e^{-ty}\right| = \left|tf(t)e^{-ty}\right| \le \left|tf(t)e^{|ty|}\right| =$$

$$= \left|te^{(|y|-\alpha)|t|}\right| |f(t)|e^{\alpha|t|} \le C|f(t)|e^{\alpha|t|}.$$

Alınmış qiymətlənmə $|y| \le \alpha_0 < \alpha$ olduqda z-dən asılı deyildir, onda diferensiallandıqdan sonra alınmış inteqral z-ə nəzərən $|\operatorname{Im} z| \le \alpha_0 < \alpha$ olduqda müntəzəm yığıldığından $F(z)$ funksiyası $|y| < \alpha$ üçün analitikdir. İndi isə $\lim\limits_{|x| \to \infty} F(z) = 0$ münasibətinin $|y| \le \alpha$ olduqda y-ə nəzərən, müntəzəm ödənildiyini isbat edək.

Bunun üçün əvvəlcə intervalın xarakteristik $\varphi(a,b;x)$ funksiyasını götürək.

Aydındır ki,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(a,b;t) e^{itz} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{itz} dt =$$

$$= \frac{e^{ibz} - e^{iaz}}{\sqrt{2\pi} iz} = \frac{e^{ibx} e^{-by} - e^{iaz} e^{-ay}}{\sqrt{2\pi} iz}.$$

Onda $|y| \le \alpha$ şərtini ödədikdə y-ə nəzərən müntəzəm olaraq $\Phi(a,b;z)$ funksiyasının sıfra yaxınlaşması

$$\left| \frac{e^{ibz} - e^{iaz}}{i\sqrt{2\pi} z} \right| \le \frac{2e^{\max\{|a|,|b|\}\alpha}}{\sqrt{2\pi}|x|}$$

qiymətlənməsindən alınır.

İstənilən pilləvari $h(x)$ funksiyası $\varphi(a,b;x)$ funksiyalarının xətti kombinasiyası şəklində verildiyindən, onda bütün pilləvari funksiyalar üçün $|y| \le \alpha$ olduqda y-ə nəzərən müntəzəm olaraq

$$\lim_{|x|\to\infty} H(z) = 0.$$

Əgər $f(x)$ funksiyası $f(x)e^{\alpha x} \in L$ şərtini ödəyərsə, onda elə $\{h_n(x)\}$ pilləvari funksiyalar ardıcıllığı qura bilərik ki,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - h_n(x)| e^{\alpha|x|} dx = 0,$$

münasibəti ödənilsin.

Doğrudanda, n ∞-a yaxınlaşdıqda limiti sıfra yaxınlaşan müsbət $\{\varepsilon_n\}$ ədədlər ardıcıllığını götürək. Hər bir n üçün elə $k_n > 0$ ədədi tapılar ki,

$$\int_{|x|>k_n} |f(x)| e^{\alpha|x|} dx < \frac{\varepsilon_n}{2}$$

bərabərsizliyi ödənilsin.

$[-k_n, k_n]$ parçasında

$$\int_{|x|\le k_n} |f(x) - h_n(x)| dx < \frac{\varepsilon_n}{2e^{\alpha k_n}}$$

bərabərsizliyini ödəyən $h_n(x)$ pilləvari funksiyasını tapaq. Bunun üçün

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-h_n(x)|e^{\alpha|x|}dx = \int_{|x|\le k_n}|f(x)-h_n(x)|e^{\alpha|x|}dx +$$

$$+ \int_{|x|>k_n}|f(x)-h_n(x)|e^{\alpha|x|}dx \le \int_{|x|\le k_n}|f(x)-h_n(x)|e^{\alpha k_n}dx +$$

$$+ \int_{|x|>k_n}|f(x)|e^{\alpha|x|}dx < \varepsilon_n$$

bərabərsizliyini alarıq.

Onda $|\operatorname{Im} z| \le \alpha$ olduqda, z -dən asılı olmayaraq

$$|F(z)-H_n(z)| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)-h_n(t)]e^{itz}dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-h_n(t)|e^{\alpha|t|}dt < \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{2\pi}}$$

qiymətlənməsi doğrudur.

Beləliklə $F(z)$ funksiyası $|y| \le \alpha$ zolağında $H_n(z)$ funksiyalarının müntəzəm limitidir və $H_n(z)$ funksiyaları tələb olunan xassəni ödədiyindən, bu xassəni $F(z)$ funksiyası da ödəyir.

İndi isə göstərək ki, tərs Furye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(z)e^{ixz}dz$$

çevirməsində həqiqi ox üzrə inteqrallamanı başqa ixtiyari $z = x + ia$, $|a| < \alpha$ düz xətt üzrə də aparmaq olar.

Məlumdur ki, fəsil 2 §3-də olduğu kimi əlavə şərtlər daxilində baş qiymət mənasında tərs Furye çevirməsi vardır.

Qeyd olunmuş $|y| < \alpha$ zolağında analitik $F(z)e^{-itz}$ funksiyasını təpə nöqtələri $\pm N, \pm N + ia,$ $|a| < \alpha$ olan düzbucaqlı kontur üzrə inteqrallasaq, bu inteqral sıfra bərabərdir. Bu inteqralı düzbucaqlının tərəfləri üzrə dörd inteqralın cəmi şəklində yazsaq

$$0 = \int_{-N}^{N} F(z)e^{-itz}dz + \int_{N}^{N+ia} F(z)e^{-itz}dz + \int_{N+ia}^{-N+ia} F(z)e^{-itz}dz + \int_{-N+ia}^{-N} F(z)e^{-itz}dz \quad (2)$$

münasibətini alarıq.

Belə ki, $|y| \le \alpha$ olduqda y-ə nəzərən müntəzəm olaraq

$$\lim_{|x|\to\infty} F(z) = 0$$

olduğundan N ∞-a yaxınlaşdıqda ikinci və dördüncü inteqral sıfra yaxınlaşır. Ona görə (2) münasibəti N ∞-a yaxınlaşdıqda

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} F(z)e^{-itz}dz + \int_{-\infty}^{\infty+i\alpha} F(z)e^{-itz}dz,$$

şəklində olar. Bu münasibəti $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$-yə vursaq tərs Furye çevrilməsini və eləcə də teoremin isbatını almış olarıq.

FƏSİL 4

ANALİTİK FUNKSİYALARIN FURYE ÇEVİRMƏSİ

§1. Qoşma funksiya

1. Qoşma funksiyanın tərifi.

Tutaq ki, bütün ədəd oxunda təyin olunmuş həqiqi $f(x)$ funksiyası üçün

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i(u-x)\sigma}\,du\,d\sigma$$

tərs Furye çevirməsi doğrudur.

Burada $e^{i(u-x)\sigma}$ ifadəsini $\cos(u-x)\sigma+i\sin(u-x)\sigma$ cəmi ilə əvəz etsək və $f(x)$ funksiyasının həqiqi olduğunu nəzərə alsaq

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(u-x)\sigma\,du\,d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\sigma u\,du\right)\cos\sigma x+\right.$$

$$\left.+\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\sigma u\,du\right]\sin\sigma x\right\}d\sigma.$$

Adi mötərizə daxilindəki inteqral σ-ya nəzərən cüt funksiyadır, onda böyük mötərizə daxilindəki birinci toplanan iki cüt funksiyanın, yəni inteqral və $\cos\sigma x$ funksiyalarının hasili olduğundan cüt funksiyadır.

Analoji qaydada böyük mötərizə daxilindəki ikinci toplanan iki tək funksiyanın, yəni inteqral və $\sin\sigma x$-in hasili olduğundan cüt funksiyadır. Əgər

$$\left.\begin{aligned} a(\sigma) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\sigma u\,du, \\ b(\sigma) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\sigma u\,du, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

işarələmələrini qəbul etsək, yuxarıdakı düsturu

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(\sigma)\cos\sigma x + b(\sigma)\sin\sigma x]d\sigma \tag{2}$$

şəklində yaza bilərik.

Tərif. $$g(x) = \int_0^{\infty} [b(\sigma)\cos\sigma x - a(\sigma)\sin\sigma x]d\sigma \tag{3}$$

düsturu ilə təyin olunan $g(x)$ funksiyasına (2) münasibətilə təyin olunan $f(x)$ funksiyasına nəzərən qoşma funksiya deyilir.

Burada qoşmalığın hansı mənada başa düşüldüyünü aydınlaşdıraq. Verilmiş $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları uyğun olaraq müəyyən analitik funksiyanın həqiqi və xəyalı hissələridir, onda burada qoşmalıq $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının qoşma harmonik funksiya olması mənasında başa düşülür. Bu təklifi yoxlayaq.

Aşağıdakı funksiyaya baxaq:

$$\Phi(z) = \int_0^\infty [a(\sigma) - ib(\sigma)]e^{i\sigma z} d\sigma .$$

Bu funksiya müəyyən şərtlər daxilində analitik funksiya olacaq. Bu funksiyanın həqiqi və xəyali hissələri heç olmasa $y \geq 0$ üçün vardır və

$$\operatorname{Re}\Phi(z) = \int_0^\infty [a(\sigma)\cos\sigma x + b(\sigma)\sin\sigma x]e^{-\sigma y} d\sigma = u(x,y);$$

$$\operatorname{Im}\Phi(z) = \int_0^\infty [-b(\sigma)\cos\sigma x + a(\sigma)\sin\sigma x]e^{-\sigma y} d\sigma = v(x,y)$$

düsturları ilə təyin olunurlar. Alınmış $u(x,y)$ və $v(x,y)$ funksiyaları qoşma hormanikdir. Onda $\operatorname{Re}\Phi(z)$ və $\operatorname{Im}\Phi(z)$ ifadələrində $y = 0$ qəbul etsək

$$f(x) = u(x,0), \;\; g(x) = -v(x,0)$$

münasibətlərini alarıq.

Beləliklə, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının kəsilməz və ya törəmələri olmadıqları halda belə qoşma olmalarının mənasını araşdırdıq.

2. Qoşma funksiyaların xarakteristik xassələri.

Aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem. Verilmiş $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının qoşma olması üçün zəruri və kafi şərt

$$G(\sigma) = -iF(\sigma) sign \sigma \tag{4}$$

münasibətinin ödənməsidir.

Zərurilik. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları qoşmadır, başqa sözlə, əgər $f(x)$ funksiyası (2) münasibətilə verilmişdirsə, onda $g(x)$ funksiyası (3) bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $a(\sigma)$ və $b(\sigma)$ əmsalları (1) düsturu ilə təyin olunurlar. Əvvəlcə $a(\sigma)$ əmsalını $f(x)$ funksiyasının Furye çevirməsi vasitəsilə ifadə edək

$$a(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{e^{i\sigma u} + e^{-i\sigma u}}{2} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left\{ e^{i\sigma u} + e^{-i\sigma u} \right\} du \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [F(\sigma) + F(-\sigma)].$$

Analoji qaydada $b(\sigma)$ əmsalı üçün

$$b(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) [e^{i\sigma u} - e^{-i\sigma u}] du = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} [F(\sigma) - F(-\sigma)]$$

alarıq.

Onda $a(\sigma)$ və $b(\sigma)$ əmsalları üçün alınmış münasibətləri (3) düsturunda yerinə yazsaq

$$g(x)=\int_0^\infty\left\{-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}[F(\sigma)-F(-\sigma)]\cos\sigma x-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[F(\sigma)+F(-\sigma)]\sin\sigma x\right\}d\sigma=$$

$$=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\{[F(\sigma)-F(-\sigma)]\cos\sigma x-i[F(\sigma)+F(-\sigma)]\sin\sigma x\}d\sigma=$$

$$=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty[F(\sigma)e^{-i\sigma x}-F(-\sigma)e^{i\sigma x}]d\sigma$$

alarıq.

Bu ifadə $F(\sigma)$ funksiyasının tərs Furye çevrilməsinə oxşayır, ancaq burada inteqrallama parçası bütün ox deyildir. Ona görə də sağ tərəfdə, ikinci toplananda $-\sigma=\sigma$ əvəz etsək

$$g(x)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_0^\infty F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma-\int_{-\infty}^0 F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_0^\infty(-i)sign\sigma F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma+\int_{-\infty}^0(-i)sign\sigma F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty(-i)sign\sigma F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

münasibətini alarıq ki, bu düsturu

$$g(x)=V^{-1}[-isign\sigma F(\sigma)]$$

şəklində yaza bilərik.

Axırıncı münasibətin hər tərəfinə V operatoru vasitəsilə təsir etsək (4) düsturunu alarıq. Zərurilik isbat olundu.

Kafiliyi isbat etmək üçün bütün mühakimələri əks istiqamətdə aparmaq lazımdır. Qeyd edək ki, bütün çevirmələr o vaxt qanunidir ki, $f(x)$ və $F(\sigma)$ funksiyaları L fəzasından və ya $f(x) \in L_2$ olsun. Bundan əlavə x nöqtəsində tərs Furye çevirməsi mövcud olmalıdır.

§2. Yarım müstəvidə analitik funksiyaların Furye çevirməsi

Aşağıdakı lemmanı qeyd edək.

Lemma. Əgər $\Phi(z)$ funksiyası $y_1 \le y \le y_2$ zolağında analitikdirsə və $y \in [y_1, y_2]$ olduqda y-ə nəzərən müntəzəm olaraq $\Phi(z) \in L_2^x$ münasibətini ödəyirsə, başqa sözlə,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2 dx \le K$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, burada K $y \in [y_1, y_2]$ arqumentindən asılı deyil, onda $0 < \delta < \frac{y_2 - y_1}{2}$ şərtini ödəyən ixtiyari δ üçün

$$\lim_{|x| \to \infty} \Phi(z) = 0$$

münasibəti $[y_1 + \delta, y_2 - \delta]$ parçasında y arqumentinə nəzərən müntəzəm ödənilir.

İsbatı. $0 < \delta < \dfrac{y_2 - y_1}{2}$ şərtini ödəyən δ ədədini verək və $y_1 + \delta \le \operatorname{Im} z \le y_2 - \delta$ zolağına baxaq. Bu zolaqda ixtiyari z nöqtəsi və mərkəzi z nöqtəsində, radiusu ρ, $0 < \rho \le \delta$ olan $|w - z| = \rho$ çevrəsini götürək. Aydındır ki, bu çevrə tamamilə $y_1 \le \operatorname{Im} z \le y_2$ zolağında yerləşir. Onda Koşinin inteqral düsturuna əsasən

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\rho} \frac{\Phi(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(z + \rho e^{i\varphi}) d\varphi$$

alarıq. Burada ikinci inteqral

$$w = z + \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

əvəzləməsi vasitəsilə alınmışdır.

Bu münasibəti ρ-ya vurub, ρ-ya nəzərən sıfırdan δ-ya qədər inteqrallasaq

$$\int_0^{\delta} \Phi(z) \rho d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \rho d\rho \int_0^{2\pi} \Phi(z + \rho e^{i\varphi}) d\varphi .$$

Sol tərəfdə inteqralı hesablayıb sonra $\Phi(z)$ funksiyasının moduluna keçsək

$$\frac{\delta^2}{2} |\Phi(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \int_0^{2\pi} |\Phi(z + \rho e^{i\varphi})| \rho d\varphi d\rho$$

alarıq.

Bu münasibətdə sağ tərəfə Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyini tətbiq etsək

$$\delta^2|\Phi(z)| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\int_0^{2\pi}\left|\Phi(z+\rho e^{i\varphi})\right|\rho d\varphi d\rho =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\int_0^{2\pi}\left|\Phi(z+\rho e^{i\varphi})\right|\cdot \rho^{\frac{1}{2}}\cdot \rho^{\frac{1}{2}} d\varphi d\rho \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\delta}\int_0^{2\pi}\left|\Phi(z+\rho e^{i\varphi})\right|^2 \rho d\varphi d\rho \cdot \int_0^{\delta}\int_0^{2\pi}\rho d\rho d\varphi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Burada ikinci vuruğu hesablasaq

$$\delta^2|\Phi(z)| \le \frac{1}{\pi}\left(\frac{\delta^2}{2}\cdot 2\pi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\delta}\int_0^{2\pi}\left|\Phi(z+\rho e^{i\varphi})\right|^2 \rho d\varphi d\rho\right)^{\frac{1}{2}}$$

münasibətini alırıq ki, bu münasibət

$$\delta|\Phi(z)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{\delta}\int_0^{2\pi}\left|\Phi(z+\rho e^{i\varphi})\right|^2 \rho d\varphi d\rho\right)^{\frac{1}{2}}$$

şəklində yazılar. Dəyişənlərin $x+\rho\cos\varphi=u$, $y+\rho\sin\varphi=v$, $w=u+iv$ əvəzlənməsini edək. Onda çevirmənin determinantı

$$\frac{D(\rho,\varphi)}{D(u,v)} = 1 : \frac{D(u,v)}{D(\rho,\varphi)} = \frac{1}{\rho}$$

olar. Ona görə axırıncı bərabərsizlik

$$\delta|\Phi(z)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\iint\limits_{|w-z|\le\delta}|\Phi(u+iv)|^2\,dudv\right)^{\frac{1}{2}}$$

şəklində olar. İnteqralaltı funksiya mənfi olmadığından inteqrallama oblastı artırıldıqda, inteqral artacaqdır. Onda $|w-z|\le\delta$ dairəsini $x-\delta\le u\le x+\delta,\ y_1\le v\le y_2$ düzbucaqlısı ilə əvəz etsək

$$\delta|\Phi(z)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{y_1}^{y_2}dv\int_{x-\delta}^{x+\delta}|\Phi(u+iv)|^2\,du\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

münasibətini alarıq.

Aydındır ki, $\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x+iy)|^2\,dx$ inteqralı $y\in[y_1,y_2]$ olduqda y-ə nəzərən müntəzəm yığılır. Onda $|x|$-i kafi qədər böyük seçməklə (1) münasibətindəki daxili inteqralı bütün v-lər üçün kafi qədər kiçik etmək olar.

Beləliklə

$$\lim_{|x|\to\infty}\int_{y_1}^{y_2}dv\int_{x-\delta}^{x+\delta}|\Phi(u+iv)|^2\,du=0$$

münasibətini alarıq.

Buradan alırıq ki, $\delta\Phi(z)$ hasili $|x|$ ∞-a yaxınlaşdıqda sıfra yaxınlaşır və $\delta>0$ olduğundan $\lim\limits_{|x|\to\infty}\Phi(z)=0$

alınır. Qeyd edək ki, sıfra yaxınlaşma $y \in [y_1 + \delta, y_2 - \delta]$ olduqda y-ə nəzərən müntəzəmdir və z nöqtəsi $y_1 + \delta \le \operatorname{Im} z \le y_2 - \delta$ zolağından kənara çıxmır. Lemma isbat olundu.

İndi isə müəyyən şərtləri ödəyən, yarım müstəvidə analitik olan funksiyanın sərhəd qiymətinin xarakteristik xassələrinə baxaq. Bu xassələr Furye çevrilməsi termini vasitəsilə ifadə oluna bilər. Burada həmçinin sərhəd qiymətlərinin varlığı göstərilir. Aşağıdakı teoremi qeyd edək

Teorem 1. Tutaq ki, yuxarı yarım müstəvidə analitik olan $\Phi(z)$ funksiyası $y > 0$ nəzərən müntəzəm olaraq L_2^x fəzasına daxildir, başqa sözlə, ixtiyari $y > 0$ üçün

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x + iy)|^2 dx \le K < \infty \qquad (*)$$

münasibəti ödənilir, burada K sabiti y-dən asılı deyil. Onda

$$\Phi(x) = \lim_{y \to 0} \Phi(x + iy) \qquad (2)$$

münasibətilə təyin olunan $\Phi(x)$ funksiyası vardır və $\Phi(z)$ funksiyası $\Phi(x)$ vasitəsilə

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x)}{x - z} dx, \qquad \operatorname{Im} z > 0 \qquad (3)$$

Koşi düsturu ilə göstərilir.

$$f(x) = \operatorname{Re}\Phi(x), \quad g(x) = -\operatorname{Im}\Phi(x) \tag{4}$$

funksiyaları qoşmadırlar, $\Phi(x)$ funksiyasının tərs Furye çevirməsi

$$\varphi(t) = V^{-1}\Phi(x) \tag{5}$$

$t < 0$ olduqda sıfra çevrilir.

İsbatı. $N > 0$ üçün

$$\varphi_N(t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \Phi(x + iy) e^{-itx} dx$$

münasibətilə təyin olunan $\varphi_N(t, y)$ funksiyasına baxaq. Belə ki, ixtiyari $y > 0$ üçün $\Phi(x + iy) \in L_2^x$ olduğundan, onda bu funksiyanın tərs

$$V_x^{-1}\Phi(x + iy) = \varphi(t, y) = \lim_{N \to \infty} \varphi_N(t, y)$$

Furye çevrilməsi vardır və L_2 fəzasına daxildir. İndi $0 < y_1 < y_2$ şərtini ödəyən y_1, y_2 ədədləri və təpə nöqtələri $\pm N + iy_1$, $\pm N + iy_2$ nöqtələr olan düzbucaqlı götürək.

İstənilən N üçün $\Phi(z)e^{-itz}$ funksiyası bu düzbucaqlıda analitikdir. Ona görə $\Phi(z)e^{-itz}$ funksiyasının düzbucaqlının konturu üzrə inteqralı sıfra bərabərdir. Düzbucaqlının tərəfləri üzrə inteqralları dörd toplanana ayıraq:

$$0=\int_{-N}^{N}\Phi(x+iy_1)e^{-itx}e^{ty_1}dx+\int_{-N}^{N}\Phi(x+iy_2)e^{-itx}e^{ty_2}dx+$$

$$+\int_{y_1}^{y_2}\Phi(N+iy)e^{-itN}e^{ty}idy-\int_{y_1}^{y_2}\Phi(-N+iy)e^{itN}e^{ty}idy \quad (6)$$

Göstərək ki, N ∞-a yaxınlaşdıqda (6) münasibətində üçüncü və dördüncü inteqral sıfra yaxınlaşır. Üçüncü inteqralı qiymətləndirsək

$$\left|\int_{y_1}^{y_2}\Phi(N+iy)e^{-itN}e^{ty}idy\right|\le e^{ty_2}\int_{y_1}^{y_2}|\Phi(N+iy)|dy$$

alarıq.

Verilmiş $\Phi(z)$ funksiyası yuxarı yarım müstəvidə analitik olduğundan, $0<y_1-\delta\le \operatorname{Im} z\le y_2+\delta,\quad 0<\delta<\frac{y_1}{2}$ zolağında da analitikdir. Onda isbat olunmuş lemmaya görə

$$\lim_{N\to\infty}\Phi(z)=0$$

münasibəti $y\in[y_1,y_2]$ olduqda y-ə nəzərən müntəzəm ödənilir. Bu münasibətdən

$$\lim_{N\to\infty}\int_{y_1}^{y_2}|\Phi(N+iy)|dy=0$$

bərabərliyini alırıq.

Beləliklə (6) düsturunda üçüncü inteqralın N ∞-a yaxınlaşdıqda sıfra yaxınlaşmasını isbat etdik. Analoji qaydada (6) münasibətində dördüncü inteqralın N ∞-a yaxınlaşdıqda sıfra yaxınlaşmasını isbat etmək olar. Onda (6) bərabərliyini $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ədədinə vurub N ∞-a yaxınlaşmaqla limitə keçsək

$$e^{ty_1}\varphi(t,y_1) = e^{ty_2}\varphi(t,y_2) \tag{7}$$

bərabərliyini alarıq.

Baxılan

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}\Phi(x+iy_k)e^{-itx}dx, \qquad (k=1,2)$$

limitinin orta yığılma mənasında varlığından çıxır ki, (7) sanki bütün t-lər üçün ödənilir. Alınmış (7) münasibəti göstərir ki, $e^{ty}\varphi(t,y)$ hasili y arqumentindən asılı deyil. Onda (7) düsturunda $y_1 = y, y_2 = 1$ yazsaq

$$e^{ty}\varphi(t,y) = e^{t}\varphi(t,1) = \varphi(t)$$

bərabərliyini alarıq. Bu bərabərliyin köməyi ilə, $\Phi(x+iy)$ funksiyasının x arqumentinə nəzərən tərs Furye çevirməsi olan $\varphi(t,y)$-i aşağıdakı

$$V_x^{-1}\Phi(x+iy) = \varphi(t,y) = e^{-ty}\varphi(t) \tag{8}$$

şəklində yaza bilərik.

1. $t<0$ olduqda $\varphi(t)=0$ münasibətinin isbatı.

Verilmiş müəyyən $\delta>0$ üçün $t<-\delta$ qiymətinə baxaq. Axırıncı bərabərsizliyi müsbət $2y$ ədədinə ($\Phi(z)$ funksiyası $y>0$ yuxarı yarım müstəvisində analitikdir) vursaq $2ty<-2\delta y$ və ya $-2ty-2\delta y>0$ alarıq.

Ümumiyyətlə

$$|\varphi(t)|^2 \le |\varphi(t)|^2 \cdot e^{-2ty-2\delta y}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Bu bərabərsizliyi t-yə nəzərən $-\infty$ dan $-\delta$ qədər inteqrallasaq

$$\int_{-\infty}^{-\delta}|\varphi(t)|^2 dt \le e^{-2\delta y}\int_{-\infty}^{-\delta}|\varphi(t)|^2 e^{-2ty}dt \le$$

$$\le e^{-2\delta y}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|^2 e^{-2ty}dt = e^{-2\delta y}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t,y)|^2 dt =$$

$$= e^{-2\delta y}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x+iy)|^2 dx \le Ke^{-2\delta y} \tag{9}$$

alarıq.

Qeyd olunan (9) münasibətini alarkən əvvəlcə inteqralaltı funksiya müsbət olduğundan, inteqralın sərhədi böyüdülmüş, sonra (8) münasibətindən istifadə olunaraq, Parseval bərabərliyinin tətbiqindən, sonra (*) münasibətindən istifadə alınmuşdur.

Beləliklə

$$\int_{-\infty}^{-\delta} |\varphi(t)|^2 \, dt \le K e^{-2\delta y}$$

bərabərsizliyini almış olarıq.

Burdan y ∞-a yaxınlaşmaqla limitə keçsək

$$\int_{-\infty}^{-\delta} |\varphi(t)|^2 \, dt = 0 .$$

Yəni $t < 0$ üçün sanki hər yerdə $\varphi(t) = 0$ alarıq.

2. $\varphi(t) \in L_2$ **münasibətinin isbatı.**

Qeyd olunan $\varphi(t)$ funksiyasının L_2 fəzasına daxil olmasını isbat etmək üçün Parseval bərabərliyindən və (*) münasibətindən istifadə etsək

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2ty} |\varphi(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ty} |\varphi(t,y)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2 \, dx \le K$$

alarıq.

$e^{-2ty}|\varphi(t)|^2$ funksiyası mənfi deyil və y 0-a yaxınlaşdıqda $|\varphi(t)|^2$ funksiyasına yaxınlaşır, digər tərəfdən

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ty} |\varphi(t)|^2 \, dt$$

inteqralı müntəzəm məhdud olduğundan Fatu teoreminə görə limit funksiyanın inteqralı məhduddur. Beləliklə

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 \, dt \le K$$

bərabərsizliyini alarıq ki, buradan da $\varphi(t) \in L_2$ olar.

3. y **0-a yaxınlaşdıqda** $\Phi(z)$ **funksiyasının sərhəd qiymətinin varlığı.**

Verilmiş

$$\Phi(x + iy_1) - \Phi(x + iy_2) \text{ və}$$

bu fərqin tərs Furye çevirməsi

$$\varphi(t, y_1) - \varphi(t, y_2) = \varphi(t)\left[e^{-ty_1} - e^{-ty_2}\right]$$

üçün Parseval bərabərliyini yazaq:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x + iy_1) - \Phi(x + iy_2)|^2 \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 \left|e^{-ty_1} - e^{-ty_2}\right|^2 dt. \tag{10}$$

Əgər y_1 və y_2 bir-birindən asılı olmayaraq sıfra yaxınlaşırlarsa, onda

$$|\varphi(t)|^2 \left|e^{-ty_1} - e^{-ty_2}\right|^2$$

funksiya sıfra yaxınlaşacaq. Bundan başqa $t < 0$ olduqda $\varphi(t) = 0$ olduğundan

$$|\varphi(t)|^2 \left|e^{-ty_1} - e^{-ty_2}\right|^2 \le 4|\varphi(t)|^2$$

bərabərsizliyi alınar. Bu bərabərsizlik göstərir ki, (10) bərabərliyinin sağ tərəfində inteqralaltı funksiyası cəmlənən mojaranta malikdir. Deməli burada inteqral altında limitə keçmək haqqında Lebeq teoremini tətbiq edə bilərik. Nəticədə

$$\lim_{y_1, y_2 \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy_1) - \Phi(x+iy_2)|^2 dx = 0$$

münasibətini alarıq.

y-dən asılı $\Phi(x+iy)$ funksiyalar çoxluğu y 0-a yaxınlaşdıqda fundamentaldır. L_2 fəzasının tamlığından alınır ki, elə $\Phi(x) \in L_2$ funksiyası var ki,

$$\lim_{y \to 0} \Phi(x+iy) = \Phi(x).$$

4. $\varphi(t) = V^{-1}\Phi(x)$ **bərabərliyinin isbatı.**

Alınmış (10) Parseval bərabərliyində y_2-ni y-lə əvəz edək və y_1 0-a yaxınlaşmaqla limitə keçək. (10) münasibətində inteqral altındakı sol və sağ tərəfdəki funksiyaların y_1 0-a yaxınlaşdıqda limiti vardır. Bundan başqa sağ tərəfdəki inteqralaltı funksiyanın cəmlənən mojarantı var. Deməli sağ tərəfdəki inteqralda limitə keçmək mümkün olduğundan, sol tərəfdəki inteqralda da limitə keçmək olar. Beləliklə (10) bərabərliyində limitə keçsək

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x)-\Phi(x+iy)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|^2\left|1-e^{-ty}\right|^2 dt .$$

Buradan

$$\varphi(t)e^{-ty} = V^{-1}\Phi(x+iy)$$

bərabərliyi alınır.

$$\lim_{y\to 0}\varphi(t)e^{-ty} = \varphi(t), \; \lim_{y\to 0}\Phi(x+iy) = \Phi(x)$$

olduğundan

$$\varphi(t) = V^{-1}\Phi(x) .$$

5. $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(z)}{x-z}dx$ **düsturunun isbatı.**

Yuxarı $\operatorname{Im} z > 0$ yarım müstəvisində ixtiyari z nöqtəsi götürək, beləki, bu nöqtə təpə nöqtələri $\pm N + iy_1, \pm N + iy_2$, $0 < y_1 < y_2$ nöqtələrində olan düzbucaqlının daxilində yerləşsin. Onda Koşinin inteqral düsturuna nəzərən

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Phi(w)}{w-z}dw ,$$

burada inteqrallama düzbucaqlının sərhəddi üzrə aparılır. İnteqralı düzbucaqlının tərəfləri üzrə dörd inteqrala ayırsaq

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{-N+iy_1}^{N+iy_1}\frac{\Phi(w)}{w-z}dw-\int\limits_{-N+iy_2}^{N+iy_2}\frac{\Phi(w)}{w-z}dw+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{N+iy_1}^{N+iy_2}\frac{\Phi(w)}{w-z}dw+\int\limits_{-N+iy_1}^{-N+iy_2}\frac{\Phi(w)}{w-z}dw\right] \qquad (11)$$

alarıq.

Axırıncı münasibətə daxil olan üçüncü və dördüncü inteqral N ∞-a yaxınlaşdıqda sıfra yaxınlaşır. Doğrudan da, $\frac{1}{|w-z|}\le\frac{1}{\rho}$ qiymətlənməsi doğrudur, burada ρ, z nöqtəsindən kontura qədər olan məsafədir, yəni $\rho=\min|w-z|>0$. $\Phi(z)$ funksiyası

$$0<y_1-\delta\le \operatorname{Im}z\le y_2+\delta,$$

zolağında analitik olduğundan, (*) münasibəti imkan verir ki, bu inteqrallara isbat etdiyiniz lemmanı tətbiq edək. Onda (11) münasibətində N ∞-a yaxınlaşdırmaqla limitə keçsək

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{-\infty+iy_1}^{\infty+iy_1}\frac{\Phi(w)}{w-z}dw-\int\limits_{-\infty+iy_2}^{\infty+iy_2}\frac{\Phi(w)}{w-z}dw\right]. \qquad (12)$$

Əgər (12) düsturunda y_2 ∞-a və y_1 0-a yaxınlaşdırmaqla limitə keçsək, ikinci inteqralın limiti sıfra, birinci inteqral isə (3) düsturu ilə təyin olunan inteqrala çevrilir. Bu təklifi isbat edək. İkinci inteqrala baxaq:

$$\int_{-\infty+iy_2}^{\infty+iy_2} \frac{\Phi(u+iv)}{u+iv-(x+iy)} d(u+iv) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(u+iy_2)}{u+iy_2-(x+iy)} du .$$

Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən istifadə edərək inteqralın modulunu qiymətləndirsək

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(u+iy_2)}{(u-x)+i(y_2-y)} du \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi(u+iy_2)|}{|(u-x)+i(y_2-y)|} du \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(u+iy_2)|^2 du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(u-x)^2+(y_2-y)^2} \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\frac{K\pi}{y_2-y} \right)^{1/2} \tag{13}$$

alarıq. Bu axarıncı qiymətlənmə (*) düsturunun tətbiqindən və

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(u-x)^2+(y_2-y)^2}$$

inteqralının hesablanmasından alınır. (13) bərabərsizliyindən alınır ki, y_2 ∞-a yaxınlaşdıqda (12) münasibətindəki ikinci inteqral sıfra yaxınlaşır.

Beləliklə,

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+iy_1}^{\infty+iy_1}\frac{\Phi(w)}{w-z}dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(u+iy_1)}{(u-x)+i(y_1-y)}du$$

alarıq. Göstərək ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(u+iy_1)}{(u-x)+i(y_1-y)}du-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(u)}{u-z}du=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Phi(u+iy_1)}{u+iy_1-z}-\frac{\Phi(u)}{u-z}\right]du$$

fərqi y_1 0-a yaxınlaşdıqda sıfra yaxınlaşır. İnteqral altı funksiyanı aşağıdakı qaydada çevirək:

$$\frac{\Phi(u+iy_1)}{u+iy_1-z}-\frac{\Phi(u)}{u-z}=\frac{\Phi(u+iy_1)}{u+iy_1-z}-\frac{\Phi(u)}{u+iy_1-z}+\frac{\Phi(u)}{u+iy_1-z}-$$

$$-\frac{\Phi(u)}{u-z}=\frac{\Phi(u+iy_1)-\Phi(u)}{u+iy_1-z}+\Phi(u)\frac{-iy_1}{(u+iy_1-z)(u-z)}.$$

Beləliklə,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Phi(u+iy_1)}{u+iy_1-z}-\frac{\Phi(u)}{u-z}\right]du=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(u+iy_1)-\Phi(u)}{u+iy_1-z}du+\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(u)\frac{-iy_1du}{(u+iy_1-z)(u-z)}\quad(14)$$

münasibətini almış olarıq. (14) münasibətindəki sağ tərəfdəki birinci inteqrala Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyini tətbiq etsək

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(u+iy_1)-\Phi(u)}{u+iy_1-(x+iy)}du\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\Phi(u+iy_1)-\Phi(u)|du}{|(u-x)+i(y_1-u)|} \le$$

$$\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(u+iy_1)-\Phi(u)|^2du\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{(u-x)^2+(y-y_1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\|\Phi(u+iy_1)-\Phi(u)\|\cdot\left(\frac{\pi}{y-y_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

alarıq.

Bu münasibətdə y_1 0-a yaxınlaşdıqda $\left(\frac{\pi}{y-y_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ funksiyası məhdud olduğundan və $\Phi(u+iy_1)-\Phi(u)$ fərqinin norması y_1 0-a yaxınlaşdıqda (2) münasibətinə görə sıfra yaxınlaşdığından, birinci inteqral y_1 0-a yaxınlaşdıqda sıfra yaxınlaşır. İkinci inteqrala baxaq. Bu inteqralda inteqral altı funksiya y_1 0-a yaxınlaşdıqda sıfra yaxınlaşır, digər tərəfdən, cəmlənən mojaranta malikdir. Doğrudanda heç olmasa $y_1 < \frac{y}{2}$ üçün aşağıdakı

$$\left|\Phi(u)\frac{-iy_1}{(u+iy_1-z)(u-z)}\right|=$$

$$=\left|\Phi(u)\right|\frac{y_1}{\left\{\left[(u-x)^2+(y-y_1)^2\right]\left[(u-x)^2+y^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}\le$$

$$\le\left|\Phi(u)\right|\cdot\frac{1}{(u-x)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2}$$

qiymətlənmə doğrudur. Axırıncı bərabərsizlikdə sağ tərəfdəki funksiya L fəzasına daxildir. Bunu göstərmək üçün $\left|\Phi(u)\right|$ və $\dfrac{1}{(u-x)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2}$ funksiyaların hasilinin inteqralına Koşi-Bünyakovski bərabərsizliyini tətbiq etmək lazımdır. Beləliklə (14) münasibətində sağ tərəfdəki ikinci inteqrala inteqral altında limitə keçmək haqqındakı Lebeq teoremi tətbiq etsək, y_1 0-a yaxınlaşdıqda bu inteqral sıfra yaxınlaşacaq. Bu dediklərimizdən çıxır ki,

$$\lim_{y_1\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(u+iy_1)}{(u+iy_1-z)}du=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(u)}{u-z}du.$$

Buradan isə

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(u)}{u-z}du$$

düsturu alınır.

6. $f(x) = \operatorname{Re}\Phi(x)$ və $g(x) = -\operatorname{Im}\Phi(x)$ funksiyalarının qoşmalığının isbatı.

Aşağıdakı işarələmələri qəbul edək:

$$a(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos uxdu, \quad b(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin uxdu,$$

$$\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\cos uxdu, \quad \beta(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\sin uxdu.$$

Aydındır ki, $a(x)$ və $\alpha(x)$ cüt, $b(x)$ və $\beta(x)$ tək funksiyalardır. Verilmiş $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının qoşma olması $x > 0$ olduqda

$$\alpha(x) = b(x), \quad \beta(x) = -a(x) \tag{15}$$

bərabərlikləri ilə təyin olunur.

Onda $\varphi(x) = V^{-1}\Phi(u)$ münasibətini

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u)e^{-iux}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} [f(u) - ig(u)]e^{-iux}du$$

şəkilində yazaq.

Bu inteqralda həqiqi və xəyali hissəni ayırsaq və yuxarıdakı işarələmələri nəzərə alsaq

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left([a(x) - \beta(x)] - i[\alpha(x) + b(x)]\right).$$

Belə ki, $x < 0$ olduqda $\varphi(x)$ funksiyası sıfra bərabər olduğundan

$$x<0 \text{ olduqda} \, \alpha(x)=-b(x), \quad \beta(x)=a(x). \qquad (16)$$

Alınmış bu münasibət $a(x), \alpha(x)$ funksiyalarının cüt və $b(x), \beta(x)$ funksiyalarının tək olması xassələrinə görə (15) münasibəti ilə eynigüclüdür. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. Kompleks qiymətli $\Phi(x) \in L_2$ funksiyasının, yuxarı yarım müstəvidə analitik və $y>0$ olduqda

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2 dx \le K$$

şərtini ödəyən $\Phi(z)$ funksiyasının sərhəd qiyməti olması üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı şərtlərdən ixtiyari birinin ödənilməsidir:

$a)\, \varphi(x) = V^{-1}\Phi(u) = 0 \qquad x<0$ olduqda;

$b)\, f(x) = \operatorname{Re}\Phi(x), \quad g(x) = -\operatorname{Im}\Phi(x)$ funksiyaları qoşmadır.

İsbatı.

$a)$ Şərtinin zəruriliyi əvvəlki teoremdə isbat olunmuşdur.

$a)$ Şərtinin **kafiliyi.** Aşağıdakı

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{iuz} du$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $\Phi(z)$ funksiyasını götürək, belə ki, $\operatorname{Im} z>0$ olduqda inteqral vardır. Doğrudan da,

$$e^{iuz} = e^{iu(x+iy)} = e^{iux} \cdot e^{-uy}.$$

Aydındır ki, u-nun mənfi qiymətləri üçün $\varphi(u)$ sıfra bərabərdir, ona görə u-nun yalnız müsbət qiymətləri maraqlıdır. Həmin qiymətlər üçün $\operatorname{Im} z = y > 0$ olduqda e^{-uy} vuruğu ancaq inteqralın yığılmasını yaxşılaşdırır. Onda $\operatorname{Im} z > 0$ olduqda inteqralı z-ə nəzərən diferensiallasaq, asanlıqla törəmənin varlığını göstərə bilərik. Beləliklə $\Phi(z)$ funksiyası yuxarı yarım müstəvidə analitikdir. Bundan əlavə asanlıqla

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2 dx \le K$$

bərabərsizliyini almaq olar, burada K sabiti $0 < y$-dən asılı deyil. Doğrudan da $\Phi(z)$ funksiyası $\varphi(u)e^{-uy} \in L_2$ funksiyasının Furye çevrilməsidir, onda Parseval bərabərliyindən

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)|^2 e^{-2uy} du \le \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)|^2 du$$

münasibətini alırıq.

Beləliklə, $\Phi(z)$ funksiyası teorem 1-in bütün şərtlərini ödəyir, deməli

$$\psi(x) = \lim_{y \to 0} \Phi(x+iy)$$

sərhəd qiymətinə malikdir.

İsbat edək ki, $\Phi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyaları sanki hər yerdə üst-üstə düşürlər. $\Phi(x)$ funksiyası $\varphi(x)$ funksiyasının Furye çevirməsi olduğundan,

$$\int_0^s \Phi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{e^{ixs}-1}{ix} dx =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{e^{ix(s+iy)}-1}{ix} dx$$

münasibəti doğrudur.

İnteqralın cəmlənən mojarantı olduğundan, inteqral altında limitə keçmək mümkündür. Axırıncı münasibəti aşağıdakı

$$\int_0^s \Phi(x)dx = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{e^{ix(s+iy)}-1}{ix} dx =$$

$$= \lim_{y\to 0} \int_0^s \Phi(x+iy)dx = \int_0^s \psi(x)dx$$

bərabərlik şəklində yazsaq, $\Phi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyalarının sanki hər yerdə üst-üstə düşməsini alarıq.

a) Şərtinin kafiliyi isbat olundu.

b) Şərtinin zəruriliyi teorem 1-də isbat olunmuşdur.

b) Şərtinin kafiliyi. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları qoşmadır.

İsbat edək ki, onda $a)$ şərti ödənilir. Bu isə $b)$ şərtinin kafiliyini verir.

$\varphi(x) = V^{-1}\Phi(u)$ düsturunu açıq şəkildə yazaq:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) e^{-iux} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [f(u) - ig(u)] e^{-iux} du =$$

$$= F(-x) - iG(-x). \qquad (17)$$

Burada $F(x)$ və $G(x)$ funksiyaları uyğun olaraq qoşma $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının Furye çevirmələridir. Ona görə bütün x-lər üçün

$$G(x) = -i\, sign\, x F(x)$$

bərabərliyi ödənilir.

Bu münasibətin hər tərəfini $i\, sign x$-ə vursaq

$$F(x) = i\, sign\, x G(x)$$

münasibətini alarıq. Bu münasibət $x > 0$ olduqda

$$F(x) = i\, G(x)$$

şəklində olar.

Onda $x < 0$ olduqda

$$F(-x) = i\, G(-x)$$

alarıq.

Bu halda (17) münasibətindən $x < 0$ olduqda

$$\varphi(x) = V^{-1}\Phi(u) = F(-x) - iG(-x) = 0$$

Bununla teorem 2 isbat olundu.

Teorem 3. Əgər $f(x)$ funksiyası L_2 fəzasına daxildirsə, onda aşağıdakı

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x)$$

ayrılış doğrudur, burada $f_\pm(x)$ funksiyası analitik $f_\pm(z)$ funksiyasının sərhəd qiymətidir, beləki, $f_+(z)$ yuxarı yarım müstəvidə, $f_-(z)$ funksiyası isə aşağı yarım müstəvidə analitikdir.

İsbatı. Tutaq ki,

$$\Phi(x) = Vf(x).$$

$f_\pm(z)$ funksiyalarını aşağıdakı bərabərliklərlə təyin edək:

$$f_+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \Phi(t) e^{-itz} dt, \quad \operatorname{Im} z > 0;$$

$$f_-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \Phi(t) e^{-itz} dt, \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

Buradan teoremin isbatı alınır.

FƏSİL 5
FURYE ÇEVİRMƏSİNİN TƏTBİQLƏRİ

Furye çevirməsi sonsuz zolaqda, yarım zolaqda, sonsuz silindrdə və başqa oblastlarda riyazi fizikanın tənlikləri üçün qoyulmuş Koşi məsələsi, sərhəd məsələsi və qarışıq məsələlərin həllinə geniş tətbiq olunur.

§1. İstilikkeçirmə tənliyi üçün Koşi məsələsinin həlli

Tutaq ki

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty, \quad t>0 \tag{1}$$

tənliyinin

$$u(x,0)=f(x), \qquad -\infty < x < +\infty \tag{2}$$

başlanğıc şərtini ödəyən həllini tapmaq tələb olunur.

Burada $f(x)$ funksiyası elədir ki, onun üçün Furye çevirməsi və tərs Furye çevirməsinin varlığı təmin olunur. $u(x,t)$ funksiyasının Furye çevirməsi

$$U(\sigma,t)=V[u(x,t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{i\sigma x}dx \tag{3}$$

münasibətilə təyin olunar.

(1) tənliyinin hər tərəfini $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\sigma x}$-ə vurub $-\infty$-dan ∞-a inteqrallasaq

$$\frac{\partial U(\sigma,t)}{\partial t} = -\sigma^2 U(\sigma,t).$$

Buradan

$$U(\sigma,t) = A(\sigma)e^{-\sigma^2 t}.$$

(2) başlanğıc şərtinin köməyi ilə

$$A(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\sigma}dx = F(\sigma)$$

alarıq.

Deməli

$$U(\sigma,t) = F(\sigma)e^{-\sigma^2 t}$$

Onda tərs Furye çevirməsindən istifadə etsək

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma)e^{-\sigma^2 t - ix\sigma}d\sigma$$

alınar.

Axırıncı münasibətdə $F(\sigma)$ üçün Furye çevirməsini nəzərə alsaq

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2 t - ix\sigma}d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\sigma\xi}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2 t - i\sigma(x-\xi)}d\sigma$$

Burada

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} \tag{4}$$

olduğunu nəzərə alsaq, istilikkeçirmə tənliyi üçün Koşi məsələsinin həlli

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$$

dysturu ilə verilir.

§2. İstilikkeçirmə tənliyi üçün qarışıq məsələnin həlli

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < \infty, \;\; t > 0 \tag{5}$$

tənliyinin

$$u(x,0) = 0, \qquad x > 0 \tag{6}$$

başlanğıc və

$$u(0,t) = f(t), \qquad t \geq 0 \tag{7}$$

sərhəd şərti daxilində həllini tapaq.

Qoyulmuş (5)-(7) məsələsinin həllini tapmaq üçün

$$U_s(\sigma,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,t)\sin\sigma x dx \tag{8}$$

sinus Furye çevirməsindən istifadə edək. Onda (7) sərhəd şərtini nəzərə alsaq və $u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ funksiyalarının x ∞-a yaxınlaşdıqda sıfra yaxınlaşdıqlarını fərz etsək

$$\frac{\partial u_s(\sigma,t)}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u_{xx}(x,t)\sin\sigma x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}u_x(x,t)\sin\sigma x\Big|_0^\infty -$$

$$-\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u_x(x,t)\cos\sigma x dx = -\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big\{u(x,t)\cos\sigma x\Big|_0^\infty +$$

$$+\sigma\int_0^\infty u(x,t)\sin\sigma x dx\Big\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma f(t) - \sigma^2 U_s(\sigma,t).$$

Beləliklə qoyulmuş məsələ

$$\frac{\partial U_s(\sigma,t)}{\partial t} + \sigma^2 U_s(\sigma,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma f(t) \tag{9}$$

tənliyinin

$$U_s(\sigma,0) = 0 \tag{10}$$

başlanğıc şərtini ödəyən həllinin tapılmasına gətirilir.

Onda (9) tənliyindən

$$U_s(\sigma,t) = A(\sigma)e^{-\sigma^2 t} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma e^{-\sigma^2 t}\int_0^t e^{-\sigma^2\tau} f(\tau)d\tau \, . \tag{11}$$

(10) başlanğıc şərtindən istifadə etsək, $A(\sigma) = 0$ alarıq. Beləliklə (9), (10) məsələsinin həlli

$$U_s(\sigma,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int_0^t e^{-\sigma^2(t-\tau)}f(\tau)d\tau$$

şəklində olar.

Tərs Furye çevirməsindən istifadə etsək

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U(\xi,t)\sin\xi x d\xi =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^t f(\tau)d\tau\int_0^\infty \xi e^{-\xi^2(t-\tau)}\sin\xi x d\xi =$$

$$=-\int_0^t\frac{f(\tau)d\tau}{\pi(t-\tau)}\left[e^{-\xi^2(t-\tau)}\sin\xi x\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty}-x\int_0^\infty e^{-\xi^2(t-\tau)}\cos\xi x d\xi\right]=$$

$$=\frac{x}{\pi}\int_0^t\frac{f(\tau)}{t-\tau}d\tau\int_0^\infty e^{-\xi^2(t-\tau)}\cos\xi x d\xi\ .$$

Burada (4) münasibətindən istifadə etsək, qoyulmuş (5)-(7) məsələsinin həllini

$$u(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}d\tau$$

şəklində alarıq.

§3. Simin rəqs tənliyi üçün qoyulmuş Koşi məsələsinin həlli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty, \ t > 0 \qquad (12)$$

tənliyinin

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty \quad (13)$$

başlanğıc şərtləri daxilində həllinə baxaq.

Verilmiş (12) tənliyinə

$$U(\sigma,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} u(x,t)dx \qquad (14)$$

Furye çevirməsini tətbiq edək. Onda

$$\frac{\partial^2 U(\sigma,t)}{\partial t^2} + a^2\sigma^2 U(\sigma,t) = 0 \qquad (15)$$

tənliyini alarıq.

(15) tənliyindən çıxır ki,

$$U(\sigma,t) = A(\sigma)e^{-i\sigma a t} + B(\sigma)e^{i\sigma a t}. \qquad (16)$$

Burada $A(\sigma), B(\sigma)$ - σ-dəyişənindən asılı ixtiyari funksiyalardır.

Aydındırki, (14) Furye çevirməsinin tərs çevirməsi

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x} U(\sigma,t)d\sigma \qquad (17)$$

münasibəti ilə təyin olunar.

Onda (16) ifadəsini (17)-də nəzərə alsaq

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A(\sigma)e^{i\sigma(x-at)}+B(\sigma)e^{i\sigma(x+at)}\right]d\sigma=$$

$$=A(x-at)+B(x+at).$$

Başlanğıc şərtlərdən istifadə etsək Koşi məsələsinin həllini

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)+\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$$

şəklində alarıq.

§4. İnteqral tənliyin həlli

Tutaq ki, bizə

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{-\infty}^{\infty}k(x-y)\varphi(y)dy, \tag{18}$$

inteqral tənliyi verilmişdir. Burada $f(x)$ və $k(x)$ - verilmiş funksiyalar, $\varphi(x)$ - axtarılan funksiyadır.

Verilmiş inteqral tənliyə Furye çevirməsini tətbiq etsək

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(x)+\int_{-\infty}^{\infty}k(x-y)\varphi(y)dy\right\}e^{ixu}dx=$$

$$= F(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)e^{ixu}dx =$$

$$= F(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta)e^{i(y+\eta)u}d\eta =$$

$$= F(u) + \sqrt{2\pi}\Phi(u)K(u) \tag{19}$$

Buradan

$$\Phi(u) = \frac{F(u)}{1-\sqrt{2\pi}K(u)} \tag{20}$$

və

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u)}{1-\sqrt{2\pi}K(u)} e^{-ixu}du \tag{21}$$

münasibətlərini alarıq.

Bu axırıncı (21) münasibətindən

$$\varphi(x) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{F(u)}{1-\sqrt{2\pi}K(u)} - F(u) \right\} e^{-ixu}du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \frac{K(u)}{1-\sqrt{2\pi}K(u)} e^{-ixu}du \ . \tag{22}$$

Burada

$$R(u) = \frac{K(u)}{1-\sqrt{2\pi}K(u)},$$

işarə etsək,

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} r(x-\xi) f(\xi) d\xi$$

həllini alarıq. Burada $r(x)$, $R(u) = \dfrac{K(u)}{1-\sqrt{2\pi}K(u)}$ funksiyasının Furye çevirməsidir.

Əgər (18) inteqral tənliyində $\varphi(x)$, $f(x)$ və $k(x)$ funksiyaları x arqumentinin mənfi qiymətində sıfırdırsa, onda inteqral tənlik

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{0}^{x} k(x-\xi)\varphi(\xi) d\xi \quad (x > 0) \tag{23}$$

şəklində olar.

Onda inteqral tənliyin həlli

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{0}^{x} f(\xi) r(x-\xi) d\xi$$

düsturu ilə təyin olunar, burada $x < 0$ olduqda $r(x) = 0$-dır.

Bu üsulla başqa tip

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\varphi(y) dy \tag{24}$$

inteqral tənliyini də həll etmək olar. Əvvəlki düsturlara analoji olaraq

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} du \int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi)\varphi(\xi) d(\xi) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi) e^{ixu} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta) e^{i(\xi+\eta)u} d\eta = \sqrt{2\pi}\Phi(u)K(u)$$

alarıq.

Buradan

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u)}{K(u)} e^{-ixu} du$$

alınır.

Qeyd edək ki, bu üsulun ciddi əsaslandırılması üçün məlum funksiyaların üzərinə müəyyən şərtlər qoymaq lazımdır. Məsələn, əgər $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, $k(x) \in L(-\infty, \infty)$ isə, onda (24) tənliyinin $L_2(-\infty, \infty)$ fəzasına daxil olan həllinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt $\frac{F(u)}{K(u)} \in L_2(-\infty, \infty)$ olmasıdır.

İndi isə

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x+y)\varphi(y) dy \qquad (25)$$

şəklində inteqral tənliyə baxaq.

Əvvəlki qayda ilə

$$\Phi(u) = F(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} dx \int_{-\infty}^{\infty} k(x+y)\varphi(y)dy =$$

$$= F(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} k(x+y)e^{ixu} dx =$$

$$= F(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta)e^{i(\eta-y)u} d\eta =$$

$$= F(u) + \sqrt{2\pi}\Phi(-u)K(u)$$

Bu münasibətdə u-nu $-u$ ilə əvəz etsək

$$\Phi(-u) = F(-u) + \sqrt{2\pi}\Phi(u)K(-u)$$

alınar.

Bu axırıncı bərabərlikdən

$$\Phi(u) = \frac{F(u) + \sqrt{2\pi}F(-u)K(u)}{1 - 2\pi K(u)K(-u)}.$$

Beləliklə

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u) + \sqrt{2\pi}F(-u)K(u)}{1 - 2\pi K(u)K(-u)} e^{-ixu} du$$

alarıq.

Riyazi fizikanın bəzi məsələlərində iki arqumentin fərqinin mütləq qiymətindən asılı olan, simmetrik nüvəli

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(|x-y|)\varphi(y)dy \tag{26}$$

inteqral tənliyə rast gəlinir. Bu inteqral tənliyin həllinin tədqiqini Furye çevirməsi vasitəsilə aparmaq olar.

FƏSİL 6
LAPLAS ÇEVİRMƏSİ

§1. Laplas çevirməsinin əsas xassələri

1. Laplas çevirməsinin tərifi.

Laplas çevirməsi həqiqi dəyişənli $f(t)$ funksiyasına p kompleks dəyişənindən asılı olan və

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

münasibətilə təyin olunan $F(p)$ funksiyasını qarşı qoyur. Aydındır ki, bütün $f(t)$ funksiyaları üçün bu inteqralın mənası yoxdur. Buna görə biz elə $f(t)$ funksiyalar sinfinə baxacağıq ki, bu inteqralın mənası olsun. Həqiqi t, $-\infty < t < \infty$ dəyişəndən asılı olan və aşağıdakı şərtləri ödəyən $f(t)$ funksiyasına baxaq:

1. Əgər $t<0$ olarsa, $f(t)\equiv 0$.
2. Əgər $t \ge 0$ isə $f(t)$ funksiyası t oxunun sonlu hissəsində, sonlu sayda birinci növ kəsilmə nöqtələrinə malikdir.
3. $f(t)$ funksiyası t ∞-a yaxınlaşdıqda məhdud artma tərtibinə malikdir, başqa sözlə, hər bir funksiya üçün elə müsbət M və a sabitləri varki, bütün $t>0$ üçün

$$|f(t)| \le Me^{at} \tag{1}$$

münasibəti ödənilir.

Onda (1) münasibətini ödəyən a ədədinin dəqiq aşağı sərhəddinə $f(t)$ funksiyasının artma tərtibinin göstəricisi deyilir.

Qeyd edək ki, $f(t)$ funksiyası həqiqi arqumentdən asılı kompleks $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ funksiya da ola bilər. Burada $f_1(t)$ və $f_2(t)$ həqiqi funksiyalardır.

1,2,3 şərtlərini ödəyən $f(t)$ funksiyası üçün aşağıdakı tərifi qeyd edək.

Tərif: Əgər həqiqi t dəyişənindən asılı $f(t)$ funksiyasına p kompleks dəyişənindən asılı olan və

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt \tag{2}$$

münasibətilə təyin olunan $F(p)$ funksiyası qarşı qoylursa, onda $F(p)$-yə $f(t)$-nin Laplas çevirməsi deyilir.

Qeyd edək ki, (2) inteqralı p parametrindən asılı qeyri-məxsusi inteqraldır. Aydındır ki, (2) inteqralı p parametrinin bütün qiymətlərində yığılmır. Doğrudan da, əgər t ∞-a yaxınlaşdıqda $f(t)$ funksiyası sıfırdan fərqli limitə malikdirsə, $\operatorname{Re} p < 0$ olduqda inteqral dağıla bilər. Ona görə təbiidir ki, (2) inteqralının yığılma oblastını, eləcə də $F(p)$ funksiyasının təyin olunma oblastının müəyyənləşdirmək lazımdır.

Bunun üçün aşağıdakı teoremi qeyd edək

Teorem 1. $\operatorname{Re} p > a$ oblastında (2) inteqralı yığılandır, eləcə də $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$ oblastında həmin inteqral müntəzəm yığılandır, burada a $f(t)$ funksiyasının artma tərtibinin göstəricisidir.

İsbatı. Doğrudan da $\operatorname{Re} p > a$ və $p = x + iy$ olduqda qeyri-məxsusi inteqralın yığılması üçün müqayisə əlamətindən istifadə etsək

$$|F(p)| = \left| \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \right| \leq M \int_0^\infty e^{-xt} e^{at} dt = \frac{M}{x - a}, \; x > a \qquad (3)$$

qiymətlənməsini alarıq ki, buradan da $x > a$ olduqda (2) inteqralının yığılması alınır.

Əgər $x \geq x_0 > a$ olarsa analoji qayda ilə

$$|F(p)| \leq M \int_0^\infty e^{-(x_0 - a)t} dt = \frac{M}{x_0 - a} \qquad (4)$$

qiymətlənməsi alınar ki, Veyerştrass əlamətinə görə p parametrinə nəzərən $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$ oblastında (2) inteqralının müntəzəm yığıldığı isbat olunur. Aparılan isbat t həqiqi dəyişənindən asılı 2 və 3 şərtlərini ödəyən $f(t)$ funksiyalar sinfində doğrudur. Ancaq Laplas çevirməsini təyin edən $f(t)$ funksiyalar sinfini genişləndirmək də olar. Bunun üçün aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma. Tutaq ki, həqiqi t dəyişənli $f(t)$ funksiyası bütün $t \geq 0$ üçün təyin olunmuşdur və elə p_0 kompleks ədədi var ki,

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)dt < M \tag{5}$$

inteqralı yığılandır.

Onda $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$ şərtini ödəyən bütün p üçün

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \tag{6}$$

inteqralı yığılandır.

İsbatı. $\varphi(t) = e^{-p_0 t} f(t)$ işarə edək və köməkçi $F(t) = -\int_t^\infty \varphi(\tau)d\tau$ funksiyası götürək. Qeyd edək ki, $F'(t) = \varphi(t)$. Bundan başqa, (5) inteqralı yığılan olduğundan verilmiş $\varepsilon' > 0$-a qarşı elə T_0 göstərmək olar ki, $t \geq T_0$

üçün $|F(t)| < \varepsilon'$ olar. İndi $\int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-pt} f(t)dt$ inteqralına baxaq.

Burada T_1 və T_2 ixtiyari həqiqi $T_2 > T_1$ şərtini ödəyən ədədlərdir.

Aydındır ki,

$$\int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-pt} f(t)dt = \int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} \varphi(t)dt = \int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} F'(t)dt .$$

Axırıncı inteqralı hissə-hissə inteqrallasaq

$$\int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} F'(t)dt = e^{-(p-p_0)T_2} F(T_2) - e^{-(p-p_0)T_1} F(T_1) + $$
$$+ (p-p_0)\int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} F(t)dt$$

alarıq.

Burada $T_1, T_2 > T_0$ və $\operatorname{Re}(p-p_0) > 0$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\left|\int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-pt} f(t)dt\right| \le \left(e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_2} + e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_1}\right)\varepsilon' +$$
$$+ \varepsilon' \frac{|p-p_0|}{\operatorname{Re}(p-p_0)}\left(e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_1} - e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_2}\right) <$$
$$< \varepsilon'\left[2 + \frac{|p-p_0|}{\operatorname{Re}(p-p_0)}\right] e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_0} .$$

Aydındır ki, həmişə T_0-ı elə seçmək olar ki, alınmış ifadə qabaqcadan verilmiş istənilən $\varepsilon > 0$ ədədindən kiçik olsun. Bu isə Koşi əlamətinə görə (6) inteqralının yığıldığını göstərir. Qeyd olunan (6) inteqralının $\operatorname{Re} p \geq \operatorname{Re} p_1 > \operatorname{Re} p_0$ oblastında p parametrinə nəzərən müntəzəm yığıldığını da isbat etmək olar.

İsbat olunmuş lemmaya əsasən (2) münasibəti ilə təyin olunan Laplas çevrilməsində t həqiqi dəyişənindən asılı əsas funksiyalar sinfi əvəzinə (5) şərtini ödəyən funksiyaları da götürmək olar. (5) münasibətini ödəyən funksiyalar sinfini $A(p_0)$-la işarə edəcəyik.

Beləliklə (2) çevirməsi ilə təyin olunan p kompleks dəyişənindən asılı olan $F(p)$ funksiyası xəyali oxa paralel, $\operatorname{Re} p = a$ düz xəttindən sağ tərəfdə kompleks yarım müstəvisində təyin olunmuşdur.

Qeyd edək ki, (3) münasibətindən $\operatorname{Re} p$ ∞-a yaxınlaşdıqda, $|F(p)|$ 0-a yaxınlaşması alınır.

Verilmiş $f(t)$ funksiyası vasitəsilə (2) münasibətilə təyin olunan $F(p)$ funksiyası $f(t)$ funksiyasının Laplas çevirməsi, $f(t)$ funksiyası isə $F(p)$ funksiyasının orjinalı adlanır.

$f(t)$ və $F(p)$ funksiyaları arasında əlaqə simvolik olaraq

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \text{və ya} \quad F(p) \doteqdot f(t) \tag{7}$$

şəklində yazılır.

Qeyd edək ki, bəzi tətbiqi məsələlərdə

$$\widetilde{F}(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \tag{8}$$

münasibətilə təyin olunan və Xevisayd çevirməsi adlanan çevirmədən istifadə olunur. Bu çevirmə Laplas çevirməsindən p vuruğu ilə fərqlənir. Aydındır ki, $\widetilde{F}(p)$ funksiyasının təyin oblastı $F(p)$ funksiyasının təyin oblastı ilə eynidir. Biz gələcəkdə yalnız (2) münasibətilə təyin olunan Laplas çevirməsinə baxacayıq. Xevisayd çevirməsinin xassələrini gələcəkdə öyrənəcəyimiz Laplas çevirməsinin xassələrindən asanlıqla almaq olar.

Məlumdur ki, kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsində əsasən vacib funksiyalar sinfi analitik funksiyalardır. Alınmış $F(p)$ funksiyasının analitik olduğunu araşdıraq. Bunun üçün aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem 2. Verilmiş $f(t)$ funksiyasının (2) münasibətilə təyin olunan Laplas çevirməsi $\operatorname{Re} p > a$ oblastında p kompleks dəyişəninə nəzərən analitik funksiyadır, burada a $f(t)$ funksiyasının artma tərtibinin göstəricisidir.

İsbatı. Teorem 1-ə əsasən qeyri-məxsusi (2) inteqralı $\operatorname{Re} p > a$ oblastında yığılandır. İnteqrallama intervalını ixtiyari sonlu uzunluqlu $[t_i, t_{i+1}]$ parçalarına bölək, belə ki, $t_0 = 0$, n ∞-a yaxınlaşdıqda $t_n \to \infty$.

Onda $F(p)$ funksiyasını $\operatorname{Re} p > a$ olduqda yığılan

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(p), \qquad (9)$$

sırasının cəmi şəkilin vermək olar.

Qeyd edək ki, (9) sırasının qalıq həddi $\int_{t_{n+1}}^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$-yə bərabər olduğundan, teorem 1-ə görə (9) sırası $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$ oblastında müntəzəm yığılır. Burada p parametrindən asılı

$$u_n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t)dt$$

inteqralı şəkilində verilən hər bir funksiya t-kompleks müstəvisində sonlu parça ilə müəyyən olunur.

Parametrdən asılı, iki kompleks dəyişənli funksiyanın inteqralının ümumi xassəsinə görə [9,11], $u_n(p)$ p- parametrnin tam funksiyasıdır. Qeyd olunmuş mühakimədən alınır ki, $\operatorname{Re} p > a$ oblastında (9) sırası Veyerştrass teoreminin [9,11] bütün şərtlərini ödəyir, başqa sözlə $\operatorname{Re} p > a$ oblastında $F(p)$ funksiyası analitikdir və onun törəməsi (2) münasibətində inteqral altı funksiyanın p parametrnə nəzərən diferensiallanmasından alınır.

2. Sadə funksiyaların Laplas çevirməsi.

Qeyd olunmuş (2) münasibətindən istifadə edərək həqiqi dəyişənli bəzi sadə funksiyaların Laplas çevirməsini tapaq

a) Vahid Xevisayd funksiyası. Tutaq ki,

$$f(t) = \sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Onda

$$f(t) \doteqdot F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p},$$

aydındır ki, $F(p)$ funksiyası $\operatorname{Re} p > 0$ oblastında təyin olunmuşdur.

Beləliklə

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \doteqdot \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0 \tag{11}$$

alanq.

Qeyd edək ki, (2) Laplas çevirməsi əvəzinə (8) Xevisayd çevirməsindən istifadə etsək, onda vahid $\sigma_0(t)$ funksiyasının çevirməsi $\widetilde{F}(p) \equiv 1$ olar. Bu onu göstərir ki, Xevisayd çevirməsi daha geniş sinif funksiyalar üçün tətbiq oluna bilər. Bəzi hallarda, məsələn, tərs çevirmənin tapılmasında (8) Xevisayd çevirməsinin tətbiqi çətinliklər törədir.

Gələcəkdə $f(t)$ funksiyası əvəzinə $f(t)\cdot\sigma_0(t)$ hasili götürüləcək ki, $t<0$ olduqda bu funksiya eynilik kimi sıfır olur.

b) Üstlü funksiya. Tutaq ki,

$$f(t) = e^{\alpha t}. \tag{12}$$

Onda (2) inteqralını hesablasaq

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\cdot e^{\alpha t}dt = \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha;$$

$$e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha \tag{13}$$

alarıq.

c) Qüvvət funksiyası. Verilmiş

$$f(t) = t^{\nu}, \quad \nu > -1 \tag{14}$$

funksiyasına baxaq.

Bu halda (2) inteqralı

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}t^\nu dt\,,\ \operatorname{Re}p>0 \qquad (15)$$

şəklində olar.

Qeyd edək ki, $\nu<0$ olduqda (14) funksiyası Laplas çevirməsi üçün 2 şərtini ($t=0$ nöqtəsi bu funksiya üçün ikinci növ kəsilmə nöqtəsidir), eləcə də, Laplas çevirməsinin varlığı üçün lazım olan həqiqi dəyişənli funksiyalar sinfinə daxil olmayacaq. Lakin asanlıqla görmək olar ki, $\nu>-1$ olduqda bu funksiya genişlənmiş $A(p_0)$ sinfinə daxil olacaq (onda (15) inteqralı $\operatorname{Re}p>0$ və $\nu>-1$ olduqda yığılandır). Ona görə $-1<\nu<0$ halında $\operatorname{Re}p>0$ oblastında (14) funksiyasının Laplas çevirməsi vardır və (15) düsturu ilə təyin olunur.

İndi isə (15) inteqralını hesablayaq. Ttutaq ki, p dəyişəni həqiqi $p=x>0$ qiymətini alır. Onda (15) inteqralında $xt=s$ əvəzləməsi aparsaq

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-xt}t^\nu dt=\frac{1}{x^{\nu+1}}\int_0^\infty e^{-s}s^\nu ds=\frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}} \qquad (16)$$

münasibətini alarıq. Burada $\Gamma(\nu+1)$ Eylerin qamma-funksiyasıdır. Bu qayda ilə (15) düsturu vasitəsilə təyin olunan, həqiqi oxun $x>0$ müsbət hissəsində (16) qiymətinə malik olan $F(p)$ funksiyası $\operatorname{Re} p > 0$ oblastında analitik və $F(p)$ funksiyasının $\operatorname{Re} p > 0$ oblastında analitik davamının yeganəliyindən

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^\nu dt = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu+1}} \tag{17}$$

münasibətini alarıq.

Ona görə ν-nün kəsr qiymətləri üçün $\frac{1}{p^{\nu+1}}$ funksiyasının elə qiymətlərini götürmək lazımdır ki, 0 həqiqi $x > 0$ dəyişənindən asılı olan, həqiqi $\frac{1}{x^{\nu+1}}$ funksiyasının $\operatorname{Re} p > 0$ oblastında analitik davamı olsun.

Onda

$$t^\nu \doteqdot \frac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu+1}}, \quad \nu > -1, \operatorname{Re} p > 0. \tag{18}$$

Alınmış (18) düsturundan tam $\nu = n$ qiymətləri üçün

$$t^n \doteqdot \frac{\Gamma(n + 1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0 \tag{19}$$

alarıq.

3. Çevirmənin xassələri.

a) Çevirmənin xəttiliyi. Müəyyən inteqralın məlum xassələrinə görə aşağıdakılar doğrudur.

Xassə 1. Əgər $F_i(p) \doteqdot f_i(t), \operatorname{Re} p > a_i \ (i = 1,...,n)$ isə, onda

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(p) \doteqdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t), \operatorname{Re} p > \max a_i$$

doğrudur, burada α_i - verilmiş sabit ədədlər (həqiqi və ya kompleks), a_i, $f_i(t)$ funksiyalarının artma tərtibinin göstəricisidir.

b) Xassə 2. Tutaq ki, $F(p) \doteqdot f(t), \operatorname{Re} p > a$, onda

$$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \doteqdot f(\alpha t), \ \alpha > 0, \ \operatorname{Re} p > a \tag{20}$$

doğrudur.

Doğrudan da

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

c) Xassə 3. Tutaq ki, $F(p) \doteqdot f(t), \operatorname{Re} p > a$ və

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, \ t < \tau, \ \ \tau > 0, \\ f(t-\tau), \ t \geq \tau \end{cases} \tag{21}$$

funksiyası verilmişdir. Onda

$$f_\tau(t) \doteqdot F_\tau(p) = e^{-p\tau} F(p) \tag{22}$$

münasibəti doğrudur. Doğrudan da

$$F_\tau(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f_\tau(t)dt=\int_\tau^\infty e^{-pt}f(t-\tau)dt.$$

Axırıncı inteqralda $t-\tau=t'$ əvəz etsək

$$F_\tau(p)=\int_0^\infty e^{-p(t'+\tau)}f(t')dt'=e^{-p\tau}F(p)$$

münasibətini alarıq.

d) Törəmənin çevirməsi. İndi isə çevirmənin əsas xassələrindən biri olan orjinalın törəməsinin çevirməsinin xassəsini öyrənək.

Xassə 4. Əgər $f'(t)$ funksiyası çevirmənin varlığı üçün olan şərtləri ödəyərsə və $f(t)\doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re}p>a$ isə, onda

$$f'(t)\doteqdot pF(p)-f(0),\quad \operatorname{Re}p>a \tag{23}$$

münasibəti doğrudur.

Doğurdan da, hissə-hissə inteqrallasaq

$$f'(t)\doteqdot\int_0^\infty e^{-pt}f'(t)dt=e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=$$

$$=pF(p)-f(0).$$

Analoji qayda ilə aşağıdakı xassəni isbat etmək olar.

Xassə 4′. Əgər $f^{(n)}(t)$ funksiyası çevirmənin varlığı üçün bütün şərtləri ödəyərsə və $f(t) \doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, onda

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n \left\{ F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right\}, \operatorname{Re} p > a \quad (24)$$

doğrudur.

Alınmış (24) düsturu $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ olduqda

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) \quad (25)$$

şəklinə düşər.

e) İnteqralın çevirməsi.

Xassə 5. Tutaq ki, $f(t) \doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. Onda

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \doteqdot \frac{1}{p} F(p), \ \operatorname{Re} p > a \quad (26)$$

doğrudur.

Doğrudan da, asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\varphi(t)$ funksiyası çevirmənin varlığı üçün bütün şərtləri ödəyir və onun artma tərtibinin dərəcəsi $f(t)$ funksiyasının artma tərtibinin dərəcəsi ilə eynidir. Onda (2) düsturu ilə $\varphi(t)$ funksiyasının çevirməsini hesablasaq

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)d\tau .$$

Axırıncı inteqralda inteqrallama növbəsini dəyişsək

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \doteqdot \int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_\tau^\infty e^{-pt}dt = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)d\tau = \frac{1}{p}F(p)$$

alarıq.

Analoji qayda ilə aşağıdakı xassəni isbat etmək olar.

Xassə 5′. Tutaq ki, $f(t)\doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re}p > a$, onda

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ldots\int_0^{t_{n-1}}f(t_n)dt_n \doteqdot \frac{1}{p^n}F(p),\ \operatorname{Re}p > a. \tag{27}$$

Müxtəlif funksiyaların çevirməsini tapmaq üçün 5 və 5′ xassələri geniş tətbiq olunur.

f) Bükülmənin çevirməsi. Verilmiş $f_1(t)$ və $f_2(t)$ funksiyalarının bükülməsi

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \tag{28}$$

münasibətilə təyin olunan $\varphi(t)$ funksiyasına deyilir.

Axırıncı bərabərliyin doğruluğunu asanlıqla göstərmək olar, bunun üçün birinci inteqralda inteqral dəyişənini $t-\tau=t'$ əvəz etmək lazımdır.

Aşağıdakı xassəni qeyd edək.

Xassə 6. Əgər $f_1(t)\doteqdot F_1(p), \operatorname{Re}p>a_1, f_2(t)\doteqdot F_2(p), \operatorname{Re}p>a_2$ isə,

onda

$$\varphi(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \doteqdot F_1(p)F_2(p),\ \operatorname{Re}p>\max\{a_1,a_2\}. \quad (29)$$

Məhdud artma tərtibli $f_1(t)$ və $f_2(t)$ funksiyalarının bükülməsi məhdud artma tərtibli funksiyadır. Doğrudan da,

$$\left|\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right| \le M_1M_2\int_0^t e^{a_1\tau}e^{a_2(t-\tau)}d\tau =$$

$$=\frac{M_1M_2}{a_1-a_2}\left\{e^{a_1t}-e^{a_2t}\right\}\le\frac{2M_1M_2}{|a_1-a_2|}e^{at},\ a=\max\{a_1,a_2\}.$$

Aydındır ki, bükülmənin artma tərtibi olaraq $f_1(t)$ və $f_2(t)$ funksiyalarının artma tərtiblərinin ən böyüyü götürülür. Bükülmənin çevirməsini tapmaq üçün (2) düsturundan istifadə edək. İnteqrallama növbəsini dəyişsək

$$\int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f_1(t\}f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty f_1(\tau\}d\tau\int_\tau^\infty e^{-pt}f_2(t-\tau)dt\,.$$

Daxili inteqralda $t-\tau=t'$ əvəzləməsini aparsaq

$$\int_0^t f_1(\tau\}f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{-p\tau}f_1(\tau)d\tau\int_0^t e^{-pt'}f_2(t')dt' = F_1(p)F_2(p)$$

olduğunu alarıq.

Bununla 6-cı xassə isbat olundu.

g) Çevirmənin diferensiallanması.

Xassə 7. Tutaq ki, $F(p) \doteqdot f(t)$, $\operatorname{Re}p > a$. Onda

$$F'(p) \doteqdot -tf(t)\,,\operatorname{Re}p > a \tag{30}$$

münasibəti doğrudur.

Doğrudan da, əvvəldə qeyd etmişdik ki, $\operatorname{Re}p > a$ təyin oblastında $F(p)$ analitik funksiyasının törəməsi (2) qeyri-məxsusi inteqralında inteqralaltı funksiyanın parametrə nəzərən diferensiallanması nəticəsində alınır. Onda

$$F'(p) = -\int_0^t e^{-pt}tf(t)dt \doteqdot -tf(t)\,.$$

Xassə 7'. Əgər $F(p) \doteqdot f(t)$, $\operatorname{Re}p > a$, isə onda

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t) \tag{31}$$

münasibəti doğrudur.

Alınmış (30) və (31) düsturları çevirməsi məlum olan $f(t)$ funksiyasının t^n vuruğuna hasilinin çevirməsini hesablamaq üçün tətbiq oluna bilər.

h) Çevirmənin inteqrallanması.

Xassə 8. Əgər $\dfrac{f(t)}{t}$ çevirmənin varlığı üçün olan şərtləri ödəyirsə və $f(t) \doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$ isə, onda

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt = \int_p^\infty F(q) dq \tag{32}$$

münasibəti doğrudur.

Aşağıdakı

$$J(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt \tag{33}$$

işarələməsini qəbul edək.

Onda teorem 2-yə əsasən $J(p)$ funksiyası $\operatorname{Re} p > a$ oblastında analitik funksiyadır və $\operatorname{Re} p \to \infty$ olduqda $J(\infty)=0$. Alınmış $J(p)$ funksiyasının törəməsini tapmaq üçün (33) inteqralını parametrə nəzərən diferensiallasaq

$$J'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = -F(p)$$

alanq. Burada $J(\infty)=0$ şərtini nəzərə alsaq

$$J(p)=J(\infty)-\int_{\infty}^{p}F(p)dp=\int_{p}^{\infty}F(p)dp.$$

i) Qarışıq teorem.

Xassə 9. Əgər $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p>a$ isə, onda istənilən kompleks λ ədədi üçün

$$F(p+\lambda) \doteq e^{-\lambda t} f(t), \operatorname{Re} p>a-\operatorname{Re}\lambda \tag{34}$$

münasibəti doğrudur.

Doğurdan da $\varphi(t)=e^{-\lambda t}f(t)$ funksiyası $\operatorname{Re} p>a-\operatorname{Re}\lambda$ oblastında təyin olunmuşdur və çevirmənin varlığı üçün olan şərtləri ödəyir. Onda

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}e^{-\lambda t}f(t)dt=\int_0^{\infty} e^{-(p+\lambda)t}f(t)dt=F(p+\lambda)$$

alanq ki, bununla xassə isbat olunur.

İsbat olunmuş (34) düsturu vasitəsilə çevirməsi məlum olan $f(t)$ funksiyası ilə $e^{-\lambda t}$ funksiyasıqnın hasilinin çevirməsini asanlıqla tapmaq olar.

§2. Çevirməyə nəzərən orjinalın tapılması

Bu paraqrafda çevirməyə nəzərən orjinalın tapılması üçün müəyyən üsul nəzərdən keçiriləcək, həmçinin p kompleks dəyişənindən asılı $F(p)$ funksiyasının həqiqi t dəyişənindən asılı $f(t)$ funksiyasının çevirməsi olması üçün bir neçə kafi şərtlər müəyyənləşdiriləcək.

1. Mellin düsturu. Fərz edək ki, p kompleks dəyişənindən asılı $F(p)$ funksiyası hissə-hissə hamar məhdud $|f(t)| < Me^{at}$ şərtini ödəyən $f(t)$ funksiyasının Laplas çevirməsidir. Burada axtarılan $f(t)$ funksiyasının verilmiş $F(p)$ funksiyasına nəzərən tapılması tələb olunur. Bu məsələ aşağıdakı teorem vasitəsilə həll olunur.

Teorem 1. Tutaq ki, verilmiş $F(p)$ funksiyası $\operatorname{Re} p > a$ oblastında həqiqi t dəyişənindən asılı, məhdud a artma tərtibi olan, hissə-hissə hamar $f(t)$ funksiyasının Laplas çevirməsidir.

Onda

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)dp, \quad x > a \tag{1}$$

münasibəti doğrudur.

İsbatı. Teoremin şərtinə görə $f(t)$ funksiyası vardır və onun artma tərtibi məlumdur. Köməkçi

$$\varphi(t) = e^{-xt} f(t), \quad x > a$$

funksiyasına baxaq. Bu funksiya hissə-hissə hamardır, t oxunun istənilən məhdud hissəsində sonlu sayda birinci növ kəsilməyə malikdir və t ∞-a yaxınlaşdıqda sıfra yaxınlaşır. Onda bu funksiyanın Furye inteqralı

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) e^{i\xi(t-\eta)} d\eta \tag{2}$$

şəklində verilə bilər.

Alınmış (2) münasibətində $\varphi(t)$ funksiyasını $f(t)$ funksiyası vasitəsilə ifadə etsək və $\eta < 0$ üçün $f(\eta) \equiv 0$ olduğunu nəzərə alsaq

$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\eta} f(\eta) e^{i\xi(t-\eta)} d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} d\xi \int_{0}^{\infty} e^{-(x+i\xi)\eta} f(\eta) d\eta . \tag{3}$$

Burada $p = x + i\xi$ əvəzləməsini aparaq və qeyd edək ki, (3) münasibətində daxili inteqral axtarılan $f(t)$ funksiyasının verilmiş $F(p)$ çevirməsidir. Bu halda (3) ifadəsi

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+i\xi)t} F(p) d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp$$

şəklini alır ki, bununla da teorem isbat olunur. Qeyd edək ki, (1) düsturunda inteqrallama p kompleks müstəvisində xəyali oxa paralel, $\operatorname{Re} p = a$ düz xəttindən sağda yerləşən düz xətt üzrə aparılır. (1) inteqralının qiyməti, inteqrallama düz xətti $\operatorname{Re} p = a$ düz xəttindən sağda yerləşdikdə şərtindən asılı olaraq x ədədindən asılı deyil.

İsbat olunan (1) düsturu Mellin düsturu adlanır, bu müəyyən mənada orjinalın çevirmə vasitəsilə ifadə olunduğu tərs Laplas çevirməsidir. Qeyd edək ki, Mellin düsturunu isbat edərkən naməlum $f(t)$ funksiyasından, kəsilməz olduğu nöqtələrdə $f(t)$ funksiyasına yığılan Furye inteqralına keçdik. Onda (1) düsturu $f(t)$ funksiyasını kəsilməz olduğu nöqtələrdə təyin edir.

İsbat olunmuş teoremin tətbiqi üçün, vuruqlardan hər birinin çevirməsi məlum olduqda hasilin çevirməsini tapmaq üçün aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem 2. Tutaq ki, $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > a_1$ və

$$f_2(t) \doteqdot F_2(p), \ \operatorname{Re} p > a_2.$$

Onda

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \doteqdot F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q) F_2(p-q)\,dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(p-q) F_2(q)\,dq, \qquad (4)$$

münasibəti doğrudur.

Burada $F(p)$ funksiyası $\operatorname{Re} p > a_1 + a_2$ oblastında təyin olunmuş analitik funksiyadır və inteqrallama $\operatorname{Re} p > a_1$ və $\operatorname{Re} p > a_2$ düz xəttlərindən sağda yerləşən xəyali oxa paralel olan ixtiyari düz xətt üzrə aparılır.

İsbatı. Verilmiş $f(t)$ funksiyası çevirmənin varlığı üçün bütün şərtləri ödədiyindən onun üçün

$$f(t) \doteqdot F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t) f_2(t) dt \tag{5}$$

Laplas çevirməsi vardır.

Onda (5) münasibətində $f_1(t)$ funksiyasını (1) düsturu ilə təyin olunan Mellin inteqralı ilə əvəz etsək və parametrdən asılı qeyri-məxsusi inteqralın yığıldığını nəzərə alaraq inteqralın növbəsini dəyişsək

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) dt \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{qt} F_1(q) dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q) dq \int_0^{\infty} e^{-(p-q)t} f_2(t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q) F_2(p-q) dq \,. \tag{6}$$

Qeyd edək ki, (6) münasibətində $\operatorname{Re} q = x > a_1$ və $F_2(p-q)$ funksiyası $\operatorname{Re}(p-q) > a_2$ üçün təyin olunmuşdur. Buradan $\operatorname{Re} p > a_1 + a_2$ alarıq. Analoji qayda ilə (5) münasibətində $f_2(t)$ funksiyasını tərs Laplas çevirməsi ilə əvəz etsək (4) düsturuna daxil olan ikinci bərabərliyi almış olarıq. Teorem isbat olundu.

§3. Orjinalın varlığı üçün şərtlər

Bu paraqrafda müəyyən kafi şərtlər daxilində p kompleks dəyişənli $F(p)$ funksiyasının, t həqiqi dəyişənindən asılı müəyyən $f(t)$ funksiyasının Laplas çevirməsi olması araşdırılacaq və həmin funksiyanın tapılması qaydası veriləcəkdir.

Aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem 1. Tutaq ki, $p = x + iy$ kompleks dəyişənindən asılı $F(p)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

a) $F(p)$ funksiyası $\operatorname{Re} p > a$ oblastında analitikdir;

b) $\operatorname{Re} p > a$ oblastında $F(p)$ funksiyası $\arg p$-yə nəzərən müntəzəm olaraq $|p| \to \infty$-a yaxınlaşdıqda sıfra yaxınlaşır;

c) bütün $\operatorname{Re} p = x > a$ üçün

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy < M, \tag{7}$$

inteqralı yığılandır.

Onda $F(p)$ funksiyası $\operatorname{Re} p > a$ üçün t həqiqi dəyişənindən asılı $f(t)$ funksiyasının Laplas çevirməsidir və $f(t)$ aşağıdakı düsturla

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad x > a \tag{8}$$

təyin olunur.

İsbatı. İsbat etməliyik ki, (8) inteqralı $F(p)$ funksiyasının orjinalıdır. Əvvəlcə bu qeyri-məxsusi inteqralın varlığını göstərək. Aydındır ki,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \left| e^{pt} F(p) \right| \cdot |dp| =$$

$$= \frac{e^{xt}}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy \leq \frac{M}{2\pi} e^{xt}. \tag{9}$$

Onda bu qiymətlənmədən istənilən $x > a$ üçün (8) inteqralının yığılması alınır. Qeyd edək ki, həmçinin (9) qiymətlənməsindən istənilən $0 \leq t \leq T$ parçasına daxil olan t parametrinə nəzərən (8) inteqralının müntəzəm yığılması alınır. (8) inteqralının $F(p)$ funksiyasının orjinalı olması üçün aşağıdakı təklifləri isbat etmək lazımdır:

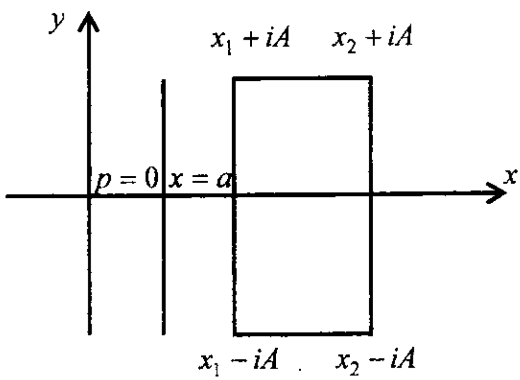
1^0. (8) inteqralı x-dən asılı deyil və yalnız bir t dəyişənindən asılı $f(t)$ funksiyasını təyin edir, bu funksiya məhdud artma tərtibinə malikdir.

2^0. $t < 0$ olduqda $f(t) \equiv 0$.

3^0. $f(t)$ funksiyasının Laplas çevirməsi verilmiş $F(p)$ funksiyasıdır.

Bu təkliflərin hər birini ayrılıqda isbat edək.

1^0. İsbat üçün $\operatorname{Re} p > a$ oblastında xəyali oxa paralel olan $[x_1 - iA, x_1 + iA]$ və $[x_2 - iA, x_2 + iA]$ düz xətt parçalarından və bu parçaları birləşdirən həqiqi oxa paralel olan $[x_1 - iA, x_2 - iA]$ $[x_1 + iA, x_2 + iA]$ düz xətt parçalarından ibarət olan qapalı Γ konturuna baxaq (şəkil 1). Burada $A>0$, x_1, x_2 - isə a sabitindən böyük olan ixtiyari ədədlərdir. Şərtə görə $F(p)$ funksiyası $\operatorname{Re} p > a$ oblastında analitik ol-



Şəkil 1.

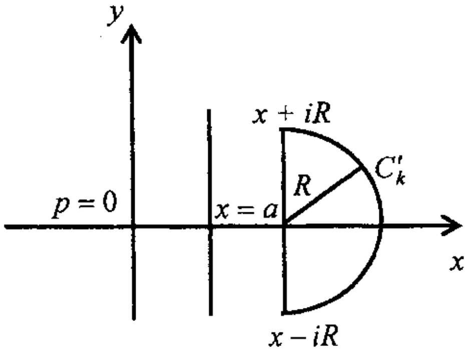
duğundan Koşi teoreminə əsasən $e^{pt}F(p)$ funksiyasının Γ konturu üzrə inteqralı sıfra bərabərdir. Qeyd olunan x_1, x_2-ni saxlayaraq A-nı sonsuzluğa yaxınlaşdıraq.

Onda teoremin b) şərtinə görə üfüqi parçalar üzrə inteqrallar limitdə sıfrə bərabərdir. Bu halda şaquli düz xətt üzrə olan inteqrallar (8) inteqralını verir. Buradan

$$\int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} e^{pt}F(p)dp = \int_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty} e^{pt}F(p)dp,$$

x_1 və x_2 ixtiyari olduğundan 1^0 təklifi isbat olunur. Beləliklə (8) inteqralı yalnız bir t dəyişəninin funksiyasıdır. Qeyd edək ki, ona görə (9) qiymətlənməsindən alınır ki, (8) inteqralı t-yə nəzərən məhdud artma tərtibinə malik funksiyadır və bu funksiyanın artma tərtibinin dərəcəsi a-ya bərabərdir.

2^0. İndi isə $t<0$ olduqda (8) inteqralının qiymətinə baxaq. Bunun üçün $\operatorname{Re} p > a$ oblastında $x > a$ olduqda $[x-iR, x+iR]$ düz xətt parçasının, $|p-x| = R$ yarım dairəsinin C'_R çevrə qövsu ilə əmələ gətirdiyi qapalı C konturuna baxaq (şəkil 2). Onda Koşi teoreminə görə $e^{pt}F(p)$ funksiyasının bu kontur üzrə inteqralı sıfra bərabərdir.



Şəkil 2.

Jordan lemmasına görə R ∞-a yaxınlaşdıqda $t<0$ olduqda C'_R konturu üzrə inteqral sıfra yaxınlaşır. Ona görə

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp\equiv 0,\ \ t<0,\ \operatorname{Re}p>a. \qquad (10)$$

Bunula 2^0 təklifi isbat olundu.

3^0. Burada (8) funksiyasının Laplas çevirməsini quraq və bu çevirmənin ixtiyari p_0 üçün $\operatorname{Re}p_0>a$ olduqda qiymətinə baxaq:

$$\int_0^\infty e^{-p_0t}f(t)dt=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-p_0t}dt\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp. \qquad (11)$$

Alınmış (11) münasibətində daxildəki inteqral x-dən asılı deyil. Onda $a < x < \operatorname{Re} p_0$ şərtini ödəyən x-ləri seçək və uyğun inteqrallar müntəzəm yığıldığına görə inteqrallama növbəsini dəyişək. Bu halda

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)dp \int_0^{\infty} e^{-(p_0-p)t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)\frac{dp}{p_0 - p}. \tag{12}$$

Alınmış (12) inteqralını, teoremin b) şərtinə əsasən inteqral altı funksiya $|p|$ ∞-a yaxınlaşdıqda $\frac{1}{p}$ funksiyasından sürətlə sıfra yaxınlaşdığından çıxıqlar nəzəriyyəsinə görə hesablamaq olar. Ona görə inteqralaltı funksiyanın yeganə məxsusi nöqtəsi, birinci tərtibdən polyusu, $p = p_0$ nöqtəsidir və sağ yarım müstəvidə qapalı kontur üzrə (12) inteqralının inteqrallanması mənfi istiqamətdə aparıldığından

$$f(t) \doteqdot \int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)dt = F(p_0) \tag{13}$$

alarıq.

Buradan $\operatorname{Re} p > a$ oblastında p_0 - ixtiyari nöqtə olduğundan teoremin isbatını alanır.

§4. Mellin inteqralının hesablanması.

Bir çox praktiki məsələlərdə verilmiş kompleks dəyişənli $F(p)$ funksiyası vasitəsilə orjinalın tapılması üçün (8) inteqralını, kompleks dəyişənli funksiyanın kontur inteqralı vasitəsilə hesablanma üsulundan istifadə edərək hesablamaq olar. Tutaq ki, $\operatorname{Re} p > a$ oblastında verilmiş $F(p)$ funksiyası bütün p müstəvisinə analitik davam olunmuşdur. Fərz edək ki, analitik davam olunmuş bu funksiya $\operatorname{Re} p < a$ oblastında Jordan lemmasının şərtlərini ödəyir. Onda $t > 0$ olduqda, R ∞-a yaxınlaşdıqda

$$\int_{C_R''} e^{pt} F(p)dp \to 0, \tag{14}$$

burada C_R'' sol yarım müstəvidə $|p-x| = R$ yarım çevrəsində qövsdür.

Bu halda (8) inteqralını çıxıqlar nəzəriyyəsi vasitəsilə hesablamaq olar. Aşağıdakı misallara baxaq.

Misal 1. Verilmiş $F(p) = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > 0,\ \omega^2 > 0,$

funksiyasının orjinalını tapaq.

Aydındır ki, §3, 1 teoreminin şərtləri ödənildiyindən

$$F(p) \doteqdot f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \frac{\omega}{p^2+\omega^2} dp, \quad x > 0.$$

Verilmiş $F(p)$ funksiyasının sol $\operatorname{Re} p < 0$ yarım müstəvisinə analitik davamından $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ funksiyası Jordan lemmasının şərtlərini ödəyir və iki məxsusi nöqtəyə – birinci tərtib sadə $p_{1,2} = \pm i\omega$ polyusuna malikdir.

Ona görə $t \geq 0$ olduqda

$$f(t) = \sum_{k=1}^{2} res\left[e^{pt} \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, p_k\right] = \frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega} - \frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega} = \sin\omega t, \, t \geq 0$$

alarıq.

Qeyd edək ki, §3 teorem 1-in şərtləri, xüsusi halda b) şərti, $\operatorname{Re} p > a$ oblastında analitik olan $F(p)$ funksiyasının orjinalının varlığı üçün kafi şərtdir. Elə misal qurmaq olar ki, $F(p)$ funksiyası bu şərti ödəmədiyi halda belə o, müəyyən həqiqi dəyişənli bir funksiyasının çevirməsi olsun.

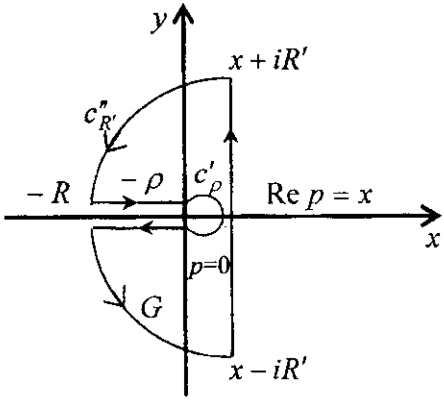
Misal 2. Verilmiş $F(p) = \frac{1}{p^{\alpha+1}}$, $-1 < \alpha < 0$ funksiyasının $\operatorname{Re} p > 0$ oblastında orjinalını tapaq.

Bu funksiya baxılan oblastda çoxqiymətlidir. Biz $F(p)$ funksiyasına $x>0$ oblastında həqiqi dəyişənli, həqiqi $\frac{1}{x^{\alpha+1}}$ funksiyasının $\operatorname{Re} p>0$ oblastına analitik davamı kimi baxacağıq. Ona görə $x>0$, $p=x$ olduqda $\arg p=0$ qəbul edəcəyik. Aydındır ki, $F(p)$ funksiyası §3 teorem 1-in b) şərtini ödəmir.

Göstərək ki, bu halda

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\frac{1}{p^{\alpha+1}}dp, \quad x>0 \tag{15}$$

funksiyası verilmiş $F(p)$ funksiyasının orjinalıdır. Verilmiş $F(p)$ funksiyasının sol $\operatorname{Re} p<0$ yarım müstəviyə analitik davamı $p=0$ və $p=\infty$ budaqlanma nöqtələrinə malik olan çoxqiymətli funksiyadır. $\operatorname{Re} p>0$ oblastında verilmiş $F(p)$ funksiyasının analitik davamı olan $\frac{1}{p^{\alpha+1}}$ funksiyasına p kompleks müstəvisində həqiqi oxun mənfi hissəsində kəsiyə malik olan G oblastında baxaq. Qeyd olunan G oblastında qapalı Γ konturunu götürək. Belə ki, Γ konturu $x>0$ müstəvisində $[x-iR', x+iR']$ düz xətt parasından, kəsilmə xəttin ətrafında $-R<x<-\rho$ parçasından, bu parçaya birləşən $|p|=\rho$ çevrəsinin c'_ρ çevrə qövsündən və kəsilmə xəttini $[x-iR', x+iR']$ şaquli parça ilə birləşdirən $|p-x|=R'$ çevrəsinin $c''_{R'}$ çevrə qövsündən ibarətdir (şəkil 3).



Şəkil 3.

Aydındır ki, $e^{pt}\dfrac{1}{p^{\alpha+1}}$ funksiyası G oblastında heç-bir məxsusi nöqtəyə malik deyil. Onda Koşi teoreminə görə bu funksiyanın Γ konturu üzrə inteqralı sıfra bərabərdir. Onda R' sonsuzluğa və ρ-nu sıfra yaxınlaşdırmaqla limitə keçsək, Jordan lemmasına görə $c''_{R'}$ əyrisi üzrə inteqralın limiti sıfra bərabərdir.

Sonra c'_{ρ} çevrəsi üzrə inteqralı qiymətləndirək. Bunun üçün $p=\rho e^{i\varphi}$ əvəz etsək

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c'_\rho} e^{pt}\frac{dp}{p^{\alpha+1}}\right| \le \frac{1}{2\pi\,\rho^{\alpha}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\rho\cos\varphi}\,d\varphi$$

alarıq.

Buradan $-1<\alpha<0$ olduğundan c'_ρ üzrə inteqral ρ 0-a yaxınlaşdıqda sıfra yaxınlaşar. Bu qayda ilə inteqrallama konturunda yalnız düz xətt üzrə inteqrallar qalır. Qeyd edək ki, kəsilmə xəttinin alt hissəsində $\arg p=-\pi$, üst hissəsində isə $\arg p=\pi$ -dir. Ona görə

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\frac{dp}{p^{\alpha+1}}=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{xt}\frac{dx}{(-x)^{\alpha+1}e^{i\pi\alpha}}+\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{-\infty} e^{xt}\frac{dx}{(-x)^{\alpha+1}e^{-i\pi\alpha}}\right\}=\frac{1}{2\pi i}\left\{e^{-i\pi\alpha}\int_0^\infty e^{-xt}x^{-\alpha-1}dx-\right.$$

$$\left.-e^{-i\pi\alpha}\int_0^\infty e^{-xt}x^{-\alpha-1}dx\right\}=\frac{\sin(-\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty e^{-xt}x^{-\alpha-1}dx \qquad (16)$$

alarıq.

(16) inteqralında $xt=s$ əvəzləməsini aparsaq

$$f(t)=t^{\alpha}\frac{\sin(-\pi\alpha)}{\pi}\Gamma(-\alpha).$$

Onda $\Gamma(-\alpha)\ \Gamma(1+\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin(-\pi\alpha)}$ bərabərliyindən istifadə etsək

$$\frac{1}{p^{\alpha+1}} \doteqdot f(t)=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \qquad (17)$$

münasibətini alarıq.

Misal 3. Verilmiş $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$, $\alpha>0$ funksiyasının

$\operatorname{Re} p>0$ oblastında orijinalını tapaq.

Bunun üçün əvvəlki misalda olduğu kimi, $\operatorname{Re} p>0$ oblastına həqiqi $x>0$ dəyişənli, $\sqrt{x}$ funksiyasının analitik davamı olan $\sqrt{p}$ funksiyasını nəzərdən keçirək.

Qeyd edək ki, bu halda $p=x>0$ olduqda $\arg p=0$ qəbul etməliyik. Verilmiş $F(p)$ funksiyasının sol $\operatorname{Re} p<0$ yarımmüstəvisinə analitik davamı $p=0$ və $p=\infty$ budaqlanma nöqtələrinə malikdir.

Həqiqi oxun mənfi istiqamətində kəsiyə malik olan P müstəvisində G oblastına baxaq. Bu oblastda $F(p)$ funksiyasının analitik davamı olan birqiymətli analitik $\dfrac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$ funksiyası təyin olunmuşdur. Qeyd edək ki, $F(p)$ funksiyası $\operatorname{Re} p>0$ oblastında §3 teorem 1-in şərtlərini və

$t>0$ olduqda $\operatorname{Re} p<0$ yarım müstəvisinin G oblastına onun analitik davamı Jordan lemmasının şərtlərini ödəyir. Ona görə əvvəlki misalda olduğu kimi eynilə Γ konturunu seçmək olar ki, kəsiyin üst hissəsində $\arg p=\pi$ olduqda

$$p=\xi e^{i\pi}=-\xi,\quad \sqrt{p}=\sqrt{\xi}e^{i\frac{\pi}{2}}=i\sqrt{\xi}$$

alınar və kəsiyin alt hissəsində $\arg p=-\pi$ olduqda

$$p=\xi e^{-i\pi}=-\xi,\quad \sqrt{p}=\sqrt{\xi}e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i\sqrt{\xi}\quad (\xi>0).$$

Bu halda

$$F(p)\doteqdot f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}dp=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^\infty e^{-\xi t}\frac{e^{-i\alpha\sqrt{\xi}}}{\xi}d\xi-\int_0^\infty e^{-\xi t}\frac{e^{i\alpha\sqrt{\xi}}}{\xi}d\xi\right\}+$$

$$+\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_\rho}e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}dp$$

alınar. Belə ki,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\rho te^{i\varphi}}\frac{e^{-\alpha\sqrt{\rho}e^{\frac{i\varphi}{2}}}}{\rho e^{i\varphi}}i\rho e^{i\varphi}d\varphi=1$$

olduğundan

$$f(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\xi t}\frac{\sin\alpha\sqrt{\xi}}{\xi}d\xi + 1.$$

Bu inteqralda $\sqrt{\xi} = x$ əvəz etsək və

$$\frac{\sin\alpha x}{x} = \int_0^{\alpha}\cos\beta x d\beta$$

olduğunu nəzərə alaraq inteqrallama növbəsini dəyişsək,

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi t}\frac{\sin\alpha\sqrt{\xi}}{\xi}d\xi = 2\int_0^{\alpha}d\beta\int_0^{\infty}e^{-tx^2}\cos\beta x dx. \qquad (18)$$

Alınmış (18) münasibətində daxildəki inteqral asanlıqla hesablana bilər. Belə ki,

$$\int_0^{\infty} e^{-tx^2}\cos\beta x dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{t}e^{\frac{-\beta^2}{4t}}.$$

Beləliklə

$$f(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{4t}}\int_0^{\alpha}e^{\frac{-\beta^2}{4t}}d\beta$$

alınar.

Əgər $\frac{\beta}{\sqrt{4t}} = \eta$ əvəz etsək

$$F(p) = \frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}} \risingdotseq 1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right), \ \alpha > 0, \ \operatorname{Re} p > 0. \quad (19)$$

Burada

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\eta^2}\,d\eta . \tag{20}$$

§5. Funksiyanın sonsuzluqda requlyar olduğu hal.

Bu paraqrafda xüsusi halda verilmiş kompleks dəyişənli $F(p)$ funksiyasının orjinalının tapılmasını araşdıraq. Tutaq ki, $\operatorname{Re} p > a$ oblastında verilmiş $F(p)$ funksiyasının analitik davamı p kompleks dəyişəninə nəzərən birqiymətli funksiyadır. Fərz edək ki, $p=\infty$ nöqtəsi $F(p)$ funksiyasının düzgün nöqtəsidir. Buradan alınır ki, $F(p)$ funksiyasının $p=\infty$ nöqtəsi ətrafında Loran sırası

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{p^n} \tag{21}$$

şəklindədir. Çevirmənin xassəsindən aydındır ki, $\operatorname{Re} p$ $+\infty$-a yaxınlaşdıqda $|F(p)|$ 0-a yaxınlaşır. Ona görə (21) ayrılışında c_0 əmsalı sıfra bərabərdir və

$$F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{p^n} . \tag{22}$$

Bu funksiyanın vasitəsilə orjinalın tapılması üçün aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem. Əgər $p=\infty$ nöqtəsi $F(p)$ funksiyasının düzgün nöqtəsidirsə və $F(\infty)=0$, onda $F(p)$ funksiyası həqiqi dəyişənli

$$f(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\dfrac{t^n}{n!}, & t>0 \end{cases} \tag{23}$$

funksiyasının Laplas çevirməsidir, burada C_n $F(p)$ funksiyasının $p=\infty$ nöqtəsi ətrafında (22) Loran sırasının əmsallarıdır.

İsbatı. Asanlıqla göstərmək olar ki, [9,11] (22) ayrılışında əmsallar

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} F(p)p^{n-1}dp$$

düsturu ilə təyin olunur. Burada C_R, elə $|p|=R$ çevrəsidir ki, bu çevrədən kənarda $F(p)$ funksiyasının heç-bir məxsusi nöqtəsi yoxdur. Şərtə görə $p=\infty$ nöqtəsi $F(p)$ funksiyasının sıfrı olduğundan, $|z|>R$ üçün $|F(p)|<\dfrac{M}{R}$ olar. Ona görə C_n əmsalları üçün

$$|C_n|<MR^{n-1}$$

qiymətlənməsi alınar. Bu qiymətlənmədən (23) sırasının yığılmasını alarıq. Doğrudan da,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\frac{t^n}{n!}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}|C_{n+1}|\frac{|t|^n}{n!} < M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n|t|^n}{n!} = Me^{R|t|}.$$

Buradan alınır ki, ixtiyari sonlu radiuslu dairədə (23) sırası müntəzəm yığılır, başqa sözlə, t kompleks dəyişənindən asılı müəyyən $\tilde{f}(t)$ tam funksiyasını təyin edir; yəni

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\frac{t^n}{n!}.$$

(Qeyd edək ki, (23) düsturu ilə təyin olunan $f(t)$ funksiyasına, $\tilde{f}(t)$ funksiyası ilə Xevisayd $\sigma_0(t)$ funksiyasının hasili kimi baxmaq olar).

Onda $f(t)$ funksiyasını e^{-pt}-yə vurub, müntəzəm yığılan (23) sırasını t-yə nəzərən hədbəhəd inteqrallasaq və $t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\frac{t^n}{n!} \doteqdot \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\frac{1}{p^{n+1}} = \sum_{n'=1}^{\infty} C_{n'}p^{-n'} = F(p). \qquad (24)$$

Bununla teorem isbat olundu.

Misal 4. Tutaq ki,

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \qquad (25)$$

Bu funksiyanın iki $p_{1,2} = \pm i$ məxsusi nöqtəsi vardır, $p = \infty$ nöqtəsinin ətrafında birqiymətli analitik funksiyadır və bu nöqtənin ətrafında [9,11] $F(p)$ funksiyasını Loran sırasına ayırmaq olar:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{1}{p^{2k+1}}.$$

Ona görə (24) münasibətindən

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \risingdotseq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \tag{26}$$

alarıq. Alınmış (26) münasibətinin sağ tərəfi sıfırıncı tərtibdən

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}$$

Bessel funksiyasıdır.

Onda

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \risingdotseq J_0(t) \tag{27}$$

alınar.

$$\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$$

olduğundan və $\sin t$ funksiyasının Laplas çevirməsindən istifadə etsək

$$\int_0^t J_0(\tau)J_0(t-\tau)d\tau = \sin t$$

alarıq.

Misal 5. Tutaq ki,

$$F(p) = \frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$$

Aydındır ki, bu funksiya teoremin şərtlərini ödəyir və

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!\,p^n}.$$

Onda

$$\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}} \risingdotseq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{(n!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{2\sqrt{t}}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} = J_0(2\sqrt{t}) \quad (28)$$

olduğunu alarıq.

FESİL 7
LAPLAS ÇEVİRMƏSİNİN TƏTBİQLƏRİ

§1. Laplas çevirməsinin adi diferensial tənliklər və xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsi,sərhəd məsələlərinin həllinə tətbiqi

1. Tutaq ki, bizə aşağıdakı diferensial tənlik verilmişdir

$$a_n u^{(n)}(t)+a_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1 u'(t)+a_0 u(t)=f(t) \quad (1)$$

burada $u(t)$ t - sərbəst dəyişənindən asılı axtarılan funksiya, $f(t)$ - verilmiş funksiya, a_i $(i=0,1,\ldots,n)$ - sabit əmsallardır. Bu tənliyi e^{-pt} vuruğuna vurub t-yə nəzərən sıfırdan sonsuzluğa qədər inteqrallasaq

$$a^*(p)u^*(p)-b^*(p)=f^*(p). \quad (2)$$

burada

$$a^*(p)=a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0, \quad (3)$$

$$b^*(p)=b_{n-1}p^{n-1}+\ldots+b_1 p+b_0, \quad (4)$$

$u^*(p), f^*(p)$ uyğun olaraq $u(t)$ və $f(t)$ funksiyalarının Laplas çevirməsidir və

$$
\begin{aligned}
&b_{n-1} = a_n u(0), \\
&b_{n-2} = a_n u'(0) + a_{n-1} u(0), \\
&b_{n-3} = a_n u''(0) + a_{n-1} u'(0) + a_{n-2} u(0), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&b_1 = a_n u^{(n-2)}(0) + a_{n-1} u^{(n-3)}(0) + \dots + a_2 u(0), \\
&b_0 = a_n u^{(n-1)}(0) + a_{n-1} u^{(n-2)}(0) + \dots + a_2 u'(0) + a_1 u(0).
\end{aligned} \tag{5}
$$

(2) tənliyini $u^*(p)$-yə nəzərən həll etsək

$$
u^*(p) = \frac{f^*(p) + b^*(p)}{a^*(p)}. \tag{6}
$$

Aşağıdakı işarələmələri qəbul edək

$$
r^*(p) = \frac{1}{a^*(p)}, \quad s^*(p) = \frac{b^*(p)}{a^*(p)}. \tag{7}
$$

Onda

$$
u^*(p) = f^*(p) r^*(p) + s^*(p) \tag{8}
$$

alarıq. Burada $r^*(p)$ və $r^*(p)$ rasional kəsrlərdir və məlum qaydalarla sadə kəsirlərə ayrıla bilərlər. Bükülmə haqqındakı xassədən istifadə etsək

$$
u(t) = \int_0^t f(\tau) r(t-\tau) d\tau + s(t) \tag{9}
$$

alarıq.

Beləliklə (1) tənliyinin n ixtiyari sabitdən asılı ümumi həllini almış olarıq. Bu sabitlər $u(t)$ funksiyasının özünün və $n-1$ tərtib törəmələrinin başlanğıc şərtləri ödəməsindən təyin olunar. Aydındır ki, həllin şəkli xarakteristik

$$a^*(p)=0 \tag{10}$$

tənliyinin köklərindən asılıdır. Aşağıdakı halları araşdıraq.

1^0. Alınmış (10) tənliyinin bütün $p_1,...,p_n$ kökləri həqiqi və müxtəlifdir, yəni:

$$a^*(p)=a_n(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n) \tag{11}$$

Bu münasibətə uyğun olaraq

$$r^*(p)=\frac{r_1}{p-p_1}+\frac{r_2}{p-p_2}+...+\frac{r_n}{p-p_n}$$

$$s^*(p)=\frac{s_1}{p-p_1}+\frac{s_2}{p-p_2}+...+\frac{s_n}{p-p_n}$$

alarıq, burada r_k və s_k sabit əmsalları

$$r_k=\frac{1}{a^{*\prime}(p_k)},\ s_k=\frac{b^*(p_k)}{a^{*\prime}(p_k)},$$

$$b^*(p_k)=u(0)\sum_{i=1}^{n}a_i p_k^{i-1}+u'(0)\sum_{i=2}^{n}u_i p_k^{i-2}+\ldots+$$

$$+u^{(n-2)}(0)\sum_{i=n-1}^{n}a_i p_k^{i-n+1}+u^{(n-1)}(0)a_n$$

münasibətləri ilə təyin olunur.

Tərs Laplas çevirməsindən istifadə etsək

$$r(t)=\sum_{k=1}^{n}r_k e^{p_k t},\quad s(t)=\sum_{k=1}^{n}s_k e^{p_k t},\tag{12}$$

olduğunu alarıq.

Onda (12) münasibətini (9)-də nəzərə alsaq

$$u(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{p_k t}}{a^{*\prime}(p_k)}\left[\int_0^t f(\tau)e^{-p_k\tau}d\tau+b^*(p_k)\right].\tag{13}$$

2^0. (10) tənliyinin sıfır kökləri olan halda, yəni

$$a^*(p)=a_n p^n\tag{14}$$

olduqda, aydındır ki,

$$r^*(p)=\frac{1}{a_n p^n},$$

$$s^*(p)=\frac{b_{n-1}}{a_n}\frac{1}{p}+\frac{b_{n-2}}{a_n}\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{b_1}{a_n}\frac{1}{p^{n-1}}+\frac{b_0}{a_n}\frac{1}{p^n}$$

Onda tərs Laplas çevirməsinə görə

$$r(t)=\frac{1}{a_n}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$s(t)=\frac{b_{n-1}}{a_n}+\frac{b_{n-2}}{a_n}\frac{t}{1!}+\ldots+\frac{b_1}{a_n}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{b_0}{a_n}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Bu halda (9) münasibəti

$$u(t)=\frac{1}{a_n}\int_0^t f(\tau)\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}d\tau+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_{n-1-k}}{a_n}\frac{t^k}{k!} \tag{15}$$

şəklində olar.

3^0. (10) tənliyinin kökləri həqiqi və bir-birinə bərabərdir, başqa sözlə

$$a^*(p)=a_n(p-p_1)^n. \tag{16}$$

Onda

$$r^*(p)=\frac{1}{a_n(p-p_1)^n},$$

$$s^*(p)=\frac{b^*(p)}{a_n(p-p_1)^n}=\frac{c_n}{(p-p_1)^n}+\frac{c_{n-1}}{(p-p_1)^{n-1}}+\ldots+\frac{c_1}{p-p_1},$$

burada c_k - rasional kəsrin sadə kəsrlərə ayrılışından alınmış sabitlərdir.

Buradan

$$r(t)=\frac{t^{n-1}}{a_n(n-1)!}e^{p_1t},\quad s(t)=e^{p_1t}\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{(k-1)!}t^{k-1}.$$

Bu halda (9) düsturu

$$u(t)=\int_0^t f(\tau)\frac{(t-\tau)^{n-1}e^{p_1(t-\tau)}}{a_n(n-1)!}d\tau+e^{p_1t}\sum_{k=1}^{n}\frac{c_kt^k}{(k-1)!} \tag{17}$$

şəklində olar.

2. Tutaq ki, a_{ik} sabit əmsallı və sağ tərəfi zamanın funksiyası olan xətti diferensial tənliklər sistemi verilmişdir. Başqa sözlə, aşağıdakı tənliklər sisteminə baxaq:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t),\\
&\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t).
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Bu sistemin hər bir tənliyini e^{-pt}-yə vuraq və t-yə nəzərən sıfırdan sonsuzluğa qədər inteqrallayaq. Onda

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{11}-p)x_1^*(p)+a_{12}x^*(p)+\ldots+a_{1n}x_n^*(p)=-f_1^*(p)-x_1(0),\\
&a_{21}x_1^*(p)+(a_{22}-p)x_2^*(p)+\ldots+a_{2n}x_n^*(p)=-f_2^*(p)-x_2(0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1^*(p)+a_{n2}x_2^*(p)+\ldots+(a_{nn}p)x_n^*(p)=-f_n^*(p)-x_n(0).
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Bu sistemi həll etsək

$$x_k^*(p) = \frac{\Delta_k}{\Delta(p)} \quad (k = 1,2,\ldots,n), \tag{20}$$

burada

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} a_{11}-p & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-p & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-p \end{vmatrix}$$

(19) sisteminin baş determinantıdır,

$$\Delta_k=-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}f_i\Delta_{ik}(p)-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}x_i(0)\Delta_{ik}(p),$$

və

$$\Delta_{ik}(p)=\begin{vmatrix} a_{11}-p & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-p & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn}-p \end{vmatrix}$$

baş determinantda i-ci sətri və k-ci sütunu pozduqdan sonra alınmış minordur. Bu qayda ilə (20) düsturunu aşağıdakı

$$x_k^*(p)=\sum_{i=1}^{n}f_i^*(p)D_{ik}^*(p)+\sum_{i=1}^{n}x_i(0)D_{ik}^*(p), \qquad (21)$$

şəklində yaza bilərik, burada

$$D_{ik}^*(p) = (-1)^{i+k+1}\frac{\Delta_{ik}(p)}{\Delta(p)}$$

p-yə nəzərən rasional kəsirdir və $\Delta_{ik}(p)$-nin dərəcəsi, dərəcəsi n olan $\Delta(p)$-nin dərəcəsindən bir vahid azdır. Alınmış $D_{ik}^*(p)$-ni sadə kəsrlərə ayırmaq üçün $\Delta(p)=0$ tənliyinin köklərini müəyyənləşdirmək lazımdır. Beləliklə (21) münasibətindən $x_k^*(p)$ təyin etdikdən sonra tərs Laplas çevirməsinin köməyi ilə $x_k(t)$ üçün

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{n}\int_0^t f_i(\tau)D_{ik}(t-\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{n} x_i(0)D_{ik}(t)$$

düsturunu almış olarıq.

Qeyd olunan üsul yüksək tərtibli, xətti diferensial tənliklər sisteminin həllinə də tətbiq oluna bilər.

Tutaq ki,

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{a_{\nu k}\frac{d^2x_k}{dt^2} + b_{\nu k}\frac{dx_k}{dt} + c_{\nu k}x_k\right\} = f_\nu(t) \qquad (\nu = 1,2,...,n) \quad (22)$$

tənliyinin

$$x_k(0) = \alpha_k, x_k'(0) = \beta_k \qquad (k = 1,2,...,n), \qquad (23)$$

başlanğıc şərtləri daxilində həllini tapmaq tələb olunur. Bunun üçün (22) tənliyinin hər tərəfinə Laplas çevirməsini tətbiq etsək

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{\nu k}p^2+b_{\nu k}p+c_{\nu k})x_k^*(p)=f_\nu^*(p)+\sum_{k=1}^{n}[(a_{\nu k}p+b_{\nu k})\alpha_k+a_{\nu k}\beta_k]$$

alarıq.

Axırıncı münasibətdən $x_k^*(p)$-ni təyin edə bilərik. Qoyulmuş məsələ üçün ümumi həll düsturu almadan, xüsusi misala, iki tərtibli xətti iki diferensial tənliklər sisteminə baxaq

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_1}{dt^2}+A_{11}\frac{dx_1}{dt}+A_{12}\frac{dx_2}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+f_1(t),\\ &\frac{d^2x_2}{dt^2}+A_{21}\frac{dx_1}{dt}+A_{22}\frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+f_2(t),\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

burada $x_1(t)$ və $x_2(t)$ t-dəyişənindən asılı axtarılan funksiya, $f_1(t), f_2(t)$-zamandan asılı verilmiş funksiyalar, A_{11}, A_{12}, A_{21}, $A_{22}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$- sabit əmsallardır. Verilmiş (24) sisteminin hər bir tənliyini e^{-pt}-yə vurub, t-yə nəzərən sıfırdan sonsuzluğa qədər inteqrallasaq

$$p^2x_1^*-px_1(0)-x_1'(0)+pA_{11}x_1^*-A_{11}x_1(0)+A_{12}px_2^*-A_{12}x_2(0)=$$
$$=a_{11}x_1^*+a_{12}x_2^*+f_1^*,$$
$$p^2x_2^*-px_2(0)-x_2'(0)+pA_{21}x_1'-A_{21}x_1(0)+A_{22}px_2^*-A_{22}x_2(0)=$$
$$=a_{21}x_1^*+a_{22}x_2^*+f_2^*$$

alarıq.

Oxşar hədlərə görə qruplaşdırsaq

$$\left.\begin{aligned}&(p^2+pA_{11}-a_{11})x_1^*+(A_{12}p-a_{12})x_2^*=f_1^*+(p+A_{11})x_1(0)+\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+A_{12}x_2(0)+x_1'(0),\\&(A_{21}p-a_{21})x_1^*+(p^2+pA_{22}-a_{22})x_2^*=f_2^*+A_{21}x_1(0)+\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+(p+A_{22})x_2(0)+x_2'(0).\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

Onda

$$x_k^*=\frac{\Delta_k}{\Delta}\quad(k=1,2),\tag{26}$$

burada

$$\Delta=\begin{vmatrix}p^2+A_{11}p-a_{11} & A_{12}p-a_{12}\\ A_{21}p-a_{21} & p^2+A_{22}p-a_{22}\end{vmatrix}$$

(25) tənliklər sisteminin baş deteminantıdır.

Alınmış (26) münasibətində Δ_1 və Δ_2

$$\Delta_1=f_1^*\gamma_{11}^*-f_2^*\gamma_{12}^*+\delta_1^*,\quad \Delta_2=f_2^*\gamma_{22}^*-f_1^*\gamma_{21}^*+\delta_2^*$$

düsturları ilə təyin olunur, belə ki,

$$\begin{aligned}&\gamma_{11}^*=p^2+A_{22}p-a_{22},\quad \gamma_{12}^*=A_{12}p-a_{12},\\&\gamma_{21}^*=A_{21}p-a_{21},\qquad\quad \gamma_{22}^*=p^2+A_{11}p-a_{11},\end{aligned}$$

$$\delta_1^*=x_1(0)\left[(p+A_{11})\gamma_{11}^*-A_{21}\gamma_{12}^*\right]+x_2(0)\left[A_{12}\gamma_{11}^*-(p+A_{22})\gamma_{12}^*\right]+$$
$$+x_1'(0)\gamma_{11}^*-x_2'(0)\gamma_{12}^*,$$

$$\delta_2^*=x_1(0)\left[A_{21}\gamma_{22}^*-(p+A_{11})\gamma_{21}^*\right]+x_2(0)\left[(p+A_{22})\gamma_{22}^*-A_{12}\gamma_{21}^*\right]+$$
$$+x_1'(0)\gamma_{21}^*-x_2'(0)\gamma_{22}^*\ .$$

Aşağıdakı işarələməni qəbul edək

$$\Gamma_{kn}^* = (-1)^{k+n}\frac{\gamma_{kn}^*}{\Delta}, \quad D_k^* = \frac{\delta_k^*}{\Delta} \quad (k,n = 1,2). \qquad (27)$$

Onda (26) düsturunu aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$x_k^* = f_1^*\Gamma_{k1}^* + f_2^*\Gamma_{k2}^* + D_k^* \quad (k = 1,2). \qquad (28)$$

Γ_{kn}^*, D_k^* $(k,n = 1,2)$ kəmiyyətləri p-parametrinə nəzərən rasional kəsirlərdir və kəsrin sürətinin tərtibi məxrəcin tərtibindən dörd vahid azdır. Bu kəsrləri sadə kəsirlərə ayırsaq və tərs Laplas çevirməsini tətbiq etsək

$$x_k(t) = \int_0^t [f_1(\tau)\Gamma_{k1}(t-\tau) + f_2(\tau)\Gamma_{k2}(t-\tau)]d\tau + D_k(t), (k=1,2) \quad (29)$$

olar.

3. Müəyyən sinif diferensial tənliklərin həllini, ixtiyari dəyişən inteqral altına parametr kimi daxil olduqda Laplas inteqralı şəklində axtarmaq olar. Bunun üçün aşağıdakı

$$(a_n + b_n t)x^{(n)}(t) + (a_{n-1} + b_{n-1}t)x^{(n-1)}(t) + ... + (a_0 + b_0 t)x(t) = 0 \quad (30)$$

diferensial tənliyə baxaq.

Tutaq ki,

$$x(t) = \int e^{pt}v(p)dp$$

və inteqrallama sərhəddi haqqında hələlik heç bir fərziyyə irəli sürülmür.

Onda

$$x^{(k)}(t)=\int e^{pt}p^k v(p)dp,\quad tx^{(k)}(t)=\int te^{pt}p^k v(p)dp=$$
$$=\left[e^{pt}p^k v(p)\right]-\int e^{pt}\frac{d}{dp}\left[p^k v(p)\right]dp.$$

Bu münasibətləri (30) tənliyində nəzərə alsaq

$$\int e^{pt}\left\{\sum_{k=0}^{n}a_k p^k v(p)-\sum_{k=0}^{n}b_k\frac{d}{dp}\left[p^k v(p)\right]\right\}dp+$$
$$+\sum_{k=0}^{n}b_k\left[e^{pt}p^k v(p)\right]=0. \qquad (31)$$

Bu tənlik o vaxt ödənilir ki, inteqral altında böyük mötərizə içərisindəki ifadə sıfır olsun. Buradan $v(p)$ funksiyasını təyin etmək üçün bir tərtibli diferensial tənlik almış olarıq. İkinci toplanan da həmçinin sıfır olmalıdır: bunu inteqrallama intervalını seçməklə etmək olar. Ümumiliyi pozmadan aşağıdakı

$$tx''(t)+(a+b+t)x'(t)+ax(t)=0$$

diferensial tənliyinə baxaq.

Onda $x(t)=\int e^{pt}v(p)dp$ Laplas çevirməsi vasitəsilə $v(p)$ funksiyasını təyin etmək üçün

$$v'(p)(p^2+p)-v(p)\left[p(a+b-2)+a-1\right]=0$$

tənliyini alarıq.

Buradan $v(p)=(p+1)^{b-1}p^{a-1}$.

Onda ikinci şərtdən

$$\left[e^{pt}(p+1)^{b-1}p^{a-1}(p^2+p)\right]_{\alpha}^{\beta}=0 \qquad (32)$$

münasibətini alarıq, burada α və β inteqrallama intervalının başlanğıc və son nöqtəsidir.

Müəyyənlik üçün fərz edək ki, $a>0,\ b>0$.

Aydındır ki, (32) şərti $\alpha=-1,\ \beta=0$ olduqda ödəniləcəkdir.

Beləliklə (30) tənliyi üçün birinci inteqral

$$x_1(t)=\int_{-1}^{0}e^{pt}(p+1)^{b-1}p^{a-1}dp$$

şəklindədir.

Əgər $\beta=0$ və $\alpha=-\infty$ qəbul etsək ($t>0$ olduqda) ikinci inteqralı

$$x_2(t)=\int_{-\infty}^{0}e^{pt}(p+1)^{b-1}p^{a-1}dp$$

şəklində alarıq.

Bir çox hallarda inteqrallama sərhəddini kompleks müstəvidə seçmək lazım gəlir.

Aşağıdakı misala baxaq.

Tutaq ki,

$$tx''(t)+2nx'(t)+tx(t)=0$$

tənliyi verilmişdir.

Əvvəlki qayda ilə

başlanğıc və

$$\left[\alpha(x,y,z)u+\beta(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}\right]\Big|_{\Gamma}=\varphi(x,y,z,t) \qquad (36)$$

sərhəd şərti daxilində həllinə baxaq, burada $\Gamma=S\times[0,\infty), S-$ Ω oblastının sərhədi, n - isə S səthinin xarici normalıdır.

(33) tənliyinin hər tərəfini e^{-pt} -yə vurub t -yə nəzərən sıfırdan sonsuzluğa qədər inteqrallayaq. Fərz edək ki,

$$\int_0^\infty e^{-pt}u(x,y,z,t)dt,\ \int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,z,t)dt$$

və s. inteqralları vardır. Bundan əlavə

$$\int_0^\infty e^{-pt}\Delta u dt=\Delta\int_0^\infty e^{-pt}udt$$

münasibəti ödənilir.

Axtarılan $u(x,y,z,t)$ funksiyası üzərinə qoyulan şərtlərdən, (33) tənliyindən və (34),(35) başlanğıc şərtlərdən istifadə edərək

$$\begin{aligned}\Delta u^*(p)+[a(x,y,z)p^2+b(x,y,z)p+c(x,y,z)]u^*(p)=\\ =a(x,y,z)[pu_0(x,y,z)-u_1(x,y,z)]+\\ +b(x,y,z)u_0(x,y,z)+f^*(x,y,z,p)\end{aligned} \qquad (37)$$

tənliyini alarıq, burada $u^*(p)=u^*(x,y,z,p)$ -dir.

Bu halda (36) sərhəd şərtindən

$$\left[\alpha(x,y,z)u^{*}(p)+\beta(x,y,z)\frac{\partial u^{*}(p)}{\partial n}\right]\Bigg|_{\Gamma}=\varphi^{*}(x,y,z,p) \quad (38)$$

sərhəd şərti alınar.

Alınmış (37), (38) sərhəd məsələsindən $u^{*}(p)$-ni təyin edək . Əgər $u^{*}(x,y,z,p)$ funksiyası əvvəlcə verilmiş cədvəl düsturları vasitəsilə tapılırsa, onda axtarılan həll asanlıqla tapılır. Əks halda

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{\lambda t}u^{*}(x,y,z,\lambda)d\lambda$$

həllini tərs Laplas çevirməsi vasitəsilə tapmaq olar.

Qeyd edək ki, axırıncı inteqralın hesablanması üçün qapalı kontura keçməklə, çıxıqlar nəzəriyyəsindən istifadə etmək olar. Laplas çevirməsini tətbiq edərkən axtarılan funksiyanın üzərinə müəyyən şərtlər qoyulur. Məsələn, inteqralların yığılması, diferensiallama və inteqrallama əməllərinin yerini dəyişilməsi, inteqral altında limitə keçmək və s. Digər tərəfdən, əgər alınmış nəticə tənliyi və başlanğıc sərhəd şərtlərini ödəyərsə, onda baxılan üsul formal olaraq da tətbiq oluna bilər.

İndi isə bir neçə sadə məsələlərin həllinə baxaq.

1⁰. Verilmiş $D=(0,l)\times(0,\infty)$ oblastında

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (39)$$

istilikkeçirmə tənliyinin

$$u(x,t)\big|_{t=0}=0\,,\ x\in[0,l]\,, \qquad 40)$$

başlanğıc və

$$u(x,t)\big|_{x=0}=\varphi_1(t),\ \ u(x,t)\big|_{x=e}=\varphi_2(t)\,,\ t\in[0,\infty)\,, \qquad (41)$$

sərhəd şərtlərini ödəyən həllinə baxaq. Axtarılan $u(x,t)$ funksiyasının Laplas çevirməsi

$$u^*(x,p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}u(x,t)dt \qquad (42)$$

şəklindədir.

(39) tənliyinin hər tərəfinə Laplas çevirməsini tətbiq edək və fərz edək ki, (42) düsturunu inteqral altında x-ə nəzərən diferensiallamaq olar.

Bu halda

$$\frac{d^2u^*(x,p)}{dx^2}=pu^*(x,p)\,. \qquad (43)$$

Analoji olaraq Laplas çevirməsini (41) sərhəd şərtlərinə tətbiq etsək

$$u^*(x,p)\big|_{x=0}=\varphi_1^*(p),\ \ u^*(x,p)\big|_{x=e}=\varphi_2^*(p) \qquad (44)$$

münasibətləri alınar, burada

$$\varphi_k^*(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\varphi_k(t)dt \qquad (k = 1,2).$$

Beləliklə (43) tənliyinin (44) sərhəd şərti daxilində həlli

$$u^*(x,p) = \varphi_1^*(p)w_1^*(x,p) + \varphi_2^*(p)w_2^*(x,p) \qquad (45)$$

şəklindədir, burada

$$w_1^*(x,p) = \frac{sh(l-x)\sqrt{p}}{shl\sqrt{p}}, \quad w_2^*(x,p) = \frac{shx\sqrt{p}}{shl\sqrt{p}}.$$

Alınmış $w_1^*(x,p)$ və $w_2^*(x,p)$ funksiyaları uyğun olaraq

$$-\frac{1}{l}\frac{\partial\theta}{\partial x}\left[\frac{x}{2l},\frac{t}{l^2}\right] \text{ və } \frac{1}{l}\frac{\partial\theta}{\partial x}\left[\frac{l-x}{2l},\frac{t}{l^2}\right]$$

funksiyaların Laplas çevrilməsidir, burada

$$\theta(\nu,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2ni\pi\nu - n^2\pi^2 t}$$ - Yakobi funksiyasıdır.

Onda (45) münasibətində bükülmə teoremindən istifadə edərək $u(x,t)$ funksiyası üçün

$$u(x,t) = -\frac{1}{l}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\theta\left(\frac{x}{2l},\frac{t-\tau}{l^2}\right)\varphi_1(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{l}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\theta\left(\frac{l-x}{2l},\frac{t-\tau}{l^2}\right)\varphi_2(\tau)d\tau \qquad (46)$$

düsturunu alarıq.

İndi isə $D = (0,l)\times(0,\infty)$ oblastında qeyri-bircins

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{47}$$

istilikkeçirmə tənliyinin

$$u(x,t)\big|_{t=0} = 0 \tag{48}$$

bircins başlanğıc və

$$u(x,p)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x,p)\big|_{x=l} = 0 \tag{49}$$

bircins sərhəd şərti daxilində həllinə baxaq.

Tutaq ki,

$$f^*(x,p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(x,t)dt .$$

Onda (47) tənliyinə və (49) sərhəd şərtlərinə Laplas çevirməsini tətbiq etsək

$$\frac{d^2 u^*(x,p)}{dx^2} = pu^*(x,p) - f^*(x,p), \tag{50}$$

$$u^*(0,p) = u^*(l,p) = 0 \tag{51}$$

sərhəd məsələsini alarıq.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, (50) tənliyinin (51) sərhəd şərti daxilində Qrin funksiyası

$$G^*(x,\xi;p)=\begin{cases}\dfrac{sh(l-\xi)\sqrt{p}shx\sqrt{p}}{\sqrt{p}shl\sqrt{p}}, & x\le\xi \quad \text{olduqda},\\ \dfrac{sh(l-x)\sqrt{p}sh\xi\sqrt{p}}{\sqrt{p}shl\sqrt{p}}, & x\ge\xi \quad \text{olduqda}\end{cases}$$

münasibəti ilə təyin olunur və (50) tənliyinin (51) sərhəd şərti daxilində həlli

$$u^*(x,p)=\int_0^l G^*(x,\xi;p)f^*(x,p)d\xi \tag{52}$$

düsturu ilə verilir.

Təyin olunan $G^*(x,\xi;p)$ Qrin funksiyası

$$G(x,\xi;t)=\frac{1}{2l}\left[\theta\left(\frac{x-\xi}{2l},\frac{t}{l^2}\right)-\theta\left(\frac{x+\xi}{2l},\frac{t}{l^2}\right)\right]$$

funksiyasının Laplas çevirməsidir. Ona görə (52) münasibətindən qoyulmuş qarışıq məsələnin həlli üçün

$$u(x,t)=\int_0^l d\xi\int_0^t G(x,\xi;t-\tau)f(\xi,\tau)d\tau \tag{53}$$

düsturunu alarıq.

2⁰. Tutaq ki, $D=(0,\infty)\times(0,\infty)$ oblastında

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{54}$$

tənliyinin

$$u(x,0)=0, \qquad x\in[0,\infty) \tag{55}$$

başlanğıc və

$$u(0,t)=f(t), \quad t\in[0,\infty) \tag{56}$$

sərhəd şərti daxilində həllinə baxaq. Əvvəlki məsələlərdə olduğu kimi (54) tənliyinə (56) şərti daxilində Laplas çevirməsini tətbiq etsək

$$\frac{d^2u^*(x,p)}{dx^2}=pu^*(x,p), \; u^*(0,p)=f^*(p) \tag{57}$$

məsələsini alarıq.

$u^*(x,p)$ funksiyasını

$$u^*(x,p)=c_1e^{-x\sqrt{p}}+c_2e^{x\sqrt{p}}$$

şəklində axtaraq.

Burada x ∞-a yaxınlaşdıqda $u^*(x,p)$ funksiyasının məhdud olmasından

$$u^*(x,p)=f^*(p)e^{-x\sqrt{p}}=pf^*(p)\frac{e^{-x\sqrt{p}}}{p},$$

olduğunu alarıq. Onda bükülmə teoremindən istifadə etsək

$$u(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty}f\left(t-\frac{x}{4\xi^2}\right)e^{-\xi^2}d\xi \tag{58}$$

taparıq.

Asanlıqla göstərmək olar ki, (58) münasibəti ilə təyin olunan $u(x,t)$ funksiyası

$$u(x,0)=0, \quad u(0,t)=f(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi = f(t)$$

başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəyir.

3⁰. $D=(0,\infty)\times(0,\infty)$ oblastında

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{59}$$

tənliyinin

$$u(x,0)=u_0, \quad x\in[0,\infty) \tag{60}$$

başlanğıc,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=hu(0,t) \ (h=const), \quad t\in[0,\infty) \tag{61}$$

sərhəd şərti daxilində həllini tapaq. Qoyulmuş (59)-(61) qarışıq məsələsinə Laplas çevirməsini tətbiq etsək

$$\frac{d^2u^*}{dx^2}=pu^*-u_0, \quad \left.\frac{du^*}{dx}\right|_{x=0}=hu^*$$

məsələsini alarıq. Əvvəlki məsələdə olduğu kimi $u^*(x,p)$ funksiyasının x ∞-a yaxınlaşdıqda məhdud olmasından

$$u^*(x,p)=\frac{u_0}{p}+ce^{-x\sqrt{p}},$$

$$-c\sqrt{p}=h\left(\frac{u_0}{p}+c\right)$$

alarıq.

Buradan

$$u^*(x,p)=\frac{u_0}{p}\left(1-\frac{h}{\sqrt{p}+h}e^{-x\sqrt{p}}\right)=\frac{u_0}{p}\left(1-e^{-x\sqrt{p}}\right)+$$

$$+\frac{u_0}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+h\right)}e^{-x\sqrt{p}}. \qquad (62)$$

$$\mathscr{L}\left\{u_0 erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\}=\frac{u_0}{p}\left(1-e^{-x\sqrt{p}}\right),$$

$$\mathscr{L}\left[e^{-h(t-x)}\right]=\frac{1}{p+h}e^{-px}=f^*(p)$$

olduğunu nəzərə alaq. Burada

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

işarə olunmuşdur və inteqrallama x-dən sonsuzluğa qədərdir.

Onda

$$\frac{f^*\left(\sqrt{p}\right)}{\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+h\right)}e^{-x\sqrt{p}}=\mathscr{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_x^\infty e^{-h(\tau-x)-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau\right)$$

münasibətindən istifadə etsək

$$u(x,t) = u_0 erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + \frac{u_0}{\sqrt{\pi t}} \int_x^{\infty} e^{-h(\tau - x) - \frac{\tau^2}{4t}} d\tau \qquad (63)$$

həllini almış olarıq.

4⁰. $D = (0,\infty) \times (0,\infty)$ oblastında

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial u}{\partial t} - cu = 0 \qquad (64)$$

tənliyinin

$$u(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,\infty) \qquad (65)$$

başlanğıc və

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad t \in [0,\infty) \qquad (66)$$

sərhəd şərti daxilində həllini tapaq. Burada (64) tənliyinə və (66) sərhəd şərtinə Laplas çevirməsini tətbiq etsək

$$\frac{d^2 u^*(x,p)}{dx^2} - (ap^2 + bp + c)u^*(x,p) = 0 \qquad (67)$$

$$u^*(0,p) = \varphi^*(p) \qquad (68)$$

sərhəd məsələsini almış olarıq.

Məsələnin həllinin sonsuzluqda məhdudluğundan

$$u^*(x,p) = \varphi^*(p)e^{-x\sqrt{ap^2+bp+c}} \quad .$$

Əgər $ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$ olarsa, onda $u^*(x,p)$ funksiyası

$$u^*(x,p)=\varphi^*(p)e^{-x\left[p\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right]} \tag{69}$$

şəklində olar və buradan

$$u(x,t)=e^{-\frac{b}{2\sqrt{a}}x}\varphi(t-x\sqrt{a}). \tag{70}$$

Əgər $\alpha=ac-\left(\frac{b}{2}\right)^2\neq 0$, onda aşağıdakı

$$e^{-x\sqrt{ap^2+bp+c}}=e^{-x\frac{b}{2\sqrt{a}}}\cdot e^{-x\sqrt{a}p}-$$

$$-x\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\int_{x\sqrt{a}}^{\infty}e^{-pt}e^{-\frac{b}{2a}}\cdot\frac{J_1\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}\sqrt{t^2-ax^2}\right)}{\sqrt{t^2-ax^2}}dt$$

münasibətini nəzərə alsaq,

$$u(x,t)=\begin{cases}0 & 0\leq t<x\sqrt{a}\ \text{ olduqda,}\\ e^{-\frac{b}{2\sqrt{a}}x}\varphi\left(t-x\sqrt{a}\right)- & \\ -x\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\int_{x\sqrt{a}}^{t}\varphi(t-\tau)e^{-\frac{b}{2a}\tau}\cdot\frac{J_1\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}\sqrt{\tau^2-ax^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-ax^2}}d\tau & \\ & t\geq x\sqrt{a}\ \text{ olduqda}\end{cases} \tag{71}$$

burada

$$J_k = \left(\frac{t}{2}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

k-tərtibdən Bessel funksiyası, $\Gamma(k+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^k dt$ - isə Eylerin qamma funksiyasıdır.

§2. Laplas çevirməsinin inteqral tənliyin həllinə tətbiqi

Laplas çevirməsi geniş miqyasda Volter tipli inteqral tənliklərin həllinə tətbiq oluna bilir. Tutaq ki, bizə ikinci növ Volter tipli

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \qquad (72)$$

inteqral tənlik verilmişdir.

Fərz edək ki, bu tənliyə daxil olan bütün funksiyarın

$$\varphi^*(p) = \mathscr{L}[\varphi(t)],\ f^*(p) = \mathscr{L}[f(t)],\ k^*(p) = \mathscr{L}[k(t)]$$

Laplas çevirməsi vardır.

Onda (72) tənliyinin hər tərəfinə Laplas çevirməsini tətbiq etsək

$$\varphi^*(p) = f^*(p) + k^*(p) + \varphi^*(p) \qquad (73)$$

Buradan

$$\varphi^*(p) = \frac{f^*(p)}{1 - k^*(p)}$$

və

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \varphi^*(p) e^{pt} dp$$

həllini alarıq.

Analoji üsulla birinci növ

$$f(t) = \int_0^t k(t - \tau)\varphi(\tau) d\tau \qquad (74)$$

Volter tipli inteqral tənliyi də həll etmək olar. Bundan başqa bu üsulla ikinci növ Volter tipli

$$\varphi_i(t) = f_i(t) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t k_{ik}(t - \tau)\varphi_k(\tau) d\tau, \quad (i = 1,2,...,n) \quad (75)$$

inteqral tənliklər sistemini də həll etmək olar. Bu tənliyin hər tərəfinə Laplas çevirməsini tətbiq etsək

$$\varphi_i^*(p) = f_i^*(p) + \sum_{k=1}^{n} k_{ik}^*(p)\varphi_k^*(p), \quad (i = 1,2,...,n). \quad (76)$$

Bu tənlikləri həll edərək $\varphi_i^*(p)$-ləri təyin etsək, onda (75) inteqral tənliyinin həlli üçün

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \varphi_i^*(p) e^{pt} dp \; (i = \overline{1,n}) \qquad (77)$$

düsturunu alarıq.

Bir neçə sadə misalı nəzərdən keçirək.

1^0. Əvvəlcə

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau = f(t) \qquad (0 < \alpha < 1) \qquad (78)$$

Abel inteqral tənliyinə baxaq.

Fərz edək ki, $\varphi^*(p) = \mathscr{L}[\varphi(t)]$, $\mathscr{L}[f(t)] = f^*(p)$. Onda (78) tənliyinin hər tərəfinə Laplas çevirməsini tətbiq etsək

$$\Gamma(1-\alpha)\frac{\varphi^*(p)}{p^{1-\alpha}} = f^*(p). \qquad (79)$$

Buradan

$$\varphi^*(p) = \frac{p^{1-\alpha} f^*(p)}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{1}{p^{\alpha}} + \frac{pf^*(p) - f(0)}{\Gamma(1-\alpha)p^{\alpha}}. \qquad (80)$$

Onda asanlıqla

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{f'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right] \qquad (81)$$

almış olarıq.

$$\Gamma(1-\alpha)\cdot\Gamma(\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$

olduğunu nəzərə alsaq, həll üçün

$$\varphi(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{f'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right] \qquad (82)$$

düsturu alınar.

2^0. İndi isə loqarifmik nüvəli

$$\int_0^t \varphi(\tau)\ln(t-\tau)d\tau = f(t) \qquad (83)$$

inteqral tənliyə baxaq, burada $\varphi(\tau)$ axtarılan funksiyadır. Tutaq ki, $\varphi^*(p) = \mathscr{L}[\varphi(t)]$, $f^*(p) = \mathscr{L}[f(t)]$. Onda aşağıdakı

$$\mathscr{L}(\ln t) = -\frac{1}{p}(C + \ln p)$$

münasibətini nəzərə alsaq

$$-\varphi^*(p)\frac{1}{p}(C + \ln p) = f^*(p) \qquad (84)$$

burada C - Eyler sabitidir. Bu axırıncı münasibətdən

$$\varphi^*(p) = -\frac{pf^*(p)}{\ln p + C} = -\frac{p^2 f^*(p) - f'(0)}{p(\ln p + C)} - \frac{f'(0)}{p(\ln p + C)}.$$

Onda

$$\mathscr{L}\left(\int_0^\infty \frac{t^k e^{-ak}}{\Gamma(k+1)} dk\right) = -\frac{1}{p(\ln p + a)} \qquad (85)$$

bərabərliyindən istifadə etsək, həll üçün

$$\varphi(t) = -\int_0^t f''(\tau)d\tau \int_0^\infty \frac{(t-\tau)^k e^{-Ck}}{\Gamma(k+1)} dk - f'(0)\int_0^\infty \frac{t^k e^{-Ck}}{\Gamma(k+1)} dk \qquad (86)$$

düsturu alınar.

3^0. Aşağıdakı

$$\sin t = \int_0^t J_0(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \tag{87}$$

inteqral tənliyinin həllini tapaq.

Bunun üçün tənliyin hər tərəfinə Laplas çevirməsini tətbiq etsək

$$\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\varphi^*(p), \quad \varphi^*(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$$

alarıq. Onda (87) inteqral tənliyinin həlli

$$\varphi(t) = J_0(t) \tag{88}$$

olar. Bu həlli tənlikdə nəzərə alsaq

$$\sin t = \int_0^t J_0(t-\tau)J_0(\tau)d\tau .$$

Qeyd edək ki, Laplas çevirməsi həmçinin

$$a_0\varphi^{(n)}(t) + a_1\varphi^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n\varphi(t) +$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\int_o^t K_{n-j}(t-\tau)\varphi^{(j)}(\tau)d\tau = f(t) \tag{89}$$

şəkilli inteqro-diferensial tənliklərə və eləcə də inteqro-diferensial tənliklər sisteminə tətbiq oluna bilər.

FƏSİL 8
BAŞQA İNTEQRAL ÇEVİRMƏLƏR

§1. Mellin çevirməsi

Bütün ədəd oxunda təyin olunmuş,

$$\left.\begin{array}{ll} |\varphi(t)| \le ce^{\alpha t}, & t > 0, \\ |\varphi(t)| \le c_1 e^{\beta t}, & t < 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

münasibətlərini ödəyən, kompleks qiymətli $\varphi(t)$ funksiyasına baxaq, burada α və β ədədləri $\alpha < \beta$ şərtini ödəyirlər. Onda

$$\Phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt, \qquad (2)$$

münasibətilə təyin olunan $\Phi(p)$ funksiyası $\alpha < \operatorname{Re} p < \beta$ zolağında analitik funksiyadır. Doğrudan da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t) e^{-pt} dt + \int_{0}^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt,$$

bərabərliyindən, mənfi yarım ox üzrə olan inteqral $\operatorname{Re} p < \beta$ yarım müstəvisində və müsbət yarım ox üzrə olan inteqral isə $\operatorname{Re} p > \alpha$ yarım müstəvisində analitik funksiyadır. Qeyd olunan $\Phi(p)$ funksiyası ümumiləşmiş Laplas çevirməsi adlanır. Verilmiş $\varphi(t)$ funksiyası (1) şərtlərini ödədikdə tərs

Furye çevirməsini tətbiq edərək, ümumiləşmiş Laplas çevirməsi üçün

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Phi(p)e^{pt}dp,\quad \alpha<\gamma<\beta \tag{3}$$

tərs Laplas çevirməsini almış olarıq.

Burada inteqral baş qiymət mənasında, başqa sözlə,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN}\Phi(p)e^{pt}dp$$

mənada başa düşülür.

Alınmış (2) və (3) düsturlarında $x=e^{-t}$ əvəzləməsini aparaq. Onda bu münasibətlər

$$\Phi(p)=\int_0^{\infty}\varphi(-\ln x)x^{p-1}dx, \tag{4}$$

$$\varphi(-\ln x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Phi(p)x^{-p}dp \tag{5}$$

şəklində olar.

Burada $\varphi(x)=\varphi(-\ln x)$ işarə etsək (φ - simvolu ilə müxtəlif funksiyalar işarə olunmuşdur), aşağıdakı Mellin düsturlarını almış olarıq:

$$\Phi(p)=\int_0^{\infty}\varphi(x)x^{p-1}dx, \tag{6}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Phi(p) x^{-p} dp . \qquad (7)$$

Alınmış (6) münasibəti ilə təyin olunan $\Phi(p)$ funksiyasına $\varphi(x)$ funksiyasının Mellin çevirməsi, (7) düsturuna isə tərs Mellin çevirməsi deyilir, burada $\Phi(p)$ funksiyasına görə $\varphi(x)$ funksiyası təyin olunur. Qeyd olunan (1) şərtindən aydındır ki, (6) düsturunda inteqral $\alpha < \operatorname{Re} p < \beta$ zolağına daxil olan bütün p-lər üçün mütləq yığılır.

Aydındır ki, $x = e^{-t}$ əvəzləməsi vasitəsilə (1) şərti

$$|\varphi(x)| \le c x^{-\alpha},\ 0 < x < 1, \quad |\varphi(x)| \le c_1 x^{-\beta},\ x > 1$$

şərtlərinə çevrilir.

Onda $0 < x < 1$ olduqda $\varphi(x) x^{\gamma - 1}$ hasili

$$\left|\varphi(x) x^{\gamma - 1}\right| \le c x^{-\alpha + \gamma - 1}$$

qiymətlənməsinə, $x > 1$ olduqda isə

$$\left|\varphi(x) x^{\gamma - 1}\right| \le c_1 x^{-\beta + \gamma - 1}$$

qiymətlənməsinə malikdir.

Verilmiş $x^{-\lambda}$ funksiyasının $(0,1)$ və $(1,\infty)$ intervallarında inteqralının yığılması şərtindən həqiqi γ - qüvvətinin

$$\alpha - \gamma + 1 \le 1 - \varepsilon, \quad \beta - \gamma + 1 \ge 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

şərtlərini ödəməsini alırıq.

Bu bərabərsizliklər göstərir ki, γ - ədədi

$$\alpha+\varepsilon\le\gamma\le\beta-\varepsilon$$

bərabərsizliyini ödəməlidir.

Buradan alırıq ki, əgər p kompleks ədədi $\alpha<\operatorname{Re}p<\beta$ bərabərsizliyini ödəyərsə, onda (6) inteqralı mütləq yığılır və qeyd olunan zolaqda $\Phi(p)$ funksiyası analitikdir. Bu qayda ilə $(0,\infty)$ yarım oxunda verilmiş kompleks qiymətli $\varphi(x)$ funksiyası üçün Mellin çevirməsi təyin olunmuşdur və $\operatorname{Re}p\in(\alpha,\beta)$ olduqda $\varphi(x)x^{p-1}\in L(0,\infty)$.

§2. Hilbert çevirməsi

Tutaq ki, $g(x)$ funksiyası $f(x)$ funksiyasına qoşmadır. Qoşma funksiyanın tərifindən (bax §1, fəsil 4)

$$g(x)=\int_0^\infty[b(\sigma)\cos\sigma x-a(\sigma)\sin\sigma x]d\sigma$$

alarıq, burada

$$a(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b(u)\cos\sigma u du,\quad b(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\sigma u du\,.$$

Alınmış $a(\sigma)$ və $b(\sigma)$ ifadələrini $g(x)$ üçün olan düsturda nəzərə alsaq

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\sin(u-x)\sigma f(u)du.$$

Qeyri-məxsusi inteqralın tərifini nəzərə alsaq

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N}d\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\sin(u-x)\sigma f(u)du.$$

olar.

Burada inteqrallama növbəsini dəyişsək və dəyişəni əvəz etsək

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos N(u-x)}{u-x}f(u)du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos Nt}{t}f(x+t)dt=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos Nt}{t}[f(x+t)-f(x-t)]dt.$$

Axırıncı bərabərlik $f(x+t)$ funksiyasının x- nöqtəsinə nəzərən simmetrik və antisimmetrik toplananların

$$f(x+t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}+\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2}$$

cəmi şəkilində göstərilməsindən alınır.

$\frac{1-\cos Nt}{t}$ - tək funksiyadır və bu funksiyanın $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$ funksiyasına hasilinin inteqralı, tək funksiyanın sıfra nəzərən simmetrik olan parçada inteqralı kimi olduğundan, sıfra bərabərdir. Beləliklə

$$g(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}-\right.$$

$$\left.-\cos Nt\cdot\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\right]dt.$$

Əgər $f(x)$ funksiyası müəyyən hamarlıq şərtlərini ödəyirsə onda Riman-Lebeq teoremini tətbiq etsək

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt \qquad (1)$$

düsturunu alarıq ki, buna Hilbert çevirməsi deyilir.

Analoji mühakimə ilə tərs Hilbert çevirməsini, yəni $g(x)$ Hilbert çevirməsi verildikdə $f(x)$ funksiyasını təyin edən

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{g(x+t)-g(x-t)}{t}dt \qquad (2)$$

düsturunu almaq olar.

Alınmış (1) və (2) düsturlarının

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-x}dt, \qquad f(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{t-x}dt, \tag{3}$$

düsturlarına ekvivalent olduğunu müəyyənləşdirək. Burada inteqrallar $t=x$ nöqtəsinə nəzərən Koşiyə görə baş qiymət mənasında başa düşülür. Onda

$$g(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}\frac{f(t)}{t-x}dt+\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(t)}{t-x}dt\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{f(x+u)}{u}du+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(x+u)}{u}du\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(x+u)-f(x-u)}{u}du=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{f(x+u)-f(x-u)}{u}du$$

alarıq.

Burada biz $\dfrac{f(x+u)}{u}$ funksiyasının, x nöqtəsinə nəzərən simmetrik

$$\frac{1}{2}\left[\frac{f(x+u)}{u}+\frac{f(x-u)}{-u}\right]=\frac{1}{2}\frac{f(x+u)-f(x-u)}{u}$$

və x nöqtəsinə nəzərən antisimmetrik olan

$$\frac{1}{2}\left[\frac{f(x+u)}{u}-\frac{f(x-u)}{-u}\right]=\frac{1}{2}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{u}$$

funksiyaların cəmi şəkilində göstərilişindən istifadə etmişik. Baxılan bütün çevirmələr dönmə xassəsinə malik olduğundan (1) düsturunun (3) düsturuna ekvivalentliyi isbat olunur.

Analoji qaydada (2) və (3) münasibətlərinin ekvivalentliyini isbat etmək olar.

ƏDƏBİYYAT

1. С.Бохнер. Лекции об интегралах Фурье. М., 1962.
2. Н.Винер. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., 1963.
3. Н.Винер, Р.Пэли. Преобразования Фурье в комплексной области. М., 1964.
4. Г.Дёч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., 1965.
5. В.А.Диткин, А.П.Прудников. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Наука, 1974.
6. Ə.Ş.Həbibzadə. Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi. Bakı, 1962.
7. П.Н.Князев. Интегральные преобразования. Минск, Высшая школа, 1969.
8. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
9. А.И.Маркушевич. Теория аналитических функций. Гостехиздат, 1950.
10. И.П.Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1957.

11. А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов. Теория функций комплексной переменной. М., Наука, 1970.
12. И.Снеддоп. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1965.
13. Е.Тичмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. М., ИЛ, 1948.
14. К.Трантер. Интегральные преобразования в математической физике. М., Гостехиздат, 1956.

Yığılmağa verilib 22.02.2008. Çapa imzalanıb 01.05.2008.
Sifariş № 132. Sayı 300. Hesab n. v. 13,75.
Formatı 60x84 $^{1}/_{16}$. Əla növ kağız. Qiyməti müqavilə ilə.

AzTU – nun mətbəəsi. H.Cavid pr. 25.