AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ

SUMQAYIT DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

QƏHRƏMANOV POLAD FƏRRUX oğlu

İNTEQRAL TƏNLİKLƏRİN TƏQRİBİ HƏLL ÜSULLARI

METODİK VƏSAİT

Azərbaycan Respublikasının Təhsil Nazirinin 12.03.2014—cü il 299 saylı əmri ilə metodik vəsait kimi təsdiq edilmişdir.

Sumqayıt 2014

Rəyçilər: prof. K.Q.Həsənov
prof.T.S.Hacıyev
prof. F.G.Feyziyev
prof. Ə.Ə.İsgəndərov

Elmi redaktor: dos. N.T.Qurbanov
dos. İ.S.Səfərli

Redaktor: G.F.Hacıyeva

GİRİŞ

Adətən inteqral tənliklər o tənliklərə deyilir ki, naməlum axtarılan funksiya inteqral işarəsi altında olur. Bu anlayış kifayət qədər dəqiq olmasa da metodik vəsaitdə ancaq xətti inteqral tənliklərin təqribi həlli ilə məşğul olacağıq.

Qeyd edək ki, xətti inteqral tənlikləri təhlil edərkən Volterranın (1896) işini birinci qeyd etmək lazımdır. Volterra

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \qquad (1)$$

şəklində inteqral tənliyi tədqiq etmişdir.Burada $\varphi(x)$ naməlum funksiya, $f(s)$ və $K(x,s)$ -verilmiş funksiyalar, λ -ədədi parametrdir.

Volterra isbat etmişdir ki, əgər $K(x,s)$ və $f(s)$ funksiyaları hər hansı $[a,b]$ seqmentində kəsilməz funksiyalardırsa, onda həmin seqmentdə λ -nın ixtiyari qiymətində (1) tənliyinin ancaq bir kəsilməz həlli var və həmin həlli ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə qurmaq olar.

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), \quad a \le x \le b \qquad (2)$$

inteqralının tədqiqi isə daha da çətinlik törədir ki, bu da Volterra inteqralından inteqralın yuxarı sərhəddinin x -i b ilə əvəz olunmasıdır. (2) inteqral tənliyinin həlli ilə Fredholm məşğul olmuşdur. Fredholmun əsas nəticəsi onda ibarətdi ki, o (2) tənliyini tədqiq edərkən $K(x,s)$ nüvəsinin və $f(x)$ sərbəst həddin üzərinə λ -nın bütün mümkün qiymətlərində kəsilməzlik şərti qoymuşdur.

Fredholm belə təklif etmişdir:

(2) inteqral tənliyini inteqral cəmi ilə əvəz etmək və dəqiq (2) inteqralını

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{j=1}^{n}K(x_i,s_j)\varphi(s_j)\Delta s_j=f(x)$$

təqribi inteqralla əvəz edib xətti cəbri tənliklər sistemi alıb və sistem tənlikləri həll etmək lazımdır ki, bu da heç bir çətinlik törətmir.

Sonrakı tədqiqatlarda Fredholm xarakteristik ədədlər üzərində dayanmışdır.Ola bilər ki, λ -nın elə qiymətlərində Fredholm inteqral tənliyinin həlli olmasın.

İkinci istiqamət isə ortoqonal ayırma nəzəriyyəsidir ki, bu da simmetrik inteqral tənliklərin tədqiqidir ki, bu halda $K(x,s)=\overline{K(x,s)}$. Bu sahədə əsas nəticələri Hilbert və Şmidt almışdır.Simmetrik inteqral tənliklər nəzəriyyəsini Fredholm nəzəriyyəsindən asılı olmayaraq da vermək olar. Simmetrik inteqral tənliklərdə əsas fakt: belə tənliklərin xarakteristik ədədləri həqiqi ədədlərdir, onlara uyğun məxsusi funksiyalar isə ortoqonaldır.

Yuxarıda deyilənləri nəzərə alaraq metodik vəsait inteqral tənliklərin təqribi üsullarla həllinə həsr olunmuşdur. Bu məqsədlə metodik vəsaitdə Fredholm tənliyi üçün ardıcıl yaxınlaşmalar qurulmuş və göstərilmişdir ki, əgər $|\lambda| < \frac{1}{B}$ şərti ödənirsə, inteqral tənliyin nüvəsi kvadratik cəmlənəndirsə, onda həmin inteqral tənlik üçün qurulmuş Neyman sırası nüvəsi kvadratik cəmlənən tənliyi həllinə yığılır və belə həll yeganədir.

§1. FREDQOLM TƏNLİKLƏR HAQQINDA ƏSAS ANLAYIŞLAR

Aşağıdakı inteqral tənliyə baxaq:

$$\varphi(x)-\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x)$$

harada ki, $\varphi(x)$ naməlum funksiya, $f(x)$ və $K(x,s)$ verilmiş funksiyalardır. x dəyişəni $[a,b]$ parçasında dəyişir və inteqralın limiti sonlu da ola bilər, sonsuzda. $f(x)$ funksiyası inteqral tənliyin sərbəst həddi, $K(x,s)$ funksiyası inteqral tənliyin nüvəsidir. $K(x,s)$ nüvəsi (x,s) müstəvisinin $a\le x,s\le b$ kvadratında təyin olunur və həmin kvadratı əsas kimi deyil, $[a,b]$ parçasını əsas qəbul edəcəyik.

Adətən, bir inteqral tənliyə yox,

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \qquad (1)$$

inteqral tənliklər ailəsinə baxılır. Burada λ-ixtiyari verilmiş ədədi qiyməti olan parametrdir.

(1) tənliyi xətti tənliklər sinfinə daxildir. Əgər (1) tənliyində $f(x)\equiv 0$ olarsa ona bircins, $f(x)\neq 0$ olduqda isə ona qeyri-bircins tənlik deyilir.

Əgər (1) tənliyinin nüvəsi və sərbəst həddi birinci əsas kvadratda, ikinci əsas parçada kvadratik cəmlənərsə, ona ikinci növ Fredholm tənliyi deyilir.

Nüvə və sərbəst həddin yuxarıdakı şərtləri ödədiyi halda

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x)$$

tənliyinə birinci növ Fredholm tənliyi deyilir.

Fredholm tənliyinin təyin olunmasından alınır ki, onun nüvəsi

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2 dxds = B^2 < \infty \qquad \text{(B)}$$

şərtini ödəyir ki, buradan da (Fubin teoreminə əsasən)

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 ds$$

inteqralının bütün $x \in (a,b)$ üçün varlığı və $[a,b]$-də cəmlənməsi alınır. Eyni zamanda

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 dx$$

inteqralının da $s \in [a,b]$-də təyin olunması və cəmlənməsi alınır.

Bəzi hallarda Fredholm inteqralının nüvəsi üzərinə aşağıdakı şərti qoyacayıq:

Elə sabit A ədədi var ki, bütün $x \in (a,b)$ üçün

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 ds \le A \qquad \text{(A)}$$

bərabərsizlik ödənilir.

Əgər $[a,b]$ parçası sonludursa, onda (A) şərti öz ardınca (B) şərtinin ödənməsini tələb edir, bu halda A və B sabitləri arasında aşağıdakı şərt ödənilir:

$$B^2 \leq A(b-a) \qquad (2)$$

yox, əgər $[a,b]$parçası sonsuzdursa, onda (A) və (B) şərtləri bir-birindən asılı deyil.

Yuxarıdakı qeyd olunan kimi, Fredholm tənliyinin təyin olunmasından alınır ki, sərbəst $f(x)$ funksiyasıda əsas $[a,b]$ parçasında kvadratik cəmlənəndir və

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx$$

inteqral sonludur.

Analoji olaraq eyni tələbi verilən funksiya üzərinə də qoymaq olar, yəni $\varphi(x)$ funksiyası da əsas parçada kvadratik cəmlənəndir və

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx$$

inreqralı sonludur.

Tutaq ki, $K(x,s)$ nüvəsi əsas kvadratda kvadratik cəmlənəndir.

$$K\varphi = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds \qquad (3)$$

işarə edək.

Tutaq ki, $\varphi(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kvadratik cəmlənəndir.

İsbat edək ki, bütün $x \in (a,b)$-lər üçün bu halda (3) inteqralı var və nəticəsi, həmin parçada kvadratik cəmlənən funksiyadır.

Bərabərsizliyin xassəsinə görə

$$|K(x,s)\varphi(s)| \le \frac{1}{2}|K(x,s)|^2 + \frac{1}{2}|\varphi(s)|^2 .$$

Burada birinci hədd bütün $x \in [a,b]$-lər üçün s-ə görə demək olar ki, cəmlənəndir, ikinci toplanan isə $[a,b]$ parçasında sadəcə olaraq s-ə görə cəmlənəndir. Onda buradan çıxır ki, göstərilən parçada (3) inteqralındakı inteqralaltı ifadə bütün $x \in [a,b]$ üçün cəmlənəndir və (3) inteqralı $[a,b]$-də təyin olunmuş x-dən asılı funksiyadır.

Bunyakovski bərabərsizliyinə görə

$$|K\varphi|^2 \le \int_a^b |K(x,s)|^2 ds \int_a^b |\varphi(s)|^2 ds = \|\varphi\|^2 \int_a^b |K(x,s)|^2 ds$$

və əsas kvadratda nüvə kvadratik cəmlənəndirsə, onda $[a,b]$ parçasında $K\varphi$ funksiyası da kvadratik cəmlənəndir. Axırıncı bərabərsizliyi inteqrallayıb kök alsaq:

$$\|K\varphi\| \le B\|\varphi\| \tag{4}$$

alarıq.

Beləliklə, əgər kvadratik cəmlənən $\varphi(x)$ funksiyası verilmişsə, onda (3) inteqralı təzə funksiya təyin edir. Demək olar ki, (3) inteqralı hər hansı bir qanunauyğunluq təyin edir ki, bu da kvadratik cəmlənən $\varphi(x)$ funksiyasını yeganə şəkilə, yəni $K\varphi$ funksiyasına çevirir.

Ümumiyyətlə, əgər verilmiş çoxluqdan ixtiyari funksiyanı yeganə yolla hər hansı yeni funksiyaya çevirən qanunauyğunluq verilmişdirsə, onda deyirlər ki, verilmiş çoxluqda operator funksiya təyin olunmuşdur.

Deyilənlərdən çıxır ki, əgər $K(x,s)$ nüvəsi əsas kvadratda kvadratik cəmlənəndirsə, onda (3) inteqralı funksiyalar çoxluğunda $[a,b]$ parçasında kvadratik cəmlənən hər hansı operator təyin etmişdir. Bu operator Fredholm operatoru adlanır.

Fredholm operatoru aşağıdakı xassəyə malikdir: əgər α_1 və α_2-sabitdirsə, $\varphi_1(x)$ və $\varphi_2(x)$ kvadratik cəmlənən funksiyalardırsa, onda

$$K(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1 K\varphi_1+\alpha_2 K\varphi_2.$$

Belə xassəyə malik olan operatora xətti operator deyilir. Deməli, hər bir Fredholm operatoru xətti operatordur. Buna uyğun olaraq Fredholm inteqral tənliyi xəttidir.

Tutaq ki, başqa bir

$$L\varphi=\int_a^b L(x,s)\varphi(s)ds$$

Fredqolm operatoru verilmişdir.

$|L(x,s)|^2$ ifadəsinin ikiqat inteqralı təyin olunmasına görə məhduddur. Tutaq ki,

$$\int_a^b\int_a^b |L(x,s)|^2 dxds = B'^2.$$

$LK\varphi=L(K\varphi)$ ifadəsini düzəldək. Belə ifadəyə K və L Fredholm operatorlarından düzəldilmiş ifadə deyilir.

Operatorların vurulması assosiativlik xassəsinə malikdir. Həqiqətən də, əgər K, K', K''-üç Fredholm operatorudursa, onda $K''(K'K\varphi)$ və $K''K'(K\varphi)$ ifadələri o deməkdir ki, $\varphi(x)$ funksiyası üzərində K operasiyası, alınan $K\varphi$ funksiyası üzərində K' operasiyası, $K'(K\varphi)$ funksiyası üzərində isə K'' operasiyası aparılmışdır.

İsbat edək ki, Fredholm operatorlarının hasili də Fredholm operatorudur. Bunun üçün $LK\varphi$ ifadəsini düzəldək. Ona görə (3) inteqralında x dəyişənini s-lə əvəz edək, bununla əlaqədar həmin inteqralda inteqral dəyişənini t ilə əvəz edək. Onda alarıq:

$$LK\varphi = \int_a^b L(x,s)ds \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \qquad (5)$$

Aydındır ki, təkrarı

$$\int_a^b |L(x,s)|ds \int_a^b |K(s,t)\varphi(t)|dt \qquad (6)$$

inteqralın varlığı heç bir şübhə doğurmur. Həqiqətən də, yuxarıda isbat etdiyimizə görə daxili inteqral s-ə görə kvadratik cəmlənən funksiyadır, onda onun kvadratik cəmlənən $|L(x,s)|$ funksiyasına hasili bütün x-lərə görə cəmlənəndir. (6) inteqralının varlığından çıxır ki, $a<s,\ t<b$ kvadratında $|L(x,s)K(s,t)\varphi(t)|$ funksiyasının cəmlənməsindən və Fubin teoreminə görə (5) inteqralında inteqrallama növbəsini dəyişmək olar:

$$LK\varphi = \int_a^b \varphi(t)dt \int_a^b L(x,s)K(s,t)ds$$

s ilə t işarələməsini etsək, alarıq:

$$LK\varphi = \int_a^b \varphi(s)ds \int_a^b L(x,t)K(t,s)dt$$

Burada

$$\int_a^b L(x,t)K(t,s)dt = M(x,s) \qquad (7)$$

işarə etsək alarıq:

$$LK\varphi = \int_a^b M(x,s)\varphi(s)ds \qquad (8)$$

Bunyakovski bərabərsizliyinə görə

$$|M(x,s)|^2 \le \int_a^b |L(x,t)|^2 dt \int_a^b |k(t,s)|^2 ds \qquad (9)$$

(9)-u əsas kvadrat üzrə inteqrallasaq alarıq:

$$\int_a^b \int_a^b |M(x,s)|^2 dxds \le B^2 B'^2 \qquad (10)$$

Beləliklə, LK operatorunun $M(x,s)$ nüvəsi əsas kvadratda kvadratik cəmlənəndir.

(7) və (8) formulaları göstərir ki, Fredholm operatorlarının hasili ümumi halda yerdəyişmə deyil. Əgər KL operatorlarının hasilinin nüvəsini $N(x,s)$ ilə işarə etsək, (7)-də alarıq:

$$N(x,s) = \int_a^b k(x,t)L(t,s)dt \qquad (11)$$

Aydındır ki, $M(x,s) \ne N(x,s)$. Tutaq ki, $a=0$, $b=1$, $K(x,s)=1$, $L(x,s) = x - s$

Onda

$$M(x,s)=\int_0^1 (x-t)dt = x-\frac{1}{2}$$

$$N(x,s)=\int_0^1 (t-s)dt=\frac{1}{2}-s$$

Əgər K və L operatorlarının nüvəsi (A) şərtini də ödəyirsə, onda KL və LK hasillərinin nüvələri də həmin şərti ödəyəcək. Həqiqətən də tutaq ki,

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 ds \leq A$$

$$\int_a^b |L(x,s)|^2 ds \leq A'$$

Onda (9) bərabərsizliyindən

$$|M(x,s)|^2 \leq A'\int_a^b |k(t,s)|^2 dt$$

alınar. Bunu isə s-ə görə inteqrallasaq, alarıq:

$$\int_a^b |M(x,s)|^2 ds \leq A'B^2 \qquad (*)$$

Analoji olaraq (11)-dən alarıq:

$$\int_a^b |N(x,s)|^2 ds \leq AB'^2$$

Deməli, LK və KL operatorlarının nüvələri (A) şərtini uyğun olaraq $A'B^2$ və AB'^2 sabitləri ilə ödənilir.

Aydındır ki, bir neçə Fredholm operatorunun hasilə də Fredholm operatorudur. Eyni n dənə K Fredholm operatorunun hasili n dərəcəli K operatoru adlanır və K^n ilə işarə olunur. Aydındır ki,

$$K^2\varphi = K(K\varphi),...,K^n\varphi = K(K^{n-1}\varphi).$$

Operatorunun vurulması assosiativlik xassəsinə malik olduğunda

$$K^n\varphi = K^m(K^{n-m}\varphi), \quad 0 < m < n \tag{12}$$

Buradan aydın olur ki, Fredholm operatorunun qüvvət üstü də Fredholm operatorudur.

$K_n(x,s)$ ilə K^n operatorunun nüvəsini işarə etsək,

$$K^n\varphi = \int_a^b K_n(x,s)\varphi(s)ds$$

alarıq. Aydındır ki,

$$K_1(x,s) = K(x,s)$$

$K_n(x,s)$ nüvəsi n-ci iterasiya nüvəsi adlanır.

(7) ifadəsindən iterasiya nüvəsi üçün aşağıdakı rekurent düsturu alarıq:

$$K_n(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt \tag{13}$$

$K_1(x,s) = K(x,s)$ olduğundan xüsusi halda alarıq:

$$K_2(x,s) = \int_a^b K(x,t)K(t,s)dt$$

$$K_3(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_2(t,s)dt$$

və s.

Əgər (7) ifadəsini K^m və K^{n-m} operatorlarına tətbiq edib (12) formulasını nəzərə alsaq daha ümumi ifadə alarıq:

$$K_n(x,s)=\int_a^b K_m(x,t)K_{n-m}(t,s)dt \qquad (14)$$

Burada $m=1$ götürsək (13) düsturunu alarıq: $m=n-1$ olanda isə daha sərfəli

$$K_n(x,s)=\int_a^b K_{n-1}(x,t)K(t,s)dt$$

düsturunu alarıq. Analoji olaraq K_{n-1} nüvəsini əvəz etmə yolu ilə aşağıdakı düsturu almaq olar:

$$K_n(x,s)=\int_a^b\int_a^b\dots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\dots K(t_{n-1},s)dt_1dt_2\dots dt_{n-1}.$$

$$B_n^2=\int_a^b\int_a^b |K_n(x,s)|^2dxds$$

işarə edək.

(10) düsturunda $L=K^{n-1}$ fərz etsək,

$$B_n^2\le B^2B_{n-1}^2$$

rekkurent düsturunu alarıq ki, buradan da

$$B_n^2\le B^4B_{n-2}^2\le\dots\le B^{2n}$$

və

$$B_n\le B^n \qquad (14)$$

bərabərsizliyi alınar.

İndi (14) bərabərsizliyini K^n operatoruna tətbiq etsək

$$\|K^n\varphi\|\le B^n\|\varphi\| \qquad (15)$$

bərabərsizliyini alarıq.

Əgər $K(x,s)$ nüvəsi əlavə (A) şərtini də ödəyirsə, onda iterasiya nüvəsi də həmin şərtləri ödəyir. Bunu nəzərə alsaq aşağıdakı qiymətləndirməni alarıq:

$$A_n = \sup \int_a^b |K_n(x,s)|^2 ds$$

(7) formulasında

$$L(x,t) = K_{n-1}(x,t)$$

yazaq. Onda (14) düsturundan alınır ki,

$$M(x,s) = K_n(x,s)$$

və (*) düsturundan

$$\int_a^b |K_n(x,s)|^2 ds \le A_{n-1} B^2 \tag{16}$$

bərabərsizliyi alınır. Burada aydındır ki,

$$\int_a^b |K_{n-1}(x,s)|^2 ds \le A_{n-1}$$

(16) bərabərsizliyinin sol tərəfini onun dəqiq yuxarı sərhəddi ilə əvəz etsək

$$A_n \le A_{n-1} B^2$$

bərabərsizliyini alarıq.

Buradan asanlıqla almaq olar ki,

$$A_n \le A B^{2n-2}$$

və nəticədə

$$\int_a^b |K_n(x,s)|^2 ds \le AB^{2n-2}$$

bərabərsizliyi alınır.

§2. İNTEQRAL TƏNLİKLƏRİN TƏQRİBİ ÜSULLARLA HƏLLİ

İnteqral tənliklər nəzəriyyəsində tədqiq edilən əsas xətti inteqral tənliklər aşağıdakılardır:

I növ Fredholm inteqral tənliyi

$$\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x),$$

II növ Fredholm inteqral tənliyi

$$y(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x),$$

I növ Volter inteqral tənliyi

$$\int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x),$$

nəhayət, II növ Volter inteqral tənliyi

$$y(x) - \lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x).$$

Burada $f(x), K(x,s)$ $(a \le x,\ s \le b)$ verilmiş funksiyalar, $y(x)$ $(a \le x \le b)$ məchul funksiya, λ isə parametrdir. $f(x)$ funksiyasına inteqral tənliyin sərbəst həddi, $K(x,s)$-ə isə inteqral tənliyin nüvəsi deyirlər. Aşkardır ki,

$$\widetilde{K}(x,s)=\begin{cases}K(x,s) & a\le s\le x,\\ 0 & x\le s\le b\end{cases}$$

köməkçi funksiyanı götürsək, Volter tənliklərini Fredholm tənliklərinə gətirmək olar:

$$\lambda\int_a^b \widetilde{K}(x,s)\,y(s)ds=f(x),$$

$$y(x)-\lambda\int_a^b \widetilde{K}(x,s)\,y(s)ds=f(x).$$

Bu onu göstərir ki, Fredholm inteqral tənlikləri üçün alınmış faktları uyğun olaraq Volter inteqral tənlikləri üçün də almaq olar (o şərtlə ki, $\widetilde{K}$ nüvəsi K -nın üzərinə qoyulan şərtləri ödəsin). Lakin gələcəkdə görəcəyik ki, Volter tənlikləri üçün elə faktlar almaq olar ki, Fredholm tənlikləri üçün bu faktlar doğru olmasın.

§3. İNTEQRALI, İNTEQRAL CƏMİ İLƏ ƏVƏZ ETMƏK ÜSULU

II növ Fredholm inteqral tənliyinə baxaq:

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\,y(s)ds+f(x). \tag{1}$$

Fərz edək ki, $K(x,s)$ və $f(x)$ $(a\le x,\ s\le b)$ kəsilməz funksiyalardır.

1. Aşağıdakı kimi kvadratura düsturunu götürək

$$\int_a^b F(x)dx=\sum_{i=1}^{n}A_iF(x_i)+R(F). \tag{2}$$

Burada $x_i\in[a,b]$ $(i=1,2,\dots,n)$ A_i $(i=1,2,\dots,n)$ sabitləri $F(x)$ funksiyasının seçilməsindən asılı deyillər və $R(F)$ -kvadratura düsturunun qalıq həddidir. x_i və A_i-ləri konkret seçməklə konkret kvadratura düsturları almış olarıq. Məsələn, əgər (7.2) kvadratura düsturu əvəzinə ümumiləşmiş trapeslər düsturunu götürsək, onda

$$x_1 = a,\ x_2 = a + h, \dots, x_n = a + (n-1)h = b,$$

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2},\quad A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h$$

olduğunu alarıq.

(1)tənliyində $x = x_i \quad (i = 1,2,\dots,n)$ götürək:

$$y(x_i) = \lambda \int_a^b K(x_i, s)\, y(s)\, ds + f(x_i) \quad (i = 1,2,\dots,n).$$

İnteqralı (2) kvadratur düsturu ilə əvəz edək

$$y(x_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x_i, x_j) y(x_i) = f(x^i) + \lambda R_i \qquad (3)$$

$$R_i = [K(x_i, s) y(s)].$$

λR_i həddini atsaq

$$Y_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} Y_i = f_i \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (4)$$

Burada $K_{ij} = K(x_i, y_j),\ f_i = f(x_i)$. Bu sistemi həll edib $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ədədlərini tapırıq. Tapılan bu ədədləri (1) tənliyinin həllinin $x_i \ (i = 1,2,\dots,n)$ nöqtələrində təqribi qiymətləri kimi götürürük:

$$y(x_i) \approx Y_i.$$

(1) tənliyinin $[a,b]$ parçasında təqribi həlli kimi

$$Y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_i) Y_j \qquad (5)$$

funksiyasını götürmək olar. Aşkardır ki, bu funksiyanın $x_1, x_2, \dots, x_n$ nöqtələrində qiymətləri uyğun olaraq, $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ilə üst-üstə düşürlər.

I növ Fredholm tənliyi üçün bu üsulu tətbiq etsəydik (4) sistemi əvəzinə

$$\lambda\sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} Y_j = f_i \quad (i=1,2,...,n)$$

olduğunu alardıq.

Əgər (1) tənliyi bircinsli olsaydı, yəni $f(x)\equiv 0$ olsaydı, onda (4) sistemi bircinsli sistem olardı. Bu sistemin isə o vaxt həlli olardı ki, determinantı sıfır olsun. Beləliklə, (4) sisteminə uyğun bircinsli sistemin həllini tapmaq üçün λ-ya nəzərə n-dərəcəli cəbri tənliyi həll edib $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ -ləri tapmaq lazımdır. Bundan sonra (4)-ə uyğun bircinsli sistemi həll edib $Y_1,Y_2,...,Y_n$ ədədlərini tapmaq lazımdır. Tapılan bu ədədlər (1) tənliyinin ($f(x)\equiv 0$ olduqda) $x_i\,(i=1,2,...,n)$ nöqtələrində təqribi qiymətləri olar.

Onu da qeyd edək ki, I növ Fredholm tənliyi üçün bu üsulu tətbiq etsəydik (3) sistemi əvəzinə

$$\lambda\sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} Y_j = f_i \quad (i=1,2,...,n)$$

olduğunu alardıq.

§4. ÜSULUN XƏTASININ QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

Əvvəlki paraqrafda aldıq ki,

$$y(x_i) = \lambda\sum_{j=1}^{n} A_j K(x_i,x_j)y(x_j) = f(x^i) + \lambda R_i \qquad (1)$$

$$R_i = [K(x_i,s)y(s)].$$

$$Y_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} Y_j = f_i \qquad (i = 1,2,\dots,n). \tag{2}$$

$\varepsilon_i = y(x_i) - Y_i$ işarələməsini aparsaq, (3) və (4) sistemlərindən

$$\varepsilon_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} \varepsilon_j + \lambda R_i \quad (i = 1,2,\dots,n) \tag{3}$$

olduğunu alarıq.

(3) sisteminin determinantını $D(\lambda)$ ilə və bu determinantın cəbri tamamlayıcılarını isə $D_{ij}(\lambda)$ ilə işarə etsək, (3) sisteminin həllini

$$\varepsilon_i = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{j=1}^{n} D_{ij} R_j$$

şəklində alırıq. Buradan

$$|\varepsilon_i| \le |\lambda| B r, \tag{4}$$

$$B = \frac{1}{|D(\lambda)|} \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |D_{ij}|,$$

$$r = \max_{a \le x, s \le b} |R|, \qquad R = R[K(x,s), y(s)].$$

Digər tərəfdən (3) və

$$y(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j) y(x_j) + \lambda R$$

düsturlarından istifadə etsək,

$$\varepsilon(x) = y(x) - Y(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j) \varepsilon_j + \lambda R.$$

Burada (4)-nı nəzərə alsaq,

$$|\varepsilon(x)| \le |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |A_j| |K(x, x_j)| |\varepsilon_j| + |\lambda| r,$$

$$|\varepsilon(x)| \le |\lambda|^2 K_0 \left(\sum_{j=1}^{n} |A_j|\right) rB + |\lambda| r,$$

$$K_0 = \max_{a \le x, s \le b} |K(x,s)|$$

olduğunu alarıq.

Beləliklə, isbat etdik ki,

$$|y(x) - Y(x)| \le Cr,$$
$$C = |\lambda|^2 K_0 \sum_{j=1}^{n} |A_j| + B + |\lambda|. \qquad (5)$$

Burada r-i hesablamaq üçün kvadratura düsturunu konkret götürmək lazımdır. Məsələn, əgər ümumiləşmiş trapeslər düsturunu götürsək

$$R(F) = \frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} F''(\xi)$$

olar. Burada fərz edirik ki, ($K(x,s)$ və $f(x)$ funksiyaları iki tərtibdən diferensiallanandırlar. Bu hal üçün r-i hesablayaq.

II növ Fredholm tənliyindən

$$y^{(i)}(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial^i K(x,s)}{\partial x^i} y(s) ds + f^i(x) \quad (i = 1,2).$$

$$|y^{(i)}(x)| \le |\lambda| K_i (b-a) N_0 + P_i \quad (i = 1,2).$$
$$N_i \le |\lambda| K_i (b-a) N_0 + P_i \quad (i = 1,2). \qquad (6)$$

Burada $i = 0,1,2$ üçün

$$K_i = \max_{a \le x, s \le b} \left\{ \left| \frac{\partial^i K(x,s)}{\partial x^i} \right|, \left| \frac{\partial^i K(x,s)}{\partial s^i} \right| \right\},$$

$$N_i = \max_{a \le x \le b} |y^{(i)}(x)|,$$

$$P_i = \max_{a\le x\le b}|f''(x)|.$$

Aşkardır ki, $F(s)=K(s,s)y(s)$, funksiyasının törəmələri aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$F'(s)=\frac{\partial K(s,s)}{\partial s}y(s)+K(s,s)y'(s),$$

$$F''(s)=\frac{\partial^2 K(s,s)}{\partial s^2}y(s)+2\frac{\partial K(s,s)}{\partial s}y'(s)+K(s,s)y''(s).$$

Buradan

$$|F'(s)|\le K_1N_0+K_0N_1,$$
$$|F''(s)|\le K_2N_0+2K_1N_1+K_0N_2.$$

(6) düsturlarını burada nəzərə alsaq,

$$|F''(s)|\le K_2N_0+2K_1[|\lambda|K_1(b-a)N_0+P_1]+$$
$$+K_0[|\lambda|K_2(b-a)N_0+P_2]=[K_2+2K_1^2|\lambda|(b-a)+$$
$$K_0K_2|\lambda|(b-a)]N_0+2K_1P_1+K_0P_2,$$

$$|F''(s)|\le C_1N_0+C_2, \qquad C_i=const \quad (i=1,2)$$

olduğunu alarıq. Deməli,

$$|R(F)|\le\frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2}(C_1N_0+C_2),$$

$$r\le\frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2}(C_1N_0+C_2).$$

(5) düsturundan, $Y_0=\max\limits_{a\le x\le b}|Y(x)|$ ilə işarə etsək,

$$|y(x)|\le|y(x)-Y(x)|+|Y(x)|\le Cr+Y_0\le$$
$$\le C\frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2}(C_1N_0+C_2)+Y_0,$$

$$N_0 \le CC\frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2}N_0 + CC_2\frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} + Y_0,$$

$$N_0 \le \frac{CC_2\dfrac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} + Y_0}{1-C^*}.$$

Burada fərz edilir ki,

$$C^* = CC_1\frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} < 1.$$

Nəhayət

$$r \le \frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2}\left[C_1\frac{CC_2\dfrac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} + Y_0}{1-C^*} + C_2 \right].$$

§5. CIRLAŞAN NÜVƏLİ İNTEQRAL TƏNLİKLƏR. FREDHOLMUN BİRİNCİ TEOREMİ

Tərif. Əgər inteqral tənliyin nüvəsi sonlu sayda biri yalnız x-dən, digəri isə yalnız s-dən aslı olan funksiyaların hasilləri cəmi şəklidə göstərilə bilərsə, onda belə nüvə cırlaşan adlanır. Bu halda inteqral tənlik cırlaşan nüvəli inteqral tənlik adlanır. Cırlaşan nüvə

$$K(x,s) = \sum_{k=1}^{n} A_k(x)B_k(s) \tag{1}$$

şəklində göstərilə bilən nüvədir.

Fərz olunur ki, $A_k(x)$ və $B_k(s)$ funksiyaları arqumentlərinin dəyişmə $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyalardır. Onda təbii ki, $K(x,s)$ nüvəli Fredholm nüvəsi olar.

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2 dtds < +\infty$$

Cırlaşan

$$K(x,s)=\sum_{k=1}^{n} A_k(t)B_k(s)$$

Nüvəli ikinci növ Fredholm interqal tənliyini nəzərdən keçirək:

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{k=1}^{n} A_k(x)\int_a^b B_k(s)\varphi(s)ds+f(x) \tag{2}$$

harada ki, $f(x)$ $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan verilmiş funksiyalardır.

Fərz edək ki, (2) tənliyinin $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş $\varphi=\varphi(x)$ həlli var.

$$c_k=\int_a^b \varphi(s)B_k(s)ds, \quad k=1,2,...,n, \tag{3}$$

qəbul edək. Onda (2) tənliyindən

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n} c_k A_k(x) \ , \tag{4}$$

alarıq. Buradan aydındır ki, inteqral tənliyin həlli cırlaşmış nüvə halında $c_k\,(k=1,2,...,n)$ əmsallarının tapılmasına gətirilir.

(4) bərabərliyinin hər iki tərəfini $B_m(t)$-yə vuraq və alınan bərabərliyi x-yə nəzərən $[a,b]$ parçasında inteqrallayaq; onda aşagıdakı münasibəti alarıq:

$$\int_a^b \varphi(x)B_m(x)dx=\int_a^b f(x)B_m(x)dx+\lambda\sum_{k=1}^{n} C_k\int_a^b A_k(x)B_m(x)dx, \quad m=1,2,...,n \tag{5}$$

Aşağıdakı işarələmələri aparaq:

$$\int_a^b A_k(x)B_m(x)dx = h_{km}, \quad \int_a^b f(x)B_m(x)dx = f_m, \quad k,m = 1,2,\dots,n$$

Bunları nəzərə alsaq (5) sistemini aşagıdakı kimi yaza bilərik:

$$c_m - \lambda\sum_{k=1}^{n} c_k h_{km} = f_m,$$

və yaxud

$$\left.\begin{array}{l} (1-\lambda h_{11})c_1 - \lambda h_{21}c_2 - \dots - \lambda h_{n1}c_n = f_1, \\ -\lambda c_1 h_{12} + (1-\lambda h_{22})c_2 - \dots - \lambda h_{n2}c_n = f_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\lambda h_{1n}c_1 - (1-\lambda h_{2n})c_2 + \dots + (1-\lambda h_{nn})c_n = f_n \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Beləliklə, $c_1, c_2, \dots, c_n$ əmsalları (6) tənliklər sistemini ödəməlidir.

Əgər (6) sisteminin həlli yoxdursa, onda aşkardır ki, (2) cırlaşan nüvəli inteqral tənliyinin də həlli olmaz.

Tutaq ki, (6) sisteminin $c_1, c_2, \dots, c_n$ həlli var. Əmsallarının bu qiymətlərini (4) düsturunda yerinə yazsaq (2) inteqral tənliyinin həlli olan $\varphi(x)$ funksiyanı alarıq.

Beləliklə, (2) inteqral tənliyi ilə (6) cəbri tənliklər sistemi eynigüclüdür, yəni (6) sisteminin həllərinin olması (2) inteqral tənliyinin olmasını sübüt edir və tərsinə.

(6) sisteminin həllərinin olması (2) inteqral tənliyinin olmasını sübüt edir və təsinə.

(6) sisteminin baş determinantı $D(\lambda)$ aşağıdakı kimidir.

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda h_{11} & -\lambda h_{21} & \dots & -\lambda h_{n1}c_n \\ -\lambda c_1 h_{12} & 1-\lambda h_{22} & \dots & -\lambda h_{n2}c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda h_{1n} & 1-\lambda h_{2n} & \dots & 1-\lambda h_{nn} \end{vmatrix} \tag{7}$$

Aydındır ki, $D(\lambda)$ determinantı λ-ya nəzərən dərəcəsi n-dən böyük olmayan çoxhədlilər və eynilik kimi sıfır deyil, belə ki,

$$D(0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}=1$$

Deməli, $D(\lambda)$-nın n-dən çox kökü ola bilməz. $D(\lambda)$-ya (2) inteqral tənliyi üçün Fredholm determinantı deyilir. Onun sıfırına, yəni $D(\lambda)=0$ tənliyinin kökünə $k(t,s)$ nüvəsinin və yaxud (2) inteqral tənliyinin xarakteristik ədədi deyilir.

Fərz edək ki, λ ədədi $D(\lambda)$ çoxhədlisinin heç bir kökü ilə üst-üstə düşmür. Onda aydındır ki, (6) sistemi istənilən sağ tərəf üçün birqiymətli həll olunar.

Deməli, əgər λ ədədi $K(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədi deyilsə, onda (2) inteqral tənliyinin yeganə $\varphi(x)$ həlli olar və bu həll istənilən sərbəst hədd $f(x)$ üçün (4) düsturu ilə təyin olunar.

Bu təklifə Fredholmun birinci teoremi deyilir.

$D(\lambda)\neq 0$ halında uyğun bircins inteqral tənliyin

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{k=1}^{n}A_k(t)\int_a^b B_i(s)\varphi(s)ds, \tag{8}$$

Yalnız trivial $\varphi(x) \equiv 0$ həlli olar.

Doğrudan da, $f(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$ olarsa, onda bütün f_m -lər, $(m = \overline{1,n})$ sıfıra bərabər olar. Onda (6) sisteminin baş determinantı sıfırdan fərqli olduğundan bircins sistemini yalnız $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ trivial həlli olar.

Ona görə də Fredholmun birinci teoremi bəzən belə də söylənilir:

Teorem: (2) inteqral tənliyinin istənilən $f(x)$ üçün yeganə həllinin olması üçün zəruri və kafi şərt uyğun bircins inteqral tənliyinin yalnız trivial $\varphi(x) \equiv 0$ həllinin olmasıdır.

Misal.

$$\varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (x - s)\varphi(s)ds,$$

inteqral tənliyini həll edin.

Həlli: Verilmiş inteqral tənliyi aşağıdakı kimi yazaq

$$\varphi(x) = 1 + \lambda x \int_0^1 \varphi(s)ds + \lambda \int_0^1 (-s)\varphi(s)ds$$

Burada

$$A_1(x) = x, \quad A_2(x) = 1, \quad B_1(s) = 1, \quad B_2(s) = -s \quad f(x) = 1.$$

Onda

$$c_1 = \int_0^1 \varphi(s)ds, \quad c_2 = \int_0^1 (-s)\varphi(s)ds$$

Onda (4) düsturuna görə

$$\varphi(x) = 1 + \lambda c_1 x + \lambda c_2 \tag{9}$$

olar.

(9) bərabərliyini əvvəlcə $B_1(x)=1$ -ə, sonra isə $B_2(x)=x$ -yə vuraq və x-yə görə [0,1] parçasında inteqrallayaq.

Onda aşağıdakıları alarıq:

$$\begin{cases} \int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 dx + c_1\lambda\int_0^1 x dx + \lambda c_2 \int_0^1 dx, \\ \int_0^1 (-x)\varphi(x)dx = \int_0^1 (-x)dx + c_1\lambda\int_0^1 (-x)^2 dx + \lambda c_2 \int_0^1 (-x)dx \end{cases}$$

və yaxud

$$\begin{cases} c_1\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right) - \lambda c_2 = 1, \\ c_1\dfrac{\lambda}{3} + \left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)c_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Bu sisteminin baş determinantı

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\dfrac{\lambda}{2} & -\lambda \\ \dfrac{\lambda}{3} & 1+\dfrac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{3} = 1 + \frac{\lambda^2}{12} > 0 .$$

Onda $D(\lambda) = \Delta = \dfrac{12+\lambda^2}{12} > 0$ olar.

Deməli, sistemin baş determinantı λ-nın bütün istənilən qiymətlərində sıfırdan fərqli olduğundan c_1, c_2 -yə nəzərən olan sistemin yeganə həlli var və bu həlli Kramer qaydası ilə təyin etmək üçün köməkçi determinatları hesablayaq:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ -\frac{1}{2} & 1+\frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & 1 \\ \frac{\lambda}{3} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{6+\lambda}{12}$$

Buradan da, Kramer düsturlarına əsasən

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{12+\lambda^2};$$

$$c_2 = -\frac{6+\lambda}{12+\lambda^2};$$

alarıq. Sabitlərin bu qiymətinlərini (9) düsturunda yerinə yazsaq:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{12\lambda}{12+\lambda^2} - \frac{6\lambda+\lambda^2}{12+\lambda^2} = \frac{12+\lambda^2+12\lambda x-6\lambda-\lambda^2}{12+\lambda^2} =$$

$$= \frac{12+12\lambda x-6\lambda}{12+\lambda^2} = \frac{6(2+2\lambda x-\lambda)}{12+\lambda^2}$$

alarıq.

§6. FREDHOLMUN İKİNCİ TEOREMİ

İndi isə fərz edək ki, λ ədədi Fredholm determinantının köklərindən biri ilə üst-üstə düşür, yəni $K(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədidir.

Onda aydındır ki, (6) sisteminin baş determinantı sıfıra bərabər olar. Bu halda uyğun bircins sistemin

$$c_i - \lambda\sum_{k=1}^{n} h_k c_k = 0, \qquad i = \overline{1,n} \tag{10}$$

sisteminin p sayda xətti asılı olmayan sıfırdan fərqli vektor-həlli olar.

$$\{c_1^{(l)}, c_2^{(l)}, \dots, c_n^{(l)}\}, \quad l = 1,2,\dots,p$$

Deməli,

$$\varphi_l(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(l)} A_k(x), \qquad l = 1,2,\dots,p \tag{11}$$

funksiyaları uyğun bircins inteqral tənliyin

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k(x) \int_a^b B_k(s)\varphi(s)ds, \tag{12}$$

trivial olmayan həlli olar.

Ümumi halda olduğu kimi cırlaşan nüvəli inteqral tənliyə uyğun bircins tənliyin trival olmayan həllinə bu tənliyin (və yaxud $K(x,s)$ nüvəsinin) verilmiş xarakteristik ədədə uyğun məxsusi və yaxud fundamental funksiyası deyilir.

Bu xarakteristik ədədə uyğun xətti asılı olmayan funksiyalarının sayına onun ranqı və yaxud təkrarlıq dərəcəsi deyilir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, əgər $\varphi_1(x)$ və $\varphi_2(x)$ λ xarakteristik ədədinə uyğun məxsusi funksiyalardırsa, onda onların cəmi də $\{\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\}$ bu xarakteristik ədədə uyğun məxsusi funksiya olar.

Həmçinin, əgər $\varphi(x)$ funksiyası $K(x,s)$ nüvəsinin məxsusi funksiyasıdırsa, onda ixtiyari α sabiti üçün $\alpha\cdot\varphi(x)$-də məxsusi funksiya olur.

Beləliklə, verilmiş λ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi funksiyalar $\varphi_l(x)$ ölcüsü p olan xətti fəza təşkil edir.

Ona görə də (12) bircins inteqral tənliyin verilmiş məxsusi ədədə uyğun ümumi həlli

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)\varphi_k(x), \tag{13}$$

olar, burada α_k, $k=\overline{1,n}$ ixtiyari sabit ədədlərdir.

İndi isə ali cəbr kursunda öyrənilən bəzi anlayışları yada salaq:

Tutaq ki, elementləri həqiqi ədədlər olan $n\times n$ ölçülü A matrisi verilmişdir.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matrisinin sətir elementlərini sütün elementləri ilə əvəz etdikdə alınan matrisə A matrisinin transporinə edilmiş matrisi deyilir və A^* kimi işarə edilir.

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Fərz edək ki,

$$A\cdot X=F, \tag{14}$$

xətti cəbri tənliklər sistemi verilmişdir; harada ki,

$$A^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix},$$

Onda

$$A^* \cdot Y = G, \tag{15}$$

sistemina (14) sistemina qoşma olan sistem deyilir.

A matrisinin k tərtibli minoru matrisin k sayda sətir və k sayda sütunların kəsişməsində yerləşən elementlərdən düzəlmiş k tərtibli determinanta deyilir. ($k \le n$).

Əgər A matrisinin bütün $k > r$ tərtibli minorları sıfıra bərabərdirsə və r tərtibli minorlardan heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olarsa, onda r ədədinə A matrisinin ranqı deyilir.

Teorem 1. Əgər xətti cəbri tənliklər sisteminin baş determinantı sıfıra bərabər olarsa, onda bircins sistem $A \cdot X = 0$ və qoşma sistem $A^* \cdot Y = 0$ hər biri $p = n - r$ sayda xətti asılı olmayan həllə malikdirsə, harada ki, r ədədi A matrisinin ranqıdır.

Aşağıdakı anlayışı daxil edək.

Tutaq ki,

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds + f(x), \tag{16}$$

intqeral tənliyi verilmişdir.

Tərif. $K(x,s)$ nüvəsində x-dəyişənini s dəyişəni ilə və tərsinə əvəz etdikdə alınan nüvəyə $K(x,s)$ nüvəsinin qoşması deyilir və belə işarə olunur:

$$K^*(x,s) = K(s,x), \tag{17}$$

$K(x,s)$ kompleks qiymətli funksiya olduqda

$$K^*(x,s) = \overline{K(s,x)}$$

qəbul olunur. Burada $\overline{K(s,x)}$, simvolu $K(x,s)$-yə kompleks qoşma kəmiyyət işarə olunmuşdur.

Onda

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K^*(x,s)\psi(s)ds + g(x), \tag{18}$$

tənliyinə (16) tənliyinə qoşma olan tənlik deyilir.

Cırlaşan nüvəli inteqral tənlik (2) üçün qoşma tənlik kimi olur: Bu tənlik üçün

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b \sum_{k=1}^n A_k(s)B_k(x)\psi(s)ds + g(x) , \tag{19}$$

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k^* B_l(x), \tag{20}$$

harada ki,

$$c_k^* = \int_a^b \psi(s)A_k(s)ds, \quad k = 1,2,...,n \tag{21}$$

Əgər $g(x) \equiv 0$ olarsa, yəni (19) tənliyi bircins olarsa, onda C_k^*-ları təyin etmək üçün bircins sistemi alarıq:

$$c_m^{*} - \lambda \sum_{k=1}^{n} h_{mk} c_k^{*} = 0, \quad m = \overline{1,n} \tag{22}$$

bu sistem (10) sistemi ilə qoşmadır. Teorem 1-ə görə bu sistemlərin hər biri p sayda xətti asılı olmayan vektor həllə malikdir.

Əgər $\{c_1^{*(l)}, c_2^{*(l)}, ..., c_n^{*(l)}\}$, $l = 1,2,...,p$, (22) sisteminin sıfırlardan fərqli vektor həlli olarsa, onda

$$\psi_l(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{*(l)} B_k(x), \quad l = 1,2,...,p$$

funksiyaları (8) tənliyinə qoşma olan

$$\psi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \int_a^b a_k(s) \psi(s) ds, \tag{23}$$

Bircins inteqral tənliyinin məxsusi funksiyaları olar.

Fredholmun ikinci teoremi. Əgər λ ədədi $K(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədidirsə, onda bircins inteqral tənlik (12) və onunla qoşma olan (23) tənliyi eyni sayda xətti asılı olmayan məxsusi funksiyalara malik olar.

§7. FREDHOLMUN ÜÇÜNCÜ TEOREMİ

$$\psi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k(x) \int_a^b B_k(s) \varphi(s) ds + f(x), \tag{24}$$

qeyri-bircins tənliyini nəzərdən keçirək. Fərz edək ki, λ ədədi xarakteristik ədəddir.

Yuxarıda göstərildiyi kimi, (24) tənliyinin həll oluna bilən olması məsələsi qeyri-xətti cəbri tənliklər sisteminin həll oluna bilən olması ilə eynigüclüdür:

$$c_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} h_{mk} c_k = f_m, \quad m = 1,2,..,m \tag{25}$$

cəbrdən məlum olan aşağıdakı teoremdən istifadə edək:

Teorem 2. Qeyri-bircins xətti cəbri tənliklər sisteminin həllinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt bu sistemin sərbəst hədlər sütununun qoşma bircins sisteminin bütün vektor həllərinə ortoqonal olmasıdır.

Bu teoremə əsasən (25) qeyri-bircins sisteminin həlli o vaxt olar ki, $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ vektoru $\{c_1^{*(l)}, c_2^{*(l)}, ..., c_n^{*(l)}\}$, $l = 1,2,...,p$ vektorlarının hər birinə ortoqonal olsun, yəni

$$\sum_{k=1}^{n} f_k c_k^{*(l)} = 0, \quad l = 1,2,...p \tag{26}$$

olar.

Bildiyimizə görə

$$f_i = \int_a^b f(x) b_i(x) dx$$

olduğundan (26) şərtlərini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\int_a^b f(x) \sum_{k=1}^{n} c_k^{*(l)} B_k(x) dx = \int_a^b f(x) \psi_l(x) dt = 0, \quad l = 1,2,...,p \tag{27}$$

Beləliklə aşağıdakı teorem isbat olundu:

Teorem. Qeyri-bircins çırlaşan nüvəli inteqral tənlik λ xarakteristik ədədi üçün o vaxt və yalnız o vaxt həll oluna bilən olar ki, sərbəst hədd qoşma bircins inteqral tənliyin (23) bütün hədlərinə ortoqonal olsun.

Bu teoremə Fredholmun üçüncü teoremi deyilir.

Qeyd edək ki, qeyri-bircins inteqral tənliyin (24) həll olunması haqqındakı sual p sayda

$$\int_a^b f(x)\psi_i(x)dx = 0, \quad k = 1,2,\dots,p$$

şərtlərinin ödənilib-ödənilmədiyini yoxlamağı tələb edir. Əgər bu şərtlər ödənilərsə, onda (24) tənliyinin sonsuz həlli olar. bu həllərin hamısı

$$\varphi(x) = \varphi_0, \quad \varphi_0(x) + \varphi_n(x)$$

düsturu ilə yazıla bilən, harada ki, $\varphi_n(x)$ qeyri-bircins tənliyin hər hansı bir həlli, φ_0, $\varphi_0(x)$ -isə uyğun bircins inteqral tənliyin ümumi həllidir.

Misal.

$$\varphi(x) = \lambda \int_1^1 (xs^2 + sx^2)\varphi(s)ds + f(x), \qquad (28)$$

tənliyini nəzərdən keçirək. burada $f(x)$ $[-1,1]$ parçasında kəsilməz funksiyadır.

Tənliyi aşağıdakı kimi yazaq:

$$\varphi(x) = \lambda x \int_{-1}^1 s^2\varphi(s)ds + \lambda x^2 \int_{-1}^1 s\varphi(s)ds + f(x)$$

və

$$c_1 = \int_{-1}^{1} s^2 u(s)ds,$$

$$c_2 = \int_{-1}^{1} s\varphi(s)ds$$

qəbul edək. Onda

$$\varphi(x) = c_1\lambda x + c_2\lambda x^2 + f(x) \tag{29}$$

olar. c_1 və c_2 sabitlərini təyin etmək üçün aşağıdakı sistemi alarıq:

$$\begin{aligned} c_1 - \frac{2}{5}\lambda c_2 &= \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx, \\ -\frac{2}{3}\lambda c_1 + c_2 &= \int_{-1}^{1} x f(x)dx. \end{aligned} \tag{30}$$

(29) sisteminin baş determinantı $D(\lambda)$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{5}\lambda \\ -\frac{2}{3}\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{4}{15}\lambda^2$$

$$D(\lambda) = \Delta = 1 - \frac{4}{15}\lambda^2$$

olur.

Əgər $\lambda \neq \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ olarsa, onda (28) sisteminin yeganə həlli olar və verilmiş sistemi istənilən $[-1,1]$ parçasında kəsilməz olan hər bir $f(x)$ üçün birqiymətli həll oluna bilən olar.

İndi tutaq ki, $\lambda = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Onda bircins sistemin

$$\begin{cases} c_1 - \frac{2}{5}\lambda c_2 = 0, \\ -\frac{2}{3}\lambda c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

sisteminin sıfırdan fərqli olan $\left\{\sqrt{\frac{3}{5}}c, c\right\}$ şəklində sonsuz həlli olar, burada c-ixtiyari sabit ədəddir.

Deməli, verilmiş inteqral tənliyə uyğun olan bircins tənliyin

$$\varphi(x) = \lambda x \int_1^1 (xs^2 + x^2 s)\varphi(s)ds, \tag{31}$$

$\lambda = \frac{\sqrt{15}}{2}$ olduqda sıfırdan fərqli həlli

$$\varphi(x) = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}x + x^2\right)c$$

şəklində olar, c-ixtiyari sıfırdan fərqli sabitdir.

Aydındır ki, (28) tənliyinin nüvəsi simmetrikdir, yəni $K(x,s) = K(s,x)$, ona görə də qoşma bircins inteqral tənlik (31) tənliyi ilə üst-üstə düşər və deməli qoşma bircins tənliyində həlli

$$\psi(x) = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}x + x^2\right)c$$

şəklində olar.

(30) şəklində qeyri-bircins xətti cəbri tənliklər sistemi $\lambda = \frac{\sqrt{15}}{2}$ olduqda aşağıdakı kimi olar:

$$c_1 - \sqrt{\frac{3}{5}}c_2 = \int_1^1 x^2 f(x)dx,$$

$$c_1 - \sqrt{\frac{3}{5}}c_2 = \int_{-1}^{1}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}t\right)f(x)dx.$$

buradan bir başa aydındır ki, bu sistemin o vaxt həll olar ki,

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)f(x)dx.$$

və yaxud

$$\int_{-1}^{1}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}x + x^2\right)f(x)dx = 0, \qquad (32)$$

olsun, yəni $f(x)$ qoşma bircins inteqral tənliyin istənilən $\psi(t)$ həllinə ortoqonal olsun.

Məsələn, əgər $f(x) \equiv 1$ olarsa, onda (32) bərabərliyi ödənilməz və deməli (28) tənliyinin həlli olmaz.

Əgər $f(x) = t^2 - \frac{3}{5}x$ olarsa, onda (28) tənliyinin $\varphi(x) = x^3 - \frac{3}{5}x + c\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}x + x^2\right)$, c istənilən ədəddir şəklində sonsuz sayda həll olar.

Beləliklə, isbat olunmuş teoremlərdən aşağıdakı teoremin doğruluğu alınar:

Alternativ haqqında teorem.

Əgər cırlaşan bircins Fredholm tənliyinin yalnız trivial həlli varsa, onda uyğun qeyri-bircins inteqral tənliyin yeganə həlli olar. Əgər bircins inteqral tənliyin trivial olmayan həlli varsa, onda qeyri-bircins inteqral tənliyin sərbəst həddən $f(x)$ asılı olaraq ya həlli yoxdur, ya da sonsuz sayda həlli var.

Qeyd. Yuxarıda göstərilən nəticələr məlum mənada $A_i(x), B_i(s)$ və $f(x)$ analitik olaraq λ parametrindən asılı olduqda da, yəni

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(x,\lambda) b_i(s,\lambda) \varphi(s) ds + f(x,\lambda)$$

tənliyi üçün də doğrudur.

Bu halda h_{ij} və f_i kəmiyyətləri λ parametrinin analitik funksiyaları olurlar. $D(\lambda)$ -isə artıq λ parametrinin analitik funksiya olur. Ona görə də bu halda ola bilər ki. xarakteristik ədəd, ümumiyyətlə olmasın. Çünki qeyri-cəbri analitik funksiyanın sıfırı olmaya da bilər.

§8. NÜVƏNİ, CIRLAŞMIŞ NÜVƏ İLƏ ƏVƏZ ETMƏK ÜSULU

1. Əgər inteqral tənliyin nüvəsini aşağıdakı şəkildə göstərmək olarsa

$$K_n(x,s) = \sum_{i=1}^n A_i(x) B_i(s),$$

onda deyirlər ki. nüvə cırlaşandır. Burada $\{A_i(x)\}_{i=1,n}$ və $\{B_i(x)\}_{i=1,n}$ funksiyalar sistemi $[a,b]$ parçasında xətti asılı olmayan sistemlərdir.

Aşağıdakı kimi cırlaşan nüvəli II növ Fredholm inteqral tənliyinə baxaq:

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K_n(x,s) y_n(s) ds + f(x). \tag{1}$$

Bu tənliyin dəqiq həllini tapaq. (1) tənliyini

$$y_n(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b B_i(s) y_n(s) ds \right) A_i(x) + f(x)$$

şəklində yazmaq mümkün olduğundan bu tənliyin həllini aşağıdakı şəkildə axtarmaq təbiidir:

$$y_n(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i A_i(x) + f(x). \tag{2}$$

Burada C_i $(i = 1,2,...,n)$-sabitlərdir. Həllin bu ifadəsini (1)-də nəzərə alsaq

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} C_i A_i(x) + f(x) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} A_i(x) B_i(s) \left[\lambda \sum_{i=1}^{n} C_i A_i(s) + f(s) \right] ds + f(x),$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i A_i(x) = \lambda \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} A_i(x) B_i(s) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} C_j A_j(s) \right) ds + \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} A_i(x) B_i(s) \right) f(s) ds,$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i A_i(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \sum_{j=1}^{n} C_j \left(\int_a^b B_i(s) A_j(s) ds \right) + \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \left(\int_a^b B_i(s) f(s) ds \right).$$

$A_1^{(x)}, \ldots, A_n^{(x)}$ funksiyalar sistemi xətti asılı olmadıqlarından

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} C_j = \beta_i \qquad (i = 1,2,...,n), \tag{3}$$

$$\alpha_{ij} = \int_a^b B_i(s) A_j(s) ds, \quad \beta_i = \int_a^b B_i(s) f(s) ds$$

olduğunu alarıq.

Fərz edək ki, (3) sisteminin determinantı $D(\lambda)\neq 0$. Onda məlumdur ki, bu sistemin yeganə həlli var. Tapdığımız C_i -ləri (2) düsturunda yerinə yazsaq (1) tənliyinin həllini tapmış oluruq.

Məlumdur ki, (3) sisteminin həlli

$$C_i=\frac{D_i}{D} \quad (i=1,2,...,n)$$

şəklində olar. Burada

$$D=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_i=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1i-1} & \beta_1 & \alpha_{1i+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{ni-1} & \beta_n & \alpha_{ni+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

D_{ij} ilə D_i determinantının (i,j) elementinin cəbri tamamlayıcısını işarə etsək:

$$D_i=\sum_{j=1}^{n} D_{ij}\beta_j .$$

Onda

$$C_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{D_{ij}}{D}\beta_j \quad (i=1,2,...,n)$$

tapdığımız bu qiymətləri (2)-də yerinə yazsaq,

$$y_n(x) = \lambda\sum_{i=1}^{n} A_i(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{D_{ij}}{D}\beta_j = f(x),$$

$$y_n(x) = \lambda\sum_{i,j=1}^{n} A_i(x)\frac{D_{ij}}{D}\int_a^b B_j(s)f(s)ds + f(x),$$

$$y_n(x) = \lambda\int_a^b\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{D_{ij}}{D}A_i(x)B_j(s)\right)f(s)ds + f(x),$$

$$y_n(x) = \lambda\int_a^b R_n(x,s;\lambda)f(s)ds + f(x)$$

olduğunu alarıq. Burada

$$R_n(x,s;\lambda) = \frac{1}{D}\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}A_i(x)B_j(s)$$

funksiyasına $K_n(x,s)$ nüvəsinin rezolventi deyilir.

§9. NÜVƏNİ CIRLAŞAN NÜVƏLƏR ARDICILLIĞI İLƏ APPROKSİMASİYASI

II növ Fredholm inteqral tənliyinə baxaq:

$$y(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x) \qquad (1)$$

Fərz edək ki, $K(x,s)$ nüvəsini $\{K_n(x,s)\}_{n=1,2,...}$ cırlaşan nüvələr ardıcıllığı ilə approksimasiya etmək olar, yəni

$$K(x,s) = K_n(x,s) + \delta_n(x,s),$$
$$\lim_{n\to\infty}\max_{(x,s)}|\delta_n(x,s)| = 0.$$

(1) tənliyində nüvənin bu ifadəsindən istifadə etsək

$$y(x) = \lambda\int_a^b K_n(x,s)y(s)ds + \lambda\int_a^b \delta_n(x,s)y(s)ds + f(x) \qquad (2)$$

olduğunu alarıq. Kafi qədər böyük n-lər üçün $\delta_n(x,s)$ kiçik olduğundan tənliyin sağ tərəfindəki ikinci inteqralı atmaq olar. Onda

$$y_n(x)=\lambda\int_a^b K_n(x,s)y_n(s)ds+f(x). \qquad (3)$$

(3) cırlaşan nüvəli inteqral tənlik olduğundan onun dəqiq həllini - $y_n(x)$ tapmaq olar. Tapılan bu həlli n-in kafi qədər böyük qiymətləri üçün (1) tənliyinin təqribi həlli kimi götürmək olar. Bu halda buraxılan xətanı qiymətləndirək.

$\varepsilon_n(x)=y(x)-y_n(x)$ işarələmisini aparsaq, (2) və (3) tənliklərindən

$$\varepsilon_n(x)=\lambda\int_a^b K_n(x,s)\varepsilon_n(s)ds+\lambda\int_a^b K_n(x,s)y(s)ds$$

olduğunu alarıq. Bu, cırlaşmış nüvəlin I növ Fredholm inteqral tənliyidir. Bu tənliyin həlli üçün

$$y_n(x)=\lambda\int_a^b R_n(x,s;\lambda)f(s)ds+f(x) \qquad 4)$$

düsturundan istifadə etsək:

$$\varepsilon_n(x)=\lambda\int_a^b\delta_n(x,s)y(s)ds+\lambda\int_a^b R_n(x,s)\left[\lambda\int_a^b\delta_n(s,\tau)y(\tau)d\tau\right]ds$$

olduğunu alarıq. Buradan

$$\begin{aligned}&|\varepsilon_n(x)|\le|\lambda|\delta_n N_0(b-a)+\lambda^2R_n^*\delta_n N_0(b-a)^2,\\&|\varepsilon_n(x)|\le|\lambda|(b-a)\left[1+|\lambda|R_n^*(b-a)\right]N_0\delta_n.\end{aligned} \qquad (5)$$

$$K(x,s)=K_n(x,s)+\delta_n(x,s),$$

$$\delta_n=\max_{a\le x\le b}|\delta_n(x,s)|,\quad N_0=\max_{a\le x\le b}|y(x)|,$$

$$R_n^* = \max_{a \le x, s \le b} |R_n(x,s)|.$$

İndi isə N_0-i qiymətləndirək. Aşkardır ki,

$$y(x) = \lambda \int_a^b K_n(x,s) y(s) ds + f(x) - \lambda \int_a^b [K_n(x,s) - K(x,s)] y(s) ds.$$

$$y(x) = \lambda \int_a^b K_n(x,s) y(s) ds + F(x), \tag{6}$$

$$F(x) = f(x) - \lambda \int_a^b [K_n(x,s) - K(x,s)] y(s) ds. \tag{7}$$

(6) tənliyinin həlli üçün (4) düsturundan istifadə etsək:

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b R_n(x,s) F(s) ds \tag{8}$$

olduğunu alarıq. (7)-dən

$$|F(x)| \le P_0 + |\lambda| \delta_n (b-a) N_0$$

olduğunu (8)-də nəzərə alsaq:

$$|y(x)| \le P_0 + |\lambda| \delta_n (b-a) N_0 + |\lambda| R_n^* (b-a) [P_0 + |\lambda| \delta_n (b-a) N_0],$$

$$N_0 \le P_0 [1 + |\lambda| R_n^* (b-a)] + |\lambda| \delta_n (b-a) \big[1 + |\lambda| R_n^* (b-a)\big] N_0 .$$

Fərz edək ki,

$$|\lambda| \delta_n (b-a) \big[1 + |\lambda| R_n^* (b-a)\big] < 1 .$$

Onda

$$N_0 \le P_0 \frac{1 + |\lambda| R_n^* (b-a)}{1 - |\lambda| \delta_n (b-a) [1 + |\lambda| R_n^* (b-a)]} .$$

Bu qiymətləndirməni (5)-də nəzərə alsaq, xəta üçün aşağıdakı düsturu almış olarıq:

$$y(x) - y_n(x) \le |\lambda| (b-a) P_0 \frac{[1 + |\lambda| R_n^* (b-a)]^2}{1 - |\lambda| \delta_n (b-a) [1 + |\lambda| R_n^* (b-a)]} \delta_n .$$

§10. CIRLAŞAN NÜVƏNİN QURULMASI ÜÇÜN BETMEN ÜSULU

$K(x,s)$ nüvəsini approksimasiya edən cırlaşmış $K_n(x,s)$ nüvəsinin qurulması üçün bir üsul (Betmen üsulu) verək.

$K_n(x,s)$ nüvəsinin aşağıdakı bərabərlikdən təyin edək:

$$K \equiv \begin{vmatrix} K_n(x,s) & K(x,s_1) & K_n(x,s_2) & \dots & K_n(x,s_n) \\ K(x_1,s) & K(x_1,s_1) & K(x_1,s_2) & \dots & K(x_1,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n,s) & K(x_n,s_1) & K(x_n,s_2) & \dots & K(x_n,s_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Burada x_1, x_2, ..., x_n; s_1, s_2, ..., s_n - $[a,b]$ parçasına daxil olan nöqtələrdir. K determinantının birinci sütununun ünsürlərini $K_n(x,s)+0$, $0+K(x_1,s)$, $0+K(x_2,s)$, ..., $0+K(x_n,s)$ şəklində yazıb, bu determinantı iki determinantın cəmi kimi yazdıqdan sonra $K=0$ bərabərliyindən

$$K_n(x,s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & K(x,s_1) & \dots & K(x,s_n) \\ K(x_1,s) & K(x_1,s_1) & \dots & K(x_1,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n,s) & K(x_n,s_1) & \dots & K(x_n,s_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K(x_1,s_1) & K(x_1,s_2) & \dots & K(x_1,s_n) \\ K(x_2,s_1) & K(x_2,s_2) & \dots & K(x_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n,s_1) & K(x_n,s_2) & \dots & K(x_n,s_n) \end{vmatrix}}$$

olduğunu alarıq. $K_n(x,s)$-in bu ifadəsindən görsənir ki, bu nüvə cırlaşandır. $K_n(x,s)$-in aşağıdakı şəkildə də yazmaq olar:

$$K_n(x,s)=K(x,s)-\frac{\begin{vmatrix} 0 & K(x,s_1) & \dots & K(x,s_n) \\ K(x_1,s) & K(x_1,s_1) & \dots & K(x_1,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n,s) & K(x_n,s_1) & \dots & K(x_n,s_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K(x_1,s_1) & K(x_1,s_2) & \dots & K(x_1,s_n) \\ K(x_2,s_1) & K(x_2,s_2) & \dots & K(x_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n,s_1) & K(x_n,s_2) & \dots & K(x_n,s_n) \end{vmatrix}}-$$

$$-\frac{\begin{vmatrix} K(x_1,s_1) & K(x_1,s_2) & \dots & K(x_1,s_n) \\ K(x_2,s_1) & K(x_2,s_2) & \dots & K(x_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n,s_1) & K(x_n,s_2) & \dots & K(x_n,s_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K(x_1,s_1) & K(x_1,s_2) & \dots & K(x_1,s_n) \\ K(x_2,s_1) & K(x_2,s_2) & \dots & K(x_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n,s_1) & K(x_n,s_2) & \dots & K(x_n,s_n) \end{vmatrix}}K(x,s)=$$

$$=K(x,s)-\frac{\begin{vmatrix} K(x,s) & K(x,s_1) & \dots & K(x,s_n) \\ K(x_1,s) & K(x_1,s_1) & \dots & K(x_1,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n,s) & K(x_n,s_1) & \dots & K(x_n,s_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K(x_1,s_1) & K(x_1,s_2) & \dots & K(x_1,s_n) \\ K(x_2,s_1) & K(x_2,s_2) & \dots & K(x_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n,s_1) & K(x_n,s_2) & \dots & K(x_n,s_n) \end{vmatrix}}.$$

Buradan görünür ki, $K_n(x,s)$ funksiyası $x=x_i$ $s=s_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ düz xətlərində $K(x,s)$ ilə üst – üstə düşür.

Qeyd edək ki, $K(x,s)$ nüvəsini qüvvət və triqonometrik sıralara ayırıb, onların xüsusi cəmlərini də $K_n(x,s)$ əvəzinə götürmək olar.

§11. NÜVƏNİN CIRLAŞAN NÜVƏ İLƏ ƏVƏVZ OLUNMASINA AİD MİSALLAR HƏLLİ

İkinci növ

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x) \quad (1)$$

Fredholm inteqral tənliyinə baxaq.

Əgər $K(x,s)$ nüvəsi

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{n} A_i(x)B_i(s) \quad (2)$$

şəklində əvəz olunarsa, onda $K(x,s)$ nüvəsi cırlaşan nüvə adlanır, harda ki, $A_i(x)$ və $B_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında xətt asılı deyillər. $K(x,s)$ nüvəsi təqribi

$$K(x,s)\approx\sum_{i=1}^{n} A_i(x)B_i(s) \quad (3)$$

cırlaşan nüvə ilə əvəz edək və (1) inteqral tənliyinin təqribi həllini

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i A_i(x) \quad (4)$$

şəklində axtaraq, harada ki

$$c_i=\int_a^b B_i(s)\varphi(s)ds \quad (5)$$

(4) ifadəsini (5) də nəzərə alsaq

$$c_i=\int_a^b B_i(s)\varphi(s)ds-\lambda\int_a^b B_i(s)\sum_{j=1}^{n} c_j A_j(s)ds \quad (i=1,2,\dots,n)$$

Aşağıdakı işarəmələri qəbul etsək

$$f_i = \int_a^b B_i(s)\varphi(s)ds, \quad A_{ij} = \int_a^b A_j(s)B_i(s)ds \tag{6}$$

alarıq:

$$c_i - \lambda\sum_{j=1}^{n} c_j A_{ij} = f_i \quad (i = 1,2,...,n) \tag{7}$$

Beləliklə, c_i-yə görə xətti cəbri tənliklər sistemi alarıq.

Misal.

$$y(x) - \int_0^1 sh(xs)y(s)ds = 1 - x^2 \tag{8}$$

inteqral tənliyinin təqribi həllini tapın.

Həlli:

$$K(x,s) = sh(x,s)$$

nüvəsini Teylor sırasının ilk üç həddi ilə əvəz edək:

$$sh(x,s) \approx xs + \frac{(xs)^3}{3!} + \frac{(xs)^5}{5!}$$

Onda (8) tənliyinin həllini

$$y(x) = 1 - x^2 + c_1x + c_2x^3 + c_3x^5$$

şəklində axtaraq

$$f(x) = 1 - x^2,\ A_1 = x,\ A_2 = x^3,\ A_3 = x^5,\ B_1(s) = s,\ B_2(s) = \frac{s^3}{3!},\ B_3(s) = \frac{s^5}{5!}$$

işarə etsək (7) sisteminin əmsallarını (6) düsturlarının köməyi ilə tapmaq olar:

$$f_1 = \int_0^1 B_1(s)f(s)ds = \int_0^1 (s - s^3)ds = \frac{1}{4},$$

$$f_2=\int_0^1 B_2(s)f(s)ds=\int_0^1\frac{1}{3!}\left(s^3-s^5\right)ds=\frac{1}{72},$$

$$f_3=\int_0^1 B_3(s)f(s)ds=\int_0^1\frac{1}{5!}\left(s^5-s^7\right)ds=\frac{1}{2880},$$

$$A_{11}=\int_0^1 s^2ds=\frac{1}{3}.$$

$$A_{12}=\int_0^1 s^4ds=\frac{1}{5},$$

$$A_{13}=\int_0^1 s^6ds=\frac{1}{7},$$

$$A_{21}=\int_0^1\frac{1}{3!}s^4ds=\frac{1}{30},$$

$$A_{22}=\int_0^1\frac{1}{3!}s^6ds=\frac{1}{42},$$

$$A_{23}=\int_0^1\frac{1}{3!}s^8ds=\frac{1}{54},$$

$$A_{31}=\int_0^1\frac{1}{5!}s^6ds=\frac{1}{840},$$

$$A_{32}=\int_0^1\frac{1}{5!}s^8ds=\frac{1}{1080},$$

$$A_{33}=\int_0^1\frac{1}{5!}s^{10}ds=\frac{1}{1320}.$$

Beləliklə, aşağıdakı sistemi alarıq:

$$c_1=\frac{1}{3}c_1+\frac{1}{5}c_2+\frac{1}{7}c_3+\frac{1}{4},$$

$$c_2=\frac{1}{30}c_1+\frac{1}{42}c_2+\frac{1}{54}c_3+\frac{1}{72},$$

$$c_3 = \frac{1}{840}c_1 + \frac{1}{1080}c_2 + \frac{1}{1320}c_3 + \frac{1}{2880}.$$

Bu sistemi iterasiya üsulu ilə həll etsək alarıq:

$$c_1 = 0{,}3833,$$
$$c_2 = 0.0273,$$
$$c_3 = 0{,}0008.$$

Nəticədə (8) tənliyinin təqribi həllini aşağıdakı kimi alarıq:

$$y(x) = 1 - x^2 + 0{,}3833x + 0{,}0273x^3 + 0{,}0008x^5$$

§12. FREDHOLM İNTEQRAL TƏNLİYİ ÜÇÜN ADİ İTERASİYA ÜSULU

Yenidən II növ Fredholm inteqral tənliyinə baxaq:

$$y(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x) \tag{1}$$

Fərz edək ki, $K(x,s)$, $f(x)$ $(a \le x,\ s \le b)$ kəsilməz funksiyalardır.

(1) tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün aşağıdakı qayda ilə ardıcıl yaxınlaşmalar quraq:

$$y_n(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)y_{n-1}(s)ds + f(x) \quad (n = 1,2,...) \tag{2}$$

Burada $y_0(x)$ $(a \le x \le b)$ ixtiyari kəsilməz funksiyadır. $H = C[a,b]$ fəzasında ($[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyalar fəzası, $C[a,b]$ ilə işarə edilmişdir)

$$A(y) = \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x)$$

operatorunu təyin edək. Onda (1) tənliyini

$$y = A(y) \tag{3}$$

(2) ardıcıl yaxınlaşmalarını isə

$$y_n = A(y_{n-1}) \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{4}$$

şəklində yazmaq olar.

(4) düsturları ilə təyin olan y_n yaxınlaşmalarının (3) tənliyinin həllinə yığıldığını isbat edək.

Fərz edək ki,

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, \quad M = \max_{a \le x,\, s \le b} |K(x,s)|.$$

Onda $A(y)$ operatoru $H = C[a,b]$ fəzasında təsir edir və sıxan operatordur. $K(x,s)$ $f(x)$ funksiyaları kəsilməz olduqlarından $A(y)$ operatorunun sıxan olması isə aşağıdakı bərabərsizlikdən çıxır:

$$|A(y) - A(\bar{y})| \le |\lambda| \int_a^b |K(x,s)|\,|y(s) - \bar{y}(s)|ds \le |\lambda| M(b-a) \max_{a \le s \le b} |y(s) - \bar{y}(s)| =$$

$$= |\lambda| M(b-a) \|y - \bar{y}\|_C .$$

$$|A(y) - A(\bar{y})| \le \alpha \|y - \bar{y}\|_C, \quad \alpha = |\lambda| M(b-a) < 1 .$$

Sıxılmış inikas prinsipini (19') tənliyinə $H = C[a,b]$ fəzasında tətbiq etsək, aşağıdakı teoremin doğruluğunu almış olarıq.

Teorem. Tutaq ki, $K(x,s)$ və $f(x)$ ($a \le x, s \le b$) funksiyaları kəsilməzdir və

$$\alpha = |\lambda| M(b-a) < 1 .$$

Onda (1) tənliyinin kəsilməz funksiyalar fəzasında yeganə həlli var, bu həll (2) yaxınlaşmalarının limitinə bərabərdir və yığılma sürəti aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\|y_n(x) - y(x)\|_C \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|y_1 - y_0\|_C .$$

(2) yaxınlaşmalarını başqa formada da yazmaq olar. Bunun üçün aşağıdakı işarələmələri aparaq:

$$\left.\begin{aligned} &K_n(x,s) = \lambda\int_a^b K(x,\tau)K_{n-1}(\tau,s)\,d\tau \quad (n=1,2,\ldots),\\ &K_0(x,s) = \lambda K(x,s). \end{aligned}\right\}$$

(2)-də $n=1$ qəbul etdikdə

$$y_1(x) = \int_a^b K_0(x,s)y_0(s)\,ds + f(x),$$

$n=2$ götürsək

$$y_2(x) = \lambda\int_a^b K(x,\tau)\left[\int_a^b K_0(\tau,s)y_0(s)\,ds\right]d\tau + f(x),$$

$$y_2(x) = \int_a^b\left[\lambda\int_a^b K(x,\tau)K_0(\tau,s)\,d\tau\right]y_0(s)\,ds + f(x),$$

$$y_2(x) = \int_a^b K_1(x,s)y_0(s)\,ds + f(x)$$

olduğunu alarıq.

Fərz edək ki,

$$y_n(x) = \int_a^b K_{n-1}(x,s)y_0(s)\,ds + f(x).$$

Onda (2)-dən

$$y_{n+1}(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)y_n(s)\,ds + f(x),$$

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,\tau)\left[\int_a^b K_{n}(\tau,s)y_0(s)ds\right]d\tau + f(x),$$

$$y_{n+1}(x) = \int_a^b\left[\lambda\int_a^b K(x,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau\right]y_0(s)ds + f(x),$$

$$y_{n+1}(x) = \int_a^b K_n(x,s)y_0(s)ds + f(x).$$

Riyazi induksiya üsulunu tətbiq etsək, ixtiyari n üçün

$$y_n(x) = \int_a^b K_{n-1}(x,s)y_0(s)ds + f(x).$$

§13. II NÖV VOLTER TƏNLİKLƏR ÜÇÜN ADİ İTERASİYA ÜSULU

Biz fəslin girişində qeyd etdik ki, Volter tənliyi üçün elə fakt isbat etmək olar ki, o fakt Fredholm tənliyi üçün doğru olmasın. İndi belə bir faktı isbat edək.

II növ Volter tənliyinə baxaq:

$$y(x) = \lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x). \tag{1}$$

Fərz edək ki, $K(x,s)$, $f(x)$ $(a \le x, s \le b)$ funksiyaları kəsilməzdir.

(1) tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün aşağıdakı qayda ilə ardıcıl yaxınlaşmalr quraq:

$$y_n(x) = \lambda\int_a^x K(x,s)y_{n-1}(s)ds + f(x). \tag{2}$$

Burada da $y_0(x)$ $(a \le x \le b)$ ixtiyari kəsilməz funksiyadır.

İsbat edək ki, ixtiyari λ üçün (2) düsturları ilə təyin olunan

$y_n(x)$ funksiyaları (1) tənliyinin yeganə həllinə yığılır. Aşağıdakı funksional sıranı nəzərdən keçirək:

$$y_0(x)+[y_1(x)-y_0(x)]+\ldots+[y_n(x)-y_{n-1}(x)]+\ldots \qquad (3)$$

Aşkardır ki,

$$|y_{i+1}(x)-y_i(x)|\le|\lambda|M\int_a^x|y_i(s)-y_{i-1}(s)|ds \quad (i=1,2,\ldots).$$

Buradan

$$|y_2(x)-y_1(x)|\le|\lambda|MC\frac{x-a}{1!},\quad C=\max_{a\le x\le b}|y_1(x)-y_0(x)|,$$

$$|y_3(x)-y_2(x)|\le|\lambda|M\int_a^x|\lambda|MC(s-a)ds,$$

$$|y_3(x)-y_2(x)|\le(|\lambda|M)^2C\frac{(x-a)^2}{2!}$$

olduğunu alarıq.

Fərz edək ki,

$$|y_i(x)-y_{i-1}(x)|\le(|\lambda|M)^{i-1}C\frac{(x-a)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Onda

$$|y_{i+1}(x)-y_i(x)|\le|\lambda|M\int_a^x(|\lambda|M)^{i-1}C\frac{(s-a)^{i-1}}{(i-1)!}ds,$$

$$|y_{i+1}(x)-y_i(x)|\le(|\lambda|M)^iC\frac{(x-a)^i}{i!}.$$

Riyazi induksiya üsulunu tətbiq etsək, ixtiyari $i=0,1,2,\ldots$ üçün

$$|y_{i+1}(x)-y_i(x)|\le\frac{[|\lambda|M(b-a)]^i}{i!}C$$

olduğunu alarıq.

Buradan alırıq ki,

$$C\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[|\lambda|M(b-a)]^i}{i!}$$

ədədi sırası (3) funksional sırası üçün majorant sıradır. Bu ədədi sıra ixtiyari λ üçün yığıldığından (3) funksional sırası ixtiyari $x\in[a,b]$ üçün yığılan olar. $y_n(x)$ (3) sırasının xüsusi cəmi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x)=y^*(x)$$

olar. (2)-də $n\to\infty$ şərtində limitə keçsək $y^*(x)$ funksiyasının (1) tənliyinin həlli olduğunu almış olarıq.

İndi isə $|y_n(x)-y^*(x)|$ fərqini qiymətləndirək:

$$|y_n(x)-y^*(x)|\le|\lambda|M\int_a^x|y_{n-1}(s)-y^*(s)|ds$$

bərabərsizliyindən

$$|y_n(x)-y^*(x)|\le\frac{[|\lambda|M(b-a)]^n}{n!}\left(\max_{a\le s\le b}|y_0(s)-y^*(s)|\right) \qquad (4)$$

olduğunu alarıq. Bu düstur $\{y_n(x)\}$ ardıcıllığının $y^*(x)$ funksiyasına yığılma sürətini təyin edir.

(4) düsturu (1) tənliyinin ixtiyari həlli üçün doğru olduğundan, əgər bu tənliyin ikinci $y^{**}(x)$ həlli də olsaydı, onda

$$|y_n(x)-y^{**}(x)|\le\frac{[|\lambda|M(b-a)]^n}{n!}\left(\max_{a\le s\le b}|y_0(s)-y^*(s)|\right) \qquad (5)$$

olduğunu alardıq.

Onda (4) və (5)-dən

$$|y^*(x) - y^{**}(x)| \le |y^*(x) - y_n(x)| + |y_n(s) - y^{**}(x)| \le$$

$$\le \frac{[|\lambda| M(b-a)]^n}{n!} (\max_{a \le s \le b} |y_0(s) - y^*(s)|) + (\max_{a \le s \le b} |y_0(s) - y^{**}(s)|).$$

Burada $n \to \infty$-da limitə keçsək,

$$y^*(x) \equiv y^{**}(x)$$

olduğunu alarıq. Bu o deməkdir ki, (1) tənliyinin həlli yeganədir.

Beləliklə, aşağdakı teoremi isbat etmiş oluruq.

Teorem. Tutaq ki, $K(x,s)$, $f(x)$ $(a \le x, s \le b)$ funksiyaları kəsilməzdirlər. Onda, ixtiyari λ üçün (1) tənliyinin kəsilməz funksiyalar fəzasında yeganə həlli var, bu həll (2) yaxınlaşmalarının limitinə bərabərdir və yığılma sürəti (4) düsturu ilə təyin edilir.

§14. XƏTTİ İNTEQRAL TƏNLİKLƏR

Əgər verilmiş inteqral tənliyə axtarılan funksiya xətti daxil olarsa, onda belə tənliklər inteqral tənlik adlanır.

Məsələn

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) \qquad (1)$$

tənliyi $\varphi(x)$ axtarılan funksiya, $f(x)$, $K(x,s)$ verilmiş funksiyalar, λ parametr olduqca xətti inteqral tənlik adlanır.

Burada $K(x,s)$, $a \le x$, $s \le b$ kvadratında verilmiş funksiyadır və (1) inteqral tənliyin nüvəsi adlanır. $f(x)$ funksiyası isə tənliyin sərbəst həddi adlanır və $a \le x \le b$ parçasında verilmiş funksiyadır.

Xətti inteqral tənliklərin ən çox yayılmış növü Fredholm və Volterra tənlikləridir. $\varphi(x)$ axtarılan funksiya olduqda

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds+f(x) \qquad (2)$$

Tənliyə ikinci növ Fredholm tənliyi deyilir. Burada inteqrallama sərhəddi sonlu və sonsuz ola bilər.

Hesab edəcəyik ki, x-dəyişəni inteqralın hesablandığı $[a,b]$ parçasında dəyişir.

Fredholmun tənliyində nüvə $K(x,s)$ və sərbəst hədd $f(x)$ müvafiq olaraq

$$Q=[a\le x,s\le b]$$

kvadratında və $[a,b]$ parçasında kəsilməz və yaxud

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2 dtds<+\infty \qquad (3)$$

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx<+\infty \; . \qquad (4)$$

şəklində olar.

İnteqral tənliyin nüvəsi (3) bərabərsizliyini ödədikdə ona Fredholm nüvəsi deyilir.

Əgər $f(x)\equiv 0$ olarsa, onda inteqral tənlik (2) şəklində bircins, $f(x)\neq 0$ olduqda isə qeyri-bircins adlanır.

Qeyd etmək lazımdır ki, (2) tənliyi əslində bir tənlik deyil, o ədədi λ parametrindən asılı tənliklər ailəsidir.

Birinci növ Fredholm tənliyində axtarılan funksiya inteqral işarəsindən kənarda (xaricdə) iştirak etmir. Sadə halda birinci növ Fredholm tənliyi aşagıdakı kimidir:

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), \qquad (5)$$

bu halda da nüvənin $K(x,s)$ və sərbəst həddin $f(x)$ yuxarıdakı şərtləri ödədiyi fərz edilir.

Məsələn:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x), \quad a \le x \le b, \qquad (6)$$

inteqral tənliyinə ikinci növ Volterra tənliyi deyilir.

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds$$

inteqral tənliyi ikinci növ bircins Volterra tənliyi adlanır.

$$\int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), \qquad (7)$$

inteqral tənliyi I növ Volterra tənliyi adlanır.

Qeyd edək ki,

$$H(x,s) = \begin{cases} K(x,s), & s \le x \quad \text{olduqda} \\ 0, & s > x \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

nüvəsini təyin etməklə Volterra tipli inteqral Fredholm tipli inteqral tənliyə gətirmək olar.

§15. QEYRİ-XƏTTİ İNTEQRAL TƏNLİKLƏR

Qeyri-xətti inteqral tənliklərin ən çox geniş yayılmış növü Urison tənliyidir.

Urison tipli qeyri-xətti inteqral aşağıdakı kimidir:

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,s,\varphi(s))ds \qquad (1)$$

$K(x,s,\varphi(s))$ funksiyası adətən $a \le x,s \le b,\ -M \le \varphi \le M$ çoxluğunda kəsilməz hesab olunur. Urison tipli inteqral tənliyinin xüsusi halı Hammerşteyn tənliyidir. Hammerşteyn tənliyi (1) tənliyindən

$$K(x,s,\varphi(s)) = K(x,s)F(s,\varphi(s))$$

olduqda alınır. Hammerşteyn tənliyinin ümumi şəkli aşagıdakı kimidir:

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)F(s,\varphi(s))ds, \qquad (2)$$

harada ki, $K(x,s)$-Fredholm tipli nüvədir.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K_1(x,s)\varphi(s)ds + \mu\int_a^b\int_a^b K_1(x,s,z)\varphi(s)\varphi(z)dsdz \qquad (3)$$

şəklində olan inteqral tənliklərə isə Lyapunov-Lixnayenşteyn tənliyi deyilir.

$$\varphi(x) = \int_a^x F(x,s,\varphi(s))ds \qquad (4)$$

şəklində olan tənliyə isə Volterra tipli qeyri-xətti inteqral tənlik deyilir. Burada $F(x,s,\varphi)$ funksiya arqumentlərin x,s,φ küllüsünə görə

$a \le x,s \le b,\ -M \le \varphi \le M$ oblastında kəsilməz hesab olunur.

Volterra tipli qeyri-xətti inteqral tənlik bir tərtibli adi diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinin həlli nə gətirilir. Doğrudan da fərz edək ki,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = F(x,u(x)) \\ u(a) = u_0 \end{cases} \tag{5}$$

Koşi məsələsinin həllini tapmaq tələb olunur. $u(x)$ həllini diferensial tənlikdə yerinə yazaq, onda biz

$$\frac{du(x)}{dx} \equiv F[x,u(x)], \quad \forall x \in [a,b]$$

eyniliyini alarıq. Eyniliyi $[a,x]$ parçasında inteqrallasaq

$$u(x) = u_0 + \int_a^x F(s,u(s))ds. \tag{6}$$

alarıq. Deməli, əgər $u(x)$, (5) məsələsinin həllidirsə onda o həm də (6) inteqral tənliyini də ödəməlidir. Asanlıqla, əks təklifin doğru olduğunu göstərmək olar.

§16. QEYRİ-XƏTTİ İNTEQRAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN ADİ İTERASİYA ÜSULU

İndi isə göstərək ki, adi iterasiya üsulunu qeyri-xətti inteqral tənliklərə də tətbiq etmək olar.

Əvvəlcə qeyri-xətti Fredholm tipli inteqral tənliyə baxaq:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K[x,s;y(s)]ds + f(x), \tag{1}$$

burada $K(x,s;y)$ $(a \le x, s \le b, -\infty < y < +\infty)$ və $f(x)$ $(a \le x \le b)$ verilmiş kəsilməz funksiyalardır.

(1) inteqral tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün aşağıdakı qayda ilə ardıcıl yaxınlaşmalar quraq:

$$y_n(x)=\lambda\int_a^b K[x,s;y_{n-1}(s)]ds+f(x)\qquad (n=1,2,3,...)\qquad (2)$$

burada $y(x_0)$ $(a\le x\le b)$ ixtiyari kəsilməz funksiyadır.

Fərz edək ki, $K(x,s;y)$ $(a\le x,\ s\le b,\ -\infty<y<+\infty)$ funksiyası y -ə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir:

$$|K(x,s;y)-K(x,s;\bar{y})|\le L|y-\bar{y}|.$$

$y_n(x)$ yaxınlaşmalarının (1) tənliyinin həllinə yığıldığını isbat etmək üçün sıxılmış inikas prinsipindən istifadə edək. Bunun üçün $H=C[a,b]$,

$$A(y)=\lambda\int_a^b K[x,s;y(s)]ds+f(x)$$

götürək.

Aşkardır ki, $A(y)$ operatoru $C[a,b]$ -də təsir edir (K və f kəsilməz funksiyalar olduğundan).

Tutaq ki, $y(x),\ \bar{y}(x)\in C[a,b]$. Onda

$$|A(y)-A(\bar{y})|\le|\lambda|\int_a^b|K[x,s;y(s)]-K[x,s;\bar{y}(s)]|ds\le|\lambda|L\int_a^b|y(s)-\bar{y}(s)|ds\le$$
$$\le|\lambda|L(b-a)\|y-\bar{y}\|_C.$$

$$|A(y)-A(\bar{y})|\le\alpha\|y-\bar{y}\|_C,\qquad \alpha=|\lambda|L(b-a)$$

olduğunu alarıq.

Əgər $\alpha<1$ olduğunu fərz etsək, onda $A(y)$ operatorunun $C[a,b]$-də sıxan operator olduğunu almış olarıq.

Beləliklə, sıxılmış inikas prinsipindən istifadə etsək aşağdakı teoremin doğruluğunu almış oluruq.

Teorem. Tutaq ki, $K(x,s;y),\ f(x)\ (a \le x, s \le b, -\infty < y < +\infty)$ funksiyaları kəsilməzdir və $K(x,s;y)$ funksiyası y-ə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir. Əgər

$$\alpha = |\lambda| L(b-a) < 1 \tag{3}$$

şərti ödənərsə, onda (1) tənliyinin kəsilməz funksiyalar fəzasında yeganə həlli var, bu həll (2) yaxınlaşmalarının limitidir və, nəhayət, yığılma sürəti

$$\|y_n(x) - y(x)\|_C \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|y_1 - y_0\|_C$$

düsturu ilə təyin edilir.

Qeyd edək ki, $K(x,s;y)$ funksiyası y-ə nəzərən Lipşits şərtini $(-\infty,+\infty)$ intervalında deyil, $[-r,r]$ parçasında ödəyirsə, onda $A(y)$ operatoru $\|y\|_C \le r$ kürəsində sıxan operator olacaqdır. Əgər əlavə olaraq

$$\|f\|_C + |\lambda| M(b-a) \le r, \quad M = \max_{\substack{a \le x,\, s \le b \\ |y| \le r}} |K(x,s;y)|$$

olduğunu fərz etsək, $A(y)$ operatoru $\|y\|_C \le r$ kürəsində təsir etdiyini almış olarıq. Onda sıxılmış inikas prinsipini $S = \{y \in C[a,b];\ \|y\| \le r\}$ kürəsində

$$y = A(y)$$

operator tənliyinə tətbiq etsək, (1) tənliyinin S kürəsində yeganə həlli olduğunu, (2) yaxınlaşmaların bu həliə yığıldığını almış olarıq. Yığılma sürəti (3) düsturu ilə təyin olar.

Nəhayət, bu paraqrafın axırında qeyri-xətti Volter tənliyinə baxaq:

$$y(x) = \lambda\int_a^x K[x,s;y(s)]ds + f(x). \qquad (4)$$

İsbat edək ki, (4) tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün qurulan

$$y_n(x) = \lambda\int_a^x K[x,s;y_{n-1}(s)]ds + f(x) \qquad (n=1,2,3,\ldots) \qquad (5)$$

yaxınlaşmaları, ixtiyari λ üçün ((3) şərti ödənmədən) (4) tənliyinin həllinə yığılır (xətti tənliklərdə olduğu kimi).

Teorem. Tutaq ki, $K(x,s;y)$, $f(x)$ $(a \le x,\ s \le b,\ -\infty < y < +\infty)$ funksiyaları kəsilməzdir və $K(x,s;y)$ funksiyası y-ə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir.

Onda (4) tənliyinin yeganə həlli var, (5) yaxınlaşmaları bu həllə yığılır və yığılma sürəti aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$\|y_n(x) - y(x)\|_C \le \frac{\alpha^n L(b-a)^n}{n!}\|y_1 - y_0\|_C. \qquad (6)$$

İsbatı. (5)-dən

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \le |\lambda|\int_a^x |y_{n-1}(s) - y_n(s)|ds,$$

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \le \frac{[|\lambda| L(b-a)]^n}{n!}\|y_1(x) - y_0(x)\|_C.$$

olduğunu alarıq. Buradan çıxır ki,

$$\|y_1 - y_0\|_C \sum_{i=1}^{\infty}\frac{[|\lambda| L(b-a)]^i}{i!}$$

yığılan ədədi sıra

$$y_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty}(y_{i+1}(x)y_i(x))$$

funksional sırası üçün majorant sıra olar.

Ona görə də bu axırıncı sıra, yəni $y_n(x)$ ardıcıllığı yığılan olar.

(5)-də limitə keçsək ($n\to\infty$-da) $y_n(x)$-in (4) tənliyinin həllinə yığıldığını alarıq.

(6) bərabərsizliyi xətti tənliklərdə olduğu kimi isbat olunur. Bu bərabərsizlik ixtiyari həll üçün doğru olduğundan həllin yeganəliyi də isbat olunur.

§17. VOLTER-FREDHOLM İNTEQRAL TƏNLİYİ

Bundan qabaqkı paraqraflarda, II növ xətti Volter və Fredholm inteqral tənliklərini həll etmək üçün təqribi üsulları şərh etdik. İndi isə aşağıdakı kimi xətti inteqral tənliyə baxaq:

$$y(x)=f(x)+\int_a^x K(x,s)y(s)ds+\int_a^b K_0(x,s)y(s)ds. \qquad (1)$$

Burada $K_0(x,s)$, $K(x,s)$ $(a\le x,s\le b)$, $f(x)$ $(a\le x\le b)$ funksiyaları verilmiş kəsilməz funksiyalar, $y(x)$ isə axtarılan funksiyadır. Məchul funksiya həm Volter və həm də Fredholm inteqral operatorlarına daxil olduğundan bu tənliyə Volter-Fredholm inteqral tənliyi deyirlər.

Qeyd etdiyimiz kimi, (1) tənliyini Fredholm inteqral tənliyinə gətirmək olar və Fredholm inteqral tənliyi üçün verdiyimiz təqribi üsullar bu tənlik üçün də verilə bilər. Lakin (1) tənliyi üçün elə təqribi üsullar verilə bilər ki, Fredholm tənliyi üçün yararlı olmasın. Aşağıda belə bir üsul şərh edilir.

Fərz edək ki, $K_0(x,s)$ nüvəsi cırlaşan nüvədir, yəni

$$K_0(x,s)=\sum_{i=1}^{m} a_i(x)\,b_i(s).$$

(35) tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün aşağıdakı kimi ardıcıl yaxınlaşmalar quraq:

$$\left.\begin{aligned} &y_0(x,s)=f(x),\\ &y_n(x)=f_{n-1}(x)+\int_a^x K(x,s)y_{n-1}(s)ds+\int_a^b\left[\sum_{i=1}^{m} a_i(x)b_i(s)\right]y_n(s)ds. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$f_{n-1}(x)=\int_a^x K(x,s)y_{n-1}(s)ds$$

işarələməsini aparsaq:

$$y_n(x)=f_{n-1}(x)+\int_a^b\left[\sum_{i=1}^{m} a_i(x)b_i(s)\right]y_n(s)ds \quad (3)$$

olduğunu alarıq. Bu cırlaşan nüvəli II növ Fredholm inteqral tənliyidir. Göstərdik ki, (3) tənliyinin həlli aşağıdakı düsturla təyin olunar:

$$y_n(x)=f_{n-1}(x)+\int_a^b R(x,s)f_{n-1}(s)ds. \quad (4)$$

Burada

$$R(x,s)=\frac{1}{D}\sum_{i,j=1}^{m} D_{ij}a_i(x)b_j(s),$$

$$D=\begin{vmatrix} 1+\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & 1+\alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & 1+\alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\alpha_{ij}(x,s)=-\int_a^b b_i(s)a_j(s)ds,$$

D_{ij} isə D determinantının α_{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısıdır.

$f_{n-1}(x)$-in ifadəsini (4)-də nəzərə alsaq:

$$y_n(x)=f(x)+\int_a^x K(x,s)y_{n-1}(s)ds+\int_a^b R(x,s)\left[f(s)+\int_a^s K(s,\tau)y_{n-1}(\tau)d\tau\right]ds$$

və yaxud

$$\begin{gathered} y_n(x)=f(x)+\int_a^b R(x,s)f(s)ds+\int_a^x K(x,s)y_{n-1}(s)ds+ \\ +\int_a^b\int_a^s R(x,s)K(x,s)y_{n-1}(\tau)d\tau\, ds. \end{gathered} \tag{5}$$

$y_0(x)=f(x)$ olduğunu nəzərə alıb (5)-də $n=1,2,...$ qəbul etməklə $\{y_n(x)\}$ ardıcıllığının bütün elementlərini tapmaq olar.

İndi isə şərh etdiyimiz üsulun həllə yığılma sürətini tapaq. $y^*(x)$ ilə (1) tənliyinin dəqiq həllini:

$$y^*(x)=f(x)+\int_a^x K(x,s)y^*(s)ds+\int_a^b K_0(x,s)y^*(s)ds,$$

$y_n(x)$ ilə təqribi həllini:

$$\left.\begin{aligned} &y_0(x,s)=f(x),\\ &y_n(x)=f(x)+\int_a^x K(x,s)y_{n-1}(s)ds+\int_a^b K_0(x,s)y_n(s)ds\\ &\qquad (n=1,2,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

işarə edək. Onda

$$\begin{aligned} y_n(x)-y^*(x)&=\int_a^x K(x,s)[y_{n-1}(s)-y^*(s)]ds+\\ &+\int_a^b K_0(x,s)[y_n(s)-y^*(s)]ds. \end{aligned} \tag{7}$$

$\varepsilon_i(x)=y_i(x)-y_i^*(x)$ $(i=1,2,\ldots)$ işarələmələrini aparsaq:

$$\varepsilon_n(x)=\int_a^x K(x,s)\varepsilon_{n-1}(s)ds+\int_a^b K_0(x,s)\varepsilon_n(s)ds$$

olduğunu alarıq.

$$\varepsilon_n(x)=F_{n-1}(x)+\int_a^x K_0(x,s)\varepsilon_n(s)ds$$

cırlaşan nüvəli II növ Fredholm inteqral tənliyini almış olarıq.

(4) düsturundan istifadə etsək

$$\varepsilon_n(x)=F_{n-1}(x)+\int_a^b R(x,s)F_{n-1}(s)ds$$

olduğunu alarıq. Buradan

$$\varepsilon_n(x)=\int_a^x K(x,s)\varepsilon_n(s)ds+\int_a^b R(x,s)[K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)d\tau]ds$$

yaxud

$$\varepsilon_n(x)=\int_a^x K(x,s)\varepsilon_{n-1}(s)ds+\int_a^b\int_a^s R(x,s)K(x,s)\varepsilon_{n-1}(\tau)d\tau\, ds.$$

$$M=\max_{(x,s)}|K(x,s)|,\quad R=\max_{(x,s)}|R(x,s)|$$

işarələmələrini aparsaq:

$$|\varepsilon_n(x)| \le M\int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + MR\int_a^b\int_a^x |\varepsilon_{n-1}(\tau)|d\tau\, ds \le$$

$$\le M\int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + MR\int_a^b\int_a^x |\varepsilon_{n-1}(\tau)|d\tau\, ds = M\int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + MR\left(\int_a^x |\varepsilon_{n-1}(\tau)|d\tau\right)\int_a^b ds =$$

$$= M\int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + MR + (b-a)\int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds = M[1 + R(b-a)]\int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds,$$

$$|\varepsilon_n(x)| \le \alpha\int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds, \quad \alpha = M[1 + R(b-a)].$$

$n = 1$ qəbul edək:

$$|\varepsilon_1(x)| \le \alpha\int_a^x |\varepsilon_0(s)|ds \le \alpha\varepsilon_0(x-a),$$

$$\varepsilon_0 = \max_x |\varepsilon_0(x)|.$$

$n = 2$ götürək:

$$|\varepsilon_2(x)| \le \alpha\int_a^x |\varepsilon_1(s)|ds \le \alpha\int_a^x [\alpha\varepsilon_0(s-a)]ds = \alpha^2\varepsilon_0\int_a^x (s-a)ds,$$

$$|\varepsilon_2(x)| \le \varepsilon_0\alpha^2\frac{(x-a)^2}{2!}.$$

Fərz edək ki,

$$|\varepsilon_{n-1}(x)| \le \varepsilon_0\alpha^{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Onda

$$|\varepsilon_n(x)| \le \alpha\int_a^x \left[\varepsilon_0\alpha^{n-1}\frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!}\right]ds = \varepsilon_0\alpha^n\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Riyazi induksiya üsulunu tətbiq etsək, ixtiyari n üçün

$$|\varepsilon_n(x)| = |y_n(x) - y^*(x)| \le \varepsilon_0\frac{[\alpha(x-a)]^n}{n!} = \varepsilon_0\frac{[\alpha(b-a)]^n}{n!}$$

olduğunu alarıq.

Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq.

Teorem. Fərz edək ki, $K_0(x,s)$, $K(x,s)$ $(a \le x,\ s \le b)$ funksiyaları kəsilməzdir və $K_0(x,s)$ cırlaşan nüvədir. Əgər $D \ne 0$ isə onda (1) tənliyinin təqribi həllini (5) düsturu ilə tapmaq olar və yığılma sürəti

$$|y_n(x) - y^*(x)| \le \frac{[\alpha(b-a)]^n}{n!} \max_x |y_0(x) - y^*(x)|$$

düsturu ilə təyin olunar.

Qeyd. Biz Volter-Fredholm inteqral tənliyi üçün $K_0(x,s)$ nüvəsi cırlaşan olduqda, adi iterasiya üsulunun bir modifikasiyasını verdik və üsulun yığılma sürətini qiymətləndirdik. Məlumdur ki, $K_0(x,s)$ nüvəsi cırlaşmayan olduqda da bəzi hallarda II növ Fredholm tənliyinin həllini tapmaq olar. bu o deməkdir ki, $y_n(x)$ yaxınlaşmalarını (6) tənliyi vasitəsilə, $K_0(x,s)$ nüvəsi cırlaşmayan olan halda da tapmaq olar. Bu hal üçün üsulun yığılma sürəti aşağıdakı qayda ilə qiymətləndirilir.

$$M_0 = \max_{(x,s)} |K_0(x,s)|$$

işarələməsinə qəbul etsək, (7)-dən

$$|\varepsilon_n(x)| \le M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + M_0 \int_a^x |\varepsilon_n(s)|ds \qquad (8)$$

olduğunu alarıq.

Bu bərabərsizliyin hər tərəfini $[a,b]$ parçasında inteqrallasaq:

$$\int_a^b |\varepsilon_n(x)|ds \le M \int_a^b \left(\int_a^s |\varepsilon_{n-1}(s)|d\tau \right) ds + M_0(b-a) \int_a^b |\varepsilon_n(s)|ds.$$

Fərz edək ki,

$$M_0(b-a)<1.$$

Onda

$$\int_a^b|\varepsilon_n(s)|ds \le \frac{M}{1-M_0(b-a)}\int_a^b\left(\int_a^s|\varepsilon_{n-1}(s)|d\tau\right)ds.$$

Bu qiymətləndirməni (8)-də nəzərə alsaq:

$$|\varepsilon_n(x)| \le M\int_a^x|\varepsilon_{n-1}(s)|ds + \frac{M_0M}{1-M_0(b-a)}\int_a^b\left(\int_a^s|\varepsilon_{n-1}(s)|d\tau\right)ds,$$

$$|\varepsilon_n(x)| \le M\int_a^x|\varepsilon_{n-1}(s)|ds + \frac{M_0M(b-a)}{1-M_0(b-a)}\int_a^b|\varepsilon_{n-1}(s)|ds.$$

$$|\varepsilon_n(x)| \le M\left[1+\frac{M_0(b-a)}{1-M_0(b-a)}\right]\int_a^x|\varepsilon_{n-1}(s)|ds.$$

$$|\varepsilon_n(s)| \le \frac{M}{1-M_0(b-a)}\int_a^x|\varepsilon_{n-1}(s)|ds,$$

$$|\varepsilon_n(s)| \le \left[\frac{M(b-a)}{1-M_0(b-a)}\right]^2\cdot\frac{\varepsilon_0}{n!},$$

$$|\varepsilon_n(x)| \le \varepsilon_0\frac{\beta^n}{n!}, \qquad \beta=\frac{M(b-a)}{1-M_0(b-a)}.$$

Beləliklə isbat etdik ki, ixtiyari $K_0(x,s)$ nüvəsi üçün (6) yaxınlaşmaları, $M_0(b-a)<1$ şərti ödəndikdə (1) tənliyini həllinə yığılır və yığılma sürəti

$$|y_n(x)-y^*(x)| \le \left(\max_x|y_0(x)-y^*(x)|\right)\frac{\beta^n}{n!}$$

düsturu ilə təyin olunur.

§18. SİMMETRİK İNTEQRAL TƏNLİKLƏR

Fredholm inteqralının nüvəsi öz qoşmasına bərabər olduqda ona simmetrik nüvə deyilir:

$$K(x,s)=K^{*}(x,s)=\overline{K(x,s)} \tag{1}$$

Əgər nüvə həqiqi funksiyadırsa, onda simmetrik nüvənin təyini asanlaşır:

$$K(x,s)=K(s,x) \tag{2}$$

Simmetrik nüvəli Fredholm operatoruna simmetrik operator deyilir.

Əgər K operatoru simmetrikdirsə, onda

$$K=K^{*}$$

Simmetrik operator üçün, yəni əgər $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ kvadratik cəmlənən funksiyalardırsa, onda qoşma operatorlar arasındakı

$$(K\varphi,\psi)=(\varphi,K^{*}\psi)$$

bərabərlik

$$(K\varphi,\psi)=(\varphi,K\psi) \tag{D}$$

şəklinə düşər.

Nüvəsi simmetrik olan inteqral tənliklərə simmetrik inteqral tənliklər deyilir.

Əgər $K(x,s)$ nüvəsi simmetrikdirsə, onda bütün inteqrallanan nüvələr simmetrikdir. Həqiqətən də qoşma operatorlar üçün olan

$$\left(K^{n}\right)^{*}=\left(K^{*}\right)^{n}$$

bərabərliyi simmetrik hal üçün aşağıdakı kimi olar:

$$\left(K^{n}\right)^{*}=K^{n}$$

Əgər $\left(K^{n}\right)^{*}$ operatoru K^{n} operatoru ilə üst-üstə düşərsə, onda

$$\left(K^{n}\varphi,\psi\right)=\left(\varphi,K^{n}\psi\right) \qquad n=1,2,\ldots \tag{3}$$

§19. SİMMETRİK TƏNLİKLƏR HAQQINDA ƏSAS TEOREMLƏR

Teorem 1. Simmetrik nüvəli inteqral tənliyin xarakteristik ədədi həqiqidir.

İsbatı: Tutaq ki, λ_0-xarakteristik ədəd,

$$\varphi_0(x)=\lambda_0 K\varphi_0 \tag{1}$$

Məxsusi funksiyanın təyininə görə $\varphi_0(x)\neq 0$, ona görə də $\|\varphi_0\|^2>0$. Qeyd edək ki, $\lambda_0\neq 0$ olur, əks halda (1) bərabərliyindən alınar ki, $\varphi_0(x)\equiv 0$. (1) tənliyinin hər tərəfini skalyar olaraq $\varphi_0(x)$-ə vuraq:

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\lambda_0(K\varphi_0,\varphi_0)$$

buradan

$$\frac{1}{\lambda_0}=\frac{(K\varphi_0,\varphi_0)}{\|\varphi\|^2} \tag{2}$$

və kifayətdir ki, $(K\varphi_0,\varphi_0)$ skalyar hasilinin həqiqi olduğunu göstərək. (D) bərabərliyinə əsasən

$$(K\varphi_0, \varphi_0) = (\varphi_0, K\varphi_0)$$

ancaq skalyar hasilin

$$(g, f) = \left(\overline{f, g}\right)$$

xassəsinə görə

$$(\varphi_0, K\varphi_0) = \left(\overline{K\varphi_0, \varphi_0}\right)$$

Bu o deməkdir ki, qoşmasına bərabər olan $(K\varphi_0, \varphi_0)$ ədədi həqiqidir. Onda (2) düsturundan alınır ki, λ_0 ədədi də həqiqidir.

Teorem 2. Müxtəlif xarakteristik ədədlərə uyğun simmetrik nüvəli tənliyin məxsusi funksiyaları öz aralarında ortanormaldır.

İsbatı: Tutaq ki, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ simmetrik $K(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədləri, $\varphi_1(x)$ və $\varphi_2(x)$ isə onlara uyğun məxsusi funksiyalardır.Bu o deməkdir ki,

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 K\varphi_1, \varphi_2(x) = \lambda_2 K\varphi_2$$

Birinci bərabərliyi skalyar olaraq $\varphi_2(x)$ funksiyasına vuraq:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\lambda_2 K\varphi_1, \varphi_2) = \lambda_1(\varphi_1, K\varphi_2)$$

Ancaq $K\varphi_2 = \frac{1}{\lambda_2}\varphi_2$ olduğundan

$$(\varphi_1, K\varphi_2) = \left(\varphi_1, \frac{1}{\lambda_2}\cdot\varphi_2\right) = \frac{1}{\lambda_2}(\varphi_1, \varphi_2)$$

burada teorem 1-ə əsasən λ_2 həqiqi olduğundan skalyar hasildə mötərizə içərisindən çıxarmaq olar.

İndi isə

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\varphi_1,\varphi_2)$$

və ya

$$\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)(\varphi_1,\varphi_2)=0$$

Ancaq $\lambda_2 \neq \lambda_2$ olduğundan alınır ki,

$$(\varphi_1.\varphi_2)=0$$

Teorem 3. Simmetrik nüvənin məxsusi funksiyaların ardıcıllığını ortonormallaşdırmaq olar.

Xarakteristik ədədləri onların mütləq qiymətlərinin artması istiqamətində nömrələyək:

$$\lambda_1.\lambda_2,...,\lambda_n,...$$

Əgər bunlar hər hansı simmetrik nüvənin xarakteristik ədədləridirsə, onda uyğun məxsusi funksiyalar

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x),...$$

olar ki, burada

$$\varphi_n(x)-\lambda_n k\varphi_n=0$$

və

$$(\varphi_j.\varphi_k)=\begin{cases}0, & j\neq k\\ 1, & j=k\end{cases}$$

§ 20. XARAKTERİSTİK ƏDƏDLƏRİN VARLIĞI HAQQINDA TEOREMLƏR

Aydındır ki, bir neçə Fredholm operatorunun hasili də Fredholm operatorudur. n sayda eyni bir K Fredholm operatorunun hasili K operatorunun n-ci dərəcəsi adlanır və K^n kimi işarə olunur.

Aydındır ki,

$$K^2\varphi = K(K\varphi),\dots,K^n(\varphi) = K(K^{n-1}\varphi)$$

Operatorların hasili assosiativlik xassəsinə malikdir, onda aşağıdakı ümumi formula doğrudur:

$$K^n(\varphi) = K^m(K^{n-m}\varphi), \quad 0 < m < n.$$

Buradan aydın olur ki, Fredholm operatorun qüvvəti də Fredholm operatordur. K^n operatorunun $K_n(x,s)$ ilə işarə edək:

$$K^n\varphi = \int_a^b K_n(x,s)\varphi(s).$$

Aydındır ki,

$$K_1(x,s) = K(x,s).$$

$K_n(x,s)$ nüvəsi $K(x,s)$ nüvəsi n-ci iterir olunmuş nüvə adlanır.

Lemma 1. İkinci iterir olunmuş nüvənin xarakteristik ədədlər çoxluğu birinci nüvənin xarakteristik ədədlər çoxluğunun kvadratı ilə üst-üstə düşür.

Qeyd edək ki, bu lemma həm də simmetrik olmayan nüvələr üçün də doğrudur.

Nəticə 1. Tutaq ki, λ_0 ədədi $K(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədidir və $\varphi_0(x)$ uyğun məxsusi funksiyadır. Onda

$$\varphi_0(x) = \lambda_0 K\varphi_0;$$

ifadəsini nəzərə alsaq

$$\varphi_0(x) = \lambda_0 K^2 \varphi_0$$

və ya daha dəqiq

$$\varphi_0(x) - \lambda_0^2 \int_a^b K_2(x,s)\, \varphi_0(s)\, ds = 0 .$$

Bu bərabərlik göstərir ki, λ_0^2 ədədi $\varphi_0(x)$ məxsusi funksiyasına uyğun $K_2(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədidir.

Nəticə 2. Tutaq ki, μ_0 ədədi $K_2(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədi və $\varphi_0(x)$ uyğun məxsusi funksiyadır. Onda

$$\varphi_0(x) - \mu_0 K^2 \varphi_0 = 0$$

başqa sözlə

$$(1 - \mu_0 K^2)\varphi_0 = 0 .$$

K operatorundan asılı ifadəni adi qaydada toplamaq və vurmaq olar:

$$(1 - \sqrt{\mu_0} K)(1 + \sqrt{\mu_0} K)\varphi_0 = 0 . \qquad (1)$$

Tutaq ki,

$$(1 - \sqrt{\mu_0} K)\, \varphi_0 = \psi(x) . \qquad (2)$$

Əgər $\psi(x) = 0$ olarsa, onda (2)-dən alınır ki, $\sqrt{\mu_0}$ ədədi $\varphi_0(x)$ məxsusi funksiyasına uyğun $K(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədi olar. Əgər $\psi(x) \neq 0$ olarsa, onda (1)-dən

$$(1 + \sqrt{\mu_0} K)\psi = 0$$

olar ki, buradan da $-\sqrt{\mu_0}$ ədədinin $\psi(x)$ məxsusi funksiyasına uyğun $K(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədi olar. Lemma isbat olundu.

Qeyd edək ki, bu lemmanı n üçün də isbat etmək olar.

Lemmadan çıxan nəticə: Əgər $K(x,s)$ nüvəsi simmetrikdirsə, onda ikinci iterir nüvənin xaralteristik ədədləri müsbətdir.

Teorem (Xarakteristik ədədlərin varlığı haqqında teorem). Eyniliklə sıfırdan fərqli bütün simmetrik nüvələrin heç olmasa bir xarakteristik ədədi var.

Teoremin isbatı iki hissədən ibarətdir:

1) Əsas bərabərsizliyin çıxarılması;

2) Teoremin özünün isbatı.

İsbat edək ki, $K_2(x,s)$ nüvəsi heç olmasa bir xarakteristik ədədə malikdir, onda lemma 1-dən alınır ki, $K(x,s)$ nüvəsinin də xarakteristik ədədi var.

λ müstəvisinə və ya μ müsbət ədədinə baxaq ki, $|\lambda| \le \mu$ çevrəsində $K_2(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədinin olmaması xassəsinə malikdir.

İxtiyari $\psi(x) \ne 0$ funksiyasını götürək və təzə

$$f(x) = \varphi(x) - \mu K^2 \varphi = \varphi(x) - \mu \int_a^b K_2(x,s)\, \varphi(s)\, ds \qquad (3)$$

funksiyasını quraq.

Aydındır ki, $f(x) \ne 0$, çünki əks halda μ ədədi $K_2(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədi olardı.

(3) ifadəsində $f(x)$-i məlum hesab edib $\varphi(x)$-ə görə həll edək:

$$\varphi(x) = f(x) + \mu\int_a^b \Gamma(x,s;\mu) f(s)ds.$$

Harada ki, $\Gamma(x,s;\mu)$ ilə $K_2(x,s)$ nüvəsinin rezolventası işarə olunmuşdur. Sonuncu ifadəni $f(x)$-ə skalyar vuraq:

$$(\varphi, f) = \|f\|^2 + \mu\int_a^b\int_a^b \Gamma(x,s;\mu) f(s)\overline{f(x)}\,dx\,ds. \tag{4}$$

Göstərək ki, (4) inteqralı mənfi deyil.

$|\lambda \le \mu$ dairəsində $K_2(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədi olmadığından həmin dairədə $\Gamma(x,s;\mu)$ rezolventası müntəzəmdir, onda ikiqat inteqral

$$\int_a^b\int_a^b \Gamma(x,s;\lambda) f(s)\overline{g(x)}\,dx\,ds$$

həmin dairədə kvadratik cəmlənən $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları necə olsalar da ikiqat inteqral müntəzəmdir, onda qeyd olunan dairədə

$$\int_a^b\int_a^b \Gamma(x,s;\lambda) f(s)\overline{f(x)}\,dx\,ds$$

inteqralı da müntəzəmdir. Bu inteqralı λ-nın qüvvətinə görə sıraya ayırsaq

$$\int_a^b\int_a^b \Gamma(x,s;\lambda) f(s)\overline{f(x)}\,dx\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda^{n-1} \tag{5}$$

Burada $\lambda = \mu$ fərz etsək, alarıq:

$$\int_a^b\int_a^b \Gamma(x,s;\lambda) f(s)\overline{f(x)}\,dx\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu^{n-1} \tag{6}$$

Bizim məqsədimiz $\alpha_n \ge 0$ olduğunu göstərməkdir.

α_n əmsalını aşağıdakı kimi tapmaq olar. λ-nın modulu kifayət qədər kiçik olanda $(K^2)^n = K^{2n}$ və $K_2(x,s)$ üçün n-ci iterir $K_{2n}(x,s)$ olarsa, $\Gamma(x,s;\lambda)$ rezolventası sıraya aşağıdakı kimi ayrılar:

$$\Gamma(x,s;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_{2n}(x,s). \qquad (7)$$

Kiçik λ üçün (7) sırasını kvadratik cəmlənən funksiyaya vurub hədbəhəd inteqrallasaq α_n əmsalını alarıq:

$$\alpha_n = \int_a^b\int_a^b K_{2n}(x,s) f(s)\overline{f(x)}\,dx\,ds \qquad (8)$$

(8) ifadəsini sadələşdirsək alarıq:

$$\int_a^b K_{2n}(x,s) f(s) ds = K^{2n} f.$$

Buradan

$$\alpha_n = (K^{2n} f, f) = (K^n(K^n f), f)$$

və

$$(K^{2n}\varphi, \psi) = (\varphi, K^n\psi); \quad n = 1,2,\ldots$$

düsturuna əsasən

$$\alpha_n = (K^n f, K^n f) = \|K^n f\|^2 \geq 0.$$

Onda (4) ifadəsi aşağıdakı şəklə düşər

$$(\varphi, f) = \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \|K^n f\|^2 \qquad (9)$$

(9) idasəindən alınır ki,

$$(\varphi, f) > 0.$$

(3) tənliyinə qayıdaq. (3)-ün hər tərəfini soldan skalyar olaraq $\varphi(x)$-ə vuraq:

$$(\varphi, f) = (\varphi,\varphi) - \mu(\varphi, K^2\varphi)$$

$$(K\varphi,\psi) = (\varphi, K\psi)$$

bərabərliyinə əsasən alarıq:

$$(\varphi, K^2\varphi) = (\varphi, K(K\varphi)) = (K\varphi, K\varphi) = \|K\varphi\|^2$$

və buradan

$$(\varphi, f) = \|\varphi\|^2 - \mu\|K\varphi\|^2 \qquad (10)$$

$(\varphi, f) > 0$ olduğundan (10) ifadəsi müsbətdir. Buradan alırıq ki,

$$\|K\varphi\| \le \frac{1}{\sqrt{\mu}}\|\varphi\| \qquad (11)$$

(11) ifadəsi istənilən kvadratik cəmlənən $\varphi(x)$ funksiyası üçün doğrudur.

Qeyd edək ki, (11) ifadəsində μ elədir ki, $|\lambda| \le \mu$ dairəsində $K_2(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik nüvəsi yoxdur.

İndi fərz edək ki, $K_2(x,s)$ nüvəsinin bir dənə də xarakteristik ədədi yoxdur. Belə olanda μ ədədini istənilən qədər böyük götürmək olar, $\mu \to \infty$ şərtində limitə keçsək alarıq:

$$\|K\varphi\| \le 0.$$

Buradan

$$K\varphi = 0.$$

Başqa sözlə

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds \equiv 0.$$

Asanlıqla isbat etmək olar ki, bu halda da

$$K(x,s) \equiv 0.$$

Həqiqətən də ixtiyari qayda da x-i elə qeyd etmək olar ki,

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 dx$$

inteqralının mənası olsun.

Əgər x qeyd olunarsa, onda $K(x,s)$ nüvəsi s-in funksiyası olar. $\varphi(s)$ funksiyasının əvəzinə $\overline{K(x,s)}$ götürək. x-in seçilməsinə görə $\overline{K(x,s)}$ funksiyası kvadratik cəmlənəndir. Bütün $x \in [a,b]$ üçün (12)-dən

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 ds \equiv 0$$

olduğu alınır ki, buradan da

$$K(x,s) \equiv 0$$

olur.

Beləliklə. $K_2(x,s)$ nüvəsi bir dənə xarakteristik ədədi olmadığı halda da $K(x,s) \equiv 0$ olur. Əgər $K(x,s) \neq 0$ olarsa, onda $K_2(x,s)$ nüvəsinin heç olmasa bir xarakteristik ədədi olar. Onda lemma 1-ə görə verilmiş nüvənin heç olmasa bir xarakteristik ədədi olar. Teorem isbat olundu.

(11) ifadəsinə qayıdaq. Əgər $|\lambda| \leq \mu$ dairəsində $K_2(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik nüvəsi yoxdursa. onda (11) ifadəsi doğrudur, başqa sözlə desək, əgər μ həmin nüvənin xarakteristik ədədlərinin ən kiçiyindən kiçikdirsə, onda (11) ifadəsi doğrudur.

Tutaq ki, λ_1 ədədi $K(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədlərinin mütləq qiymətinin ən kiçiyidir, onda λ_1^2 ədədi $K_2(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədlərinin ən kiçiyi olacaqdır, bu halda əgər $\mu < \lambda_1^2$ olarsa, onda (11) doğrudur.

$\mu \to \lambda_1^2$ şərtində (11)-dən limitə keçsək alarıq:

$$\|K\varphi\| \le \frac{1}{|\lambda_1|}\|\varphi\| \tag{13}$$

(13) bərabərsizliyində $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ yazsaq, onda bərabərlik işarəsi doğru olar: harada ki, $\varphi_1(x)$ funksiyası $K(x,s)$ nüvəsinin λ_1 xarakteristik ədədinə uyğun məxsusi funksiyadır.

Həqiqətən də, bu halda

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 K\varphi_1$$

buradan

$$K\varphi_1 = \frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(x)$$

və

$$\|K\varphi_1\| \le \frac{1}{|\lambda_1|}\|\varphi_1\|.$$

Buradan belə nəticə çıxarmaq olar ki, simmetrik Fredholm operatorunun norması

$$\|K\| \le \frac{1}{|\lambda_1|}$$

ifadəsinə bərabərdir, harada ki, λ ədədi həmin operatorun xarakteristik ədədlərinin modulunun ən kiçiyidir.

§21. HİLBERT-ŞMUDT TEOREMİ

Simmetrik $K(x,s)$ nüvəsinə baxaq. Tutaq ki, həmin nüvənin xarakteristik ədədləri və məxsusi funksiyaları məlumdur:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots$$

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x), \dots \tag{1}$$

Tutaq ki, məxsusi funksiyalar ortonormaldır, xarakteristik ədədlər isə

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \dots \le |\lambda_m| \le \dots$$

şərtini ödəyir

Yeni nüvə düzəldək:

$$K^{(n)}(x,s) = K(x,s) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(s)}}{\lambda_j} \tag{2}$$

Aydındır ki, $K^{(n)}(x,s)$ simmetrik nüvədir. Həqiqətən də

$$\overline{K^{(n)}(s,x)} = K(x,s) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi_j(s)\overline{\varphi_j(x)}}{\lambda_j} = K^{(n)}(x,s)$$

$K(x,s)$- simmetrik nüvədir və λ_j həqiqi ədəddir.

Lemma 1.

$$\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots$$

$$\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \dots$$

ardıcıllıqları $K^{(n)}(x,s)$ nüvəsinin uyğun xarakteristik ədədlərini və məxsusi funksiyalar sistemini təşkil edir.

Həqiqətən də (1) ardıcıllığından $m > n$ olanda bir-birinə uyğun λ_m və $\varphi_m(x)$ funksiyasını götürək və

$$\alpha(x)=\varphi_m(x)-\lambda_m\int_a^b K^{(n)}(x,s)\varphi_m(s)ds \qquad (3)$$

ifadəsini düzəldək. Burada $K^{(n)}(x,s)$-i (2) düsturu ilə əvəz edək

$$\alpha(x)=\left[\varphi_m(x)-\lambda_m\int_a^b K^{(n)}(x,s)\varphi_m(s)ds\right]+\lambda_m\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi_j(x)}{\lambda_j}\int_a^b\varphi_m(s)\overline{\varphi_j(s)}ds.$$

$\varphi_m(x)$ və λ_m uyğun olaraq $K(x,s)$ nüvəsinin məxsusi funksiyası və xarakteristik ədədi olduğundan kvadrat mötərizə içərisindəki ifadə sıfıra bərabərdir.

Məxsusi funksiyaların ortoqonal olduğundan

$$\int_a^b\varphi_m(s)\overline{\varphi_j(s)}ds=(\varphi_m,\varphi_j)=0\,,\quad m\neq j$$

Beləliklə, alırıq ki, $\alpha(x)\equiv 0$.

Ancaq (3) ifadəsi $K^{(n)}(x,s)$ nüvəli inteqral tənliyin sol tərəfidir və buradan alırıq ki, $m>n$ olanda $\varphi_m(x)$ və λ_m funksiyası $K^{(n)}(x,s)$ nüvəsinin uyğun xarakteristik ədədi və məxsusi funksiyasıdır.

Nəticə 1. Əgər ancaq $K(x,s)$ nüvəsinin n -dən çox xarakteristik ədədi varsa, onda mütləq qiymətcə ən kiçik olan λ_{n+1} ədədi $K^{(n)}(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədidir.

Xüsusi hala baxaq. Tutaq ki, verilmiş nüvənin sonlu $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ xarakteristik ədədləri var. Onda $K^{(m)}(x,s)$ nüvəsinin bir dənə də olsun xarakteristik ədədi yoxdur, yəni $K^{(m)}(x,s)\equiv 0$ və ya

$$K(x,s)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(s)}}{\lambda_j} \tag{4}$$

(4) ifadəsi $K(x,s)$ nüvəsinin cırlaşan olduğunu göstərir.

Nəticə 2. Xarakteristik ədədlər və məxsusi funksiyalar sisteminin simmetrik kvadratik cəmlənən nüvəsinin sonlu olması üçün zəruri və kafi şərt həmin nüvənin cırlaşan olmasıdır.

Nəticə 3. Kvadratik cəmlənən $\varphi(x)$ funksiyası necə olursa olsun

$$\lim_{n\to\infty}\left\|K^{(n)}\varphi\right\|=0 \tag{5}$$

bərabərliyi doğrudur.

Əgər $K(x,s)$ nüvəsi cırlaşandırsa, onda (5) bərabərliyi doğrudur. Bu halda n-in kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$K^{(n)}(x,s)\equiv 0 \quad \text{və} \quad K^{(n)}\varphi\equiv 0\,.$$

Əgər $K(x,s)$ nüvəsi cırlaşan deyilsə, onda λ_{n-1} ədədi $K^{(n)}(x,s)$ nüvəsinin mütləq qiymətcə ən kiçik xarakteristik ədədidir.Onda

$$\|K\varphi\|\leq\frac{1}{|\lambda_1|}\|\varphi\|$$

bərabərsizliyinə görə

$$\left\|K^{(n)}\varphi\right\|\leq\frac{1}{|\lambda_{n+1}|}\|\varphi\|$$

və $\frac{1}{\lambda_{n+1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ şərtində

$$\left\|K^{(n)}\varphi\right\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Teorem (Hilbert-Şmidit). Tutaq ki, $K(x,s)$ simmetrik nüvə və $h(x)\in[a,b]$ parçasında kvadratik cəmlənən funksiyadır. Onda

$$f(x) = Kh = \int_a^b K(x,s)h(s)ds \tag{6}$$

funksiyası $K(x,s)$ nüvəsinin məxsusi funksiyaları üzrə yığılan Furye sırasına ayrılır. (6) düsturu ilə təyin olunan funksiyaya çox vaxt nüvə vastəsilə göstərilən funksiya da deyilir.

$K(x,s)$ nüvəsinin məxsusi funksiyalar ardıcıllığı üzrə $h(s)$ funksiyasının Furye sırasını yazaq:

$$h(s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} h_n \varphi_n(s), h_n = (h, \varphi_n)$$

Yada salaq ki, Bessel bərabərsizliyinə görə

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h_n|^2$$

sırası yığılır.

Sonra $f(x)$ funksiyasının Furye sırasını yazaq:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x) \tag{7}$$

və sıranın əmsallarını hesablayaq.

Aydındır ki,

$$f_n = (f, \varphi_n)$$

ancaq

$$f(x) = Kh$$

olduğundan, aydındır ki,

$$f_n = (Kh, \varphi) = (h, K\varphi_n)$$

və

$$K\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)$$

olduğundan, nəticədə

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n}(h, \varphi_n) = \frac{h_n}{\lambda_n}$$

alırıq və (7) sırası

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(x) \tag{8}$$

şəklini alır. $h(x)$ funksiyası əsas parçada kvadratik cəmlənən olduğundan $f(x)$ funksiyası da həmin parçada kvadratik cəmlənəndir. Bu halda həmin funksiyanın (7) Furye sırası yığılandır.

İsbat edək ki, (7) sırasının cəmi $f(x)$-ə bərabərdir. Tutaq ki,

$$\omega_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k(x)$$

Onda

$$f(x) - \omega_n(x) = \int_a^b K(x,s)h(s)ds - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \int_a^b h(s)\overline{\varphi_k(s)}ds.$$

$\omega_n(x)$ cəmi sonludur, ona görə də onu cəmin dərəcəsi və inteqral şəklində göstərmək olar. Bu isə aşağıdakı bərabərliyə gətirilir:

$$f(x) - \omega_n(x) = \int_a^b K^{(n)}(x,s)h(s)ds = K^{(n)}h$$

Onda Lemma 1-in 3-cü nəticəsinə görə

$$\|f - \omega_n\| = \left\|K^{(n)}h\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Buradan

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(x).$$

Hilbert-Şmidt teoremi isbat olundu.

Lemma 2. Tutaq ki, simmetrik nüvə

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 ds \le A$$

(A) şərtini ödəyir və tutaq ki, λ_n və $\varphi_n(x)$, $(n=1,2,...)$ həmin nüvənin xarakteristik ədədlərinin və ortonormal məxsusi funksiyalar sistemini təşkil edir. Onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n(x)|^2}{\lambda_n^2} \le A \tag{9}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Qeyd olunmuş x üçün $K(x,s)$ nüvəsi s -ə görə kvadratik cəmlənəndir. Həmin funksiyanın ortonormal $\{\overline{\varphi_n(s)}\}$ sistemi üzrə Furye sırasını quraq:

$$K(x,s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\overline{\varphi_n(s)}.$$

Bu sıranın əmsallarını hesablasaq, alarıq:

$$\alpha_n(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi_n(s)ds = \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x).$$

Beləliklə, $K(x,s)$ nüvəsi məxsusi funksiyalar üzrə Furye sırasına gətirilir:

$$K(x,s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(s)}}{\lambda_n}. \tag{10}$$

bu isə $K(x,s)$ nüvəsinin bixətti sırası adlanır.

Bessel bərabərsizliyinə görə

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n(x)|^2}{\lambda_n^2} \le \int_a^b |K(x,s)|^2 ds \le A.$$

Qeyd 1. (10) ifadəsi (2) bərabərsizliyi ilə təyin olunan $K^{(n)}(x,s)$ nüvəsinin strukturunu izah edir. Bu nüvə $K(x,s)$ nüvəsilə bixətti sıranın xüsusi cəminin fərqidir.

Qeyd 2. (9) sırasının hədləri müsbətdir və onu hədbəhəd inteqrallamaq olar. (9) bərabərsizliyini $a-$ dan $b-$ yə qədər inteqrallasaq və $\varphi_n(x)$ funksiyalarının normallığını nəzərə alsaq, alarıq ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\leq B^2 . \tag{11}$$

Qeyd edək ki, əgər nüvə simmetrik olmasa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|^2}\leq B^2$$

bərabərsizliyini alarıq ki, bu da İ.Şura bərabərsizliyi adlanır.

Teorem 2. Əgər simmetrik nüvə

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 ds \leq A$$

şərtini ödəyirsə, onda (8) Hilbert-Şmidt sırası müntəzəm yığılır.

Koşi bərabərsizliyindən istifadə edərək (8) sırasının qalıq həddini qiymətləndirək: bilirik ki

$$\left|\sum a_k b_k\right|^2 \leq \sum|a_k|^2\sum|b_k|^2$$

bərabərsizlik

$$\sum\left(|a_k|\lambda-|b_k|\right)^2$$

kvadrat üçhədlinin həqiqi λ dəyişənin istənilən qiymətində mənfi olmamasından çıxır. Burada

$$a_k = |h_k|,\ b_k = \left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|$$

olduğunu fərz etsək, alarıq:

$$\left[\sum_{k=n+1}^{n+p} \left|h_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|\right]^2 \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |h_k|^2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |h_k|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}.$$

Onda Lemma 2-yə əsasən

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k(x)\right| \le \sqrt{A} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |h_k|^2}.$$

Sağ tərəfdə yığılan ədədi sıranın qalıq həddi yazılmışdır, ona görə də x-dən aslı olmayaraq n-in kifayət qədər böyük qiymətlərində həmin cəm sonsuz kiçiləndir. Buradan da Hilbert-Şmidt sırasının müntəzəm yığılması alınır.

§22. SİMMETRİK İNTEQRAL TƏNLİKLƏRİN HƏLLİ

Simmetrik inteqral tənlik Fredholm inteqral tənliyin xüsusi halıdır və onu həll etmək üçün ümumi metodlardan istifadə etmək olar. Burada isə məsələni başqa cür qoyacağıq:

Göstərək ki, inteqral tənliyin xarakteristik ədədlər və məxsusi funksiyalar sistemi məlum olduqda simmetrik inteqral tənliyin həllini necə tapmaq olar. Bu məsələnin həllinin necə sadə olduğunu göstərək.

Tutaq ki,

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x) \qquad (1)$$

Simmetrik inteqral tənliyi verilmişdir və sərbəst həddi $[a,b]$ parçasında kvadratik cəmlənəndir.

$K(x,s)$ nüvəsinin xarakteristik ədədlər və məxsusi funksiyalar sistemini uyğun olaraq

$$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n,\dots,$$

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x),\dots$$

işarə edək. Qeyd edək ki, inteqral tənliyin həlli kvadratik cəmlənən funksiyalar sinfində axtarılır. Birinci λ-nın qiyməti adi ədəddir. Onda (1) tənliyinin kvadratik cəmlənən $\varphi(x)$ həlli var və

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

inteqralı nüvə vastəsi ilə təyin olunan funksiyadır və onun üçün Hilbert-Şmidt teoremi doğrudur. Əgər $\varphi(x)$ funksiyası

$$\varphi(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x),\ c_n=(\varphi,\varphi_n)$$

Furye sırasına uyğundursa, onda Hilbert-Şmidit teoreminə görə

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\lambda_n}\varphi_n(x). \qquad (2)$$

(2) ifadəsini (1)-də nəzərə alsaq, alarıq:

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\lambda_n}\varphi_n(x)=f(x) \qquad (3)$$

Aydındır ki, əgər c_n əmsallarını hesablamaq olarsa, onda (3) tənliyi axtarılan $\varphi(x)$ həllini verər. (3) tənliyini skalyar olaraq $\varphi_m(x)$

vuraq və nəzərə alaq ki, $\varphi_n(x)$ funksiyası ortonormaldır, onda alarıq:

$$\begin{cases} c_m\left(-\dfrac{\lambda}{\lambda_m}\right)=f_m \\ f_m=(f.\varphi_m) \end{cases} \tag{4}$$

λ-düzgün ədəd olduğundan

$$\frac{\lambda}{\lambda_m}-1\neq 0$$

və

$$c_m=\frac{\lambda_m.f_m}{\lambda_m-\lambda}$$

Bu ifadəni (3) tənliyində yerinə yazsaq, (1) tənliyinin həllini aşağıdakı kimi alarıq:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(x). \tag{5}$$

İndi fərz edək ki, λ-xarakteristik ədəddir.

Tutaq ki:

$$\lambda=\lambda_p=\lambda_{p+1}=\cdots=\lambda_q.$$

Yenə fərz edək ki, (1) tənliyinin yenə həlli var, yenə də (4) ifadəsinə baxaq:

Əgər m ədədi $p,p+1,...,q$ ədədlərinin hər biri ilə üst-üstə düşmürsə, onda

$$1-\frac{\lambda}{\lambda_m}\neq 0$$

və əvvəldə olduğu kimi

$$c_m = \frac{\lambda_m f_m}{\lambda_m - \lambda}$$

Əgər m ədədi $p, p+1, \ldots, q$ ədədlərindən birinə bərabər olarsa, onda (4) ifadəsindən

$$f_m = 0$$

olduğunu alarıq, bu isə

$$(f, \varphi_m) = 0, \quad m = p, p+1, \ldots, q \tag{6}$$

Beləliklə, əgər λ xarakteristik ədəddirsə, onda inteqral tənliyin həllinin olması üçün onun sərbəst həddinin xarakteristik ədədə uyğun məxsusi funksiyaya ortoqonal olması kifayətdir.

Əgər (6) şərti ödənirsə, onda (4) tənliyi $m = p, p+1, \ldots, q$ qiymətlərində eyniliyə çevrilir.Bu halda (1) tənliyinin istənilən sayda çoxlu həlli var və aşağıdakı şəkildədir:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x) + \sum_{n=p}^{q} c_n \varphi_n(x) \tag{7}$$

(7) ifadəsindəki birinci cəmdə ştrix onu göstərir ki, $n = p, p+1, \ldots, q$ nömrəli hədlər sürəti f_n və məxrəci $\lambda_n - \lambda$ olan hədlər sıfıra çevrilir və onları atmaq olar; ikinci cəmdəki c_n-əmsalı isə ixtiyari sabitdir.

Beləliklə, belə nəticəyə gəlirik:

Əgər λ-ədədi xarakteristik ədəddirsə və həmin xarakteristik ədədə

$$\varphi_p(x), \varphi_{p+1}(x), \ldots, \varphi_q(x), \ldots$$

məxsusi funksiyalar uyğun gələrsə, onda (1) tənliyinin həllinin olması üçün onun sərbəst həddinin nüvəyə uyğun məxsusi funksiyalara ortoqonal olması həm zəruri həm də kafi şərtdir.

§23. RİS-ŞAUDER TƏNLİYİNİN HƏLLİ

Aşağıdakı

$$\varphi(x) - \lambda T\varphi = f(x) \tag{1}$$

tənliyi Ris-Şauder tənliyi adlandırırlar, haradakı T -kəsilməz operatordur. Həmişə olduğu kimi, fərz edək ki, $f(x)\in L_2(a,b)$ və $\varphi(x)\in L_2(a,b)$; $-\infty \le a < b \le +\infty$. Ris-Şauder tənliyini cırlaşan Fredholm tənliyinə tətbiq olunan üsulla həll etmək olar.

$R>0$ ədədini verək və λ-nın ancaq $|\lambda|\le R$ dairəsində yerləşən qiymətlərinə baxaq. T operatorunun elə $T = T' + T''$ cəmlərinə ayıraq ki,

$$\|T'\| < \frac{1}{2R}$$

və T'' operatoru cırlaşan olsun:

$$T''\varphi = \sum_{k=1}^{n} (\varphi, b_k) a_k(x) \tag{2}$$

(2) tənliyini aşağıdakı kimi yazaq:

$$\varphi(x) - \lambda T'\varphi - \lambda T''\varphi = f(x) \tag{3}$$

Yeni naməlum $\psi(x)$ funksiyasını daxil edək:

$$\varphi(x) - \lambda T'\varphi = \psi(x) \tag{4}$$

$|\lambda|\cdot\|T'\| \le R\cdot\dfrac{1}{2R} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan (4) tənliyini $\varphi(x)$-ə görə həll etmək olar:

$$\varphi(x) = \psi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k T'^k \psi$$

Əgər

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} T'^k \psi = \Gamma'_\lambda \psi$$

işarələməsini qəbul etsək, alarıq:

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda\Gamma'_\lambda \psi \qquad (5)$$

Bu ifadəni (3) tənliyində nəzərə alsaq, ψ üçün aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$\psi(x) - \lambda T''(I + \lambda\Gamma'_\lambda)\psi = f(x) \qquad (6)$$

$T''(I + \lambda\Gamma'_\lambda)$ operatoru cırlaşandır. Həqiqətən də,

$$T''(I + \lambda\Gamma'_\lambda)\psi = T''\psi + \lambda T''\Gamma'_\lambda\psi =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(\psi, b_k)a_k(x) + \lambda\sum_{k=1}^{n}(\Gamma'_\lambda\psi, b_k)a_k(x).$$

$(\Gamma'_\lambda\psi, b_k) = (\psi, \Gamma'^*_\lambda b_k)$ olduğundan fərz etsək ki,

$$c_k(x) = b_k(x) + \lambda\Gamma'^*_\lambda b_k,$$

onda alarıq:

$$T''(I + \lambda\Gamma'_\lambda)\psi = \sum_{k=1}^{n}(\psi, c_k)a_k(x),$$

və (6) inteqral tənliyi cırlaşan nüvəli

$$\psi(x) - \lambda\int_a^b \psi(s)\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\overline{c_k(s)}ds = f(x)$$

inteqral tənliyi olur ki, onu da həll etmək olur.

Qeyd edək ki, Ris-Şauder tənliyini cırlaşan nüvəli inteqral tənliyə başqa yolla da gətirmək olar. (3) tənliyində $\lambda T''\varphi$ həddini sağ tərəfə keçirək və müvəqqəti olaraq sağ tərəfdəki həddə məlum kimi baxaq. Onda (3) tənliyi aşağıdakı kimi həll olunar:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda T''\varphi + \lambda\Gamma'_\lambda(f + \lambda T''\varphi).$$

Bu aşağıdakı tənliyə gətirilir:

$$\varphi(x) - \lambda(T'' + \lambda\Gamma'_\lambda T'')\varphi = f(x) + \lambda\Gamma'_\lambda f \qquad (8)$$

və burada $\lambda\Gamma'_\lambda T''$ operatoru cırlaşandır. Həqiqətən də

$$\lambda\Gamma'_\lambda T'' = \Gamma'_\lambda \sum_{k=1}^{n}(\varphi, b_k)a_k = \sum_{k=1}^{n}(\varphi, b_k)\Gamma'_\lambda a_k .$$

Fərz etsək ki,

$$g_k(x) = a_k(x) + \lambda\,\Gamma'_\lambda\, a_k$$

onda alarıq:

$$(T'' + \lambda\Gamma'_\lambda T'')\varphi = \sum_{k=1}^{n}(\varphi, b_k)g_k(x)$$

və (8) tənliyi cırlaşan nüvəli

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b \varphi(s)\sum_{k=1}^{n} g_k(x)\overline{b_k(s)}\,ds = f(x) + \lambda\Gamma'_\lambda f$$

inteqral tənliyinə gətirilir ki, bunu da həll etmək heç bir çətinlik törətmir.

Ris-Şauder tənliyinin həllindən istifadə edərək bir çox inteqral tənlikləri həll etmək olar.

§24. FREDQOLM TƏNLİYİNİN ARDICIL YAXINLAŞMA ÜSULU İLƏ HƏLLİ

İndi

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x) \qquad (1)$$

Fredholm tənliyini ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həll edək.

(1) tənliyini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda K\varphi \tag{2}$$

Başlanğıc yaxınlaşma olaraq

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

götürək. Əgər $\varphi_{n-1}(x)$ -ci yaxınlaşma qurulubsa, ondan sonrakı yaxınlaşma olaraq $\varphi_{n-1}(x)$ funksiyasını (2)-in sağ tərəfinə yazdıqda alınan nəticəni götürmək lazımdır:

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda K\varphi_{n-1} \tag{3}$$

Başqa sözlə aşağıdakı yaxınlaşmaları alırıq:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda K\varphi_0 = f(x) + \lambda Kf\,,$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda K\varphi_1 = f(x) + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f$$

....

və s. İnduksiya metodu ilə almaq olar ki,

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f + \ldots + \lambda^n K^n f$$

və ya

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m K^m f\,. \tag{4}$$

(4) sırasına adətən Neyman sırası deyilir. $\varphi_n(x)$ funksiyasına

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K^m f \tag{5}$$

sırasının xüsusi cəmi kimi baxmaq olar.

$n \to \infty$ şərtində (4) ardıcıl yaxınlaşmasının hansı şərt daxilində limitinin olduğunu aydınlaşdıraq.

Teorem 1. Əgər inteqral tənliyin nüvəsi kvadratik cəmlənəndirsə və

$$|\lambda| < \frac{1}{B}$$

şərti ödənirsə, harada ki,

$$B^2 = \int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2 dxds$$

onda həmin tənlik üçün Neyman sırası (1) tənliyinin kvadratik cəmlənən həllinə yığılır və belə həll yeganədir.

$$\left\| \sum_{m=N+1}^{N+p} \lambda^m K^m f \right\|$$

ifadəsini qiymətləndirək. Üçbucaq və $\|K^n\varphi\| \le B^n\|\varphi\|$ bərabərsizliyinə görə

$$\left\| \sum_{m=N+1}^{N+p} \lambda^m K^m f \right\| \le \sum_{m=N+1}^{N+p} |\lambda^m| \|K^m\varphi\| \le \|\varphi\| \sum_{m=N+1}^{N+p} (|\lambda|B)^m \le$$

$$\le \|\varphi\| \sum_{m=N+1}^{\infty} (|\lambda|B)^m = \|\varphi\| \frac{(|\lambda|B)^{N+1}}{1-|\lambda|B}.$$

N-in kifayət qədər böyük qiymətlərində axırıncı ifadə istənilən qədər kiçik olar, buradan çıxır ki, Neyman sırası kvadratik cəmlənən hər hansı $\varphi(x)$ funksiyasına yığılır, yəni

$$\|\varphi_n - \varphi\| \to 0.$$

İsbat edək ki, $\varphi(x)$ funksiyası (1) tənliyini ödəyir. (3) ifadəsində $n \to \infty$ fərz edək. Sol tərəf $\varphi(x)$ limitinə bərabərdir və bizə ancaq kifayətdir isbat edək ki,

$$K\varphi_{n-1} \to K\varphi.$$

Bu isə, $\|K\varphi\| \le B\|\varphi\|$ bərabərsizliyindən aydındır, yəni

$$\|K\varphi_{n-1} - K\varphi\| = \|K(\varphi_{n-1} - \varphi)\| \le B\|\varphi_{n-1} - \varphi\| \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

İndi isə qurduğumuz həllin yeganəliyini isbat edək. Tutaq ki, (1) tənliyinin iki $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ kvadratik cəmlənən həlli var. Onda aşağıdakı iki eynilik doğrudur:

$$\varphi(x) - \lambda K\varphi = f(x),$$

$$\psi(x) - \lambda K\psi = f(x).$$

Bu ifadələri hədbəhəd çıxaq və $\varphi(x) - \psi(x) = \omega(x)$ işarə edək. K operatorunun xəttiliyini nəzərə alsaq:

$$\omega(x) - \lambda K\omega = 0 \qquad (6)$$

Beləliklə, alırıq ki, iki həllin fərqi uyğun bircins inteqral tənliyi ödəyir.

İsbat edək ki,

$$\omega(x) \equiv 0 .$$

(6)-dan alırıq ki,

$$\omega(x) = \lambda K\omega .$$

Buradan

$$\|\omega\| = |\lambda| \cdot \|K\omega\|$$

və (3) ifadəsinə görə

$$\|\omega\| \le |\lambda| \cdot B\|\omega\|$$

və ya

$$(1 - |\lambda| B)\|\omega\| \le 0 . \qquad (7)$$

Teoremin şərtinə görə isə

$$|\lambda| B < 1 .$$

Ona görə də (7)-də mötərizə içərisindəki ifadə müsbətdir və ancaq $\|\omega\| = 0$ olmalıdır. Buradan $\omega(x) \equiv 0$ olduğu alınır, bu isə

$$\psi(x) \equiv \varphi(x)$$

alınır, yəni qurduğumuz həll yeganədir.

Teorem 2. Əgər (1) tənliyinin nüvəsi kvadratik cəmlənmədən başqa, həm də $\int_a^b |K(x,s)|^2 ds \le A$ şərtini və $|\lambda| B < 1$ şərtlərini ödəyirsə, onda Neyman sırası $[a,b]$ seqmentində müntəzəm yığılır.

İsbatı. Teoremi isbat etmək üçün (5) sırasının ümumi həddini qiymətləndirək. Bunyakovski bərabərsizliklərinə görə

$$\left|\lambda^m K^m f\right| = |\lambda^m| \left|\int_a^b K_m(x,s) f(s) ds\right| \le |\lambda^m| \left(\int_a^b K_m(x,s)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|$$

və $\int_a^b |M(x,s)|^2 ds \le A' B^2$ bərabərsizliyinə görə $m \ge 1$ olanda

$$\left|\lambda^m K^m f\right| \le \frac{\sqrt{A}}{B} \cdot \|f\| \left(|\lambda| B\right)^m .$$

Bu bərabərsizliyin sağ tərəfi həndəsi silsilənin ümumi həddidir və həndəsi silsilənin nisbəti $|\lambda| B$ -yə bərabərdir və $|\lambda| B < 1$. Onda Veyerştrasın məlum teoreminə görə (5) sırası müntəzəm yığılır.

Qeyd. Əgər inteqral tənliyin nüvəsi məhduddursa

$$|K(x,s)| \le M ,$$

onda ardıcıl yaxınlaşma üçün daha sadə, yığılma radiusu göstərmək olar. Belə ki,

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dx ds \le (b-a)^2 M^2 .$$

Ardıcıl yaxınlaşma radiusu

$$|\lambda| < \frac{1}{(b-a)M}$$

olan dairədə yığılır. Beləliklə, Fredholm inteqral tənliyini ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həll etmək olar, bu sıranın yığılmasından alınır. Qarşıya belə bir sual çıxır:

Fərz etmək olarmı ki, qurulmuş ardıcıl yaxınlaşma λ -nın bütün qiymətlərində yığılır? Və ya mərkəzi $\lambda = 0$ nöqtəsində olan, radiusu $\frac{1}{B}$-dən böyük olan dairədə yığılırmı?

Lakin bu belə deyil. Uğurlu götürülmüş Fredholm inteqral tənliyi üçün ardıcıl yaxınlaşma üsulu $|\lambda| \geq \frac{1}{B}$ şərtində dağılır, buna baxmayaraq elə inteqral tənliklər var ki, (məsələn Volterra inteqral tənliyi) onun üçün ardıcıl yaxınlaşma üsulu parametrin istənilən qiymətində yığılır.

Aşağıdakı misala baxaq. Tutaq ki,

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi(s)ds = 1 \qquad (8)$$

inteqral tənliyi verilmişdir. Burada $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = 1$, $K(x,s) = 1$, $B = 1$. Onda teorem 1-ə görə (8) inteqral tənliyi üçün ardıcıl yaxınlaşma üsulu $|\lambda| < 1$ dairəsində yığılır. Lakin (8) tənliyini ardıcıl yaxınlaşma üsulunu tətbiq etmədən də asanlıqla həll etmək olar.

(8) inteqral tənliyini həll etmək üçün, qeyd edək ki,

$$\int_0^1 \varphi(s)ds$$

inteqralı məlum olmayan hər hansı C sabitinə bərabərdir, yəni (8) tənliyindən

$$\varphi(x) = 1 + \lambda C \tag{9}$$

ifadəsini alarıq ki, nəticədə C sabitinin tapılmasına gətirilir. (9) ifadəsini (8)-də nəzərə alsaq, alarıq:

$$(1-\lambda)C = 1 \tag{10}$$

Aydındır ki, (10) tənliyinin $\lambda = 1$ olanda həlli yoxdur, deməli $\lambda = 1$ olanda (8) inteqral tənliyin həlli yoxdur. Buradan çıxır ki, radiusu vahiddən böyük dairədə (8) inteqral tənliyi yığıla bilməz.

Maraqlıdır ki. eyni zamanda $\lambda \neq 1$ olanda baxmayaraq ki, ardıcıl yaxınlaşma üsulu dağılır, lakin (8) inteqral tənliyinin həlli var. Həqiqətən də, əgər $\lambda \neq 1$ olarsa, onda (10) tənliyindən

$$C = \frac{1}{1-\lambda}$$

alınır. Nəticədə

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda}$$

alınar. Bunu isə (8) inteqral tənliyində yerinə yazsaq tənliyi ödəyər.

Daha bir (8) inteqral tənliyindən fərqli

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \varphi(s)ds = f(x) \tag{11}$$

inteqral tənliyinə baxaq. Burada sərbəst hədd $(0,1)$ parçasında ixtiyari kvadratik cəmlənən funksiyadır.

Yuxarıda olduğu kimi fərz etsək ki,

$$C=\int_0^1 \varphi(s)dx .$$

Alırıq ki,

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda C .$$

Bu ifadəni 0-dan 1-ə qədər inteqrallasaq C-ni tapmaq üçün

$$(1-\lambda)C=\int_0^1 f(x)dx \tag{12}$$

ifadəsini alırıq. Əgər $\lambda\neq 1$ olarsa, onda

$$C=\frac{1}{1-\lambda}\int_0^1 f(x)dx$$

və

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 f(x)dx .$$

Bu ifadəni yuxarıda yerinə yazsaq, inanmaq olar ki, sonuncu tapdığımız funksiya (11) tənliyini ödəyir ki, bu da $\lambda\neq 1$ olanda həmin inteqral tənliyin varlığını və həllin yeganə olduğunu göstərir.

İndi tutaq ki, $\lambda=1$. Onda (12) tənliyi

$$\int_0^1 f(x)dx=0 \tag{13}$$

şəklini alar. Əgər $f(x)$ funksiyası (13) bərabərliyini ödəmirsə, onda aydındır ki, (11) tənliyinin həlli yoxdur. Bu hal $f(x)\equiv 1$ olduqda baş verir.

Əgər (13) bərabərsizliyi ödənirsə, onda C sabiti təyin olunmamış qalır. Yuxarıda yerinə yazmaqla $\lambda = 1$ olanda (11) tənliyi

$$\varphi(x) = f(x) + C \qquad (C\text{-ixtiyari sabitdir})$$

şəklini alır ki, bu tənliyində sonsuz sayda həllər çoxluğu vardır.

§25. FREDHOLM İNTEQRAL TƏNLİYİNİN SONLU CƏMLƏR ÜSULU İLƏ HƏLLİ

Birinci və ikinci növ Fredholm inteqral tənliklərinə baxaq:

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x) \tag{1}$$

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x). \tag{2}$$

Sonlu cəmlər üsulunun ideyası ondan ibarətdir ki, verilmiş müəyyən inteqralı aşağıdakı kvadratur düsturlardan biri ilə əvəz edib həll edək:

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_j F(x_j) \tag{3}$$

haradakı x_j -absisi $[a,b]$ parçasının hər hansı nöqtəsidir, A_j ($j = 1,2,\dots,n$) - $F(x)$ funksiyasından asılı olmayaraq kvadratur düsturun əmsalıdır.

(1), (2) düsturlarını (3) düsturu ilə əvəz etsək və nəzərə alsaq ki, $x = x_i$, onda aşağıdakı düsturları alarıq:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (4)$$

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i \quad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (5)$$

Haradakı, $y_i = y(x_i)$, $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $f_i = f(x_i)$. Nəticədə y_i dəyişəninə nəzərən xətti cəbri tənliklər sistemi alırıq. Həmin sistemi məlum üsullarla (Qauss iterasiya) həll edərək x_i nöqtələrində y_i dəyişəninin təqribi qiymətlərini alırıq. Bu isə bizə imkan verir ki, (1) tənliyinin təqribi həllini interpolyasiya çoxhədlisi şəklində. (2) tənliyinin təqribi həllini isə aşağıdakı kimi yazaq:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x.x_j) y_j \qquad (6)$$

(3) kvadratur düsturunun seçilməsindən asılı olaraq A_j əmsalı və x_j absisi üçün aşağıdakı qiymətləri alarıq:

1) Trapeslər düsturu üçün

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad A_0 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_j = h, \ (j = 1,2,\dots,n-1),$$

$$x_j = a + jh \quad (j = 0,1,\dots,n).$$

2) Simpson düsturu üçün

$$n = 2m, \ h = \frac{b-a}{2m}, \quad A_0 = A_{2m} = \frac{h}{3}, \quad A_1 = A_3 = \dots = A_{2m-1} = \frac{4h}{3},$$

$$A_2 = A_4 = \dots = A_{2m-2} = \frac{2h}{3}, \quad a_j = a + jh \ (j = 0,1,\dots,2m).$$

3) Qauss düsturu üçün

$$A_j=(b-a)A_j^n, \quad x_j=a+(b-a)x_j^{(n)}.$$

Haradakı, $x_j^{(n)}$-Qauss absisi, $A_j^{(n)}$-$(0,1)$ intervalında Qauss əmsalıdır.

Təqribi həllin xətası kvadratur düsturun seçilməsindən asılıdır.

Misal 1. $n=2$ olanda Simpson düsturundan istifadə edərək

$$y(x)+\int_0^1 xe^{xs}y(s)ds=e^x \tag{7}$$

inteqral tənliyinin təqribi həllini tapın.

Həlli. Simpson düsturu üçün

$$h=\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}, \quad A_0=A_2=\frac{1}{6}, \quad A_1=\frac{2}{3}, \quad x_0=0,$$

$$x_1=0.5, \quad x_2=1$$

olur, onda (7) tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$y(x)+\frac{1}{6}\left[xe^{0\cdot x}y_0+4xe^{0.5\cdot x}y_1+xe^{1\cdot x}y_2\right]=e^x.$$

Axırıncı bərabərlikdə $x=x_i$ qəbul etsək, aşağıdakı sistemi alarıq:

$$y_0=1,$$

$$y_1+\frac{0,5}{6}(y_0+4e^{0.25}y_1+e^{0.5}y_2)=e^{0.5},$$

$$y_2+\frac{1}{6}(y_0+4e^{0.5}y_1+e^1y_2)=e^1.$$

Sonuncu sistemi sadələşdirsək, alarıq:

$$y_0=1,$$

$$1,4280y_1+0,1374y_2=1,5654,$$

$$1,0991y_1+1.4530y_2=2.5516.$$

Bu sistemi həll etsək, alarıq:

$$y_0 = 1,$$

$$y_1 = 1{,}0002,$$

$$y_2 = 0{,}9995.$$

Müqayisə üçün qeyd etmək olar ki, (7) inteqral tənliyinin dəqiq həlli

$$y(x) \equiv 1$$

funksiyasıdır.

(6) ifadəsindən istifadə edərək (7) inteqral tənliyinin təqribi həllini

$$y(x) = e^x - \frac{x}{6}\left(1 + 4{,}001e^{\frac{x}{2}} + 1{,}000e^x\right)$$

şəklində yazmaq olar.

Misal 2. $n = 2$ olanda Qauss düsturundan istifadə edərək

$$y(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{xs} y(s)ds = 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1) \qquad (8)$$

inteqral tənliyinin təqribi həllini tapın.

Həlli. Qauss düsturu üçün

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = 0.2113, \quad x_2 = 0.7887$$

(8) tənliyini (5) sistemi ilə əvəz etsək alarıq:

$$y_1 - \frac{1}{4}(e^{x_1^2} y_1 + e^{x_1 x_2} y_2) = 1 - \frac{1}{2x_1}(e^{x_1} - 1),$$

$$y_2 - \frac{1}{4}(e^{x_1 x_2} y_1 + e^{x_2^2} y_2) = 1 - \frac{1}{2x_2}(e^{x_2} - 1).$$

x_1 və x_2-nin qiymətlərini yerinə yazıb sonuncu ifadəni çevirsək aşağıdakı sistemi alarıq:

$$0{,}7386y_1 - 0{,}2954y_2 = 0{,}4434,$$

$$-0{,}2954y_1 + 0{,}5343y_2 = 0{,}2384.$$

Sistemi həll etsək, alarıq:

$$y_1 = 0{,}9997,$$

$$y_2 = 0{,}9990.$$

Müqayisə üçün qeyd edək ki, verilmiş inteqral tənliyin dəqiq həlli

$$y(x) \equiv 1$$

funksiyasıdır.

Beləliklə, (8) inteqral tənliyinin təqribi həllini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$y(x) = 0{,}2499e^{0{,}2113x} + 0{,}2497e^{0{,}7887x} + 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1).$$

Misal 3. $n = 12$ olanda düzbucaqlılar düsturunu tətbiq etməklə

$$y(x) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y(s)ds}{6{,}8 - 3{,}2\cos(x+s)} = 25 - 16\sin^2 x \qquad (9)$$

inteqralının təqribi həllini tapın.

Həlli. $n = 12$ olanda düzbucaqlılar düsturu üçün

$$h = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}, \qquad A_j = \frac{\pi}{6}$$

olur. Onda (9) tənliyi üçün

$$y_i + \frac{\pi}{6}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}y_j = 25 - 16\sin^2 x_i \qquad (10)$$

K_{ij}-in qiymətləri aşağıdakı cədvəldə verilib:

Cədvəl 1.

$x_i \backslash x_j$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
0	0.100	0.105	0.119	0.147	0.192	0.247	0,278	0,247	0,192	0,147	0.119	0,105
$\frac{\pi}{6}$	0,105	0.119	0.147	0.192	0.247	0.278	0.247	0,192	0,147	0,119	0.105	0.100
$\frac{\pi}{3}$	0.119	0.147	0.192	0.247	0.278	0,247	0.192	0,147	0.119	0,105	0.100	0.105
$\frac{\pi}{2}$	0,147	0.192	0.247	0.278	0.247	0.192	0.147	0.119	0.105	0,100	0.1054	0.119

Alınmış sistemdə nəzərə alsaq ki, başlanğıc həll simmetrikdir, onda naməlumların sayını azaltmaq olar.

Asanlıqla göstərmək olar ki, əgər $y(x)$ funksiyası (9) tənliyinin həllidirsə, onda $y(-x)$ funksiyası da həmin tənliyin həlli olar. Ona görə də inteqral tənliyinin həllinin yeganəliyindən istifadə edərək göstərmək olar ki, $y(-x)=y(x)$ ($y(x)$ cüt funksiyadır)

$$J(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)ds}{6.8-3.2\cos(x+s)}$$

işarə edək və göstərək ki,

$$J(x)=J(-x)=J(\pi-x). \tag{11}$$

Həqiqətən də

$$J(-x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)ds}{6.8-3.2\cos(-x+s)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)ds}{6.8-3.2\cos(x-s)}.$$

$-s=t$ əvəzləməsini aparaq və nəzərə alaq ki, $y(x)$ cüt funksiyadır, onda alarıq:

$$J(-x)=-\int_{\pi}^{\pi}\frac{y(-t)dt}{6.8-3.2\cos(x+t)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)ds}{6.8-3.2\cos(x-(\pi+s))}=J(x).$$

Sonra

$$J(\pi-x)=\int_{\pi}^{\pi}\frac{y(s)ds}{6.8-3.2\cos(\pi-x+s)}=\int_{\pi}^{\pi}\frac{y(s)ds}{6.8-3.2\cos(x-(\pi+s))}.$$

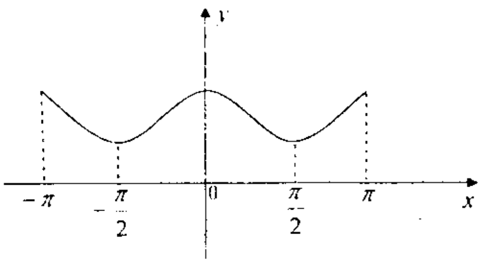
Buradan $\pi+s=-t$ əvəzləməsindən sonra alarıq:

$$J(\pi-x)=-\int_{\pi}^{\pi}\frac{y(t)dt}{6{,}8-3.2\cos(x+t)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(t)dt}{6.8-3.2\cos(x+t)}=J(x).$$

(11)-dən alınır ki,

$$y(x)=y(-x)=y(\pi-x).$$

Başqa sözlə başlanğıc həllin qrafiki $x=0$, $x=\pm\frac{\pi}{2}$ düz xətlərinə nəzərən simmetrikdir:



Simmetrikliyi nəzərə alsaq, yaza bilərik ki,

$$\begin{cases} y(-\pi)=y(0)=y(\pi), \quad y(-\frac{\pi}{2})=y(\frac{\pi}{2}), \\ y(-\frac{5\pi}{6})=y(-\frac{\pi}{6})=y(\frac{\pi}{6})=y(\frac{5\pi}{6}), \\ y(-\frac{2\pi}{3})=y(-\frac{\pi}{3})=y(\frac{\pi}{3})=y(\frac{2\pi}{3}). \end{cases} \tag{12}$$

$y_1 = y(0)$, $y_2 = y(\frac{\pi}{6})$, $y_3 = y(\frac{\pi}{3})$, $y_4 = y(\frac{\pi}{2})$ işarə etsək və (12) şərtini nəzərə alsaq (10) sistemini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$y_1 + \frac{\pi}{6}\Big[y_1(K(0,-\pi) + K(0,0)) + y_2(K(0,-\frac{5\pi}{6}) + K(0,-\frac{\pi}{6}) + K(0,\frac{\pi}{6})$$
$$+ K(0,\frac{5\pi}{6})) + y_3(K(0,-\frac{2\pi}{3}) + K(0,-\frac{\pi}{3}) + K(0,\frac{\pi}{3}) + K(0,\frac{2\pi}{3})) +$$
$$+ y_4(K(0,-\frac{\pi}{2}) + K(0,\frac{\pi}{2}))\Big] = 25,$$

$$y_2 + \frac{\pi}{6}\Big[y_1(K(\frac{\pi}{6},-\pi) + K(\frac{\pi}{6},0)) + y_2(K(\frac{\pi}{6},-\frac{5\pi}{6}) + K(\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{6}) + K(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$$
$$+ K(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})) + y_3(K(\frac{\pi}{6},-\frac{2\pi}{3}) + K(0,-\frac{\pi}{3}) + K(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}) + K(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})) +$$
$$+ y_4(K(\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{2}) + K(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}))\Big] = 21,$$

$$y_3 + \frac{\pi}{6}\Big[y_1(K(\frac{\pi}{3},-\pi) + K(\frac{\pi}{3},0)) + y_2(K(\frac{\pi}{3},-\frac{5\pi}{6}) + K(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}) + K(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$$
$$+ K(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6})) + y_3(K(\frac{\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}) + K(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}) + K(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}) + K(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})) +$$
$$+ y_4(K(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{2}) + K(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}))\Big] = 13,$$

$$y_4 + \frac{\pi}{6}\Big[y_1(K(\frac{\pi}{2},-\pi) + K(\frac{\pi}{2},0)) + y_2(K(\frac{\pi}{2},-\frac{5\pi}{6}) + K(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}) + K(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6})$$
$$+ K(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})) + y_1(K(\frac{\pi}{2},-\frac{2\pi}{3}) + K(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}) + K(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}) + K(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})) +$$
$$+ y_4(K(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}) + K(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))\Big] = 9.$$

Haradakı, $K(x_i, x_j) = K_{ij}$-in qiyməti cədvəl 1-dən götürülür. K_{ij}-in qiymətlərini yerinə yazıb əmsalları hesablasaq aşağıdakı sistemi alırıq:

$$1.19y_1 + 0{,}35y_2 + 0{,}31y_3 + 0{,}15y_4 = 25,$$

$$0,18y_1 + 1,34y_2 + 0,32y_3 + 0,16y_4 = 21,$$

$$0,16y_1 + 0.32y_2 + 1,34y_3 + 1,18y_4 = 13,$$

$$0,15y_1 + 0,31y_2 + 0,35y_3 + 1,19y_4 = 9.$$

Buradan isə

$$y_1 = 16,04,$$

$$y_2 = 12.27,$$

$$y_3 = 4,73,$$

$$y_4 = 0,953 \qquad .$$

qiymətlərini alırıq. (12) düsturundan istifadə edərək y_i-lərin başqa qiymətlərini də almaq olar. Onda verilmiş (9) inteqral tənliyinin təqribi həlli üçün alarıq:

$$y(x) = \frac{\pi}{6}\sum_{i=1}^{12}\frac{y_i}{6.8 - 3.2\cos(x + x_i)}.$$

Müqayisə üçün verilmiş inteqral tənliyin dəqiq həllini yazsaq, alarıq:

$$\tilde{y}(x) = 8,50 + 7,53\cos 2x$$

və uyğun nöqtələrdə

$$\tilde{y}(0) = 16,30, \quad \tilde{y}(\frac{\pi}{6}) = 12,265, \quad \tilde{y}(\frac{\pi}{3}) = 4,735, \quad \tilde{y}(\frac{\pi}{2}) = 0,970$$

qiymətlərini alırıq.

ƏDƏBİYYAT

1.С.Г.Михлин. Лекции по линейным интегралным уравнениям. Москва, 1959.

2.Н.В.Копченова, И.А.Марон. Вычислительная математика в примерах и задачах. Москва, 1972.

3.А.В.Бицадзе. Уравнения математической физики. Москва, 1976.

4.Y.C.Məmmədov. Təqribi hesablama üsulları. Bakı, 1986.

MÜNDƏRİCAT

Giriş 3

§1. Fredholm tənliklər haqqinda əsas anlayişlar................ 6

§2. İnteqral tənliklərin təqribi üsullarla həlli 17

§3. İnteqralı, inteqral cəmi ilə əvəz etmək üsulu 18

§4. Üsulun xətasının qiymətləndirilməsi.............................. 20

§5. Cırlaşan nüvəli inteqral tənliklər. Fredholmun birinci teoremi.. 24

§6. Fredholmun ikinci teoremi.. 30

§7. Fredholmun üçüncü teoremi.. 35

§8. Nüvəni, cırlaşmış nüvə ilə əvəz etmək üsulu................ 41

§9. Nüvəni cirlaşan nüvələr ardıcıllığı ilə approksımasıyası 44

§10. Cırlaşan nüvənin qurulmasi üçün Betmen üsulu.......... 47

§11. Nüvənin cırlaşan nüvə ilə əvəz olunmasına aid misallar həlli.. 49

§12. Fredholm inteqral tənliyi üçün adi iterasiya üsulu........ 52

§13. II növ volter tənliklər üçün adi iterasiya üsulu............ 55

§14. Xətti inteqral tənliklər... 58

§15. Qeyri-xətti inteqral tənliklər... 60

§16. Qeyri-xətti inteqral tənliklər üçün adi iterasiya üsulu.. 62

§17. Volter-fredholm inteqral tənliyi.................................. 66

§18. Simmetrik inteqral tənliklər... 73

§19. Simmetrik tənliklər haqqinda əsas teoremlər........... 74

§ 20. Xarakteristik ədədlərin varliği haqqinda teoremlər..... 76

§21. Hilbert-şmudt teoremi.. 85

§22. Simmetrik inteqral tənliklərin həlli................................ 92

§23. Ris-şauder tənliyinin həlli... 96

§24. Fredqolm tənliyinin ardicil yaxinlaşma üsulu ilə həlli.. 98

§25. Fredholm inteqral tənliyinin sonlu cəmlər üsulu ilə həlli... 106

Ədəbiyyat.. 115