

Ə.A.Quliyev

HƏNDƏSƏ MƏSƏLƏLƏRİ

*Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirinin 7.07.2010-cu il tarixli 1029 ~~No~~-li
əmri ilə dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir.*

BAKİ-“ELM”- 2010

Elmi redaktor: Musayev V.M.

Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Rəy verənlər:

Quliyev H.F.

Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Adıgözəlov A.S.

Pedaqoji elmləri doktoru, professor

Mərdanov İ.C.

Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Nəsirov N.B

Pedaqoji elmlər namizədi, dosent

Ə.A.Quliyev. Həndəsə məsələləri. Bakı, "Elm" 2010, səh. 300

ISBN 978-9952-453-33-1

Ali və orta ixtisas məktəblərinə daxil olmağa hazırlaşanlara, həndəsənin ümumiləşdirici məsələlər vasitəsilə təkrarında müəllimlərə kömək məqsədilə hazırlanmış bu kitabda 500-ə yaxın hesablama, isbat və qurma məsələləri müfəssəl həllərilə verilir. Bu material məktəb həndəsə kursunun proqramını bütünlüklə əhatə edir.

Vəsait orta məktəb şagirdləri və müəllimləri, abituriyentlər, ali məktəbin bakalavr və magistr pillələrinin tələbələri, həndəsənin tədrisini və şagirdlərin əqli fəaliyyətini inkişaf etdirməklə maraqlanan tədqiqatçı metodistlər üçün maraqlı və münasibdir.

1602000000
655(07) – 2010

© "Elm" nəşriyyatı, 2010

*“Deyilənə görə bir dəfə Ptolomey Evkliddən soruşur ki, həndəsədə onun
“Başlanğıclar” - indikindən daha qısa yol varmı, buna o, belə cavab
verir: həndəsədə şahlar üçün ayrıca yol yoxdur”.*

Prokl

GİRİŞ

Bu vəsait şagirdlər, müəllimlər, riyaziyyatdan dərnek rəhbərləri, abituriyentlər, pedaqoji universitetin tələbələri, magistrələr və həndəsədən məsələ həllinə maraq göstərən hər kəs üçün nəzərdə tutulmuşdur. Qarşıya qoyulan əsas məqsəd müəllifin 2008-ci ildə nəşr olunmuş “Planimetriyanın məsələ vasitəsilə təkrarı” kitabını genişləndirmək və tamamlamaqdan ibarətdir. Buraya o, qədər də standart olmayan, mövcud dərslik və vəsaitlərə daxil olmayan şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətinin inkişafına kömək edən, həndəsədən hesablama, isbat və qurma məsələləri daxil edilmişdir. Belə məsələlər vasitəsilə planimetriya və stereometriya kurslarını təkrar edib sistemləşdirməyi nəzərdə tuturuq. Kitabda həlləri ilə verilən məsələlərdən ölkəmizdə və xüsusən xarici ali məktəblərə qəbul imtahanlarına hazırlaşanlar istifadə edə bilər. Bunu özünü yoxlamada, habelə unudulanları bərpa etməkdə mühüm vasitə hesab edirik. Lakin oxucular özünü sınamaq məqsədilə təqdim olunan məsələləri müstəqil həll etməyə çalışmalı, yalnız bundan sonra göstərilən həll və cavablara müraciət etmək yaxşı olardı. Beləliklə, gənclər həndəsə məsələlərini burada göstərilənlərdən fərqli, özlərinə məxsus, bəzən də daha səmərəli üsullarla da həll edə bilərlər. Bu vəsaitlə yanaşı, onun sonunda göstərilmiş ədəbiyyatdan da istifadə etməklə həndəsədən hesablama, isbat və qurma məsələlərinin həllində müəyyən vərdiş və bacarığa nail olmaq mümkündür. Həmin məqsədə nail olmaqda şagirdlərə kömək üçün istifadə etmədiyimiz müvafiq vəsaitləri də bu siyahıya daxil etmişik.

Onu da bilmək lazımdır ki, məzunlar bu vəsaitdən istifadə etməklə buraxılış, həmçinin test üsulu ilə orta ixtisas və ali məktəblərə qəbul imtahanlarına hazırlıq prosesində həndəsəni

yenidən öyrənə, habelə bu bəsrədə özlərini yoxlaya bilərlər. Son illərdə bəzi xarici ölkələrin ali məktəblərində qəbul imtahanları zamanı həndəsədən təklif edilmiş bir sıra məsələlər də bu vəsəitə daxil edilmişdir. Aparadığımız araşdırmalar göstərdi ki, bu məqsədlə abituriyentlərə əsasən hesablama məsələləri təklif olunur, isbat və qurma məsələlərindən isə daha çox olimpiadalarda istifadə olunur. Tədris prosesində də belə birtərəfli yanaşma vardır. Bu da həndəsənin lazımı səviyyədə mənimsənilməməsi səbəblərindən biridir.

Bu boşluğu, qismən də olsa, doldurmaq üçün kitabda hər üç növə aid (hesablama, isbat və qurma) 500-ə yaxın həndəsə məsələləri təhlil edilir ki, bunlardan ayrı-ayrı mövzuları və bütövlükdə kursun təkrarı üçün istifadəni faydalı hesab edirik. Məsələlər orta məktəbin həndəsə kursunu demək olar ki, əhatə edir.

Kitabdakı məlumat xarakterli faktlara şüurlu yanaşdığınız və təqdim etdiyimiz məsələləri müstəqil həll edə bildiyiniz halda hər hansı şəraitdə həndəsəyə aid məsələlər həllində müvəffəqiyyət qazanacağınıza əvvəlcədən təminat vermək olar.

Təlim prosesində ümumiləşdirmə şagirdlərin riyazi mədəniyyətinin yüksəldilməsində sistematik məntiqi əməliyyatdır. Vəsəitdə verilən məsələlərin əksəriyyəti həmin təfəkkür əməliyyatından düzgün istifadə etmək və bununla da həndəsəni daha da dərindən öyrənmək üçün olduqca faydalıdır.

Oxuculara təqdim edilən bu kitab müəllifin uzun illər ərzində apardığı axtarırların nəticəsidir. Burada, görkəmli riyaziyyatçıların dili ilə həndəsəni öyrənməyin əhəmiyyəti, ayrı-ayrı məsələlər üzərində düşüncə xüsusiyyətləri, unudulmuş biliklərin bərpası, yenidən öyrənmək üçün məsələlər vasitəsi ilə təkrarın təşkili və aparılması göstərilir, həndəsə məsələlərinin həlli yolları, bununla əlaqədar şagirdlərin ümumiləşdirmə və xüsusişdirmə qabiliyyətlərinin inkişafı nümunələri araşdırılır.

Öz faydalı qeydləri və təklifləri ilə şagirdlərin həmin həndəsi qabiliyyətlərinin yüksəldilməsində faydalı ola biləcək, bu kitabın daha da təkmilləşməsinə kömək edəcək, xeyirxah oxuculara qabaqcadan minnətdarlığımızı bildiririk.

Hazırkı proqrama görə həndəsənin hər kii bölməsi I-VI siniflərdə propedevtik, VII-IX siniflərdə planimetriya sistematik, stereometriya propedevtik, X-XI siniflərdə isə stereometriya sistematik öyrənilir.

Təlimin göstərilən mərhələlərində həndəsənin lazımi səviyyədə öyrənilməsinə nail olmaq üçün aşağıdakı cəhətlərə diqqəti artırmaq məqsəduyğundur.

1) Məktəbə qədər yaşda və ibtidai siniflərdə hansı həndəsi materiallardan istifadə etməklə uşaqların düşüncələrinin inkişaf etdirilməsinə daha çox əhəmiyyət verilməlidir? Bu məqsədlə ailədə və bağçada uşaqlarla lazımi hazırlıq işləri aparmaq olduqca faydalıdır. Şagirdlərdə ümumiləşdirici təfəkkürün düzgün inkişaf etdirilməsi, onların məktəbəqədərki hazırlığından, əyani həndəsə ilə I-VI siniflərdə necə tanış olmalarından xeyli asılıdır.

2) V-VI siniflərdə həndəsə materialının öyrənilməsinin metodik sistemini müasir tələblər səviyyəsində qurmaq lazımdır.

Apardığımız araşdırmalar göstərdi ki, V-VI siniflər üçün vahid riyaziyyat kursu yaratmaq cəhdləri müvəffəqiyyətlə başa çatmamışdır. Bu ilk növbədə kursun həndəsə hissəsinin, həm də həndəsi və ədədi materialın birləşməsinin məzmunlarına aiddir. Bir çox belə kurslar yaradılmışdır. Lakin burada, birincisi həndəsi material azdır, onlar əsasən gələcək sistematik biliklərin propedevtikasına yönəlmişdir. İkincisi, ibtidai siniflərdə olduğu kimi bu iki ildə öyrənilənləri, ifadə olunanları heç olmasa təsəvvürlər səviyyəsində başa düşmək çətindir. Bu o deməkdir ki, sonrakı sinifdə hər şeyi təzədən başlamaq lazımdır. Əsas problem ondan ibarətdir ki, bu yaş üçün V-VI sinif şagirdlərinə xas olan böyük fəallıq və imkanauyğun xüsusi həndəsə kursu yaratmaq lazımdır. Bu məzmununda da kitablar vardır, lakin həmin problem üzərində işi davam etdirmək lazımdır.

Son illərdə bəzi xarici ölkələrdə (o cümlədən Rusiyada) V-VI siniflərin riyaziyyat kursunu hesab, cəbr və həndəsənin elementləri üzrə ayrı-ayrı dərslək şəklində ayırmaq fikri yaranmış və qismən həyata keçirilmişdir. Lakin ibtidai və V-VI siniflər üçün

vahid riyaziyyat dərsləklərinin yüksək səviyyədə hazırlanması daha məqsədəuyğundur.

3) Son 100 ildə VII-XI siniflərdə həndəsənin sistemətik kursundan çoxlu sayda dərsləklər yazılmışdır. Ləkin onların hamısı bir-birinə, Evklidin “Başlanğıcları” kitabına oxşayır. Təriflərin, aksiomların, teoremlərin ifadəsi, mövzuların ardıcılığı, tədrisin şərhə texnologiyası dəyişsə də hər şey “Başlanğıclar” səviyyəsində qalmışdır. XX əsrin ikinci yarısında məktəb kursuna koordinatlar, vektorlar, həndəsə çevirmələr kimi mövzular daxil edilmişdir, onlar isə faktik olaraq dərinləndən öyrənmə səviyyəsində olmaqla kütləvi məktəb səviyyələsinə uyğun işlənməməmişdir. Məktəblərimizdə uzun müddət A.P.Kiselyovun, sonralar isə A.N.Kolmoqorovun, Z.A.Skopetsin, A.D. Aleksandrovun, A.V.Poqorelovun həndəsə dərsləklərindən istifadə olunmuşdur. Hazırda isə Respublikamızda hazırlanmış kitablar işlənilir. Dərsləkləri daima təkmilləşdirmək lazımdır.

4) Hazırda riyaziyyatı dərinləndən öyrənən məktəblər və siniflər mövcuddur. Həndəsənin dərinləşdirilmiş kursuna şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətini inkişaf etdirmək ilə əlaqədar material daxil ola bilər. Həndəsəyə daxil edilən belə materialın məzmunu və öyrənilməsi metodikası necə olmalıdır? Qoyulan suala cavab vermək üçün hər hansı ümumi mühakimədən başlamaq lazımdır. Bu məqsədlə şagirdlərə fərdi yanaşmaq məqsədəuyğundur. Eyni bir material bəzi şagirdlər üçün asan, bəzilərinə görə isə çətinədir. Dərsləkdə hər iki qrupa daxil ola bilən şagirdlər nəzərə alınmalıdır. Həndəsə dərslərində hər bir şagirdin qavrama qabiliyyətinə uyğun olan nəzəri və praktik material olmalıdır.

5) Həndəsənin tədrisində ciddi məntiqə, aksiomatik qurma ilə intuisiyanın, şagirdlərin həyat təcrübəsinin münasibəti didaktik prinsiplərə əsaslanaraq müəyyənləşdirilməlidir. Əsas diqqət fiqurların xassələrinin mənimsənilməsi, bunların məsələlər həllinə və praktikaya tətbiqləri əsasında şagirdlərdə məntiqi təfəkkürün o, cümlədən ümumiləşdirmə qabiliyyətinin, idrak prosesinin inkişafına verilməlidir.

6) Məlumdur ki, VII-IX siniflərdə planimetriya, son iki sinifdə isə stereometriya öyrənilir. Bu ənənə də Evkliddən başlamış, indi də davam edir. Həndəsənin belə tədrisi real həyatı hadisələrə uyğundurmu?

Bu sualın böyük tarixi vardır, ona verilən bir çox cavablar tam aydın deyil.

Hər şeydən əvvəl bilmək lazımdır ki, bizi müstəvi obyektləri deyil, üçölçülü fəza əhatə edir. Yaşadığımız aləm üç ölçülüdür, bütün məktəb fənləri fəza obyektlərini və proseslərini öyrənir. Deməli, həndəsənin planimetriya və stereometriya olmaqla iki hissəyə bölünməsi həyatı deyil. Məlumdur ki, bunu Evklid özünün “Başlanğıcları”nda belə etmişdir. Lakin tarixən isbat olunmuşdur ki, Evklid həmin kitabı həndəsəni yeni öyrənməyə başlayanlar üçün dərslik deyil, artıq bu haqda müəyyən biliyi olan insanlara ünvanlamışdır.

Əvvəl fəza fiqurlarının, sonra isə müstəvi fiqurlarının xassələrini öyrənmək, habelə həndəsəni fuzionizm ideyası (fəza və müstəvi fiqurların xassələrini qarşılıqlı əlaqədə öyrənmək) əsasında qurmaq fikirləri də vardır.

Hazırda bir çox ölkələrdə (o cümlədən Rusiyada) həndəsə dərsliyi üçüncü yanaşma əsasında qurulmuşdur. Şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətini inkişaf etdirmək baxımından belə yanaşmanı müvafiq hesab edirik.

7) Həndəsənin mövcud öyrənmə sistemi şagirdlərin idrak fəaliyyətinin bütün mərhələlərinin (qavrayış, diqqət, hafizə, təfəkkür və nitq, təxəyyül və yaradıcılıq), xüsusən təfəkkür əməliyyatları və formalarının inkişaf etdirilərək qaydaya salınmasında mühüm vasitə olmalıdır.

8) Həndəsə dərslərində riyaziyyatın tədrisi sahəsində əldə olunmuş müsbət nəliyyətlərə və təcrübəyə əsaslanaraq, səmərəli olaraq irəliyə baxmaqla çətinliklər üzərində düşünməyi, analitik-sintetik yolla mühakimə və isbatlar aparma qabiliyyətini şagirdlərdə inkişaf etdirməyi əsas vəzifə hesab edirik. Bu isə ilk növbədə dərsliklər və hazırlıqlı müəllimlər vasitəsilə reallaşa bilər.

Bütün yuxarıda göstərilənlərlə yanaşı, müasir informasiyalı cəmiyyətdə, İKT-nin bütün didaktik imkanlarını müəyyənləşdirmək və onlardan geniş istifadə etmək lazımdır.

Dərs vəsaitində təhlil olunan hesablama isbat və qurma məsələləri deyilənlər baxımından faydalıdır.

I. Planimetriya

1. Hesablama məsələləri

1. ABC üçbucağında medianlar $AM=15\text{sm}$ və $CL=12\text{ sm}$, bir tərəf isə $BC=2\sqrt{105}\text{ sm}$ -dir. BP medianını tapın.

2. Bərabəryanlı trapesiyanın diaqonalı onu sahələri 6 sm^2 və 14 sm^2 olan iki üçbucağa ayırır. Trapesiyanın yan tərəfi 4 sm olarsa, onun hündürlüyünü tapın.

3. Bərabəryanlı üçbucaqda yan tərəf 15 sm , oturacaq isə 24 sm -dir. Bu üçbucağın medianlarının və hündürlüklərinin kəsişmə nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

4. C düz bucaq tənböləni hipotenuzu 15 sm və 20 sm hissələrə bölür. Bölgü nöqtəsindən C bucağının tərəflərinə qədər məsafələri tapın.

5. Trapesiyanın oturacaqları 6 sm və 18 sm -dir. Diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindən oturacaqlara paralel düz xətt yan tərəfləri kəsənə qədər uzadılmışdır. Bu düz xəttin yan tərəflər arasında qalan parçasının uzunluğunu tapın.

6. ABCD trapesiyasında AB və DC parçaları oturacaqlardır. $AB=30\text{ sm}$, $DC=24\text{ sm}$, $AD=3\text{ sm}$ və $\angle DAB=60^\circ$ olarsa BCE üçbucağının sahəsini tapın.

7. ABC üçbucağında $AB=3\text{m}$. AB tərəfinə endirilmiş CD hündürlüyünün uzunluğu $\sqrt{3}\text{ m}$ -dir. $AD=BC$. AC tərəfinin uzunluğunu tapın.

8. ABC üçbucağında BD hündürlüyü $11,2$, AE hündürlüyü isə 12 -yə bərabərdir, $BE:EC=5:9$. AC tərəfinin uzunluğunu tapın.

9. Çevrə daxilinə çəkilmiş qabarıq ABCD dördbucaqlısının diaqonalları E nöqtəsində kəsişir. BD diaqonalı ABC bucağının

tənböləni, BD, CD parçalarının uzunluqları isə uyğun olaraq 25 və 15-dir. BE parçasının uzunluğunu tapın.

10. ABC üçbucağında $\angle MAC=45^0$ olmaqla AM medianı çəkilmişdir. $AC=3\sqrt{2}$, $BC=10$ olarsa ABC üçbucağının sahəsini tapın.

11. Bərabəryanlı trapesiyanın yan tərəfi $\sqrt{13}$ -ə, oturacaqları isə 3 və 4-ə bərabərdir. Trapesiyanın diaqonalını tapın.

12. Yan tərəfləri 10, daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu 4 olan bərabəryanlı trapesiyanın sahəsini tapın.

13. Oturacağı AC və oturacaqdakı bucağı 75^0 olan bərabəryanlı üçbucağın xaricinə mərkəzi O nöqtəsində yerləşən çevrə çəkilmişdir. BOC üçbucağının sahəsi 16-ya bərabərdir. Çevrənin radiusunu tapın.

14. Radiusu $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ olan çevrənin daxilinə düzgün ABC üçbucağı çəkilmişdir. BD vətəri AC tərəfini E nöqtəsində kəsir, $AE:EC=3:5$ olarsa BE parçasının uzunluğunu tapın.

15. Hipotenuzu $AC=20$ olan düzbucaqlı ABC üçbucağında BM medianı çəkilmişdir. ABM üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrə P nöqtəsində BM medianına toxunur. $BP:PM=3:2$ olarsa BC katetini tapın.

16. Oturacaqları 20 sm və 10 sm, yan tərəfləri 6 sm və 8 sm olan trapesiyanın sahəsini tapın.

17. Tərəfləri a, b, c və d olan trapesiyanın sahəsini tapın ($d \parallel b$ və $d > b$)

18. ABCD paraleloqramın diaqonalları O nöqtəsində kəsişir. $AB=a$, $BC=b$ ($a > b$) və $\angle AOD=\alpha$ isə paraleloqramın sahəsini tapın.

19. ABCD paraleloqramının BD diaqonalı onun DH hündürlüyü və BC tərəfi ilə 40^0 -li bucaq əmələ gətirir. Paraleloqramın bucaqlarını tapın.

20. ABC üçbucağında C bucağı iti qalmaqla artırsa, AC və BC tərəflərinin uzunluqları isə dəyişməz qalırsa, AB tərəfi necə dəyişir?

21. Katetlərinin uzunluğu $BC=a$, $AC=b$ olan düzbucaqlı ABC üçbucağının hipotenuzu üzərində AB düz xətti ilə ayrılmış, həmin üçbucağın yerləşmədiyi, yarımüstəvidə kvadrat qurulmuşdur. C düz bucaq təpəsindən kvadratin Q mərkəzinə qədər məsafəni tapın.

22. Bərabəryanlı üçbucağın bərabər olmayan tənbölənləri arasındakı bucaq α -dir. Üçbucağın təpəsindən çəkilmiş medianın uzunluğu l -ə bərabərdir. Bu üçbucağın tənbölənləri arasındakı asılılığı müəyyən edin.

23. Mərkəzi O nöqtəsində, radiusu R olan çevrədə CD diametri və ona paralel AB vətəri verilir. Diametrin və ya onun uzantısı üzərində ixtiyari M nöqtəsi götürülmüşdür. AM^2+BM^2 cəmi M nöqtəsinin verilmiş vəziyyətində vətərin vəziyyətindən asılıdır mı?

24. Üçbucağın tərəfləri a, b, c -dir. a tərəfinə və b, c tərəflərinin uzantılarına toxunan çevrənin radiusunu hesablayın.

25. Bərabəryanlı ABC üçbucağının, A_1, B_1 uyğun olaraq AC, BC tərəflərinin orta nöqtələri və $\angle ABB_1 + \angle BAA_1 = 60^\circ$ olarsa, bucaqlarını tapın.

26. ABC üçbucağının tənbölənləri O nöqtəsində kəsişir. AO düz xətti OBC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrəni O və M nöqtələrində kəsir. $BC=2$, $\angle A=30^\circ$ olarsa, OM parçasının uzunluğunu tapın.

27. AB çevrənin diametridir. Mərkəzi B nöqtəsində olan ikinci çevrənin radiusu 2-yə bərabərdir və birinci çevrə ilə C, D nöqtələrində kəsişir. İkinci çevrənin $CE=3$ vətəri birinci çevrəyə toxunanın hissəsidir. Birinci çevrənin radiusunu tapın.

28. $ABCD$ və $ECDA$ trapesiyaları bərabəryanlıdırlar, $BC \parallel AD$, $BC > AD$ və $AE \parallel DC$, $AE > DC$. CDE və BDA bucaqları cəminin kosinusu $\frac{1}{3}$, $DE=7$ dir. BE -ni tapın.

29. Oturacaqları 1 və 4 olan bərabəryanlı trapesiyasında bir-birinə, hər biri iki yan tərəfə və oturacaqlardan birinə toxunan iki çevrə yerləşdirilmişdir. Trapesiyanın sahəsini tapın.

30. M,N nöqtələri ABCD trapesiyasının yan tərəfləri üzərində olub, onlardan keçən düz xətt $AD=a$, $BC=b$ olan oturaqlara paraleldir. MN parçasının diaqonallar vasitəsilə üç bərabər hissəyə bölündüyünü bilərək onun uzunluğunu tapın. Trapesiyanın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi MBCN dördbucaqlısının daxilində yerləşir.

31. Qabarıq ABCD dördbucaqlısında tərəflərin orta nöqtələri uyğun olaraq K, L,M,N-dir. KM və LN parçaları E nöqtəsində kəşişir. AKEN, BKEL və DNEM dördbucaqlarının sahələri uyğun olaraq 6; 6; 12-dir.

a) CMEL dördbucaqlısının sahəsini;

b) $AB=\frac{1}{2}$ isə CD parçasının uzunluğunu tapın.

32. Radiusu 3-ə bərabər çevrə kateti $AB=5$ olan düzbucaqlı ABC üçbucağının A və B təpələrindən keçir. CD düz xətti D nöqtəsində bu çevrəyə toxunur. DA şüası CDB bucağını yarıya bölür. ABD bucağının qiymətini və ikinci AC katetinin uzunluğunu tapın.

33. ABC üçbucağında B təpə bucağı $\frac{\pi}{3}$ -ə bərabərdir, daxilə çəkilmiş çevrənin mərkəzini A, C təpələri ilə birləşdirən parçaların uzunluğu isə uyğun olaraq 4 və 6 dır. ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

34. Bərabəryanlı ABC üçbucağının AC və CB yan tərəflərini uyğun olaraq P, Q nöqtələrində kəsən çevrə həm də ABQ üçbucağının xaricinə çəkilmişdir. AQ və BP parçaları D nöqtəsində, $AQ:AD=4:3$ olmaqla, kəşişir. $S(PQC)=3$ olarsa, DQB üçbucağının sahəsini tapın.

35. Düzbucaqlı ABC üçbucağının ($\angle C = 90^0$) sahəsi 6-ya, onun xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu $\frac{5}{2}$ -ə bərabərdir. Bu üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

36. Mərkəzi M nöqtəsində olan çevrə AOB bucağının tərəflərinə A, B nöqtələrində, mərkəzi N nöqtəsində olan ikinci

çevrə isə BA şüasına, OA parçasına, bucağın OB tərəfinin O nöqtəsindən uzantısına toxunur. $ON:OM=12:13$. Çevrələrin radiuslarının nisbətini tapın.

37. Radiusu $2\sqrt{2}$ olan çevrənin daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının üç tərəfi eyni olub 2-yə bərabərdir. Dördüncü tərəfin uzunluğunu tapın.

38. Tərəfi 4 sm olan ABCD kvadratında mərkəzləri A, C nöqtəsində olan BD çevrə qövsləri çəkilmişdir. Bu qövslərlə əhatə olunmuş “linzanın”-fiqurun sahəsini tapın.

39. ABCD paraleloqramında l_1, l_2 və m_1, m_2 düz xətləri uyğun olaraq A, C və B, D bucaqlarının tənbölgənləridir. l_1 və l_2 arasındakı məsafə m_1 və m_2 arasındakı məsafədən $\sqrt{3}$ dəfə azdır. $AC = \sqrt{\frac{22}{3}}$, $BD=2$. BAD bucağını və ABD üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

40. Bucaqlarından biri $\arctg \frac{4}{3}$ olan dördbucaqlı radiusları $\sqrt{6}$ -ya və 1-ə bərabər çevrələrin uyğun olaraq daxilinə və xaricinə çəkilmişdir. Dördbucaqlının sahəsini və diaqonalları arasındakı bucağı tapın.

41. Oturacaqları 4 və 1 olan bərabəryanlı trapesiyanın daxilinə çevrə çəkilmişdir. Bu trapesiyanın sahəsini tapın.

42. Düzbucaqlı üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrə toxunma nöqtəsilə katetlərdən birini uzunluqları 4 və 6 olan parçalara ayırır. Digər katetin uzunluğunu tapın.

43. Bərabəryanlı ABC üçbucağında ($AB=BC$) AM medianı və AH hündürlüyü bu üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrəni uyğun olaraq P və K nöqtələrində kəsənə qədər uzadılmışdır. $AM:MP=11:3$ olduğu məlumdur. AH:HK nisbətini tapın.

44. Oturacağı 12 sm və hündürlüyü 8 sm olan bərabəryanlı üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrəyə oturacağına paralel toxunan çəkilmişdir. Bu toxunanın üçbucağın tərəfləri arasında qalan parçasının uzunluğunu tapın.

45. Oturacaqları $a = 7, b = 4$ olan trapesiyanın diaqonallarının orta nöqtələrini birləşdirən parçanın uzunluğunu tapın.

46. ABCD paraleloqramın BC tərəfindəki M nöqtəsi bu tərəfi B tərəsindən başlayaraq 5:2 nisbətində bölür. AM və BD-in kəsişmə nöqtəsi P olarsa, $S(BMP):S(ABCD)$ nisbətini tapın.

47. Bərabəryanlı ABCD trapesiyasında O – kiçik BC oturacağının orta nöqtəsi, OA isə A bucağının tənbölənidir. Trapesiyanın hündürlüyü 6, $AD=16$ -dır. Trapesiyanın sahəsini tapın.

48. Trapesiyanın oturacaqlarından birinin uzunluğu 7 sm-dir. Oturacaqlara paralel və trapesiyanı sahələri bərabər iki hissəyə bölən parçanın uzunluğu 5 sm-ə bərabərdir. Trapesiyanın ikinci oturacağının uzunluğunu tapın.

49. ABCD kvadratinin BC tərəfi üzərində, təpə nöqtəsindən fərqli, M nöqtəsi qeyd edilmişdir və ondan, AC diaqonalını və AB düz xəttini uyğun olaraq N, P nöqtələrində kəsən, düz xətt keçirilmişdir. $MN=DN$ olduğu məlumdur. MPD bucağının qiymətini tapın.

50. Bərabəryanlı ABC üçbucağının daxilinə ($AB=BC$) radiusu $\sqrt{0,507}$ -yə bərabər olan çevrə çəkilmişdir. AM medianı bu çevrəni P və Q nöqtələrində kəsir (P nöqtəsi A və Q arasında yerləşir). $AP=QM$ olarsa PQ parçasının uzunluğunu tapın.

51. İki konsentrik çevrənin diametrləri rombun diaqonalları üzərinə düşür. Rombun iti bucağının hansı qiymətində çevrələrin əhatə etdiyi halqanın sahəsi kiçik çevrə dairəsinin sahəsinin 2 misindən böyük olar?

52. Bərabəryanlı ABC üçbucağının ($AC=BC$) daxilinə çevrə çəkilmişdir. Bu fiqurun, aralarındakı məsafə ən kiçik olan, iki nöqtəsini tapın. ACB bucağının qiymətindən asılı olaraq məsələnin necə müxtəlif həlli olduğunu aydınlaşdırın.

53. Mərkəzləri arasındakı məsafə a -ya bərabər olan $(0; r)$ və $(0; 2r)$ çevrələri verilir. OO_1 parçası üzərində götürülmüş X nöqtəsindən kiçik və böyük çevrələr uyğun olaraq α, β bucaqları

altında görünür, $\sin \frac{\alpha}{2}$ isə $\sin \frac{\beta}{2}$ -dən üç dəfə böyükdür. X nöqtəsinin OO_1 parçası üzərindəki vəziyyətini müəyyən edin.

54. Kvadratin O mərkəzindən tərəfinə perpendikulyar və ona bərabər OM parçası çəkilmiş və sonra M nöqtəsi kvadratin təpələri ilə birləşdirilmişdir. Təpəsi M nöqtəsində olan qonşu parçalar (OM parçası müstəsna olmaqla) arasındakı bucaqlardan ən böyüyünü tapın.

55. ABCD rombunun D təpə nöqtəsi ACFE rombunun AE tərəfi üzərindədir. BAD bucağının hansı qiymətində BE və FE parçaları perpendikulyar olar?

56. Yan tərəfi $BC=5$, A və D təpələrindən BC düz xəttinə qədər məsafələr uyğun olaraq 3 və 7 olan ABCD trapesiyasının sahəsini tapın.

57. Çevrə üzərində A nöqtəsi, onun diametri üzərində D, E nöqtələri, diametrin B nöqtəsindən uzantısı üzərində isə F nöqtəsi götürülmüşdür. $\angle BAD = \angle ACD$, $\angle BAF = \angle CAE$, $BD = 2$, $BE = 5$, $BF = 4$ olarsa BC-nin uzunluğunu tapın.

58. ABCD trapesiyasının BC oturacağı üzərində, A, C, D nöqtələri ilə birlikdə eyni çevrə üzərində olan, E nöqtəsi qeyd edilmişdir. A,B,C nöqtələrindən keçən digər çevrə CD düz xəttinə toxunur. $AB=12$, $BE:EC=4:5$ isə BC-ni tapın. Verilmiş şərtlər ödənildikdə birinci çevrənin radiusunun ikinci çevrənin radiusuna nisbətinin bütün mümkün qiymətləri çoxluğunu tapın.

59. Trapesiyanın diaqonalları 12 və 6-dır. Oturacaqların uzunluqları cəmi isə 14-ə bərabərdir. Trapesiyanın sahəsini tapın.

60. Hündürlüyü 2-yə bərabər ABCD trapesiyası, $(BC \parallel AD)$ mərkəzi O nöqtəsində olan çevrənin daxilinə çəkilmişdir, $\angle COD = 60^\circ$. Bu trapesiyanın sahəsini tapın.

2. İsbat məsələləri

61. ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrə BC, CA və AB tərəflərinə uyğun olaraq A_1 , B_1 və C_1 nöqtələrində toxunur. A

nöqtəsi və B_1C_1 düz xəttindən eyni uzaqlıqda olan düz xətt $q(A)$ olsun; analoji olaraq $q(B)$, $q(C)$ düz xətləri təyin edilsin. $q(A)$, $q(B)$, $q(C)$ düz xətlərinin əmələ gətirdiyi üçbucağın və $\triangle ABC$ -in xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzlərinin üst-üstə düşdüyünü isbat edin.

62. ABC üçbucağının BM medianı üzərində, $\angle AKM = \angle MBC$ olmaqla, K nöqtəsi qeyd olmuşdur. $AK=BC$ olduğunu isbat edin.

63. İsbat edin ki, düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuza çəkilmiş hündürlük yalnız və yalnız 1-ə bərabər olduqda, onu $y = x^2$ parabolası daxilinə, hipotenuzu absis oxuna paralel götürməklə, çəkmək olar (bütün təpələri parabolanın üzərində olan üçbucaq parabolanın daxilinə çəkilmişdir).

64. ABC üçbucağının AB və BC tərəfləri üzərində ($\angle B \neq 90^\circ$) uyğun olaraq M və N nöqtələri qeyd olmuşdur. İsbat edin ki, A , M , N və C nöqtələri yalnız və yalnız AN və CM parçalarının kəsişmə nöqtəsi ABC və BMN üçbucaqlarının ortosentrlərini birləşdirən düz xətt üzərində olduqda, bir çevrə üzərində yerləşirlər.

65. ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin, B təpəsi daxil olmayan, qövsünün ortasının A , C təpələrindən və daxilə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən bərabər uzaqlıqda olduğunu isbat edin.

66. Üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafənin $TO^2=R^2-2Rr$ (1) düsturu ilə hesablandığını isbat edin, burada r və R uyğun olaraq daxilə və xaricə çəkilmiş çevrələrin radiusları, T, O isə mərkəzləridir.

67. ABC üçbucağının xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzlərini uyğun olaraq O və T ilə işarə edək. Xaricdən daxilə çəkilmiş ω_a çevrəsi AB , AC tərəflərinin uzantılarına və BC tərəfinə uyğun olaraq K , M , N nöqtələrində toxunur. KM parçasının P orta nöqtəsinin ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrə üzərində olduğu məlumdur. O , N və T nöqtələrinin bir düz xətt üzərində yerləşdiyini isbat edin.

68. İsbat edin ki, ixtiyari üçbucağı, düzbucaqlı üçbucaq əmələ gətirən, üç hissəyə ayırmaq olar.

69. İsbat edin ki, qabarıq n bucaqlının daxili bucaqlarının sinusları cəmi 6,29-dan kiçikdir.

70. ABC üçbucağı verilir. İsbat edin ki, BB' tənbölənin orta nöqtəsi, A təpəsi və C nöqtəsinin B təpəsindəki xarici bucağın tənböləri üzərindəki proyeksiyası bir düz xətt üzərindədir.

71. Verilmiş çevrə daxilinə düzgün üçbucaq çəkilmişdir. Çevrə üzərində qeyd olunmuş ixtiyari nöqtədən bu üçbucağın təpələrinə qədər məsafələrin kvadratları cəminin üçbucağın tərəfi kvadratının iki mislinə bərabər olduğunu isbat edin.

72. İsbat edin ki, çevrə daxilinə çəkilmiş qabarıq dördbucaqlının qarşı tərəflərinin hasilləri cəmi onun diaqonalları hasilinə bərabərdir.

73. İtibucaqlı ABC üçbucağında AL tənböləri çəkilmişdir. İsbat edin ki, ABL və ACL üçbucaqlarının ortosentrləri arasındakı məsafə $|AB - AC|$ -ni aşmır.

74. Düzbucaqlı ABC üçbucağında ($\angle C = 90^\circ$) CH hündürlüyü AM və BN tənbönlərini uyğun olaraq P və Q nöqtələrində kəsir. İsbat edin ki, PM və QN parçalarının ortalarından keçən düz xətt hipotenuza paraleldir.

75. Qabarıq ABCDEFG yeddibucaqlısında $AC \parallel EF$, $BD \parallel FG$, $CE \parallel GA$, $DF \parallel AB$, $EG \parallel BC$ və $FA \parallel CD$ isə $GB \parallel DE$ olduğunu isbat edin.

76. 1) Sunərgizi üçbucağının bucaqlarından birinin 60° -yə bərabər olduğunu isbat edin.

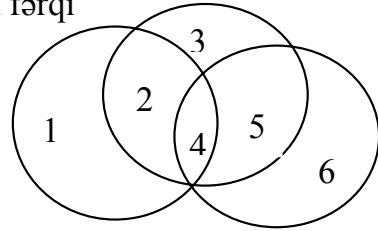
2) Bu üçbucağın digər iki bucaqlarını da tapın.

77. Fərz edək ki, a, b, c üçbucağın tərəflərinin uzunluqlarıdır, x, y, z isə $x + y + z = 0$ şərtini ödəyən ədədlərdir. $a^2xy + b^2yz + c^2zx \leq 0$ bərabərsizliyini isbat edin.

78. Qabarıq ABCD dördbucaqlısının diaqonalları O nöqtəsində kəsişir. AO və DO parçaları üzərində uyğun olaraq M və N nöqtələri elə götürülmüşdür ki, $BM \parallel CD$ və $CN \parallel AB$. İsbat edin ki, $MN \parallel AD$.

79. Üç eyni dairə 87-ci şəkildə göstərildiyi kimi müstəvi üzərində yerləşdirilmişdir və alınmış 6 hissənin hər birinin sahəsi tam sayda kvadrat santimetrlə ifadə olunur.

İsbat edin ki, birinci, üçüncü və altıncı hissələrin sahələri cəmi ilə ikinci, beşinci hissələrin sahələri cəminin fərqi 3sm^2 -na bölünür.



Şəkil 87 .

80. Ucları A, B nöqtələrində olan $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ çevrələrinin qövsləri AB düz xəttindən bir tərəfdə yerləşir. B nöqtəsindən çıxan iki şüa bu qövsləri uyğun olaraq M_1, M_2, M_3 və K_1, K_2, K_3 nöqtələrində kəsir. İsbat edin ki,

$$\frac{M_1 M_2}{M_2 M_3} = \frac{K_1 K_2}{K_2 K_3}$$

81. Trapesiyanın hər bir təpə nöqtəsi bu təpələrin daxil olmadığı diaqonallara nəzərən simmetrik inikas edilmişdir. İsbat edin ki, təpələri alınmış nöqtələrdə olan dördbucaqlı da trapesiyadır.

82. ABC üçbucağının ($AB < BC$) daxilə çəkilmiş çevrənin mərkəzi T, AC tərəfinin və xaricə çəkilmiş çevrənin ABC qövsünün orta nöqtələri uyğun olaraq M və N –dir. İsbat edin ki, $\angle TMA = \angle TNB$.

83. ABCD bütün bucaqları 60° -dən böyük olan rombdur. Onun tərəfləri üzərində bərabərtərəfli ABK və CDM üçbucaqları qurulmuşdur. Fərz edək ki, KC və BM düz xətləri N nöqtəsində kəsişir. İsbat edin ki, AND düzgün üçbucaqdır.

84. ABCD qabarıq dördbucaqlısı verilir. İsbat edin ki, Varinon paraleloqramının perimetri, bu dördbucaqlının diaqonalları uzunluğunun cəminə bərabərdir.

85. İsbat edin ki, dördbucaqlının orta xətləri kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünür.

86. Dördbucaqlının diaqonallarının kvadratları cəminin onun orta xətlərinin kvadratları cəmindən 2 dəfə böyük olduğunu isbat edin.

87. İsbat edin ki, təpələri ABCD dördbucaqlısının tərəflərinin ortalarında olan paraleloqramın sahəsi bu dördbucaqlının sahəsinin yarısına bərabərdir.

88. İsbat edin ki, tərəflərinin ortaları eyni olan bütün dördbucaqlılar müadildir.

89. İsbat edin ki, dördbucaqlının sahəsi, diaqonallarından biri, orta xətti və bunlar arasındakı bucağın sinusu hasilinə bərabərdir.

90. İsbat edin ki, dördbucaqlının diaqonalları bərabədirsə, onda onun sahəsi orta xətlərinin hasilinə bərabərdir.

91. İsbat edin ki, Varinon paraleloqramının dördbucaqlının qarşı təpələrinə yanaşıq ayırdığı üçbucaqların sahələri cəmi bərabər olub onun (dördbucaqlının) sahəsinin dördə birinə bərabərdir.

92. Sahəsi S olan dördbucaqlının daxilində E nöqtəsi qeyd edilərək, onun bütün tərəflərinin orta nöqtələrinə nəzərən inikas olunur. Yeni $A_1B_1C_1D_1$ dördbucaqlısı alınır. İsbat edin ki, $S(A_1B_1C_1D_1)=2S$.

93. ABCD dördbucaqlısında AC , BD diaqonallarının orta nöqtələri uyğun olaraq E , F ; BC , AD tərəflərinin orta nöqtələri isə L , N -dir. İsbat edin ki, $S(ELFN) < \frac{1}{2} S(ABCD)$.

94. İsbat edin ki, dördbucaqlının tərəflərinin kvadratları cəmi onun diaqonallarının kvadratları cəmi ilə diaqonallarının orta nöqtələrini birləşdirən parça kvadratinın dörd mislinin cəminə bərabərdir.

95. ABCD trapesiyasının ($BC \parallel AD$) CD tərəfi üzərində K nöqtəsi elə qeyd edilmişdir ki, bərabərtərəfli ABK üçbucağı

alınmışdır. İsbat edin ki, AB düz xətti üzərində elə L nöqtəsi var ki, CDL üçbucağı da bərabərtərəflidir.

96. ABCD kvadratının daxilində ABK düzgün üçbucağı qurulmuşdur. BK və AD düz xətləri P nöqtəsində kəsişir. İsbat edin ki, KD və CP parçalarının ortalarını birləşdirən parça kvadratın tərəfinin yarısına bərabərdir.

97. Bucaqları $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}$ və $\frac{4\pi}{7}$ olan üçbucaq verilir. İsbat edin ki, tən bölənlərin oturacaqlarının əmələ gətirdiyi üçbucaq bərabəryanlıdır.

98. İsbat edin ki, 97-ci məsələdə alınmış $B_1CA_1C_1$ dördbucaqlısının xaricinə çevrə çəkmək olar.

99. 97-ci məsələdə baxılan üçbucaq üçün aşağıdakı münasibətlərin ödənildiyini isbat edin.

$$1) OB_1 = OC = CA_1 = \frac{a^2}{c} = c - b;$$

$$2) CC_1 = \frac{ab}{c}, BB_1 = \frac{ac}{b};$$

$$3) BA_1 = a + b - c;$$

$$4) BB_1 \cdot CC_1 = a^2, BB_1 - CC_1 = CA_1$$

$$5) BB_1 = CC_1 + OC;$$

$$6) b = CC_1 + \sqrt{BB_1 \cdot CC_1}, c = BB_1 + \sqrt{BB_1 \cdot CC_1};$$

$$7) 1 < \frac{c-a}{b-a} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

100. ABCD dördbucaqlısı mərkəzi O nöqtəsində olan çevrənin xaricinə çəkilmişdir, AOC sınıq xətti üzərində isə

$\angle PBQ = \frac{1}{2} \angle ABC$ olmaqla P və Q nöqtələri qeyd edilmişdir.

İsbat edin ki, $\angle PDQ = \frac{1}{2} \angle ADC$.

101. ABC üçbucağının tən bölənlərinin T kəsişmə nöqtəsindən AB və BC tərəflərini uyğun olaraq M və N nöqtələrində

kəsən düz xətt çəkilmişdir. Alınmış BMN üçbucağı iti bucaqlıdır. AC tərəfi üzərində K və L nöqtələri, $\angle TLA = \angle TMB$, $\angle TKC = \angle TNB$, olmaqla qeyd edilmişdir. İsbat edin ki, $AM + KL + CN = AC$.

102. ABC üçbucağında BB_1 tənböləndir. B_1 nöqtəsindən BC-yə çəkilmiş perpendikulyar ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin BC qövsünü K nöqtəsində kəsir. B nöqtəsindən AK-ya çəkilmiş perpendikulyar AC-ni L nöqtəsində kəsir. İsbat edin ki, K, L nöqtələri və AC qövsünün (B nöqtəsi daxil olmayan) ortası bir düz xətt üzərindədir.

103. İtibucaqlı üçbucaqda AP, BQ və CR hündürlükləri çəkilmişdir. İsbat edin ki, $\angle ABQ = \angle APR$.

104. İsbat edin ki, itibucaqlı üçbucağın iki hündürlüyünün oturacaqlarını birləşdirən parça ondan verilənə oxşar üçbucaq ayırır.

105. İsbat edin ki, üçbucağın tənböləninin kvadratı aralarında yerləşdiyi tərəflərin hasili ilə üçüncü tərəfin tənbölənlə bölündüyü parçaları hasilinin fərqinə bərabərdir.

106. Üçbucağın daxilində onun bir təpəsindən çəkilmiş median və hündürlük müxtəlifdir və həmin təpədən çıxan tərəflərlə bərabər bucaq əmələ gətirir. Üçbucağın düzbucaqlı olduğunu isbat edin.

107. 1) Bucağın daxilinə çəkilmiş iki çevrənin ortaq T_1T_2 toxunanı (T_1 , T_2 toxunma nöqtələridir) onun tərəflərini A_1 , A_2 nöqtələrində kəsir. $A_1T_1 = A_2T_2$ (və ya bununla eynigüclü $A_1T_2 = A_2T_1$) olduğunu isbat edin.

2) Bucağın daxilinə çəkilmiş iki çevrədən biri bucağın tərəflərinə K_1 , K_2 , digəri L_1 , L_2 nöqtələrində toxunur. İsbat edin ki, K_1L_2 düz xətti bu çevrələrdən bərabər vətərlər ayırır.

108. Çevrə təpəsi O nöqtəsində olan bucağın tərəflərinə A, B nöqtələrində toxunur. A nöqtəsindən OB-yə paralel çevrəni C nöqtəsində kəsən şüa çəkilmişdir. OC parçası çevrəni E nöqtəsində kəsir, AE və OB düz xətləri isə K nöqtəsində kəsişir. İsbat edin ki, $OK = KB$.

109. Paraleloqramın hər bir tərəfi üzərində bir nöqtə qeyd edilmişdir. Təpələri bu nöqtələrdə olan dördbucaqlının sahəsi paraleloqramın sahəsinin yarısına bərabərdir. İsbat edin ki, dördbucaqlının diaqonallarından heç olmazsa biri paraleloqramın tərəflərindən birinə paraleldir.

110. Düzgün ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrə üzərində M nöqtəsi qeyd edilmişdir. MA, MB, MC parçalarından ən böyüyünün uzunluğunun qalan ikisinin uzunluqları cəminə bərabər olduğunu isbat edin.

111. İsbat edin ki, kvadratın tərəfi ilə diaqonalının ortaq ölçüsü yoxdur.

112. Müstəvi üzərində mərkəzləri O_1 , O_2 nöqtələrində və ortaq A_2 təpəsi olan iki $A_1B_1A_2C_1$ və $A_2B_2A_3C_2$ kvadratları verilir. B, C nöqtələri isə uyğun olaraq B_1B_2 , C_1C_2 parçalarının ortalarıdır. İsbat edin ki, O_1BO_2C kvadratdır.

113. $A_1A_2A_3$ üçbucağının A_2A_3 , A_3A_1 , A_1A_2 tərəfləri üzərində mərkəzləri O_1 , O_2 , O_3 nöqtələrində (bu nöqtələr üçbucağın xaricində yerləşir) olan kvadratlar qurulmuşdur. İsbat edin ki, 1) O_1O_2 və A_3O_3 parçalarının uzunluqları bərabərdir və qarşılıqlı perpendikulyardırlar; 2) A_3A_1 , O_1O_2 , A_3A_2 və A_3O_3 parçalarının ortaları kvadratın təpələridir; 3) Bu kvadratın sahəsi mərkəzi O_3 nöqtəsindəki kvadratın sahəsindən 8 dəfə kiçikdir.

114. Düzbucaqlı üçbucağın xaricində AC, BC katetləri üzərində ACDE və BCKF kvadratları qurulmuşdur. E, F nöqtələrindən hipotenuzun uzantısına EM və FN perpendikulyarları endirilmişdir. İsbat edin ki, $EM+FN=AB$.

115. ABC üçbucağının xaricində AB, BC tərəfləri üzərində ABDE və BCKF kvadratları qurulmuşdur. İsbat edin ki, DF parçası üçbucağın BP medianından 2 dəfə böyükdür.

116. ABC üçbucağının medianlarının kəsişmə nöqtəsindən AB və AC tərəflərini kəsən l düz xətti çəkilmişdir. İsbat edin ki, l düz xəttindən B, C təpələrinə qədər məsafələrin cəmi ondan A təpəsinə qədər olan məsafəyə bərabərdir.

117. İsbat edin ki, üçbucağın trisektrisləri düzgün üçbucağın təpələrindən keçir (Morle teoremi)¹.

118. İsbat edin ki, dördbucaqlının diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi və qarşı tərəflərinin orta nöqtələri bir düz xətt üzərindədirsə, onda o, trapesiya və ya paraleloqramdır.

119. AMNO paraleloqramının ON tərəfi və onun OM diaqonalı üzərində elə B, C nöqtələri qeyd edilmişdir ki, $\vec{OB} = \frac{1}{n}\vec{ON}$ və $\vec{OC} = \frac{1}{n+1}\vec{OM}$. İsbat edin ki, M, B, C nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşir.

120. İsbat edin ki, tərəfləri a, b, c, d olan qabarıq dördbucaqlı üçün $S(ABCD) \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$ bərabərsizliyi doğrudur.

¹ Frenk Morle (1880-1937) İngilis riyaziyyatçısıdır.

3. Qurma məsələləri

Bu məsələlərin şagirdlərin yaradıcılıq vərdisləri və məntiqi təfəkkürünün inkişaf etdirilməsində əhəmiyyətli olması şübhəsizdir. Lakin bunlardan məktəbdə o qədər də istifadə edilmir, onlar kifayət qədər populyar deyildir. Fikrimizcə bunun əsas səbəbi ondan ibarətdir ki, həmin məsələlərin ənənəvi olaraq tövsiyə edilən metodik sxemi quruluş etibarı ilə təkcə çətin olmayıb, həm də həlli gedişində məntiqi ardıcılıq yoxdur. Ənənəvi sxemdəki ardıcılıqsızlıq hər şeydən əvvəl “analiz” istilahının iki mənalı başa düşülməsində özünü göstərir. Bu əməliyyata əsasən “məsələ həllinin açarı”, “məsələ həlli üsulunun axtarılması” və s. kimi baxılır. Analizin məqsədi təkcə məsələnin həlli üsulunu axtarmaqla məhdudlaşmır, burada ikinci bir məqsəd də tapılan həllin tam ümumiliyini müəyyənləşdirməkdir. Analiz əsasən ikinci məqsədə xidmət edir. Daha doğrusu analizin məqsədi axtarılan fiqurun varlığı üçün şərtlər sistemini müəyyən etməkdən ibarətdir. Elmi-metodik ədəbiyyatda çox vaxt analiz sintezə qarşı qoyulur. Sintezlə müəyyən edilir ki, verilən şərtlər sistemi kafidir, başqa sözlə həmin şərtləri gözləməklə qurulmuş fiqur həqiqətən məsələnin bütün şərtlərini ödəyir. Qurma məsələsini həll etmək onun şərtlərini ödəyən bütün fiqurları tapmaq (konstruktiv vasitələrlə) deməkdir. Deməli, analiz və sintez yerinə yetirilmişdirsə məsələ tamamı ilə həll edilmişdir və heç bir “araşdırma” məcburi deyildir. İndicə göstərdiyimiz kimi “araşdırma” tələbi əsasən analizin iki mənalı şərhə nəticəsində yaranmışdır. Odur ki, qurma məsələlərinin ənənəvi həlli sxemində eyni bir əməliyyat iki dəfə aparılır. Bəzən bu iki müxtəlif yolla edilir, bəzən isə üsul da əvvəlki kimi qalır. Çox vaxt araşdırma ilə analiz eyniləşdirilir. Məktəbdə həndəsi qurmalara, ənənəvi çətin və məntiqi dəqiq olmayan dörd mərhələdən əl çəkib müvafiq ümumiləşdirmələri aparmaqla, daha yaxşı diqqət vermək lazımdır. Bu halda şagird və müəllimlərdə konstruktiv məsələlərə canlı maraq yaranar və

yaradıcı təşəbbüs üçün şərait olar. Apardığımız eksperiment və uzun illərin təcrübəsi bu hökmü təsdiq etmişdir.

Qurma məsələləri müəyyən standart sxemlə həll edilir. Əvvəl analiz aparırıq, başqa sözlə əvvəl fərz edirik ki, axtarılan fiqur qurulmuşdur və onun xassələrini araşdırmaqla əsas şərtlərin köməyi ilə necə vermək mümkün olduğunu tapırıq. Bu mühakimələr əsasında qurmanın ardıcılığını təsvir edirik. Sonra isbat etmək lazımdır ki, qurmanın göstərilən ardıcılığı tələb olunan nəticəyə gətirir, habelə hansı hallarda necə həll olması müəyyənləşdirilir. Bir neçə məsələ üzərində bu sxemin tam yerinə yetirilməsi ilə kifayətlənərək, bir çox hallarda həllin yazılışında həmin sxemdən kənara çıxırıq. İş burasındadır ki, əksər hallarda analizdən sonra isbat artıq tam aydın görünür. Belə hallarda isbat aparılmır, lakin unutmaq lazım deyil ki, bu işi müstəqil aparmaq vacibdir. İsbatın tam aşkar olmadığı hallarda yaranmış çətinlikdən çıxış yolu göstərilir. Bəzən həllər sayının göstərilməsi üzərində dayanmağa da ehtiyac olmur (aşkar görünən hallarda). Qurma məsələlərinin həlli metodlarının (həndəsi yerlər, həndəsi çevirmələr, cəbri metod) onların həlli prosesində mənimsənilməsinə üstünlük veririk.

A və B qeyd edilmiş nöqtələdirsə, onda $Ax : Bx = k \neq 1$ şərtini ödəyən x nöqtələrinin həndəsi yeri çevrədir. Bu çevrəyə Apoloni çevrəsi deyilir. Qurma məsələlərinin həllində bəzən bu həndəsi yerdən istifadə olunur.

121. Perimetri və iki daxili bucağı verilən üçbucağı qurun.

122. a, h_a və xaricinə çəkilmiş çevrənin R radiusuna görə üçbucaq qurun.

123. Verilmiş ABC üçbucağının daxilində $elə M$ nöqtəsi qurun ki, $S(ABM):S(BCM):S(ACM)=1:2:3$ olsun.

124. a oturacağına, o biri iki tərəfinin $b-c=m$ fərqinə və oturacağındakı bucaqların $B-C$ fərqinə görə üçbucaq qurun.

125. Verilmiş çevrə daxilindəki P nöqtəsindən $elə$ vətər keçirin ki, P -in vətəri böldüyü parçaların fərqi verilmiş a kəmiyyəti olsun.

126. A nöqtəsi və S çevrəsi verilir. A nöqtəsindən, bu çevrədə uzunluğu d -yə bərabər vətər ayıran, düz xətt çəkin.

127. Müstəvi üzərində A və B nöqtələri verilir. AM və BM parçaları kvadratları fərqlinin sabit olduğu M nöqtələrinin həndəsi yerini tapın.

128. Düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzu üzərində, katetlərə qədər məsafələrinin kvadratları cəmi ən kiçik olan, nöqtəni tapın.

129. Oturacağının yerləşdiyi düz xəttə və yan tərəflərinə çəkilmiş hündürlüklərin oturacaqlarından ibarət iki nöqtəyə görə üçbucaq qurun.

130. Təpə nöqtələrindən birinə, bunun qarşısındakı tərəfin ortasına və hündürlüklərinin kəsişmə nöqtəsinə görə üçbucaq qurun.

131. Hansı eyni düzgün çoxbucaqlılardan parket yığmaq olar?

132. A və B çevrənin verilmiş iki tərpənməz nöqtələridir, M isə həmin çevrənin mütəhərrik nöqtəsidir. AM parçasının, çevrənin xaricində, uzantısı üzərində $MN=MB$ parçası ayrılır. N nöqtələrinin həndəsi yerini tapın.

133. Verilmiş AB parçası üzərində, verilmiş α bucağının yerləşdiyi seqmenti qurun.

134. Bir çevrə düz xəttə A nöqtəsində toxunur. Başqa bir çevrə isə həmin düz xəttə B nöqtəsində və birinci çevrəyə M nöqtəsində toxunur. M nöqtələrinin həndəsi yerini tapın.

135. Dairə daxilinə düzgün altıbucaqlı çəkilmişdir. Yalnız xətkəşdən istifadə etməklə R radiusunun $\frac{1}{n}$ hissəsini qurun,

burada $n=2,3,4,5\dots$

136. Verilmiş düz xətt üzərində, verilmiş iki nöqtədən məsafələri cəmi ən kiçik olan, nöqtə qurun.

137. Bir təpəsi verilmiş iti bucağın daxilində verilən nöqtədə, digər iki təpəsi isə bucağın tərəfləri üzərində olan perimetri ən kiçik üçbucaq qurun.

138. MN düz xətti və onun bir tərəfində A və B nöqtələri verilmişdir. Bu düz xətt üzərində elə bir C nöqtəsi tapın ki, $\angle ACM = 2 \angle BCN$ olsun.

139. Oturacağı a , təpəsindəki bucağı α və yan tərəflərinin cəmi m olan üçbucağı qurun.

140. Verilmiş iki O və O_1 çevrələrinin elə bir kəsənini çəkin ki, kəsənin bu çevrələr daxilində qalan hissələri, verilən a və a_1 parçalarına bərabər olsun.

141. Verilmiş üç nöqtədən, aralarındakı məsafələr bərabər olan, paralel düz xətlər çəkin. Aşkardır ki, söhbət gedən üçüncü məsafə iki bərabər məsafələrin hər birindən 2 dəfə çox ola bilər.

142. Diametrin uzantısı üzərində elə nöqtə qurun ki, bu nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunanın uzunluğu diametrə bərabər olsun.

143. Verilən üçbucağın təpələrini mərkəz qəbul edərək, xaricdən bir-birinə toxunan çevrələr qurun.

144. c tərəfinə, h_b hündürlüyünə və m_a medianına görə üçbucaq qurun.

145. Üç hündürlüklərinin oturacaqlarına görə üçbucaq qurun.

146. İki konsentrik çevrələrdə elə kəsən çəkin ki, böyük çevrənin vətəri kiçik çevrənin vətərindən iki dəfə böyük olsun.

147. Bucağın tərəfi üzərində onun digər tərəfindən və daxilindəki nöqtədən eyni məsafədə olan nöqtəni tapın.

148. Verilmiş seqmentin daxilinə, bir tərəfi seqmentin vətəri (oturacağı) üzərində olan, kvadrat çəkin.

149. Trapesiyanı oturacaqlarına paralel, diaqonalları ilə üç bərabər hissəyə bölünən, düz xətt parçası ilə kəsin.

150. Verilmiş iki nöqtədən keçən və verilmiş düz xəttə toxunan çevrəni qurun.

151. Yalnız xətkəşdən istifadə etməklə trapesiyanı iki müəvil hissəyə ayırın.

152. Yalnız xətkəşdən istifadə edərək paraleloqramı, sahələri 1:3 nisbətində olan, iki hissəyə ayırın.

153. Verilmiş üçbucağa, oturacağı onunla eyni düz xətt üzərində və ortaq bucağı olmaqla müəvil üçbucaq qurun.

154. Verilmiş düz xətt üzərində elə nöqtə tapın ki, onun düz xətdən bir tərəfdə yerləşən iki nöqtədən məsafələri fərqinin modulu ən kiçik, habelə elə nöqtə tapın ki, fərqi modulu ən böyük olsun.

155. Verilmiş ABC üçbucağı daxilinə iti bucağı məlum elə bir romb çəkin ki, onun tərəflərindən biri üçbucağın AB oturacağı üzərində, iki təpəsi isə, üçbucağın AC və BC yan tərəfləri üzərində olsun.

156. Üçbucağın tərəflərindən birinin üzərində A nöqtəsi qeyd edilmişdir. Bu nöqtədən, üçbucağın sahəsini iki bərabər hissəyə bölən, düz xətt keçirin.

157. Radiusu məlum olan, verilmiş nöqtədən keçən və verilən düz xəttə toxunan çevrəni qurun.

158. Verilmiş üç nöqtədən keçən çevrəni qurun.

159. Verilmiş üç nöqtədən bərabər məsafədə olan düz xətti qurun.

160. Dairə xaricindəki nöqtədən, ona xarici hissəsi daxili hissəsinə bərabər olan, kəsən çəkin.

161. Verilmiş üçbucağın xaricinə, verilmiş başqa üçbucağa bərabər, üçbucaq çəkin.

162. Verilmiş üçbucağın daxilinə, verilmiş başqa üçbucağa bərabər, üçbucaq çəkin.

163. Yunan xaçı ilə müadil kvadrat və tərsinə kvadratla müadil yunan xaçı düzəldin.

164. Uzunluğu ən kiçik parça ilə üçbucağı iki müadil hissəyə bölün.

165. Daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrinin mərkəzi verilən Sunərgizi üçbucağını qurun.

166. Dairənin xaricindəki nöqtədən, ona xarici hissəsi daxili hissəsindən iki dəfə böyük olan, kəsən çəkin.

167. Təpələri ABCD düzbucaqlısının tərəfləri üzərində olan rombu qurun.

168. ABCD dördbucaqlısının daxilində elə F nöqtəsi tapın ki, bu nöqtəni dördbucaqlının tərəflərinin orta nöqtələri ilə birləşdirdikdə alınan dördbucaqlıların sahələri bərabər olsun.

169. Tərəflərinin orta nöqtələrinə görə beşbucaqlını qurun.
170. Diaqonallarına, bucaqlarından birinə və oturacaqlarının orta nöqtələrini birləşdirən parçaya görə trapesiyanı qurun.
171. Verilmiş üçbucağın daxilinə bir tərəfi üçbucağın oturacağı üzərində olan kvadrat çəkin.
172. Düz bucağı üç bərabər hissəyə bölün.
173. AB parçasının üçündən ona perpendikulyar qaldırın.
174. Müstəvi üzərində kəsişərək paraleloqram əmələ gətirən dörd düz xətt verilmişdir. Hər bir təpəsi bu düz xətlərdən birinin üzərində olan kvadrat qurun.
175. Çevrə daxilinə çəkilməsi məlum olan dördbucaqlını tərəflərinin uzunluğuna görə qurun.
176. Bucaqları $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}$ və $\frac{4\pi}{7}$ olan (məsələn 97) üçbucağı böyük bucaqlarının tən bölənlərinə görə qurun.
177. ABCD kvadratin daxilində $AX+CX=BX+DX$ şərtini ödəyən bütün X nöqtələrini tapın.
178. ABCD paraleloqramının AB tərəfi üzərində P nöqtəsi qeyd edilmişdir. Tərəfləri ABCD paraleloqramından sahələri bərabər üçbucaqlar ayıran, təpəsi P nöqtəsində olan, daxilə çəkilmiş paraleloqram qurun.
179. Müstəvi üzərində tərəfi 1-ə bərabər düzgün altıbucaqlı çəkilmişdir. Yalnız xətkəşdən istifadə edərək uzunluğu $\sqrt{7}, \sqrt{13}$ olan parçaları qurun.
180. Dörd tərəfinə görə trapesiyanı qurun.

II Stereometriya

1. Hesablama məsələləri

181. Düzbucaqlı $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelepipedinin oturacağının tərəfləri $AB = 12 \text{ sm}$ və $AD = 5 \text{ sm}$ və $(D_1 B \wedge ABC) = 45^\circ$ -dir. DD_1 - i tapın.

182. Kubun iki qarşı tilindən, sahəsi $64\sqrt{2} \text{ sm}^2$ olan, kəsik keçirilmişdir. Kubun tilinin və diaqonalının uzunluğunu tapın.

183. Düzgün dördbucaqlı $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ prizmasında $\angle(BD_1, ADD_1) = 30^\circ$ verilir. $\angle(BD_1, ABC)$ -ni tapın.

184. $ABCA_1 B_1 C_1$ düz prizmasında $AB = 5 \text{ sm}$, $BC = 3 \text{ sm}$, $\angle ABC = 120^\circ$. Yan üzlərdən ən böyüyünün sahəsi 35 sm^2 -dir. Prizmanın yan səthinin sahəsini tapın.

185. Düzgün üçbucaqlı $MABC$ piramidasında $AB = 8 \text{ sm}$, $\angle BMC = \varphi$. Piramidanın hündürlüyünü tapın.

186. Düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfinin uzunluğu m , yan tillər arasındakı bucaq α -dır. Piramidanın: 1) hündürlüyünü, 2) yan tilini, 3) yan üzlə oturacaq müstəvisi arasındakı bucağı; 4) iki yan üzlərin müstəviləri arasındakı bucağı tapın.

187. Düzgün altıbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfinin uzunluğu a -ya, yan səthinin sahəsi isə piramidanın təpəsindən və oturacağın böyük diaqonalından keçən kəsiyin sahəsinə bərabərdir. Piramidanın yan səthinin sahəsini tapın.

188. Piramidanın oturacağı, tərəfləri 5 m , 4 m və kiçik diaqonalı 3 m olan, paraleloqramdır. Piramidanın hündürlüyü oturacağın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindən keçir və 2 m -ə bərabərdir. Piramidanın tam səthinin sahəsini tapın.

189. $DABC$ piramidasının oturacağı $AB = AC = 13 \text{ sm}$, $BC = 10 \text{ sm}$ olan ABC üçbucağıdır; AD tili oturacaq müstəvisinə perpendikulyardır və 9 sm -ə bərabərdir.

Piramidanın yan səthinin sahəsini tapın.

190. Piramidanın oturacağı diaqonalı 8 sm olan düzbucaqlıdır. İki yan üzün müstəvisi oturacaq müstəvisinə perpendikulyardır, digər iki yan üz isə oturacaqla 30° və 45° bucaqları əmələ gətirir. Piramidanın tam səthinin sahəsini tapın.

191. Piramidanın oturacağı tərəfləri 12 sm , 10 sm və 10 sm olan üçbucaqdır. Yan üzlərin hər biri oturacaqla 45° -lik bucaq əmələ gətirir. Piramidanın yan səthinin sahəsini tapın.

192. $DABC$ piramidasının oturacağı hipotenuzu $BC = 10 \text{ sm}$ olan düzbucaqlı üçbucaqdır. Piramidanın yan tilləri bir-birinə bərabərdir və hündürlüyü 12 sm -dir. Piramidanın yan tilini tapın.

193. Düzgün üçbucaqlı kəsik piramidanın oturacaqlarının tərəflərinin uzunluqları 4 dm və 2 dm , yan tili isə 2 dm -dir. Piramidanın hündürlüyünü və apofemini tapın.

194. Düzbucaqlı ABC üçbucağının C -yə bərabər AB hipotenuzu düzgün ABD üçbucağının tərəfidir. Onun C təpəsi isə D təpə nöqtəsinin ABC müstəvisi üzərində proyeksiyasıdır. ABD üçbucağının mərkəzinin proyeksiyasından AB tərəfinə qədər məsafəni tapın.

195. Bərabəryanlı korbucaqlı ADM üçbucağının ($\angle A = 120^\circ$) müstəvisi, tərəfi a və ADC bucağı 60° olan, $ABCD$ rombuna perpendikulyardır. MB məsafəsini tapın.

196. Düzbucaqlı ABC ($\angle C = 90^\circ$, $\angle CAB = \alpha$, $AB = c$) və bərabəryanlı ABD ($AB=AD$, $\angle DAB = \beta$, $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$) üçbucaqları D təpəsinin ABC müstəvisi üzərindəki proyeksiyası C nöqtəsi olmaqla yerləşdirilmişdir. CD parçasının uzunluğunu tapın.

197. Tərəfi a olan $ABCD$ kvadratının və FCB bucağı 60° -yə bərabər $BEFC$ rombunun müstəviləri perpendikulyardır. BFD üçbucağının sahəsini tapın.

198. Düzbucaqlı ABC üçbucağının ($\angle C = 90^0$, $\angle B = 60^0$) A tərəsindən, onun müstəvisinə perpendikulyar qaldırılmışdır və bunun üzərində $AM=h$ parçası ayrılmışdır; M nöqtəsi B və C nöqtələri ilə birləşdirilmişdir. ABCM ikiüzlü bucağı 30^0 -yə bərabər olarsa, MBC üçbucağının sahəsini tapın.

199. Bərabəryanlı ABC üçbucağının ($AB=AC$, $\angle BAC=\beta < \frac{\pi}{2}$) AC yan tərəfindən, B tərəsindən d məsafədə, müstəvi keçirilmişdir. Bu müstəvi ilə üçbucağın müstəvisi arasındakı iti bucaq α -ya bərabərdir. $S(ABC)$ -ni tapın.

200. Düzbucaqlı ABC üçbucağının C tərəsindən, AB hipotenuzunu paralel və ondan h məsafədə üçbucağın müstəvisi ilə α bucağı əmələ gətirən, müstəvi keçirilmişdir. Üçbucağın hipotenuzuna çəkilmiş hündürlüyü katetlərlə β bucağı əmələ gətirirsə, onun sahəsini tapın.

201. Bərabəryanlı düzbucaqlı ABC üçbucağının ($\angle C = 90^0$) və tərəfi a olan AMNB kvadratının müstəviləri perpendikulyardır. ANC üçbucağının sahəsini tapın.

202. Tərəfi a -ya bərabər ABCD kvadratının və bərabəryanlı korbucaqlı, BCM, $\angle B = 120^0$ olan, üçbucağının müstəviləri perpendikulyardır. ADM üçbucağının sahəsini tapın.

203. ABC korbucaqlı üçbucağın ($\angle ACB=120^0$, $BC=2\sqrt{3} dm$) B tərəsindən onun müstəvisinə qaldırılmış perpendikulyar üzərində, müstəvidən 3 dm məsafədə, D nöqtəsi qeyd edilmişdir. B təpə nöqtəsindən ACD müstəvisinə qədər məsafəni tapın.

204. Bərabəryanlı ABC ($\angle ACB=120^0$, $AB=c$) və ABD ($\angle ABD=120^0$) üçbucaqları verilir. Tapın: 1) Üçbucaqların müstəviləri arasındakı iti bucaq α -ya bərabədirsə, C təpə nöqtəsindən ABD müstəvisinə qədər məsafəni; 2) D təpə nöqtəsindən ABC müstəvisinə qədər məsafəni; 3) C və D təpə nöqtələrindən məsafələri qurulmuş ABD və ABC müstəviləri arasındakı məsafəni.

205. Tərəfi c -yə bərabər olan düzgün ABC və bərabəryanlı korbucaqlı ABD ($\angle DAB = 120^\circ$) üçbucaqları, D təpəsinin ABC müstəvisi üzərində proyeksiyası ABC üçbucağının mərkəzindən keçən və AB -yə paralel düz xətt üzərində olmaqla, yerləşdirilmişdir. Bu üçbucaqların müstəviləri arasındakı bucağın kosinusunun qiymətini tapın.

206. Düzgün dördbucaqlı piramidanın daxilinə və xaricinə çəkilmiş sferaların mərkəzləri eynidir. Piramidanın təpəsindəki müstəvi bucağın qiymətini tapın.

207. Tili a -ya bərabər olan kubun daxilinə sfera çəkilmişdir. Kubun ortaq təpəsi olan üç üzünə və əvvəlki sferaya toxunan, digər sferanın radiusunu tapın.

208. Kubun tilinin uzunluğu a -ya bərabərdir, MN – onun diaqonalıdır. Kubun M nöqtəsindən çıxan üç tilinə və N nöqtəsinin daxil olduğu üç üzünə toxunan sferanın radiusunu tapın.

209. Düzgün üçbucaqlı kəsik piramidanın daxilində radiusu r -ə bərabər, hər iki oturacağa və yan tillərə toxunan, kürə yerləşdirilmişdir. Oturacaqların tərəflərinin nisbəti $2:1$ olarsa, onları tapın.

210. Tili l olan düzgün üçbucaqlı kəsik piramidanın daxilinə, bütün üzlərə toxunan birinci kürə və bütün tillərə toxunan ikinci kürə çəkmək olar. Kəsik piramidanın oturacaqlarının tərəflərini tapın.

211. $SABC$ piramidasında SC tili oturacaq müstəvisi ilə 60° -lik bucaq əmələ gətirir və $SC=AB$. Piramidanın A, B, C təpələri və yan tillərinin orta nöqtələri radiusu 1 sm olan sfera üzərindədir. Piramidanın hündürlüyünün uzunluğunu tapın.

212. Tili a olan düzgün $SABC$ tetraedrinə A təpəsindən BC tilinə paralel, SBC yan üzünə perpendikulyar (S - tetraedrin təpə nöqtəsi, ABC oturacağıdır) müstəvi keçirilmişdir. SA , SB , SC tillərinə və keçirilən müstəviyə toxunan kürənin radiusunu tapın.

213. $PABC$ üçbucaqlı piramidasının PH hündürlüyünün H oturacağı ABC üzünün üzərindədir.

$$PH = \sqrt{\frac{5}{21}}, PA = 1, PB = 2, \angle APB = 120^0, \angle ACB = 60^0.$$

Piramidanın xaricinə çəkilmiş sferanın radiusunu tapın.

214. PABCD piramidasının oturacağı ABCD trapesiyasıdır. Bu trapesiyanın BC və AD oturacaqları $BC:AD=2:5$ münasibə-tindədir. Trapesiyanın diaqonalları E nöqtəsində kəsişir, pirami-danın daxilinə çəkilmiş sferanın O mərkəzi isə PE parçası üzərindədir və onu $PO:OE=7:2$ nisbətində bölür. PBC yan üzünün sahəsi 8-ə bərabərdir. Piramidanın tam səthinin sahəsini tapın.

215. Bütün tilləri a olan düzgün dördbucaqlı piramidanın daxilinə, dörd təpəsi piramidanın apofemləri, digər dörd təpəsi isə oturacaq müstəvisi üzərində olan, kub çəkilmişdir. Kubun həc-mini və səthinin sahəsini tapın.

216. Radiusu 0,5 dm-ə bərabər kürənin daxilinə, hündürlüyü 8 sm olan düzgün dördbucaqlı prizma çəkilmişdir. a) kürənin və prizmanın həcmələri nisbətini; b) prizmanın yuxarı oturağacağının təpələrinin birindən aşağı oturacağının diaqonallarına qədər mə-safələri tapın.

217. Düz paralelepipedin oturacağı tərəfi a olan rombdur, iki yan üzlər arasındakı bucaq isə φ -yə bərabərdir; Paralelepipedin böyük diaqonalı oturacaq müstəvisi ilə β bucağı əmələ gətirir. Paralelepipedin həcmi tapın.

218. M nöqtəsi bərabəryanlı ABC üçbucağının $AB=BC=13$ sm, $AC=10$ sm, tərəflərindən $26/3$ sm məsafədədir. Bu nöqtənin verilmiş üçbucağın müstəvisindən olan məsafəsini tapın.

219. Silindrin ox kəsiyi, sahəsi $\frac{25}{\pi}$ olan kvadratdır. Silindrin tam səthinin sahəsini tapın.

220. Doğuranı 20, oturacağının diametri 8 olan konusun daxilinə kürə çəkilmişdir. Kürənin və konusun yan səthinin toxunma xəttinin uzunluğunu tapın.

221. Düz konusun oturacağındakı nöqtədən onun doğuranına qədər ən böyük məsafə 1-ə bərabərdir. Bu məsafəni göstərən

parça konusun oturacağına φ bucağı altında meyl edir. Konusun yan səthinin sahəsini tapın.

222. Düz dairəvi konusun S təpə nöqtəsindən SAB kəsiyi keçirilmişdir. (AB vətəri oturacağın diametrindən kiçikdir). SC doğuranı (OC- parçası AOB bucağının tənbölənidir) konusun oturacağına α , kəsiyin müstəvisinə isə β bucaqları altında meyl edir. Oturacağın mərkəzindən verilmiş doğurana qədər məsafə 1-ə bərabərdir. Konusun oturacağının mərkəzindən kəsiyin müstəvisinə qədər məsafəni tapın.

223. $AB=13$ dm parçasının ucları silindrin oturacaqları çevrələrinin üzərindədir. Silindrin oturacağının radiusu 10 dm, AB düz xətti ilə silindrin oxu arasındakı məsafə isə 8 dm –dir. Silindrin h hündürlüyünü tapın.

224. Silindrin AA_1 doğuranından, biri onun oxundan keçən, iki kəsən müstəvi keçirilmişdir. Silindrin bu müstəvilər ilə kəsikləri arasındakı bucaq φ -yə bərabədirsə, onların sahələri nisbətini tapın.

225. Silindrin doğuranı ilə ox kəsiyinin diaqonalı arasındakı bucaq φ -yə, oturacağının sahəsi isə S -ə bərabərdir. Silindrin yan səthinin sahəsini tapın.

226. Konusun h -a bərabər hündürlüyü doğuranla 60° -lik bucaq əmələ gətirir. Konusun iki qarşılıqlı perpendikulyar doğuranlarından keçən müstəvi kəsiyinin sahəsini tapın.

227. Hündürlüyü 10 sm olan konusun təpəsindən və oturacağının 60° -li qövsü gərən vətərindən müstəvi keçirilmişdir. Alınmış kəsiyin oturacaq müstəvisi ilə 45° -lik bucaq əmələ gətirdiyini bilərək, onun sahəsini tapın.

228. Yan tərəfi m -ə və oturacağı bitişik bucağı φ -yə bərabər olan bərabərryanlı üçbucaq oturacağı ətrafında fırlanır. Üçbucağın fırlanmasından alınan cismin səthinin sahəsini tapın.

229. Kəsik konusun oturacaqlarının radiusları R və r -dir, burada $R > r$, doğuran isə oturacaq müstəvisi ilə 45° -lik bucaq əmələ gətirir. Ox kəsiyin sahəsini tapın.

230. Diaqonalları 15 sm və 20 sm olan rombun bütün tərəfləri radiusu 10 sm-ə bərabər sferaya toxunur. Sferanın mərkəzindən rombon müstəvisinə qədər məsafəni tapın.

231. Tərəflərinin uzunluğu $AB=6$, $BC=8$, $AC=10$ olan ABC üçbucağının təpələri radiusu 13-ə bərabər sferanın üzərində yerləşir. Sferanın mərkəzindən üçbucağın müstəvisinə qədər məsafəni tapın.

232. Oturacağının tərəfi a , yan tili $2a$ olan düzgün üçbucaqlı piramidanın daxilinə və xaricinə çəkilmiş sferaların radiuslarını tapın.

233. Düzgün dördbucaqlı $PABCD$ piramidasında oturacağın tərəfi 3, hündürlük 2-dir. A təpəsindən PCD üzünə qədər məsafəni tapın.

234. Bütün tilləri a -ya bərabər olan dördbucaqlı piramidanın daxilinə bərabərtərəfli silindr çəkilmişdir. Silindrin oturacağının diametrini tapın.

235. Hündürlüyü h -a bərabər olan konusun iki qarşılıqlı perpendikulyar doğurunu onun yan səthinin sahəsini 1:2 nisbətində bölür. Konusun həcmi hesablayın.

236. Bərabərtərəfli konusun H hündürlüyü, həm də kürənin diametridir. Bu cismlərin səthlərinin kəsişmə xəttinin uzunluğunu tapın.

237. Konusun hündürlüyü, səthi onun yan səthinin sahəsini yarıya bölən, kürənin diametridir. Konusun oturacağı radiusunun onun hündürlüyünə nisbətini tapın.

238. Doğurunu 17, hündürlüyü 15 olan konusun daxilinə kürə çəkilmişdir. Konusun yan səthi ilə kürə səthinin ortaq xəttinin (bu çevrədir) uzunluğunu tapın.

239. Bütün tilləri 12-yə bərabər olan üçbucaqlı piramidanın və radiusu 3-ə bərabər kürənin mərkəzləri eyni nöqtədir. Kürənin piramidanın daxilində qalan hissəsinin səthi sahəsini tapın.

240. Üç doğurunu qarşılıqlı perpendikulyar olan konusun daxilinə radiusu R -ə bərabər kürə çəkilmişdir. Konusun oturacağının radiusunu tapın.

241. Yarım sfera şəklində kasa su ilə doldurulmuşdur. Kasanı 30^0 əydikdə suyun nə qədər hissəsi tökülür?

242. Düzgün $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ altıbucaqlı prizmasında, O nöqtəsi onun oturacağının mərkəzidir. $BE_1=8$, $\angle E_1 BE = 60^0$. a) Prizmanın, b) onun xaricinə çəkilmiş silindrin və c) daxilinə çəkilmiş silindrin həcmi tapın.

243. Düz prizmanın oturacağı paraleloqramdır. Oturacağın a -ya bərabər tərəfindən və digər oturacağın onun qarşındakı tərəfindən β bucağı əmələ gətirən kəsik keçirilmişdir. Kəsiyin sahəsi Q -yə bərabərdir. Prizmanın həcmi tapın.

244. Silindrin daxilinə düzgün n bucaqlı prizma çəkilmişdir. Prizmanın və silindrin həcmi nisbətini tapın.

245. Paralelepipedin bütün üzləri tərəfi a və iti bucağı 60^0 olan bərabər romblardır. Paralelepipedin həcmi tapın.

246. Mail paralelepipedin oturacağı tərəfləri a və b olan düzbucaqlıdır. Uzunluğu c olan yan til oturacağın qonşu tərəfləri ilə φ -yə bərabər bucaq əmələ gətirir. Paralelepipedin həcmi tapın.

247. Hündürlüyü $1,5$ sm-ə bərabər olan piramidanın oturacağı tərəfi 6 sm olan rombdur. Oturacağa bitişik ikiüzlü bucaqların hər biri 45^0 -yə bərabərdir. Piramidanın həcmi tapın.

248. Kəsik piramidanın oturacaqları hipotenuzları m və n olan ($m > n$) bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqlardır. Katetlərin daxil olduğu iki yan üz oturacağa perpendikulyardır, üçüncüsü isə onunla φ bucağı əmələ gətirir. Kəsik piramidanın həcmi tapın.

249. İki bərabər kürə, birinin mərkəzi digərinin səthi üzərində olmaqla, yerləşdirilmişdir. Kürələrin orta hissəsinin həcmi bir kürə həcminə nisbətini tapın.

250. Oturacaqlarının radiusları r_1 və r_2 olan kəsik konusun daxilinə kürə çəkilmişdir. Kəsik konusun və kürənin həcmi nisbətini tapın.

251. Düzgün dördbucaqlı piramida radiusu R olan sferanın daxilinə çəkilmişdir. Piramidanın yan tillərindən biri oturacaq müstəvisinə perpendikul-yardır, ən böyük yan til isə onunla α

bucağı əmələ gətirir. Piramidanın yan səthinin sahəsini tapın və $\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{8}{17}}$, $R = \sqrt{17}$ olduqda onun qiymətini hesablayın.

252. Yan üzü hündürlüyü ilə 45° -lik bucaq əmələ gətirən düzgün dördbucaqlı piramidanın daxilinə radiusu 6 olan küre çəkilmişdir. Piramidanın oturacağıının sahəsini tapın.

253. Tilinin uzunluğu 1-ə bərabər $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubunun şaquli AA_1 və üfiqi AB tilləri üzərində, $AM = \frac{1}{3}$, $AN = \frac{3}{4}$ olmaqla, uyğun olaraq M və N nöqtələri qeyd edilmişdir. M, N nöqtələrindən oturacağın AC diaqonalına paralel müstəvi keçirilmişdir. Alınmış kəsiyin sahəsini tapın.

254. Tilinin uzunluğu a -ya bərabər olan kubun diaqonalı, səthi onun tilinə toxunan, düz dairəvi silindrin oxudur. Silindrin oturacağının radiusunu tapın.

255. Düzgün dördbucaqlı piramidanın xaricinə çəkilmiş radiusu 12 olan sferanın O mərkəzindən piramidanın yan tilinə qədər məsafə $4\sqrt{2}$ -yə bərabərdir. 1) Piramidanın hündürlüyünü; 2) O nöqtəsindən piramidanın yan üzünə qədər məsafəni; 3) piramidanın daxilinə çəkilmiş kürənin radiusunu tapın.

256. Düzbucaqlı $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelepipedinin oturacağı tərəfi 6-ya bərabər kvadrattır. Mərkəzi ABCD üzünün O mərkəzi ilə üst-üstə düşən və $AB_1 D_1$ müstəvisinə toxunan kürənin radiusunu tapın.

257. Sferanın daxilinə silindr çəkilmişdir. Silindrin oxundan müstəvi keçirilmişdir. Silindrin doğurarı 4 sm-ə bərabər olub kürənin müstəvi ilə kəsiyində 60° -lik qövs gərir. Silindrin həcmnin 4 mislinin kürənin həcminə nisbətini tapın.

258. Düz prizmanın oturacağı rombdur. Prizmanın diaqonallarının və hündürlüyünün uzunluqları uyğun olaraq 8 sm, 5 sm, 2 sm-dir. Rombun tərəfinin uzunluğunu tapın.

259. Üçbucaqlı ABCD piramidasında $AD=3$, $CD=5$ tilləri məlumdur, habelə $\angle ABD = \angle CBD = \angle BAC = \frac{\pi}{2}$; Bunlardan

əlavə ABC və ADC üzləri arasındakı bucaq $\frac{\pi}{12}$ -yə bərabərdir.

Piramidanın həcmi tapın.

260. Oturacağının tərəfi 2-yə bərabər düzgün $ABCA_1B_1C_1$ prizmasının oturacağının AC tərəfindən müstəvi elə keçirilmişdir ki, kəsikdə sahəsi $2\sqrt{3}$ olan ACM üçbucağı alınmışdır. B təpəsindən bu kəsiyin müstəvisinə qədər məsafəni tapın.

261. Oturacaqları trapesiya olan düz prizmada paralel yan üzlərin sahələri 8 sm^2 və 12 sm^2 , onlar arasındakı məsafə isə 5 sm-dir. Prizmanın həcmi tapın.

262. Düzgün üçbucaqlı piramidanın həcmi $162\sqrt{3}$ -ə bərabərdir, onun oturacağının mərkəzindən yan üzünə endirilmiş perpendikulyar isə yan üzün daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən keçir. Piramidanın oturacağının tərəfini tapın.

263. Düz silindrin və düz konusun hündürlükləri bərabərdir. Silindrin yan səthinin sahəsinin konusun yan səthinin sahəsinə nisbəti $5:6$ –dır. Bundan əlavə $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$, burada α -konusun doğuranı ilə onun oturacaq müstəvisi arasındakı bucaqdır. Silindrin həcmi konusun həcminə nisbətini tapın.

264. Düz $ABCA_1B_1C_1$ prizmasının oturacağı ABC düzbucaqlı üçbucağıdır, O nöqtəsi isə onun xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. $AC=BC=1$, $CC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olarsa, prizmanın C təpəsindən C_1O düz xəttinə perpendikulyar keçirilmiş müstəvilə kəsiyinin sahəsini tapın.

265. Rombun, hər bir diaqonalı ətrafında, fırlanmasından alınan cismlərin həcmi uyğun olaraq 1 və $\frac{\sqrt{3}}{3}$ -ə bərabərdir. Rombun tərəfi ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi tapın.

266. Bərabəryanlı ABCD trapesiyasının ($AD \parallel BC$) daxilinə çevrə çəkmək olar. $\cos \angle BAD = \frac{2}{3}$ və trapesiyanın BC tərəfi ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi 11-ə bərabərdir. Trapesiyanın AD tərəfi ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi tapın.

267. ABCD düzbucaqlısının AB və AD tərəfləri ətrafında fırlanmasından alınan cismlərin həcmələri uyğun olaraq 1 və $\sqrt{3}$ -ə bərabərdir. Bu düzbucaqlının A təpəsindən keçən və AC diaqonalına perpendikulyar olan düz xətt ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi tapın.

268. $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ olan düzbucaqlı ABC üçbucağının A,B,C təpələrindən $m \parallel BC$, $n \parallel AC$, $p \parallel AB$ düz xətləri keçirilmişdir. ABC üçbucağının m və n düz xətləri ətrafında fırlanmasından alınan cisimlərin həcmələri uyğun olaraq 65 və 156-dır. Bu üçbucağın p düz xətti ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi tapın.

269. Sferanın daxilinə aşağı oturacaqları ortaq və həcmələri eyni olan konus və silindr çəkilmişdir. Kürə səthinin sahəsi $5\sqrt{10}$ -dir. konusun yan səthinin sahəsini tapın.

270. Həcmi 4-ə bərabər konusun xaricinə sfera çəkilmişdir. Həcmi 8 olan digər sfera xaricə çəkilmiş sferaya daxildən, konusa isə onun oturacağının mərkəzində, toxunur. Xaricə çəkilmiş kürənin həcmi tapın.

271. Doğuranı oturmaq müstəvisi ilə α bucağı əmələ gətirən, $\cos \alpha = 0,8$, konus kürənin daxilinə çəkilmişdir. Konusun təpəsindən keçən müstəvi kürəni kəsir, kəsiyin sahəsinin kürənin səthi sahəsinə nisbəti 0,24-ə bərabərdir. Kəsən müstəvi ilə oturmaq müstəvisi arasındakı bucağın kosinusunu tapın.

272. Kəsik konusun aşağı oturacağı kürəyə toxunur, onun yuxarı oturacağının çevrəsi isə kürənin səthi üzərində yerləşir. Kürənin səthi sahəsinin kəsik konusun yan səthinin sahəsinə nisbəti 5:7 –dir. Kəsik konusun doğuranı ilə oturmaq müstəvisi arasındakı bucağın kosinusunu tapın.

273. Konusun daxilinə həcmi 9 olan silindr çəkilmişdir. Silindrin yuxarı oturacaq müstəvisi verilmiş konusdan həcmi 63 olan kəsik konus ayırır. Əvvəlki konusun həcmi tapın.

274. Konusun ox kəsiyi təpəsindəki bucaq β -ya bərabərdir, $\cos \beta = \frac{2}{3}$. Kürənin və konusun oturacağının mərkəzləri, habelə

onların radiusları eynidir. Kürənin və konusun kəsişmə çevrəsindən müstəvi keçirilmişdir. Konusun bu müstəvidən aşağıda yerləşən hissəsinin həcmi 19-a bərabərdir. Konusun həmin müstəvidən yuxarıda yerləşən hissəsinin həcmi tapın.

275. Piramidanın oturacağı tərəfləri 5, 12 və 13 olan üçbucaqdır, onun hündürlüyü isə yan üzlərin hündürlükləri (həmin təpədən çəkilmiş) ilə, 30° -dək kiçik olmayan, eyni bucaq əmələ gətirir. Belə piramidanın ən böyük həcmi nə ola bilər?

276. Düzgün dördbucaqlı SABCD piramidasının SH hündürlüyünün H oturacağından SDC üzünə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğu $\sqrt{6}$ -ya, SB yan tilinin oturacaq müstəvisi ilə əmələ gətirdiyi bucaq isə $\frac{\pi}{3}$ -ə bərabərdir. Piramidanın xaricinə çəkilmiş sferanın radiusunu tapın.

277. Konusun, aralarındakı bucaq $\arcsin \frac{\pi}{5}$ -ə bərabər, iki doğuranından müstəvi keçirilmişdir. Konusun doğuranının oturacaq müstəvisi ilə əmələ gətirdiyi bucağın kosinusu $\frac{1}{4}$ -ə bərabərdir. Kəsiyin sahəsinin konusun tam səthinin sahəsinə nisbətini tapın.

278. Düz $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ prizmasının oturacağı, $AB=10$, $AC = 6\sqrt{7}$ olan, ABCD rombudur. Yan til $AA_1 = 3\sqrt{21}$. B təpəsindən AC_1 düz xəttinə qədər məsafəni tapın.

279. Dördbucaqlı MABCD piramidasında tillərin hər biri $\sqrt{11}$ -ə bərabərdir. AD düz xətti ilə BM tilinin ortasından BC-yə paralel keçən düz xətt arasındakı məsafəni tapın.

280. MABC piramidasında $MA=13$ yan tili oturacaq müstəvisinə perpendikulyardır. $\angle BAC = 90^0$, $AB = 39$ və $AC = 52$. A təpəsindən BCM müstəvisinə qədər məsafəni tapın.

281. Silindrin yuxarı oturacağının çevrəsi üzərindəki A nöqtəsindən AD doğurani və alt oturacağın çevrəsini C nöqtəsində kəsən $AC=10$ maili çəkilmişdir. Silindrin oturacağının radiusu 5-ə, hündürlüyü isə 8-ə bərabərdir. Silindrin oxundan, AC maili və AD doğuranından keçən, müstəviyə qədər məsafəni tapın.

282. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubunun tili $\sqrt{3}$ -ə bərabərdir. $AB_1 D_1$ və BDC_1 müstəviləri arasındakı məsafəni tapın.

283. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubunun tili $\sqrt{6}$ -ya bərabərdir. $B_1 D$ və CD_1 düz xətləri arasındakı məsafəni tapın.

284. Tili $\sqrt{3}$ -ə bərabər olan kubun qonşu üzlərinin çarpaz diaqonalları arasındakı məsafəni tapın.

285. Düz $ABCA_1 B_1 C_1$ prizmasında AA_1 yan tilinin orta nöqtəsi O dur, $AA_1 = 20\sqrt{5}$, $AB=BC=20$, $AC=32$. AC_1 və $B_1 O$ düz xətləri arasındakı bucağın sinusunu tapın.

286. Düzgün üçbucaqlı $ABCA_1 B_1 C_1$ prizmasının ABC oturacağının $AB=4$ tərəfinin orta nöqtəsi T-dir. Prizmanın yan tili $2\sqrt{2}$ -yə bərabərdir. $B_1 T$ düz xətti ilə $BCC_1 B_1$ yan üzünün müstəvisi arasındakı bucağın sinusunu tapın.

287. MABCD piramidasında hündürlük 2,5 –dir, bütün yan tillər bərabərdir, oturacağı isə diaqonalı 2, diaqonallar arasındakı bucaq 30^0 olan düzbucaqlıdır. Oturacaq müstəvisi ilə, AM düz xəttinə paralel olub, B, D nöqtələrini üzərində saxlayan, müstəvi arasındakı bucağın tangensini tapın.

288. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubunun tili a -ya bərabərdir. Kəsən müstəvi AB, AA_1 və $A_1 D_1$ tillərinin ortasından keçir. Kəsiyin sahəsini tapın.

289. $ABCA_1 B_1 C_1$ prizmasında oturacağın AB və AC tərəfləri bir birinə və AA_1 yan tilinə perpendikulyardır. $AB=AC=AA_1=4$.

AB, AC və AA_1 tillərinin ortalarından keçən kəsiyin sahəsini tapın.

290. Konusun doğuranı 4-ə bərabərdir və oturacaq müstəvisi ilə 60° -lik bucaq əmələ gətirir. Konusun oturacağa paralel və hündürlüyün ortasından keçən kəsiyinin sahəsini tapın.

291. Tili 2-yə bərabər $ABCA_1B_1C_1D_1$ kubu və mərkəzi onun $A_1B_1C_1D_1$ üzünün diaqonallarının kəsişmə nöqtəsində olan, BC_1D müstəvisinə toxunan kürə verilir. Kürənin kubun daxilində qalan hissəsinin həcmi tapın.

292. Üçbucaqlı $ABCA_1B_1C_1$ prizmasının həcmi V –yə bərabərdir. AA_1 tilinin ortasında E , BB_1 tilinin üzərində isə $B_1F:FB=1:4$ olmaqla F nöqtələri qeyd edilmişdir. C , E , B_1 və C , E , F nöqtələrindən iki müstəvi keçirilmişdir. Prizmanın bu müstəvilər arasında qalan hissəsinin həcmi tapın.

293. Üçbucaqlı $ABCA_1B_1C_1$ prizmasında oturacağın BC tərəifindən və A_1B_1 tilinin K_1 orta nöqtəsindən keçən müstəvi onu iki çoxüzlüyə ayırır. Bu çoxüzlülərin həcmliəri nisbətini tapın.

2. İsbat məsələləri

294. İsbat edin ki, düzbucaqlı kağız vərəqindən sonsuz sayda müxtəlif tetraedrlər düzəltmək olar (yapışdırma üst-üstə qoymadan, yalnız kənarlarla olur).

295. $ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$ kubunun AD , A_1B_1 , CC_1 tillərinin orta nöqtələri uyğun olaraq K , Z , M dir. İsbat edin ki, KZM mərkəzi kubun mərkəzi üzərinə düşən düzgün üçbucaqdır.

296. Müstəvi $ax + by + cz + d = 0$ tənliyi ilə verilir. (a, b, c) vektorunun bu müstəviyə perpendikulyar olduğunu isbat edin.

297. l düz xətti kəsişən iki l_1, l_2 düz xətləri ilə eyni bucaq əmələ gətirir, həm də nəzərə almaq lazımdır ki, bu düz xətt l_1, l_2 düz xətlərini üzərində saxlayan α müstəvisinə perpendikulyar deyil. İsbat edin ki, l düz xəttinin α müstəvisi üzərindəki proyeksiyası da l_1, l_2 düz xətləri ilə eyni bucaq əmələ gətirir.

298. İsbat edin ki, l düz xətti iki kəsişən düz xətlərin hər biri ilə, yalnız və yalnız bu düz xətlər arasındakı bucaqlardan birinin tənbölünə perpendikulyar olduqda, bərabər bucaq əmələ gətirir.

299. A_1 və A_2 nöqtələri l düz xətti üzrə kəsişən α_1 və α_2 müstəviləri üzərindədir. İsbat edin ki, yalnız və yalnız A_1, A_2 nöqtələri l düz xəttindən bərabər məsafədə olduqda A_1A_2 düz xətti α_1, α_2 müstəviləri ilə eyni bucaq əmələ gətirir.

300. İsbat edin ki, iki çarpaz düz xəttən paralel müstəvilər keçirmək olar.

301. İki çarpaz düz xətt verilir. İsbat edin ki, ucları bu düz xətlər üzərində olub, onlara perpendikulyar yeganə parça vardır.

302. Fəzada cüt-cüt çarpaz üç düz xətt vardır. İsbat edin ki, üç tili bu düz xətlər üzərində olan yeganə paralelepiped vardır.

303. l düz xətti cüt-cüt perpendikulyar üç düz xətlərlə α, β, γ bucaqları əmələ gətirir. İsbat edin ki, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

304. D təpəsindəki müstəvi bucaqları düz olan $ABCD$ tetraedrində ABC üzünün kvadratının düzbucaqlı üçbucaqlardan ibarət, digər üzlərin kvadrları cəminə bərabər olduğunu isbat edin.

305. İsbat edin ki, kubun tillərinin ixtiyari müstəvi üzərində proyeksiyalarının uzunluqlarının kvadrları cəmi $8a^2$ -na bərabərdir, burada a - kubun tilinin uzunluğudur.

306. Koordinatı (x_0, y_0, z_0) olan nöqtədən $ax+by+cz+d=0$ tənliyi ilə verilən müstəviyə qədər məsafənin $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ -

nə bərabər olduğunu isbat edin.

307. Oxları ilə doğuranları arasındakı bucaqları bərabər olan iki konusun oxları paraleldir. İsbat edin ki, onların səthlərinin kəsişməsinin bütün nöqtələri bir müstəvi üzərindədir.

308. Tili a olan $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubu verilir. İsbat edin ki, fəzanın ixtiyari nöqtəsindən $AA_1, B_1 C_1, CD$ düz xətlərindən birinə qədər məsafə $\frac{a}{\sqrt{2}}$ -dən kiçik deyil.

309. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelepiped verilir. AC_1 diaqonalının $A_1 BD$ müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsi M -dir. İsbat edin ki,

$$MA = \frac{AC_1}{3}.$$

310. Hər hansı müstəvi ilə düzgün üçbucağın tərəfləri arasındakı bucaqlar α, β və γ -ya bərabərdir. İsbat edin ki, bu bucaqlardan birinin sinusu digər iki bucağın sinusları cəminə bərabərdir.

311. l düz xətti α müstəvisinə perpendikulyar deyil, l' onun bu müstəvi üzərində proyeksiyasıdır. Fərz edək ki, l_1 həmin müstəvi üzərində hər hansı düz xətdir. İsbat edin ki, yalnız və yalnız $l' \perp l_1$ olduqda $l \perp l_1$ (üç perpendikulyar teoremi).

312. a) Düzgün tetraedrin qarşı (çarpaz) tillərinin perpendikulyar olduğunu isbat edin; b) Təpəsi S nöqtəsində olan düzgün piramidanın oturacağı $A_1 \dots A_{2n-1}$ çoxbucaqlısıdır. SA_1 və $A_n A_{n+1}$ tillərinin perpendikulyar olduğunu isbat edin.

313. Çoxbucaqlının bir müstəvidə sahəsi S -dir. İsbat edin ki, onun digər P müstəvisi üzərindəki proyeksiyasının sahəsi $S \cdot \cos \varphi$ -yə bərabərdir, burada φ baxılan P müstəvisi ilə çoxbucaqlının müstəvisi arasındakı bucaqdır.

314. Üçbucaqlı piramidanın oturacaq tillərindəki ikiüzlü bucaqlar α, β və γ uyğun yan üzlərin sahəsi isə S_a, S_b, S_c -dir. Oturacağın sahəsinin $S_a \cos \alpha + S_b \cos \beta + S_c \cos \gamma$ olduğunu isbat edin.

315. Cismin iki müstəvi üzərindəki proyeksiyası dairələrdir. İsbat edin ki, bu dairələrin radiusları bərabərdir.

316. İsbat edin ki, tili 1 olan kubun müstəvi üzərində proyeksiyasının sahəsi, ədədi qiymətcə, onun bu müstəviyə perpendikulyar düz xətt üzərində proyeksiyasının uzunluğuna bərabərdir.

317. Üç düz xətt A nöqtəsində kəşişir. Onların hər birinin üzərində iki nöqtə götürülmüşdür: B və B' , C və C' , D və D' . İsbat edin ki, $V(ABCD) : V(AB'C'D') = (AB \cdot AC \cdot AD) : (AB' \cdot AC' \cdot AD')$.

318. DABC tetraedrinin həcmninin $\frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD \sin \beta \sin \gamma \sin \alpha$ -ya bərabər olduğunu isbat edin, burada β, γ ilə A təpəsindəki AB və AC tillərinə bitişik müstəvi bucaqlar işarə edilmişdir, α isə AD tilindəki ikiüzlü bucaqdır.

319. Tetraedrin iki üzünün sahəsi S_1, S_2 , bu üzlər arasındakı ikiüzlü bucaq α , onların ortaq tilinin uzunluğu isə a -dır. Tetraedrin V həcmninin $\frac{2S_1 S_2 \sin \alpha}{3a}$ -ya bərabər olduğunu isbat edin.

320. Radiusu R olan sferanın xaricinə çəkilmiş çoxüzlünün həcmnin $\frac{1}{3} RS$ -ə bərabər olduğunu isbat edin, burada S- çoxüzlünün səthinin sahəsidir.

321. İsbat edin ki, kürənin və onun xaricinə çəkilmiş kəsik konusun həcmələri nisbəti onların tam səthiləri sahələrinin nisbətində bərabərdir.

322. Kəsik konusun yan səthinin sahəsi, radiusu onun doğurana bərabər olan, dairənin sahəsinə bərabərdir. İsbat edin ki, bu konusun daxilinə kürə çəkmək olar.

323. Hündürlüyü oturacaqlarının diametrləri arasında orta mütənasib olan kəsik konusun daxilinə kürə çəkmək mümkün olduğunu isbat edin.

324. İsbat edin ki, düzgün tetraedrin üç təpəsini dördüncü təpədən çəkilmiş hündürlüyün orta nöqtəsilə birləşdirdikdə, cüt-cüt perpendikulyar üç düz xətt alınır.

325. R və r uyğun olaraq düzgün dördbucaqlı piramidanın xaricinə və daxilinə çəkilmiş kürələrin radiuslardır. İsbat edin ki, $\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1$.

326. Üçbucaqlı SABC piramidasının ABC oturacağı üzərindəki O nöqtəsindən uyğun olaraq SA, SB, SC tillərinə paralel və SBC, SCA, SAB üzlərini A', B', C' nöqtələrində kəsən

OA' , OB' , OC' düz xətləri çəkilməmişdir. İsbat edin ki,

$$\frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC} = 1.$$

327₁. Paralel müstəvilər üzərində yerləşməyən və uyğun tərəfləri paralel olmayan iki ABC və $A_1B_1C_1$ üçbucaqlarına baxaq. Bu üçbucaqların uyğun təpələrini birləşdirən düz xətlər isə bir O nöqtəsində kəsişir. İsbat edin ki, üçbucaqların uyğun tərəflərinin uzantıları cüt-cüt kəsişir və bu kəsişmə nöqtələri bir düz xətt üzərindədir.

327₂. İsbat edin ki, hər hansı üçbucaqlı piramidanın təpələrini qarşı üzlərin ağırlıq mərkəzi ilə birləşdirən parçalar bir nöqtədə kəsişir və bu nöqtə ilə onların hər biri 1:3 nisbətində bölünür.

328. Düzgün tetraedrin daxilindəki ixtiyari nöqtədən onun dörd üzünə qədər məsafələr cəminin sabit kəmiyyət olduğunu isbat edin.

329. İki-iki kəsişən sonlu sayda düz xətlər verilmişdirsə, onların hamısının ya bir nöqtədə kəsişdiyini yaxud da bir müstəvi üzərində olduğunu isbat edin.

330. İsbat edin ki, kubun müstəvi ilə kəsiyi düzgün altıbucaqlı ola bilər.²

331. İsbat edin ki, hündürlükləri eyni və oturacaqları paralel olan bərabər konusların ortaq hissəsinin həcmi onların hər birinin həcmnin $\frac{1}{4}$ -ə bərabərdir.

332. İsbat edin ki, konusun həcmi yan səthinin sahəsi ilə oturacağın mərkəzindən doğurana qədər məsafə hasilinin $\frac{1}{3}$ -ə bərabərdir.

² Məsələni belə də ifadə etmək olar: İsbat edin ki, kubu müstəvi ilə elə kəsmək olar ki, kəsikdə düzgün altıbucaqlı alınar.

333. Düzgün dördbucaqlı piramidanın yan tilləri, təpədən a, b, c və d məsafədə olan nöqtələrdən keçən, müstəvi ilə kəsilmişdir. İsbat edin ki, $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

334. İsbat edin ki, təpədəki müstəvi bucaqları düz olan tetraedrin çarpaz tillərinin ortalarını birləşdirən parçanın uzunluğu bu tetraedrin xaricinə çəkilməmiş sferanın radiusuna bərabərdir.

335. İsbat edin ki, tetraedrin ikiüzlü bucağının tən bölmə müstəvisi qarşıdakı tili bu ikiüzlü bucağı əmələ gətirən üzlərin sahəsi ilə mütənasib hissələrə bölür.

336. ABCD tetraedrin həcmnin $\frac{1}{6}d \cdot AB \cdot CD \sin \varphi$ -yə bərabər olduğunu isbat edin. Burada d parçası AB və CD düz xətləri arasındakı məsafə, φ - onlar arasındakı bucaqdır.

337. Fəzada iki çarpaz düz xətt verilir. Tetraedrin qarşı tilləri, uzunluqlarını saxlamaqla, bu düz xətlər üzrə yerini dəyişir. İsbat edin ki, bunun nəticəsində tetraedrin həcmi dəyişmir.

338. Müstəvi radiusları R, r olan iki toxunan kürəyə A, B nöqtələrində toxunur. İsbat edin ki, $AB = 2\sqrt{Rr}$.

339. a) Bir müstəvi üzərində olmayan iki çevrə iki müxtəlif A, B nöqtələrində kəşir. İsbat edin ki, bu çevrələri üzərində saxlayan yeganə sfera vardır. b) Bir müstəvi üzərində olmayan iki çevrə l düz xəttinə P nöqtəsində toxunur. İsbat edin ki, bu çevrələri üzərində saxlayan yeganə sfera vardır.

340. Üçbucaqlı kəsik piramidanın iki yan üzü daxilə çəkilmiş dördbucaqlıdırsa, onun digər yan üzünün də daxilə çəkilmiş dördbucaqlı olduğunu isbat edin.

341. Müstəvi bucaqları α, β, γ və bunların qarşısındakı ikiüzlü bucaqları A, B, C olan üçüzlü bucaq verilir. İsbat edin ki, müstəvi bucaqları $\pi - A, \pi - B, \pi - C$ və ikiüzlü bucaqları $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$ olan üçüzlü bucaq vardır.

342. İsbat edin ki, üçüzlü bucağın ikiüzlü bucaqları düzdürsə, onda onun müstəvi bucaqları da düzdür.

343. İsbat edin ki, uyğun ikiüzlü bucaqları bərabər olan üçüzlü bucaqlar bərabərdir.

344. Tetraedrin a tilindən çıxan üzlərin sahələri S_1, S_2 , bu tildəki ikiüzlü bucaq α , a -nın qarşısındakı til b , b və a tilləri arasındakı bucaq φ olarsa, $S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha = \frac{(ab \sin \varphi)^2}{4}$

bərabərliyinin doğruluğunu isbat edin.

345. Düzbucaqlı $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelepipedinin AC_1 diaqonalı $A_1 BD$ müstəvisinə perpendikulyardır. İsbat edin ki, bu paralelepiped kubdur.

346. a) Qabarıq çoxüzlünün bütün üzlərinin sahələri bərabərdir. İsbat edin ki, onun daxili nöqtəsindən üzlərinin müstəvilərinə qədər məsafələrin cəmi bu nöqtənin vəziyyətindən asılı deyil.

b) Tetraedrin hündürlükləri h_1, h_2, h_3, h_4 , onun ixtiyari daxili nöqtəsindən üzlərinə qədər məsafələri isə d_1, d_2, d_3, d_4 -dir. İsbat edin ki, $\sum \left(\frac{h_i}{d_i} \right) = 1$.

347. Sferanın xaricinə çəkilmiş çoxüzlünü kəsən müstəvi onu həcmələri V_1, V_2 , səthlərinin sahələri S_1, S_2 olan iki hissəyə bölür. İsbat edin ki, yalnız və yalnız müstəvi daxilə çəkilmiş sferanın mərkəzindən keçdikdə $V_1 : S_1 = V_2 : S_2$ olar.

348. ABCD tetraedrində M və N uyğun olaraq AB və CD tillərinin orta nöqtələridir. İsbat edin ki, $\vec{MN} = \frac{1}{2} \left(\vec{AD} + \vec{BC} \right)$.

349. Təpəsi O nöqtəsində olan düz üçüzlü bucağın tilləri müstəvi ilə A, B, C nöqtələrində kəşisir. ABC üçbucağının itibucaqlı olduğunu isbat edin.

350. A(-4; -4; 4), B(-3; 2; 2), C(2, 5, 1), D(3; -2; 2) nöqtələri verilir. İsbat edin ki, AC və BD parçaları perpendikulyardır.

351. Sferaya toxunan iki müstəvi a düz xətti üzrə kəşir. İsbat edin ki, toxunma nöqtələrini birləşdirən düz xətt a -ya perpendikulyardır.

352. 1) İsbat edin ki, müstəvi üzərində olmayan dörd nöqtədən yalnız bir sfera keçirmək olar. 2) İsbat edin ki, çevrə və onun müstəvisi üzərində olmayan nöqtədən yalnız bir sfera keçirmək olar.

353. İsbat edin ki, piramidanın xaricinə sfera çəkməyin mümkün olması üçün, onun oturacağıının xaricinə çevrə çəkməyin mümkün olması zəruri və kafidir.

354. Sfera $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ koordinat başlanğıcından keçir. İsbat edin ki, koordinat başlanğıcında sferaya toxunan müstəvinin tənliyi $ax + by + cz = 0$ şəkildədir.

“Evklid həndəsəsi – sadəcə məntiqi sistemlərdən biri deyil. O, belə sistemlərə, digər elmlərin yamsılamağa cəhd etdikləri və yenə də cəhd etdiyi, ilk və ən böyük nümunədir”

Poya C.

3. Qurma məsələləri

355. α müstəvisi üzərində a, b düz xətləri verilir. Verilmiş M nöqtəsi α müstəvisi üzərində deyil. a, M və b, M -dən keçən müstəvilərin kəsişmə xəttini qurun.

356. ABC bucağı və M nöqtəsi verilir. $(AB), M$ və $(BC), M$ -dən keçən müstəvilərin kəsişmə xəttini qurun.

357. ABC üçbucağı və onun müstəvisi üzərində olmayan M nöqtəsi verilir. M və A –dan α müstəvisini elə keçirin ki, ABC və α müstəvilərinin kəsişmə xətti: 1) BC parçasını yarıya bölsün; 2) BAC bucağını yarıya bölsün.

358. a düz xətti və M nöqtəsi verilir. Verilmiş nöqtədən, a -nı düz bucaq altında kəsən, düz xətt çəkin.

359. ABC bucağı və onun müstəvisi üzərində olmayan M , BC şüası üzərində olan P nöqtəsi verilir. $P \neq B$. M və P nöqtələrindən α müstəvisini elə keçirin ki, ABC və α müstəvilərinin kəsişmə xətti verilmiş bucağın tərəfləri üzərində konqruent parçalar ayırsın.

360. $ABCD$ tetraedrinin AD, AB, BC, CD tillərinin ortalarından keçən müstəvi kəsiyini qurun. Kəsikdə alınan dördbucaqlının növünü təyin edin.

361. $\alpha \cap a = M, N \notin a$ verilir. a və N –dən keçən müstəvi ilə α müstəvisinin kəsişmə xəttini çəkin.

362. α müstəvisi üzərində a düz xətti və M nöqtəsi verilmişdir. $N \notin \alpha$ nöqtəsindən elə β müstəvisi keçirin ki, α və β müstəvilərinin kəsişmə xətti M –dən keçib, a -ya perpendikulyar olsun.

363. ABCD tetraedrinin AB, AD, CD tilləri üzərində uyğun olaraq M, N, P nöqtələri elə seçilmişdir ki, NP və AC düz xətləri paralel deyildir. Tetraedrin verilmiş nöqtələrdən keçən kəsiyini qurun.

364. Verilmiş nöqtədən verilmiş düz xətlə çarpaz olan düz xətt keçirin.

365. 1) Verilmiş nöqtədən verilmiş düz xəttə paralel müstəvi keçirin; 2) verilmiş nöqtədən verilmiş müstəviyə paralel düz xətt keçirin.

366. A və B nöqtələri uyğun olaraq kəsişən α və β müstəvilərinə aid olub, onların c kəsişmə xəttinə aid deyil. A və B nöqtələrindən c düz xəttinə paralel müstəvi keçirin.

367. M və N nöqtələri ABCD tetraedrinin AD və AB tillərinin daxili nöqtələridir. Verilmiş nöqtələrdən keçən və AC düz xəttinə paralel olan müstəvi ilə tetraedrin kəsiyini qurun.

368. ABCD trapesiyası verilmişdir, burada $AB \parallel CD$ və M nöqtəsi trapesiyanın müstəvisinə aid deyil: 1) M-dən və CD-dən, M-dən və AB-dən; 2) M-dən və AD-dən, M-dən və BC-dən keçən müstəvilərin kəsişmə xəttini qurun.

369. ABCDA₁B₁C₁D₁ paralelepipedində M, N, P nöqtələri uyğun olaraq DD₁, BB₁, CC₁ tilləri üzərindədir və $MP \parallel CD$, $MN \parallel DB$. MNP və ABC müstəvilərinin kəsişmə xəttini qurun.

370. Kubla, onun bir təpədən çıxan üç tilinin uclarından keçən müstəvi ilə kəsiyini qurun. Kubun tili a -ya bərabədirsə, kəsiyin perimetrini və sahəsini tapın.

371. ABCDA₁B₁C₁D₁ paralelepipedini verilmişdir; DC və A₁B₁ tillərinin orta nöqtələri M və N –dir. 1) AM və AN düz xətlərinin BB₁C₁C üzə ilə kəsişmə nöqtələrini qurun; 2) AMN və BB₁C₁ müstəvilərinin kəsişmə xəttini qurun.

372. ABCDA₁B₁C₁D₁ paralelepipedinin, (BC₁) –dən və DD₁ tilinin M orta nöqtəsindən keçən müstəvi ilə kəsiyini qurun.

373. ABCDA₁B₁C₁D₁ paralelepipedində M nöqtəsi B₁C₁ parçasının orta nöqtəsidir. Paralelepipedin: 1) (DC)-dən və M-dən; 2) (AD)-dən və M-dən keçən müstəvi ilə kəsiyini qurun.

374. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ düzbucaqlı paralelepipedini verilmişdir. AB , AA_1 , CD tillərinin ortasından keçən müstəvi ilə paralelepipedin kəsiyini qurun.

375. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelepipedini verilmişdir. $A_1 C$ düz xətti ilə AB və $C_1 D_1$ tillərindən keçən müstəvinin kəsişmə nöqtəsini qurun.

376. Verilmiş M nöqtəsindən verilmiş a düz xəttinə paralel düz xətti çəkin.

377. Verilmiş düz xəttin verilmiş müstəviyə paralel müstəvi keçirin.

378. A , C təpələrindən və $A_1 B_1$ tilinin M nöqtəsindən keçən α müstəvisi ilə $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelepipedinin kəsiyini qurun.

379. Tetraedrin təpəsindən onun qarşı üzünə paralel müstəvi keçirilmişdir. Tetraedrin qalan üzlərinin müstəviləri ilə bu müstəvinin kəsişmə xəttini qurun.

380. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubunun B təpəsindən, CC_1 və $A_1 D_1$ tillərinin ortasından keçən müstəvi ilə kəsiyini qurun.

381. İki çarpaz düz xəttin ortaq perpendikulyarını qurun.

382. Verilmiş düz xəttə paralel və verilmiş digər iki düz xətti kəsən düz xətt qurun.

383. Ucları verilmiş iki düz xətt üzərində olan, verilmiş uzunluqda, verilmiş müstəviyə paralel parça qurun.

384. $SABC$ tetraedri verilir. ABC oturacağı üzərindəki O nöqtəsindən, iki qarşı SC və AB tillərini kəsən, düz xətt çəkin.

385. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelepipedini verilir. a) $A_1 D_1 DA$ yan üzünün M simmetriya mərkəzindən keçib $A_1 A$ və $B_1 D$ çarpaz düz xətlərini kəsən; b) D_1 təpəsindən keçib $A_1 A$ və $B_1 D$ çarpaz düz xətlərini kəsən; c) paralelepipedin diaqonallarının O kəsişmə nöqtəsindən keçib $A_1 D$ və $B_1 D_1$ çarpaz düz xətlərini kəsən düz xətt çəkin. Hər üç halda iki çarpaz düz xətti kəsən düz xətt çəkmək tələb olunur.

386. Dördbucaqlı $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ prizması verilir. Onun A, C, B_1 təpələrindən keçən müstəvi ilə kəsiyini qurun.

387. PABC tetraedrində MZ düz xətti ilə (M nöqtəsi B və C arasında yerləşir, Z isə PO hündürlüyünün orta nöqtəsidir, O nöqtəsi ABC oturacağıının daxilindədir) tetraedrin səthinin kəsişmə nöqtəsini tapın (qurun).

388. PABC tetraedrində LE parçasının (L – nöqtəsi PAC üzündə, E isə A və B arasındadır) PAD üçbucağı ilə (D nöqtəsi B və C arasındadır) kəsişmə nöqtəsini qurun.

389. $ABCA_1B_1C_1$ çoxüzlüsü paralelepipedin diaqonal kəsiyi ilə ayrılmışdır. AK_1 parçasının (K_1 ilə B_1C_1 –in daxili nöqtəsi işarə edilmişdir) A_1BC müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini tapın.

390. $ABCA_1B_1C_1$ çoxüzlüsündə PBC və DAK üçbucaqlarının kəsişməsini qurun (P, D, K uyğun olaraq AA_1 , CC_1 və AB tilləri üzərindədir).

391. $ABCA_1B_1C_1$ çoxüzlüsündə MN parçası ilə (M və N nöqtələri uyğun olaraq AA_1B və BB_1C üzləri üzərində yerləşir) A_1BC üçbucağının kəsişmə nöqtəsini tapın.

392. $ABCA_1B_1C_1$ çoxüzlüsündə AA_1M və CC_1N üçbucaqlarının kəsişməsini qurun (M və N nöqtələri uyğun olaraq BC və AB tərəfləri üzərindədir).

393. $ABCA_1B_1C_1$ çoxüzlüsündə ABK və MNQ üçbucaqlarının kəsişməsini qurun. ($Q \in AA_1C$, $K \in CC_1$, K və Q nöqtələri AC tilindən bərabər məsafələrdədir, M və N uyğun olaraq BC və AB tillərinin orta nöqtələridir).

394. $ABCA_1B_1C_1$ çoxüzlüsü verilir. a) B_1C_1 tili üzərində elə K nöqtəsi tapın ki, AK və A_1M parçaları kəsişsinlər (M nöqtəsi BC tili üzərində yerləşir); b) AB tili üzərində elə Z nöqtəsi tapın ki, ZK (K nöqtəsi A_1C_1 tili üzərindədir) və A_1M (M nöqtəsi BC tili üzərindədir) parçaları kəsişsinlər.

395. PABC tetraedrində DMN və QKZ üçbucaqlarının kəsişməsini qurun (D və Q nöqtələri uyğun olaraq PA və PC tilləri üzərindədir; A, K, N, C və A, Z, M, B nöqtələri uyğun olaraq AC və AB tərəfləri üzərindədir)

396. PABC tetraedrində AQL və DMN üçbucaqlarının kəsişməsini qurun (D, Q, L nöqtələri uyğun olaraq PA, PC, PB tilləri üzərindədir, M və N nöqtələri isə AB, BC tilləri üzərində

olub, D və Q nöqtələrindən, habelə AC – dən bərabər məsafələrdədir).

397. Fəzada verilmiş nöqtənin verilmiş digər nöqtədən keçən müstəvilər üzərindəki proyeksiyasının həndəsi yerini tapın.

398. $ABCA_1B_1C_1$ çoxüzlüsündə A_1BC üçbucağının MN düz xətti ilə kəsişmə nöqtəsini qurun (M və N nöqtələri uyğun olaraq AB düz xətti və $A_1B_1C_1$ üzü üzərindədir).

399. $ABCD A_1B_1C_1D_1$ paralelepipedində onun DD_1B_1B diaqonal kəsiyi ilə MN düz xəttinin (M və N oturacaqların daxili nöqtələridir) kəsişmə nöqtəsini qurun.

400. $PABC$ tetraedrinin PC tilində elə X nöqtəsi tapın ki, KX parçası (K nöqtəsi AB tilinin üzərindədir) digər MN parçası (M və N nöqtələri uyğun olaraq PA və BC tilləri üzərindədir) ilə kəsişsin.

401. Dördbucaqlı $SABCD$ piramidası verilir. Piramidanın SA yan tili üzərində verilmiş M nöqtəsindən $ABCD$ oturacağının müstəvisinə paralel və SC yan tilini kəsən müstəvi keçirin.

402. $ABCD A_1B_1C_1D_1$ paralelepipedini verilir. B_1C_1CB üzünün B_1C diaqonalından paralelepipedin AC_1 diaqonalına paralel müstəvi keçirin və bu müstəvinin $A_1B_1C_1D_1$ aşağı oturacağı ilə kəsişmə xəttini qurun.

403. Düzgün dördbucaqlı $SABCD$ piramidası verilir; onun, $ABCD$ oturacağının AB və BC tərəfləri ilə eyni bucaq əmələ gətirən, müstəvi ilə kəsiyini qurun.

404. Oturacağı $ABCD$ düzbucaqlısı və SD yan tili oturacaq müstəvisinə perpendikulyar olan dördbucaqlı $SABCD$ piramidası verilir. Piramidanın xaricinə çəkilmiş sferanın mərkəzini qurun.

405. Silindrin, onu iki müəvil hissəyə bölən, kəsiyini qurun.

406. C təpəsindəki bütün müstəvi bucaqları düz olan üçbucaqlı $SABC$ piramidası verilir. Piramidanın xaricinə çəkilmiş sferanın mərkəzini qurun.

407. Üçbucaqlı $SABC$ piramidasının hündürlüyü onun ABC oturacağının xaricinə çəkilmiş çevrənin O_1 mərkəzindən keçir. Piramidanın xaricinə çəkilmiş sferanın mərkəzini qurun.

408. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelepipedı verilir. Onun $A_1 D_1 DA$ üzünün AD_1 diaqonalından $B_1 D$ diaqonalına paralel keçən müstəvi ilə kəsiyini qurun.

409. Verilmiş $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubunun $BB_1 C_1 C$ üzündə M nöqtəsi qeyd edilmişdir. Bu üzə kubun $B_1 D$ diaqonalına perpendikulyar düz xətt çəkin.

410. Düz prizmanın oturacaqlarından eyni məsafədə olan nöqtələrin həndəsi yerini qurun.

411. Hündürlüyü verilmiş silindrin hündürlüyünə bərabər, həcmi isə 4 dəfə böyük olan silindri təsvir edin.

412. Konusu oturacağa paralel müstəvi ilə elə kəsinki alınmış kiçik konusun həcmi verilənin həcmnin $\frac{1}{8}$ -ə bərabər olsun.

413. Oturacağının radiusu R , hündürlüyü $2R$ olan silindr verilir. Həcmi silindrin həcmnin $\frac{2}{3}$ -ə bərabər olan sferanı təsvir edin.

414. Sahəsi sferanın sahəsinin $\frac{1}{8}$ -ə bərabər olan sfera hissəsi səthini təsvir edin.

415. a düz xətti və onun xaricində M nöqtəsi verilir. M nöqtəsindən a düz xəttinə paralel müstəvi keçirin.

Həllər, şərtlər və cavablar

I Planimetriya

Əsas düsturlar

1. İxtiyari üçbucaq (a, b, c - tərəflər; α, β, γ - bu tərəflər qarşısındakı bucaqlar; p - perimetrin yarısı; r, r_a, r_b, r_c - uyğun olaraq daxilə, xaricdən daxilə çəkilmiş çevrələrin radiusları; S - sahə; h_a, h_b, h_c - uyğun olaraq a, b, c tərəflərinə çəkilmiş hündürlüklər):

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c \quad (1.1)$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta \quad (1.2)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (1.3)$$

$$r = \frac{S}{p} \quad (1.4)$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} \quad (1.5)$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} \quad (1.6)$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} \quad (1.7)$$

$$S = \sqrt{r r_a r_b r_c} \quad (1.8)$$

$$S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha} \quad (1.9)$$

$$S = \frac{b^2 \sin \gamma \sin \alpha}{2 \sin \beta} \quad (1.10)$$

$$S = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma} \quad (1.11)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{Kosinuslar teoremi}) \quad (1.12)$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad (\text{Sinuslar teoremi}) \quad (1.13)$$

2. Düzbucaqlı üçbucaq (a, b - katetlər; c – hipotenuz; a_c, b_c - katetlərin hipotenuz üzərində proyeksiyaları):

$$S = \frac{1}{2} ab \quad (1.14)$$

$$S = \frac{1}{2} ch_c \quad (1.15)$$

$$r = \frac{a + b + c}{2} \quad (1.16)$$

$$R = \frac{c}{2} \quad (1.17)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{Pifaqor teoremi}) \quad (1.18)$$

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c} \quad (1.19)$$

$$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c} \quad (1.20)$$

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c} \quad (1.21)$$

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta \quad (1.22)$$

3. Düzgün üçbucaq:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad (1.23)$$

$$r = \frac{a \sqrt{3}}{6} \quad (1.24)$$

$$R = \frac{a \sqrt{3}}{3} \quad (1.25)$$

4. İxtiyari qabarıq dördbucaqlı (d_1 və d_2 diaqonallar; φ - onlar arasındakı bucaq; S – sahə):

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi \quad (1.26)$$

5. Paraleloqram (a və b - qonşu tərəflər; α onlar arasındakı bucaq; h_a - a tərəfinə çəkilmiş hündürlük)

$$S = ah_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi \quad (1.27)$$

6. Romb:

$$S = ah_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \quad (1.28)$$

7. Düzbucaqlı:

$$S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi \quad (1.29)$$

8. Kvadrat (d- diaqonaldır):

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2} \quad (1.30)$$

9. Trapesiya (a və b - oturacaqlar; h – onlar arasındakı məsafə; l – orta xətt):

$$l = \frac{a+b}{2} \quad (1.31)$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = lh \quad (1.32)$$

10. Xaricə çəkilmiş çoxbucaqlı (p – perimetrin yarısı; r - daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu):

$$S = pr \quad (1.33)$$

11. Düzgün çoxbucaqlı (a_n - düzgün n bucaqlının tərəfi; R - xaricə çəkilmiş çevrənin radiusu; r - daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu):

$$a_3 = R\sqrt{3}; \quad a_4 = R\sqrt{2}; \quad a_6 = R \quad (1.34)$$

12. Çevrə, dairə (r - radius; C - çevrənin uzunluğu; S - dairənin sahəsi):

$$C = 2\pi r \quad (1.35)$$

$$S = \pi r^2 \quad (1.36)$$

13. Sektor (l - sektorun qövsünün uzunluğu; n^0 – mərkəzi bucağın dərəcə ölçüsü; α - mərkəzi bucağın radian ölçüsü)

$$l = \frac{\pi r n^0}{180^0} = r \alpha \quad (1.37)$$

$$S = \frac{\pi r^2 n^0}{360} = \frac{1}{2} r^2 \alpha \quad (1.38)$$

14. Üçbucağın medianları bir nöqtədə kəşişir və bu nöqtə hər bir medianı təpədən başlayaraq 2:1 nisbətində bölür.

15. Üçbucağın medianları uzunluqları (m_a, m_b, m_c) tərəflərin uzunluqları (a, b, c) vasitəsilə

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(c^2 + a^2) - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2} \quad (1.39)$$

düsturları ilə ifadə olunur.

16. Üçbucağın tərəflərinin uzunluqları medianların uzunluqları vasitəsilə

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}, \quad b = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_c^2 + m_a^2) - m_b^2},$$

$$c = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2} \quad (1.40)$$

düsturları ilə ifadə olunur.

17. Üçbucağın tən bölməni çəkildiyi tərəfi qalan iki tərəflə mütənasib hissələrə bölür.

18. Üçbucağın tən bölmənin uzunluğu

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1} \quad (1.41)$$

düstürü ilə ifadə olunur, burada a, b verilmiş ABC üçbucağının iki tərəfinin uzunluqları, a_1 və b_1 isə üçüncü tərəfin parçaları uzunluğudur.

19. Üçbucağın tənbölənlərinin uzunluqları (l_a, l_b, l_c) onun tərəfləri uzunluqları (a, b, c) ilə

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}, l_a = \frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}, l_b = \frac{\sqrt{ac(c+a+b)(c+a-b)}}{a+c} \quad (1.42)$$

düsturları vasitəsilə ifadə olunur.

20. İxtiyari üçbucağın hündürlükləri (h_a, h_b, h_c) ilə onun daxilinə çəkilmiş çevrənin r radiusu arasında

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \quad (1.43)$$

münasibəti vardır.

21. Diaqonalları qarşılıqlı perpendikulyar olan bərabəryanlı trapesiyanın S sahəsi onun hündürlüyünün (h) kvadratına bərabərdir:

$$S = h^2 \quad (1.44)$$

22. Daxilinə çevrə çəkmək mümkün olan bərabəryanlı trapesiyanın hündürlüyü (h) onun oturacaqları (a, b) arasında həndəsi orta kəmiyyətdir:

$$h = \sqrt{ab} \quad (1.45)$$

1. Fərz edək ki, ABC verilmiş üçbucaqdır, $BM=MC$, $AM=15$ sm, $AZ=ZB$, $CZ=12$ sm, $AP=PC$, $BC=2\sqrt{105}$ sm (Şəkil 1.) O medianların kəsişmə nöqtəsi olduğundan $AO = \frac{2}{3} AM = 10$ sm ;

$$OM = \frac{1}{3} AM = 5 \text{ sm} ; \quad CO = \frac{2}{3} CZ = 8 \text{ sm} ; \quad OZ = \frac{1}{3} CZ = 4 \text{ sm} .$$

Şərtə görə $BM = MC = \sqrt{105}$ sm. $\triangle OMC$ -dən

$$OC^2 = OM^2 + MC^2 - 2OM \cdot MC \cdot \cos \angle OMC ;$$

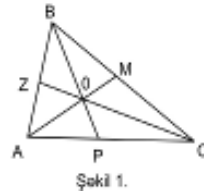
$$8^2 = 5^2 + (\sqrt{105})^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{105} \cos \angle OMC \quad \text{və deməli}$$

$$\cos \angle OMC = \frac{6,6}{\sqrt{105}} . \quad \triangle BOM \text{ -dən}$$

$$BO^2 = BM^2 + OM^2 - 2BM \cdot OM \cdot \cos \angle BMO ;$$

$$\cos \angle BMO = -\cos \angle OMC$$

$$\text{olduğundan } BO^2 = 105 + 25 + 2\sqrt{105} \cdot 5 \cdot \frac{6,6}{\sqrt{105}} = 130 + 66 = 196 .$$



Onda $BO = 14$ sm. Medianın xassəsinə görə $BP = \frac{3}{2} BO$ və

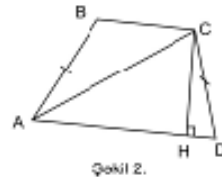
$$\text{beləliklə, } BP = \frac{3}{2} \cdot 14 = 21 \text{ sm} .$$

2. Fərz edək ki, ABCD verilmiş trapesiyadır, $AB = CD = 4 \text{ sm}$,
 $S(ABC) = 6 \text{ sm}^2$, $S(ACD) = 14 \text{ sm}^2$, $CH \perp AD$ (Şəkil 2.)

$$S(ABCD) = S(ABC) + S(ACD) = 6 + 14 = 20 (\text{sm}^2)$$

olduğundan

$$S(ACH) = \frac{1}{2} S(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 (\text{sm}^2) ;$$



$$S(CHD) = S(ACD) - S(ACH) = 14 - 10 = 4 (\text{sm}^2) ,$$

$\triangle CHD$ -dən trapesiyanın hündürlüyünü tapaq.

$$HD = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{16 - CH^2} \quad \text{və} \quad \frac{1}{2} CH \cdot HD = 4 ; \quad \text{Burada}$$

$$CH \in (0; 4) \quad \text{olduğundan,} \quad CH \cdot \sqrt{16 - CH^2} = 8 \quad . \quad \text{Sonuncu}$$

$$\text{bərabərlikdən} \quad CH^2 (16 - CH^2) = 64 \quad \text{və ya}$$

$$CH^4 - 16CH^2 + 64 = 0, (CH^2 - 8)^2 = 0, CH^2 = 8, CH = \pm 2\sqrt{2} \text{ alırıq. } -2\sqrt{2} \text{ kənar kökdür.}$$

3. Fərz edək ki, ABC üçbucağında: $AB=BC=15 \text{ sm}$, $AC=24 \text{ sm}$, $BM=MC$, $BH \perp AC$, $AK \perp BC$ (Şəkil 3.) ABH üçbucağından $\sin \alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Deməli, $\alpha > 45^\circ$, başqa sözlə

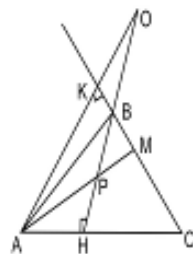
$\angle ABC > 90^\circ$ və ABC üçbucağı kor bucaqlıdır. $\angle BAH = \angle AOH$, $AH \perp OH$ olduğundan

$\triangle AOH \sim \triangle BAH$, odur ki, $\frac{AH}{BH} = \frac{OH}{AH}$;

$$OH = \frac{AH^2}{BH}; OH = \frac{12^2}{\sqrt{15^2 - 12^2}} = 16(\text{sm}).$$

$PH = \frac{1}{3} BH$ olduğundan, $PH = 3 \text{ sm}$,

$$OP = OH - PH = 16 - 3 = 13(\text{sm}).$$



Şəkil 3.

4. Fərz edək ki, ABC üçbucağında $\angle ACB=90^\circ$, $\angle ACK=\angle KCB$, $AK = 20 \text{ sm}$, $KB = 15 \text{ sm}$, $KP \perp CB$ (Şəkil 4). CK baxılan $\triangle ABC$ - in düz bucağının tənböləni olduğundan $\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{CB}$;

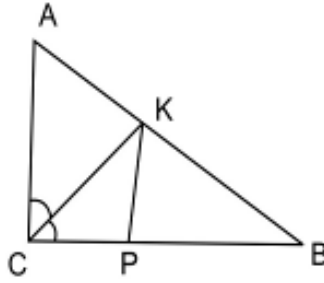
$$\frac{AC}{CB} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}, AC = 4k, CB = 3k. \text{ Pifaqor teoreminə görə}$$

$$AC^2 + CB^2 = AB^2 \text{ və beləliklə, } 16k^2 + 9k^2 = 1225,$$

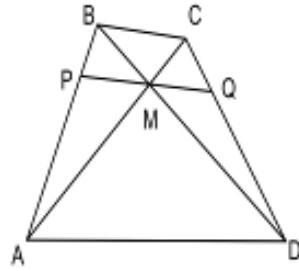
$$25k^2 = 35^2, k = 7, AC = 28 \text{ sm}, CB = 21 \text{ sm}. \triangle ACB \sim \triangle KPB$$

olduğundan $\frac{AC}{KP} = \frac{AB}{KB}; \frac{28}{KP} = \frac{35}{15}; KP = 12 \text{ sm}$. K nöqtəsi ACB

bucağının tənböləni üzərində olduğundan, onun tərəflərindən eyni məsafədədir.



Şəkil 4.



Şəkil 5.

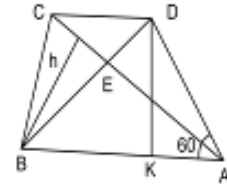
5. Fərz edək ki, $ABCD$ trapesiyasında $BC = 6\text{ sm}$, $AD = 18\text{ sm}$, $M \in PQ$, $PQ \parallel AD$ (Şəkil 5). $\triangle AMD \sim \triangle CMB$.
 Odur ki, $\frac{AM}{CM} = \frac{MD}{BM} = \frac{AD}{BC}$; $\frac{AD}{BC} = \frac{18}{6} = 3$. $\triangle BAC \sim \triangle PAM$
 olduğundan $\frac{AC}{AM} = \frac{BC}{PM} = \frac{AB}{PA}$; $\frac{AC}{AM} = \frac{AM + MC}{AM} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.
 $\frac{BC}{PM} = \frac{4}{3}$; $\frac{6}{PM} = \frac{4}{3}$; $PM = 4,5\text{ sm}$. $\triangle BCD \sim \triangle MQD$ -dən
 $\frac{BC}{MQ} = \frac{BD}{MD}$; $\frac{BD}{MD} = \frac{4}{3}$; $\frac{BC}{MQ} = \frac{4}{3}$; $\frac{6}{MQ} = \frac{4}{3}$; $MQ = 4,5\text{ sm}$.
 Beləliklə, $PQ = PM + MQ = 9(\text{sm})$

6. AB tərəfinə DK perpendikulyarını endirək. Onda $\angle ADK = 30^\circ$ (Şəkil 6.) Beləliklə, $AK = \frac{1}{2} AD = \frac{3}{2}$,

$DK = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. B nöqtəsindən AC düz xəttinə

çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğunu h ilə işarə edək. Onda

$$\frac{S(ABC)}{S(BCE)} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot h}{\frac{1}{2} CE \cdot h} = \frac{AC}{CE} = \frac{AE + EC}{CE} = 1 + \frac{AE}{CE}$$



Şəkil 6.

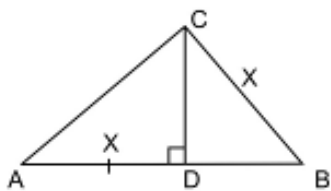
. $\triangle DCE \sim \triangle BAE$ olduğundan $\frac{DC}{AB} = \frac{CE}{AE}$ və ya $\frac{CE}{AE} = \frac{4}{5}$
tənasübünü alırıq. Onda $\frac{AE}{CE} = \frac{5}{4}$. Bu halda $\frac{S(ABC)}{S(BCE)} = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$,
onda $S(BCE) = \frac{4}{9} S(ABC)$ (1). Sonra

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{və} \quad (1)\text{-ə} \quad \text{əsasən}$$

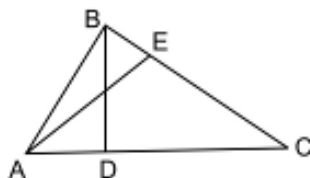
$$S(BCE) = \frac{4}{9} \cdot 45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ (sm}^2\text{)}.$$

7. $AD = x$ işarə edək. Onda $BC = x$ (Şəkil 7), $DB = 3 - x$.
 DBC üçbucağından Pifaqor teoreminə görə
 $x^2 = (\sqrt{3})^2 + (3 - x)^2$, $x = 2$ alırıq. ADC üçbucağından
 $AC = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7} \text{ (m)}.$

8. Şərtə görə $BE = 5x$, $CE = 9x$ (Şəkil 8).
 $S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} BC \cdot AE$ bərabərliyindən istifadə edib
 $11,2 AC = 14x \cdot 12$ tənliyini alırıq. Buradan $AC = 15x$. $\triangle AEC$ -
dən Pifaqor teoreminə görə $12^2 + 81x^2 = 225x^2$ və buradan
 $x = 1$ alırıq. Beləliklə $AC = 15$.



Şəkil 7.



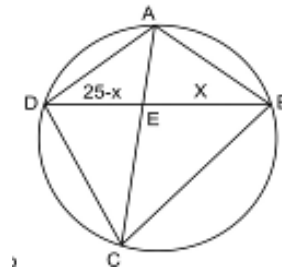
Şəkil 8.

9. Şərtə və daxilə çəkilmiş bucaq haqqında teoremə əsasən $\angle ABD = \angle DBC = \angle ACD$ bərabərlikləri doğrudur (Şəkil 9). Onda $\triangle BCD \sim \triangle ECD$. (D bucağı ortaqdır). $BE = x$ işarə edək.

Onda $\frac{15}{25-x} = \frac{25}{15}$ tənəsübünü qurmaq olar ki, buradan

$$25 - x = \frac{15 \cdot 15}{25}; \quad x = 25 - 9$$

$$x = 16.$$

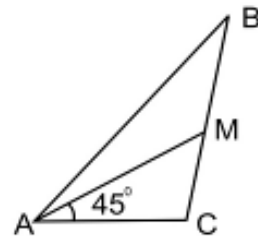


Şəkil 9.

10. Məsələni həll etmək üçün vəziyyəti təhlil edib bilmək lazımdır ki:

- verilmiş üçbucaq iki müadil üçbucaqdan ibarətdir;

- əvvəlcə AM tərəfi tapılsa, AMC üçbucağının sahəsini $S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$ düsturu ilə tapmaq olar;



Şəkil 10.

- AMC üçbucağından AM tərəfini kosinuslar teoremindən istifadə etməklə tapmaq olar. Bu təhlil “fikirdə” aparılır. Bundan sonra lazımı hesablamalar aparılır. $AM = x$ işarə edək. (Şəkil 10)

Onda kosinuslar teoreminə görə $25 = 18 + x^2 - 6x$,

$x^2 - 6x - 7 = 0$, buradan $x_1 = -1$, $x_2 = 7$. Beləliklə, $AM = 7$ və

$$S(MAC) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 10,5. \text{ Deməli, } S(ABC) = 2 \cdot S(MAC) = 21.$$

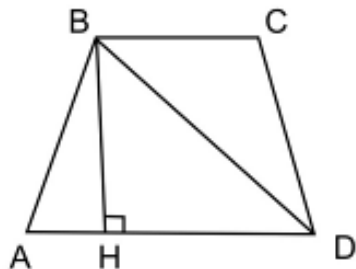
11. Bərabəryanlı trapesiyanın elementlərinin hesablanması aid belə məsələləri həll etmək üçün həmin trapesiyanın xassəsini (oturacaqdakı bucaqları və diaqonalları bərabərdir) bilməklə yanaşı bərabəryanlı trapesiyanın kiçik oturacağı ucundakı təpəsindən çəkilmiş hündürlüyün böyük oturacağı böldüyü parçalardan birinin oturacaqların fərqi, digərinin isə onların cəminin yarısına bərabər olduğunu nəzərə almaq lazımdır. Göstərilən faktlardan istifadə etməklə lazımı hesablamalar aparılır:

$$AH = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}, \quad DH = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2} \quad (\text{Şəkil 11});$$

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 13 - \frac{1}{4} = \frac{51}{4};$$

$$BD^2 = BH^2 + DH^2 =$$

$$= \frac{51}{4} + \frac{49}{4} = 25 \text{ buradan } BD = 5.$$

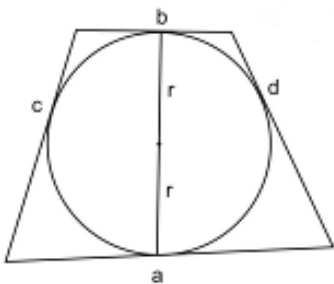


Şəkil 11.

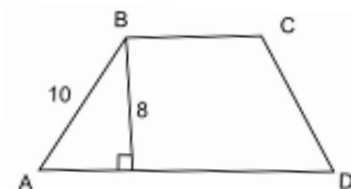
12. Çevrənin xaricinə çəkilmiş trapesiyanın hündürlüyü çevrənin diametrinə ($h=2r$), oturacaqlarının cəmi yan tərəflərin cəminə ($a+b=c+d$), yan tərəflərin cəminin

yarısı isə orta xəttə $\left(\frac{c+d}{2} = m\right)$ bərabərdir (Şəkil 12). Bu xas-

sələrdən istifadə etməklə trapesiyanın sahəsinin hesablanması bir əmələ gətirilir: $h = 8, m = AB = 10$ olduğundan $S = 8 \cdot 10 = 80$ (Şəkil 13.)



Şəkil 12.



Şəkil 13.

13. BOC - yan tərəfləri axtarılan radiusa – R bərabər bərabəryanlı üçbucaq olduğundan (Şəkil 14), şərtə isə həmin üçbucağın sahəsi verildiyindən, onda baxılan məsələni həll etmək

üçün üçbucağın $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ sahə düs-

turundan istifadə etmək, bunun üçün isə əvvəlcə BOC bucağının qiymətini tapmaq təbii olardı. BOC mərkəzi bucaq olduğundan daxilə çəkilmiş uyğun A bucağından 2 dəfə böyükdür.

Beləliklə, aşağıdakı hesablamayı yerinə yetirmək lazımdır:

$$\angle BOC = 2 \cdot 75^\circ = 150^\circ ;$$

$$\frac{1}{2}R^2 \cdot \sin 150^\circ = 16, \text{ buradan } R^2 = 16 \cdot 2 \cdot 2 \text{ və } R=8.$$

14. Məsələni həll etmək üçün bilmək lazımdır ki, axtarılan parça, bir tərəfi verilmiş düzgün üçbucağın a tərəfi, digəri isə $\frac{5}{8}a$ və bunlar arasındakı bucaq 60° olan üçbucağın, tərəfidir.

(Şəkil 15). Deməli, BE -ni Kosinuslar teoremindən istifadə etməklə tapmaq olar. Xaricə çəkilmiş çevrənin radiusuna əsasən düzgün üçbucağın tərəfini tapmaq

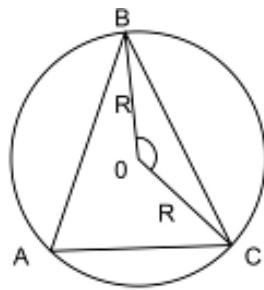
$$\text{qalır: } R = \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ və beləliklə}$$

$$a = 8, CE = 5 ;$$

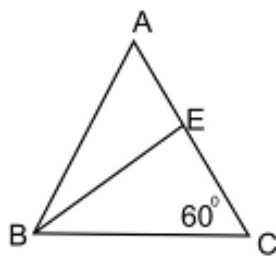
$$BE^2 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 0,5 = 49 ,$$

buradan $BE=7$.

15. Əvvəlki məsələdə olduğu kimi şərtə görə çəkilmiş çertyojun təhlili baxılan məsələnin həlli planının hazırlanmasına kömək edir. Bu təhlilin mühüm anı bərabəryanlı AMB üçbucağına keçməkdir (Şəkil 16), burada AM və MB hipotenuzun yarısına bərabərdir. Sonra MP

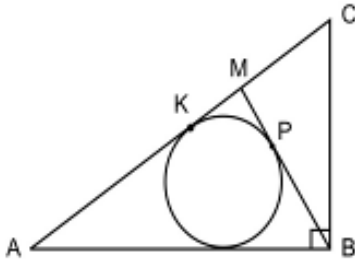


Şəkil 14.

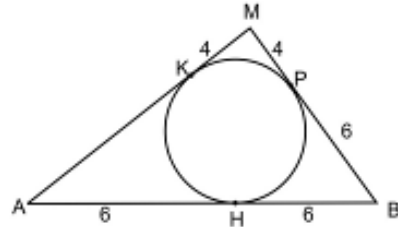


Şəkil 15.

və PB parçalarını hesablayıb və toxunanların bərabər parçalarından istifadə etməklə (Şəkil 17) AB katetini tapmaq olar.



Şəkil 16.



Şəkil 17.

Onda axtarılan BC kateti Pifaqor teoremi ilə hesablanılır. AM=MB=10 olduğundan

$$MP = \frac{2}{5} \cdot MB = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4, BP = \frac{3}{5} \cdot MB = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6.$$

KM = MP = 4 olduğundan AH = AK = 10 - 4 = 6,

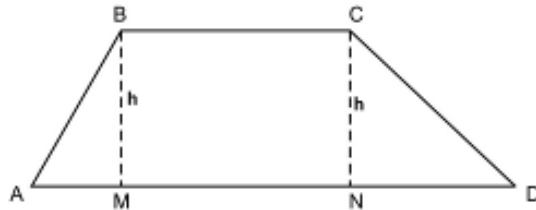
BH = BP = 6. Beləliklə, AB = 12, AC = 5 · 4, AB = 3 · 4 -dir.

$$\Delta ABC \text{ -dən } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 4 \cdot 4 = 16.$$

16. Bu məsələnin həlli ilə əlaqədar biliklərin ümumiləşdirilməsi dərsinin aparılmasına nümunə göstəririk. Əsas məqsəd eyni bir məsələnin çoxlu sayda üsullarla həll edilməsidir. Baxılan məsələdə ədədi verilənlər elə seçilmişdir ki, mürəkkəb hesablamalar aparmağa ehtiyac olmasın. Aşağıda məsələnin 8 həllini veririk.

I. ABCD trapesiyasında AB=6 sm, BC= 10 sm, CD=8 sm, AD=20 sm. S(ABCD) –ni tapmalıyıq. Qalan həllərdə də şərt eyni olacaqdır. BM və CN parçalarını $BM \perp AD$ və $CN \perp AD$ olmaqla çəkək (Şəkil 18), onda BCNM düzbucaqlıdır, odur ki, BM=CN və BC=MN. Onda bu halda AM+ND=10.

AM=x olsun, onda ND =10-x. Pifaqor teoreminə görə ABM və DCN üçbucaqlarından



Şəkil 18.

$h^2 = 6^2 - x^2$, $h^2 = 8^2 - (10 - x)^2$, bu iki bərabərlikdən
 $6^2 - x^2 = 8^2 - (10 - x)^2$ və ya $36 - x^2 = 64 - 100 + 20x - x^2$,
 $20x = 72$, $x = 3,6(sm)$. İndi h - i tapaq:
 $h^2 = 6^2 - 3,6^2 = 36 - 12,96 = 4,8^2$, $h = 4,8sm$.

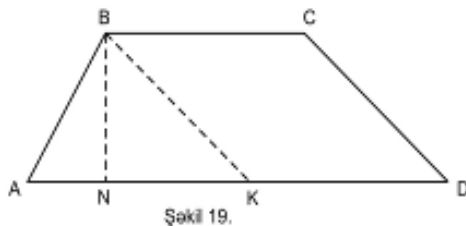
$$S(ABCD) = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = \frac{10 + 20}{2} \cdot 4,8 = 72 (sm^2)$$

II. Fərz edək ki, $BN \perp AD$ və $BK \parallel CD$, onda $BCDK$ paraleloqramdır. (Şəkil 19).

Buradan $BK = CD = 8sm$,

$KD = BC = 10sm$. Fərz edək ki, $AN = xsm$,

Onda $NK = (10 - x)sm$. Sonrakı mühakimə tamamı ilə birinci həllə eynidir. İndi ABK



üçbucağının növünü müəyyən etmək lazımdır. Pifaqor teoreminin tərsinə görə bu üçbucaq düzbucaqlıdır ($10^2 = 6^2 + 8^2$)

III. Fərz edək ki, $BN \perp AD$ və $BK \parallel CD$, onda $KBCD$ paraleloqramdır və $BK = CD = 8sm$, $KD = BC = 10sm$. ABK üçbucağına baxaq: $AB = 6sm$, $BK = 8sm$, $AK = 10sm$. $10^2 = 6^2 + 8^2$ olduğundan ABK düzbucaqlı üçbucaqdır. Bilirik ki, düzbucaqlı üçbucaqda katetin kvadratı onun hipotenuz üzərindəki proyeksiyası ilə hipotenuzun uzunluğu hasilinə bərabərdir. Baxdığımız halda bu $6^2 = x \cdot 10$ deməkdir ki, buradan $x = 3,6sm$. $\triangle ABN$ -dən Pifaqor teoreminə görə $h = \sqrt{6^2 - 3,6^2} = 4,8sm$. Bundan sonra mühakimə birinci həldəki kimi davam etdirilir.

IV. $BK \parallel CD$ çəkək, onda $BCDK$ paraleloqramdır, buradan $BC = KD = 10sm$, odur ki, $AK = AD - KD = 10sm$. $6^2 + 8^2 = 10^2$ olduğundan ABK düzbucaqlı üçbucaqdır ($\angle ABK = 90^\circ$).

$$S(ABK) = \frac{AB \cdot BK}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24(sm^2) .$$

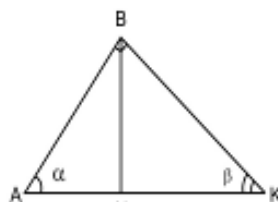
Digər tərəfdən $S(ABK) = \frac{AK \cdot h}{2} = \frac{10h}{2} = 5h$. Onda $5h = 24$,
 $h = 4,8(sm)$.

V. İndi məsələnin, düzbucaqlı üçbucaqda triqonometrik asılılıqdan istifadə etməklə, həllini verək. Bunun üçün ilk dörd həldə istifadə edilən çertyojun yalnız bir hissəsindən istifadə etmək lazım gəlir. Pifaqor teoreminin tərsinə görə ABK düzbucaqlı üçbucaqdır (Şəkil 20). Onda

$\sin \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Qurmaya görə ABN də düzbucaqlı üçbucaqdır ($BN \perp AK$). Onda

$$BN = AB \sin \alpha = 6 \cdot \frac{4}{5} = 4,8(sm).$$

β bucağı ilə əlaqədar da analogi işi davam etdirmək olar. həllin sonrası aşkardır.



Şəkil 20.

VI. Yeni sual qoyaq: “Pifaqor teoreminin tərsindən istifadə etməmək olarmı?” Pifaqor teoremindən hər dəfə köməkçi üçbucağın sahəsini hesablamaqda lazım olan elementləri tapmaq məqsədi ilə istifadə edirdik. İndi köməkçi üçbucağın sahəsini onun oturacağı və hündürlüyündən istifadə etmədən hesablayaq. ABK üçbucağının bütün tərəfləri məlumdur, odur ki, onun sahəsini Heron düsturunu tətbiq etməklə hesablamaq olar. Bunun üçün əvvəlcə ABK üçbucağının perimetrinin yarısını hesablayırıq.

Tərifə görə $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+8+10}{2} = 12(sm)$. İndi həmin üçbucağın sahəsini tapaq:

$$S(ABK) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = 24 sm^2.$$

Lakin, $S(ABK) = \frac{10 \cdot h}{2}$, onda $h = \frac{2 \cdot S(ABK)}{10} = \frac{2 \cdot 24}{10} = 4,8(sm)$.

Onda trapesiyanın sahəsi $S(ABCD) = \frac{10+20}{2} \cdot 4,8 = 72(sm^2)$.

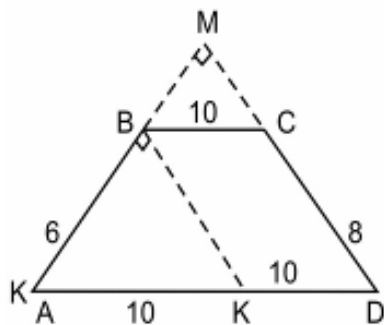
VII. Əvvəlki həllərdə paraleloqramın tərəflərinin xassəsindən, sahə anlayışından və Pifaqor teoremindən istifadə etdik. İndi

fiqurların oxşarlığından istifadə etməklə məsələnin həllini verək. Bunun üçün AB və CD tərəflərini M nöqtəsində kəsişənə qədər uzatmaqla trapesiyanı üçbucağa tamamlayırıq (Şəkil 21). Sonra $BK \parallel CD$ çəkib və müəyyən edirik ki, $BC = KD$, onda $AK = 10$.

Pifaqor teoreminin tərsinə əsasən

tapırıq ki, $\angle ABK = 90^\circ$, ona görə ki, iki paralel düz xətlərin üçüncü düz xətlə kəsişməsi haqda teoremə görə M təpə nöqtəsindəki bucaq da 90° -yə bərabərdir. $\triangle ABK$ və $\triangle AMD$, $k = 2$ oxşarlıq əmsalı ilə,

çünki $k = \frac{AD}{AK}$, oxşardır (iki buca-



Şəkil 21

ğa görə: $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle M$).

Buradan $AM = AB \cdot k = 12(sm)$. $DM = k \cdot BK = 16sm$. Onda B və C uyğun olaraq AM, MD parçalarının orta nöqtələri olduğundan $MB = 6sm$, $MC = 8sm$. AMD və BMC düzbucaqlı üç-

bucaqlar olduğundan $S(BMC) = \frac{BM \cdot MC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24(sm^2)$;

$S(AMD) = \frac{AM \cdot DM}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96(sm^2)$. İndi trapesiyanın sa-

həsini asanlıqla tapa bilərik: $S(ABCD) = S(AMD) - S(BMC) = 96 - 24 = 72 sm^2$. Bu həllin son sətrini başqa şəkildə də ifadə etmək olar:

$S(ABCD) = S(AMD) - S(BMC) = 4 \cdot S(BMC) -$

$S(BMC) = 3 \cdot S(BMC) = 3 \cdot 24 = 72(sm^2)$.

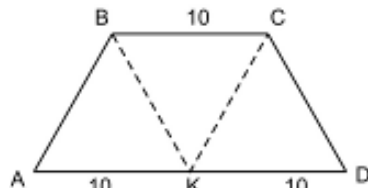
$S(ABCD) = 3S(BMC)$ olduğunu nəzərə alsaq məsələnin başqa bir həllini də alırıq.

VIII. $BK \parallel CD$ çəkək və C nöqtəsini K ilə birləşdirək (Şəkil 22). ABK və CKB üçbucaqları iki tərəf və onlar arasındakı bucağa görə bərabərdirlər: BC, AD paralel düz xətlərinin BK kəsəni ilə əmələ gətirdiyi daxili çarpaz bucaqlar olduğundan $\angle AKB =$

$\angle KBC$, BK – ortaq tərəfdir. Onda $AK=BC$. Analoji olaraq CKB və KCD üçbucaqlarının bərabərliyi isbat edilir.

Üç bərabər ABK , BKC və KCD üçbucaqlarını aldıq. Onda $S(ABCD)=$

$$=3 \cdot S(BKC) = 3 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} = 72 (sm^2) .$$



Şəkil 22.

Başqa həllərdə göstərmək olar, lakin onların hamısı tamamı ilə və ya qismən artıq baxdıqlarımız həllərə gətirilir. Bütün həlləri təhlil etməklə belə nəticəyə gəlirik ki, onlardan ən

yaxşısı birinci və sonuncudur. Birinci həllin üstünlüyü ondan ibarətdir ki, o daha təbiidir, sonuncu isə, əlavə qurmalar nəticəsində trapesiya üç bərabər üçbucağa ayrıldığına görə, daha sadə və orijinal görünür. Lakin ideya baxımdan yeddinci həll daha zəngindir. Burada, əlavə qurma trapesiyanın üçbucağa tamamlanması və oxşar üçbucaqların tətbiqində iki müxtəlif yanaşma və sonuncu həlldə baxılan üçbucaqların sahələrinin bərabərliyinin fikrə gətirilməsi gözlənilməz priyomlardır.

17. 16-cı məsələnin II həllindən istifadə etmək məqsədəuyğundur. Bu zaman alınmış ümumi düsturda 16-cı məsələnin verilənlərini yerinə yazmaqla trapesiyanın sahəsinin $72 (sm^2)$ olduğunu alırıq. $d < a + b + c$ olduqda məsələnin həlli vardır.

18. $\vec{AB} = \vec{a}$ və $\vec{AD} = \vec{b}$ vektorlarına baxaq. $a > b$ olduğundan $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Deməli $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ və $\vec{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

$$\text{Onda } \vec{AC} \cdot \vec{DB} = AC \cdot DB \cos \alpha = a^2 - b^2 ,$$

$$\text{buradan } AC \cdot DB = \frac{a^2 - b^2}{\cos \alpha} .$$

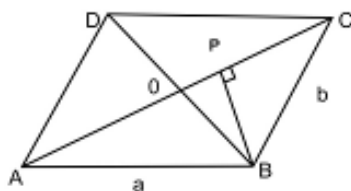
$$\text{Odur ki, } S(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot DB \sin \alpha = \frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{tg} \alpha . \text{ İndi alın-}$$

mış bu həlli araşdırmaq lazımdır. ABCD paraleloqramında B təpəsindən AC diaqonalına BD perpendikulyarını endirək (Şəkil 23).

$BP = x$ olsun. $AO = OC$ və ya $AP - OP = PC + OP$ olduğundan $2OP = AP - PC$. $\triangle OPB$ -dən $OP = x \operatorname{ctg} \alpha$, $\triangle APB$ -dən $AP = \sqrt{a^2 - x^2}$ və $\triangle BPC$ -dən $PC = \sqrt{b^2 - x^2}$, onda $\sqrt{a^2 - x^2} = 2x \operatorname{ctg} \alpha + \sqrt{b^2 - x^2}$, $0 < x < b < a$. Alınmış sonuncu bərabərliyin hər tərəfi müsbət olduğundan onu kvadrata yüksəldə bilərik:

$$a^2 - b^2 = 4x^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 4x \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sqrt{b^2 - x^2}.$$

Aşkadır ki, alınmış bərabərliyin də hər tərəfi müsbətdir, odur ki, yenə kvadrata yüksəldə bilərik. Bundan sonra müvafiq çevirmələr nəticəsində



Şəkil 23.

$16x^4 (\operatorname{ctg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 8x^2 (a^2 + b^2) \operatorname{ctg}^2 \alpha + (a^2 - b^2)^2 = 0$ alırıq. Alınmış bikvadrat tənliyin həqiqi kökü olmalıdır, bunun üçün onun diskriminantı mənfi olmamalıdır: $(a^2 + b^2)^2 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} (a^2 - b^2)^2 \geq 0$.

Məsələn, $a = 1, b = 0,5$ olduqda bu bərabərsizlik ödənilmir.

Deməli, yalnız $\cos \alpha \geq \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ olduqda baxılan paraleloqramın

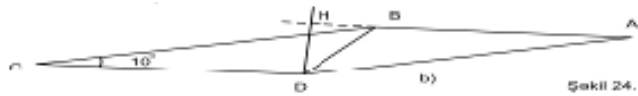
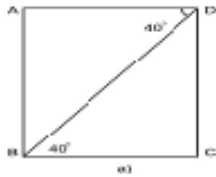
sahəsini $S = \frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{tg} \alpha$ düsturu ilə hesablamaq olar. Ümumiyyətlə

parametrli həndəsə məsələlərinin həlli zamanı alınmış həlli, baxılan fiqurun təyin olunması nöqtəyi nəzərdən, araşdırmaq lazımdır.

19. H nöqtəsi BC düz xətti üzərində ola bilməz (əks halda BDH üçbucağının bucaqları cəmi $90^\circ + 40^\circ + 40^\circ = 170^\circ$ olardı), odur ki, $H \in AB$, $\angle DBH = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$. Bundan əlavə $\angle DBC = 40^\circ$, çünki əks halda bu bucaq kor olardı. ($180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$), H nöqtəsi BA şüası üzərində yerləşərdi və belə alınardı ki,

$\angle ABC = \angle DBC + \angle DBH > 188^\circ$. İki hal mümkündür: a) H nöqtəsi BA şüasına daxildir, b) B nöqtəsi C və H arasında yerləşir. a) halında $\angle ABC = \angle DBC + \angle DBH = 90^\circ$, başqa sözlə ABCD düzbucaqlıdır (Şəkil 24 a). b) halı 24 b şəklində göstərilir; buradan $\angle HBD = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$; $\angle DBA = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$; $\angle ABC = \angle DBA + \angle DBC = 130^\circ + 40^\circ = 170^\circ$; Onda $\angle BCA = \angle BAD = 10^\circ$.

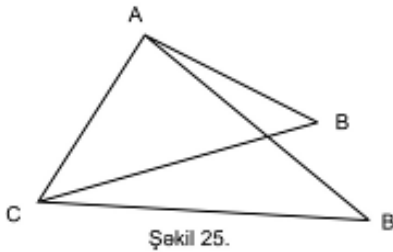
Deməli axtarılan bucaqlar: $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$ və ya $10^\circ, 170^\circ, 10^\circ, 170^\circ$ olar.



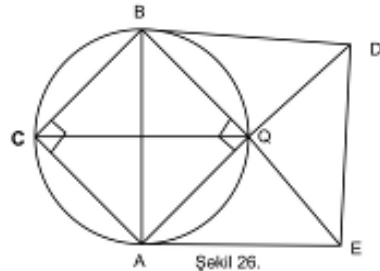
Şəkil 24.

20. $\frac{AB}{\sin \angle ACB}$ nisbəti sabit qalmalı olduğundan (Şəkil 25),

ACB bucağı isə artdığından, lakin iti bucağın sinusu da artdığı üçün, onda baxılan üçbucağın AB tərəfi artır.



Şəkil 25.



Şəkil 26.

21. Həllin iki üsulunu göstərək: I. (Sinuslar teoreminə əsaslanır). Şərtə görə $\angle AQB = \angle AQE = 90^\circ$ (Şəkil 26). Deməli Q nöqtəsi, diametri üçbucağın hipotenuzu olan, ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin üzərində yerləşir. $\triangle AQC$ -dən sinuslar teoreminə görə $CQ = AB \sin(\alpha + 45^\circ)$, burada $\alpha = \angle BAC$.

Sonra $AB = c$ işarə edib

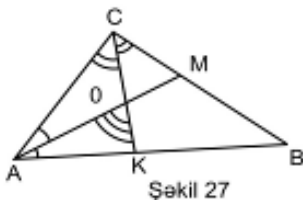
$$CQ = c(\sin \alpha \cos 45^\circ + \cos \alpha \sin 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right) = \frac{a+b}{\sqrt{2}} \text{ alırıq.}$$

II. (Kosinuslar teoreminə əsaslanır). AQC üçbucağından kosinuslar teoreminə görə yazırıq:

$$CQ^2 = b^2 + AQ^2 - 2b \cdot AQ \cdot \cos(\alpha + 45^\circ), \quad AQ^2 = \frac{c^2}{2} \text{ olduğundan}$$

$$CQ^2 = b^2 + \frac{c^2}{2} - 2b \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos\alpha - \sin\alpha) = b^2 + \frac{c^2}{2} - bc \left(\frac{b}{c} - \frac{a}{c} \right) = b^2 + \frac{a^2 + b^2}{2} - b^2 + ab = \frac{(a+b)^2}{2}, \quad CQ = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

22. Fərz edək ki, ABC-də AC=BC, CK və AM tən bölənləri O nöqtəsində kəsişir (Şəkil 27). Onda $CK = l$, $\angle AOK = \alpha$, $\angle OAK = 90^\circ - \alpha$,



$$\begin{aligned} \angle BAC = \angle ABC = 2\angle OAK &= 180^\circ - 2\alpha, \\ \angle AMB &= 180^\circ - (\angle ABM + \angle BAM) = 180^\circ - \\ &- (\angle ABC + \angle OAK) = 3\alpha - 90^\circ. \end{aligned} \quad \Delta ACK \text{ -dan}$$

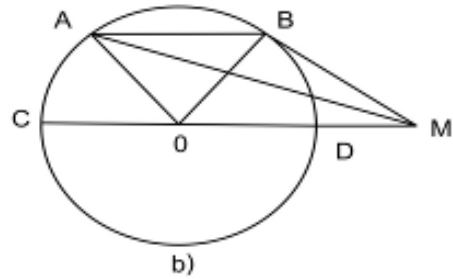
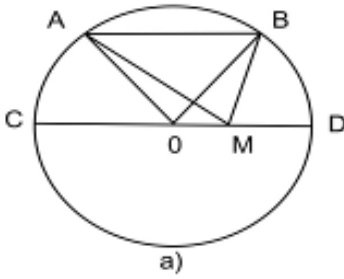
$AK = CK \cdot \operatorname{ctg} \angle CAK = l \cdot \operatorname{ctg}(180^\circ - 2\alpha) = -l \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$, buradan $AB = 2 \cdot AK = -2l \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$. Sonra ΔABM -dən sinuslar teoreminə görə $\frac{AM}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle AMB}$ və ya $\frac{AM}{\sin 2\alpha} = \frac{-2l \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha}{-\cos 3\alpha}$, buradan $AM = \frac{2l \cdot \cos 2\alpha}{\cos 3\alpha}$.

23. M nöqtəsinin diametrin (Şəkil 28 a) və onun uzantısı (Şəkil 28 b) üzərində olması vəziyyətlərinə baxaq. Kosinuslar teoreminə görə BOM və AOM üçbucaqlarından (Şəkil 28):

$$BM^2 = R^2 + OM^2 - 2R \cdot OM \cdot \cos \angle BOM,$$

$$AM^2 = R^2 + OM^2 - 2R \cdot OM \cdot \cos \angle BOM \quad \text{yazırıq. Buradan}$$

$AM^2 + BM^2 = 2(R^2 + OM^2)$. Beləliklə, $AM^2 + BM^2$ cəmi M nöqtəsinin verilmiş vəziyyətlərində vətərin necə yerləşməsindən asılı deyil.



Şəkil 28.

24. Həllin iki üsulunu verək.

I. Fərz edək ki, ABC üçbucağında $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, xaricdən daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu r_a -dır. (Şəkil 29).

$$\text{Onda } r_a = OK = AK \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}. \quad AK = \frac{a+b+c}{2}, \quad \operatorname{tg} \angle \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \angle A}{1 + \cos \angle A}}$$

$$\text{olduğundan } r_a = \frac{a+b+c}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos \angle A}{1 + \cos \angle A}}. \quad ABC \text{ üçbucağından ko-}$$

$$\text{sinuslar teoreminə görə alınır ki: } \cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad \text{Sonun-}$$

cu nəticəni radiusun ifadəsində yerinə yazıb

$$r_a = \frac{a+b+c}{2} \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c-a)(b+c+a)}}, \quad \text{burada } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ -ni}$$

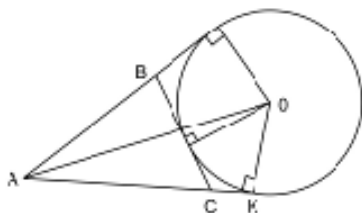
$$\text{nəzərə aldıqda } r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} \text{ alınır.}$$

$$\text{II. 30-cu şəkildən görünür ki, } S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r_a + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r_a - \frac{1}{2} \cdot a \cdot r_a,$$

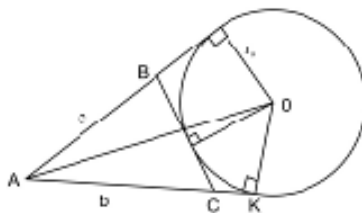
$$\text{Onda } r_a = \frac{S}{\frac{1}{2}(b+c-a)}. \quad \text{Burada } \frac{1}{2}(b+c-a) = p-a;$$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ olduğunu nəzərə alıb

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} \text{ tapırıq.}$$

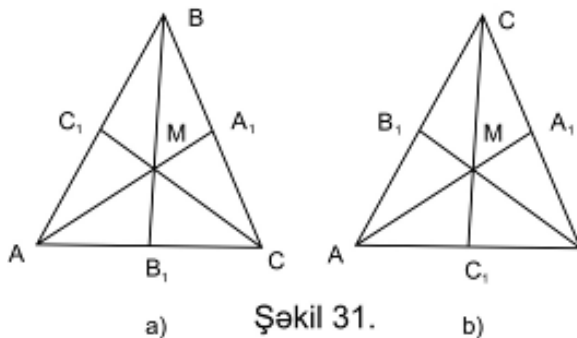


Şəkil 29.



Şəkil 30.

25. Üçbucağın üçüncü CC_1 medianını çəkək və medianların kəsişmə nöqtəsini isə M ilə işarə edək (Şəkil 31). Onda ABM üçbucağından alınır ki, $\angle AMB = 120^\circ$. Verilmiş bərabəryanlı üçbucaqda AMB, BMC və CMA bucaqları arasında ikisi eynidir. Lakin bu bucaqlardan biri ($\angle AMB = 120^\circ$) artıq bizə məlumdur, odur ki, bərabəryanlılığın ixtiyari halında (Şəkil 31 a, b) ya AMB bucağına bərabər bucaq vardır, onda bu bucaqlardan üçüncüsü də $120^\circ = 360^\circ - 2 \cdot 120^\circ$ -dir, yaxud $\angle BMC = \angle CMA = \frac{360^\circ - 120^\circ}{2} = 120^\circ$.



Şəkil 31.

Alırıq ki, bucaqların üçü də 120° -yə bərabərdir. Onda $\angle BMA_1 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, MA_1 parçası isə BMC üçbucağının tənböləni, həm də medianıdır, deməli həm də hündürlüyüdür. Buradan nəticə olaraq alınır ki, AA_1 parçası ABC üçbucağının tənböləni və hündürlüyüdür. Analoji olaraq BB_1 və CC_1 parçaları da baxılan üçbucağın medianı, hündürlüyü və tənbölənidir. Onda

$$\angle DBE = \angle CBE + \angle DBC = \angle CDE + \angle ADB \text{ və } \cos \angle DBE = \frac{1}{3} \text{ və}$$

$$BD = AC = DE = 7 \text{ olduğundan } BE = 2 \cdot BD \cdot \cos \angle DBE = \frac{14}{3}.$$

29. Çevrələrin $MN=x$ ortaq toxunanı onların K toxunma nöqtəsindən keçir və AED bucağının tənböləni üzərində yerləşən, mərkəzlər xəttinə perpendikulyardır (Şəkil 35). Odur ki, $MN \parallel BC \parallel AD$. AED və MEN üçbucaqlarının oxşarlığından $\frac{x}{4} = \frac{1}{x}$ və buradan $x=2$ alırıq. $BM=CN=b$, $AM=DN=a$ işarə edək. $AMND$ və $MBCN$ bərabəryanlı trapesiyaları çevrə xaricinə çəkildiyindən $a = \frac{x+4}{2} = 3$, $b = \frac{1+x}{2} = \frac{3}{2}$

$$\text{və } a+b = \frac{9}{2}, \quad AB_1 = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

olduğundan $\triangle ABB_1$ -dən

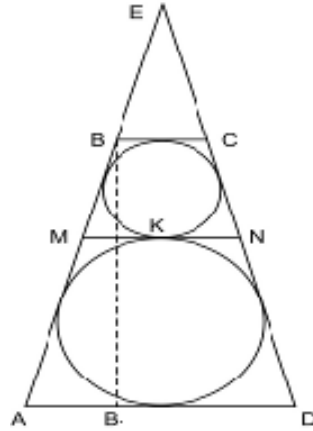
$$BB_1^2 = h^2 = (a+b)^2 - AB_1^2 = \frac{9^2 - 3^2}{2^2} = 3^2 \cdot 2; \quad h = 3\sqrt{2}. \text{ Onda}$$

$$S(ABCD) = \frac{1+4}{2} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{15}{\sqrt{2}}.$$

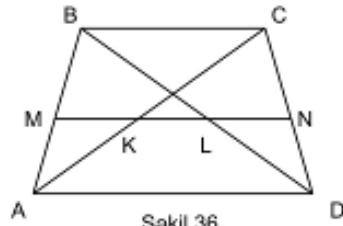
30. $\triangle AMK \sim \triangle ABC$ və $\triangle KCN \sim \triangle ACD$ olduğundan (Şəkil 36₁), $AK = y, KC = z, MK = KL = LN = x$ işarə etsək,

$$\begin{cases} \frac{x}{b} = \frac{y}{y+z} \\ \frac{2x}{a} = \frac{z}{y+z} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{b} + \frac{2x}{a} = 1 \Rightarrow x = \frac{ab}{a+2b} \text{ alırıq.}$$

31. a) EK, EL, EM və EN parçaları uyğun olaraq AEB, BEC, CED və DEA üçbucaqlarının sahələrini yarıya bölür (Şəkil 36₂). Buradan



Şəkil 35.



Şəkil 36₁

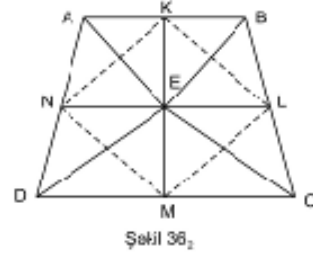
$$S(CMEL)=S(CME)+S(CLE)=S(DME)+S(BLE)=S(DNEM)-S(DNE)+S(BKEL)-S(BKE)=12-S(ANE)+6-S(AKE)=18-S(AKEN)=18-6=12.$$

b) KLMN dördbucaqlısı paraleloqramdır($KL=\frac{1}{2}AC=KN$, $LM=\frac{1}{2}BD=KN$),

buradan $NE=EL$. Bundan əlavə

$$S(ANE)=S(AKEN)-S(AKE)=6-S(AKE)=6-S(BKE)=S(BKEL)-S(BKE)=S(BLE).$$

Buradan alınır ki, A və B nöqtələri LN düz xəttindən eyni məsafədədir, yəni $AB\parallel LN$. Analoji olaraq isbat edilir ki, $DC\parallel LN$, deməli ABCD oturacaqları $AB=\frac{1}{2}$, $DC=x$ və orta xətti



$$NL = \frac{\frac{1}{2} + x}{2} = \frac{1 + 2x}{4} \quad \text{olan trapesiyadır. Onda}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{12}{24} = \frac{S(ABLN)}{S(NLCD)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1+2x}{4}}{x + \frac{1+2x}{4}} = \frac{3+2x}{6x+1} \Rightarrow 6x+1=6+4x \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

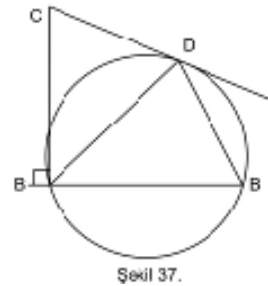
32. $\angle CDA = \alpha$, $\angle CAD = \beta$, $AC = x$ işarə edək (Şəkil 37).

$\triangle ADB$ -dən sinuslar teoreminə görə

$$\sin \alpha = \frac{5}{2 \cdot 3} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{5}{6}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \angle CDB < 90^\circ \quad \text{olduğundan, bura-}$$

dan alınır ki, D nöqtəsi AB qövslərindən böyüyü üzərindədir, həm də CAB bucağının daxilində yerləşir. AD və AB



qövləri bərabər olduğundan $AD=AB=5$, $\beta = 2\alpha - 90^0$ və ACD üçbucağından sinuslar teoreminə görə

$$x = 5 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{5 \sin \alpha}{-\cos 3\alpha} = \frac{5 \sin \alpha}{\cos \alpha (4 \sin^2 \alpha - 1)} = \frac{5 \cdot \frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6} \left(4 \cdot \frac{25}{36} - 1 \right)} = \frac{225}{16\sqrt{11}}$$

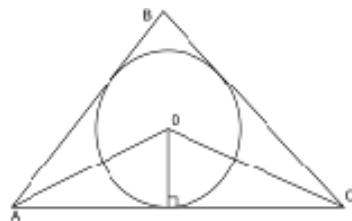
33. $OA = 4$, $OC = 6$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ (Şəkil 38). Daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu r olsun. Şəkildən görünür ki, $\angle AOC = \pi - \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2} \right) = \pi - \frac{1}{2}(\pi - B) = \pi - \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2\pi}{3}$

Kosinuslar teoreminə görə

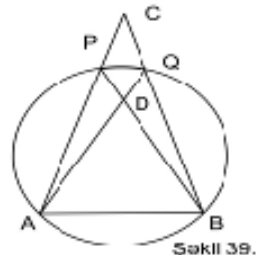
$$AC = \sqrt{4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{16 + 36 + 24} = 2\sqrt{19}.$$

$$\text{Onda } S(AOC) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} r \cdot 2\sqrt{19} \Rightarrow r = \frac{24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{19}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

34. C nöqtəsindən çəkilmiş kəsənin xassəsinə görə (Şəkil 39) $AC \cdot PC = BC \cdot QC$, buradan, $AC = BC$ olduğundan, $PC = QC$. Beləliklə, $PQ \parallel AB$, odur ki, $APQB$ bərabəryanlı trapesiyadır. Asanlıqla müəyyən



etmək olar ki, $\triangle CPQ \sim \triangle CAB$ və $\triangle PQD \sim \triangle BAD$, buradan isə $\frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB} = \frac{QD}{AD} = \frac{AQ - AD}{AD} = \frac{AQ}{AD} - 1 = \frac{1}{3}$ bərabərlikləri alınır. Onda oturacaqları bir düz xətt üzərində olan ortaq təpəli



PBQ və PCQ üçbucaqlarının sahələri $S(PBQ) = \frac{1}{2} BQ \cdot h$ və

$S(PCQ) = \frac{1}{2} CQ \cdot h$ olar. (Oturacaqlar eyni düz xətt üzərində və təpələri ortaq olduğundan hər iki üçbucağın hündürlüyü eynidir - h). Onda $\frac{S(PBQ)}{S(PCQ)} = \frac{BQ}{CQ}$, $BQ = BC - CQ$ olduğunu burada nəzərə alıb

$$\frac{S(PBQ)}{S(PCQ)} = \frac{BQ}{CQ} = \frac{BC - CQ}{CQ} = \frac{BC}{CQ} - 1 = \frac{1}{\frac{CQ}{BC}} - 1 = 3 - 1 = 2,$$

Onda $S(PBQ) = 2S(PCQ) = 6$. Analoji olaraq $\frac{S(QDB)}{S(PQB)} = \frac{BQ}{BP} = \frac{AD}{AQ} = \frac{3}{4}$,

odur ki, $S(QBD) = \frac{3}{4} S(PQB) = \frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{9}{2}$.

35. Fərz edək ki, c, a, b uyğun olaraq verilmiş üçbucağın hipotenuzu və katetləri, R isə xaricə çəkilmiş çevrənin radiusudur. Onda $C = 2R = 5$, üçbucağın sahəsinin iki misli $2S = ab = 12$.

Pifaqor teoreminə görə $a^2 + b^2 = 25$. Alınmış $\begin{cases} ab = 12 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$

tənliklər sistemindən $\begin{cases} a = 3, b = 4 \\ a = 4, b = 3 \end{cases}$ və sonra $p = \frac{a + b + c}{2} = 6$

alırıq. Onda daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu $r = \frac{S}{p} = \frac{6}{6} = 1$ olar.

36. E mərkəzi N nöqtəsində olan çevrənin BO düz xəttinə toxunma nöqtəsi olsun. (Şəkil 40). $MB = r_1$, $NE = r_2$ işarə edək və məsələnin şərtinə görə $OM = 13x$, $ON = 12x$ yazarıq. OM və ON uyğun olaraq AOB və AOE bucaqlarının tənbölənləri olduğundan $\angle BOM = \angle AOM = \alpha$, $\angle EON = \angle AON = \beta$ işarə edək, onda

$$2(\alpha + \beta) = \pi, \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}. \text{ Deməli } r_1 = 13x \sin \alpha,$$

$$r_2 = 12x \sin \beta = 12x \cos \alpha, \text{ buradan}$$

$$\text{axtarılan nisbət } \frac{r_1}{r_2} = \frac{13}{12} \operatorname{tg} \alpha \text{ olar.}$$

BN parçası ABE

bucağının tənbölənidir, bu bucağın qiymətini OAB üçbucağından

$$\text{tapmaq olar. } \angle OAB = \frac{1}{2}(\pi - 2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$\text{beləliklə } \angle EBN = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

EBN üçbucağında $BE = BO + OE = 13x \cos \alpha + 12x \sin \alpha$, odur

$$\text{ki, } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{12x \cos \alpha}{13x \cos \alpha + 12x \sin \alpha} = \frac{12}{12 \operatorname{tg} \alpha + 13}. \quad t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

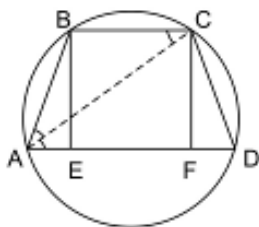
işarə edək; burada $0 < t < 1$, çünki $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$$\text{İndi } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-t}{1+t}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2} \text{ hesablayıb}$$

$$\frac{1-t}{1+t} = \frac{12(1-t^2)}{24t+13(1-t^2)} \text{ tənliyini alırıq, buradan } 25t^2 = 1, \quad t = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Onda } \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \text{ odur ki, } \frac{r_1}{r_2} = \frac{13}{12} \operatorname{tg} \alpha = \frac{65}{144}.$$

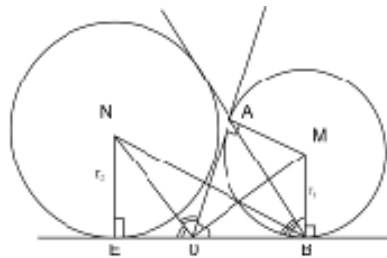
37. ABCD dördbucaqlısının bərabər tərəfləri AB, BC və CD olsun (Şəkil 41). Bunlar eyni bir çevrənin bərabər vətərləri oldu-



Şəkil 41

ğundan, onların gərdiyi qövsələr də bərabərdir, deməli daxilə çəkilmiş ACB, CAB və CAD bucaqları da bərabərdir.

$\angle ACB = \angle CAD$ bərabərliyindən $BC \parallel AD$ alınır, odur ki, ABCD bərabəryanlı trapesiyadır. $\angle CAD = \alpha$ işarə edək, onda $\angle BAD = 2\alpha$. Sinuslar teoreminin nəticəsinə



Şəkil 40.

görə $\sin \alpha = \frac{CD}{2R}$, burada $R = 2\sqrt{2}$ məlum xaricə çəkilmiş

çevrənin radiusudur. Beləliklə, $\sin \alpha = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Fərz edək

ki, E və F nöqtələri uyğun olaraq B və C nöqtələrinin AD düz xətti üzərindəki proyeksiyasıdır. ABE düzbucaqlı üçbucağından

$$AE = AB \cos 2\alpha = AB(1 - 2\sin^2 \alpha) = \frac{3}{2} \text{ alınır. } AE=FD, EF=BC$$

olduğundan $AD = 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 = 5$

38. “Linzanın” sahəsi BD diaqonalı ilə bölünmüş iki bərabər yarım “linzaların” sahələri cəminə bərabərdir (Şəkil 42,səh.90 bax). Belə fiqurların hər birinin sahəsi

radiusu 4-ə bərabər dairənin sahəsinin dördə biri ilə kvadratin sahəsinin yarısının fərqinə bərabərdir. Deməli axtarılan

$$\text{sahə } S = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \pi \cdot 4^2 - \frac{16}{2} \right) = 2(4\pi - 8) = 8(\pi - 2) . \text{ Tələb olunan}$$

sahəni tapmaq üçün belə də mühakimə etmək olar. Fərz edək ki,

“linzanın” sahəsi S-dır. Kvadratin sahəsi dairənin dördə biri sahələri cəmi ilə onların ortaq hissəsinin fərqinə bərabər oldu-

$$\text{ğundan } 2 \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot 4^2 - S = 4^2 \text{ yazırıq, buradan } 8\pi - S = 16 ,$$

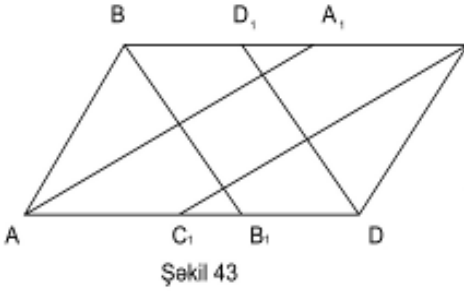
$$S = 8(\pi - 2) \text{ alırıq.}$$

39. Fərz edək ki, A_1, C_1 və $B_1 D_1$ uyğun olaraq l_1, l_2 və m_1, m_2 düz xətlərinin BC, AD və AD, BC tərəfləri ilə kəsişmə nöqtələridir (Şəkil 43). $\angle BAD = 2\alpha$, $AB = a$, $BC = b$, l_1, l_2 düz xətləri arasındakı məsafəni h , l_1, l_2 düz xətləri arasındakı məsafəni d ilə işarə edək. Onda $\angle BAA_1 = \alpha$, $\angle ABC = \pi - 2\alpha$,

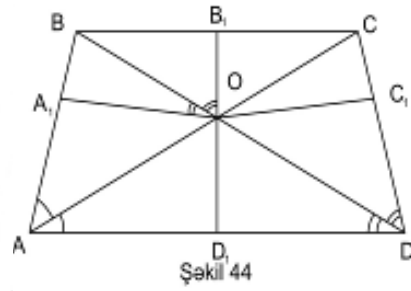
$$\angle ABB_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ olar, buradan alınır ki, } m_1 \perp l_1 . \text{ Lakin } l_2 \parallel l_1 ,$$

$m_1 \parallel m_2$ odur ki, $m_1 \perp l_2$, $m_2 \perp l_1$, $m_2 \perp l_2$. Bundan əlavə

$\angle BA_1A = \angle CC_1D = \alpha$, olduğundan $BA_1 = AB = a$,
 $DC_1 = DC = a$. Beləliklə, $\triangle ABA_1 = \triangle CDC_1$. Analoji olaraq
 $\triangle ABB_1 = \triangle CDD_1$ ($AB = CD$, $\angle ABB_1 = \angle D_1DC$,
 $\angle BAB_1 = \angle D_1CD$).



Şəkil 43



Şəkil 44

a) Fərz edək ki, S , S_1 , S_2 uyğun olaraq $ABCD$, AA_1CC_1 ,
 BB_1DD_1 paraleloqramlarının S_3 , S_4 isə ABB_1 , CDD_1
üçbucaqlarının sahələridir. Onda $S = 2S_3 + S_1 = 2S_4 + S_2$, burada
 $S_1 = AA_1 \cdot h = 2ah \cos \alpha$, $S_2 = BB_1 \cdot d = 2ad \sin \alpha$,
 $S_3 = \frac{1}{2} a^2 \sin(\pi - 2\alpha) = \frac{a^2}{2} \sin 2\alpha$, $S_4 = \frac{a^2}{2} \sin 2\alpha$. Beləliklə,
 $S_1 = S_2$ yəni $h \cos \alpha = d \sin \alpha$, burada $h = d\sqrt{3}$. Buradan
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{d} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\angle BAD = 2\alpha = \frac{\pi}{3}$.

b) $r = \frac{k}{p}$ düsturundan, burada $k = S(ABD)$, p isə ABD
üçbucağının perimetrinin yarısıdır, ABD – üçbucağının daxilinə
çəkilmiş çevrənin radiusunu tapaq. Şərtə görə $AC = \sqrt{\frac{22}{3}}$,
 $BD = 2$. ABC və ABD üçbucaqlarından kosinuslar teoreminə
görə $\frac{22}{3} = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - 2\alpha) = a^2 + b^2 + ab$, $4 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 2\alpha =$

$= a^2 + b^2 - ab$ alırıq. Buradan $ab = \frac{5}{3}$, $a^2 + b^2 = \frac{17}{3}$, $a + b = 3$,

$$p = \frac{a + b + BD}{2} = \frac{5}{2}, \quad k = \frac{1}{2}ab \sin 2\alpha = \frac{5}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}, \quad r = \frac{k}{p} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

40. ABCD dördbucaqlısının daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzini O, bu çevrənin dördbucaqlının tərəflərinə toxunma nöqtələrini A_1 , B_1 , C_1 , D_1 ilə (Şəkil 44), $\angle BAD = 2\alpha$, $\angle CDA = 2\beta$ işarə edək, onda $\angle A_1AO = \angle D_1AO = \alpha$, $\angle C_1DO = \angle D_1DO = \beta$. Belə hesab edək ki, $\angle A = 2\alpha = \arctg \frac{4}{3}$.

Daxilə çəkilmiş dördbucaqlının xassəsinə görə

$$\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC = \pi. \text{ Buradan alınır ki, } \angle B_1OC = \angle C_1OC = \alpha, \quad \angle BOA_1 = \angle BOB_1 = \beta. \quad tg 2\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\text{olduğundan } \frac{4}{3} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}, \text{ başqa sözlə } 2tg^2\alpha + 3tg\alpha - 2 = 0,$$

$$\text{buradan } tg \alpha = \frac{1}{2}, \quad ctg \alpha = 2. \text{ Bundan əlavə,}$$

$OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 = 1$. Fərz edək ABCD dördbucaqlısının sahəsi S-dir. Onda $S = tg\alpha + ctg\alpha + tg\beta + ctg\beta$ (1). Bu dörd cüt düzbucaqlı üçbucaqların sahələri cəmidir, hər cüt isə bərabər üçbucaqlardır. Fərz edək ki, $tg\beta = a$, $ctg\beta = b$, onda $AB = ctg\alpha + tg\beta = 2 + a$, $AD = 2 + ctg\beta = 2 + b$. Kosinuslar teoreminə görə $BD^2 = (2 + a)^2 + (2 + b)^2 - 2(2 + a)(2 + b)\cos 2\alpha$,

$$\text{burada } \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 2\alpha}} = \frac{3}{5},$$

$$\text{buradan } BD^2 = a^2 + b^2 + 4(a + b) + 8 - \frac{6}{5}[4 + 2(a + b) + ab].$$

$$ab = tg\beta \cdot ctg\beta = 1 \text{ olduğundan } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (a + b)^2 - 2.$$

$a + b = x$ götürüb, $BD^2 = x^2 + \frac{8}{5}x$ (2) alırıq. Digər tərəfdən

ABD üçbucağı radiusu $\sqrt{6}$ olan çevərinin daxilinə çəkildiyindən sinuslar teoreminə görə $\frac{BD}{\sin 2\alpha} = 2\sqrt{6}$. Buradan

$$BD^2 = 24\sin^2 2\alpha = 24 \cdot \frac{16}{25} \quad (3). \quad (2) \text{ və } (3) \text{ bərabərliklərindən}$$

$$x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{24}{5} \cdot \frac{16}{5} = 0, \quad x = \frac{16}{5}, \quad (1) \text{ düsturundan isə}$$

$$S = \frac{5}{2} + a + b = \frac{5}{2} + x = \frac{57}{10} = 5,7 \text{ tapırıq. } BD \text{ və } AC \text{ diaqonalları}$$

arasındakı bucağı φ ilə işarə edək, onda $S = \frac{1}{2}BD \cdot AC \sin \varphi$,

$$\text{burada } BD = \frac{8\sqrt{6}}{5}, \quad \frac{AC}{\sin 2\beta} = 2\sqrt{6}. \quad \text{Lakin}$$

$$x = tg\beta + ctg\beta = \frac{2}{\sin 2\beta}, \text{ buradan } \sin 2\beta = \frac{2}{x} = \frac{5}{8}, \quad AC = \frac{5\sqrt{6}}{4},$$

$$\frac{57}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{4} \sin \varphi, \quad \sin \varphi = \frac{19}{20}, \quad \varphi = \arcsin \frac{19}{20}.$$

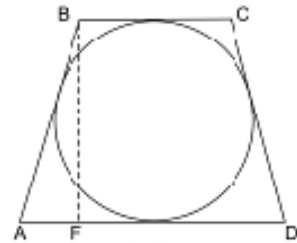
41. ABCD trapesiyasında $AD=4$, $BC=1$ və onun daxilinə çevrə çəkilmişdir (Şəkil 45). Fərz edək ki, BF parçası AD tərəfinə çəkilmiş hündürlükdür, onda

$$AF = \frac{AD - BC}{2} = \frac{4 - 1}{2} = 1,5. \quad \text{Çevrə xa-}$$

ricinə çəkilmiş qabarıq dördbucaqlının xassəsinə görə

$AD+BC=AB+CD$. ABCD bərabəryanlı

trapesiya olduğundan $AB = \frac{AD+BC}{2} = 2,5$.



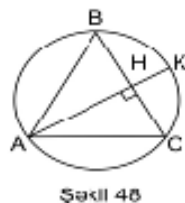
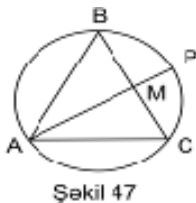
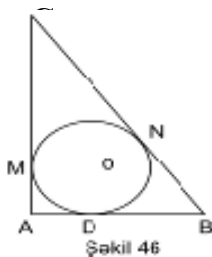
Şəkil 45

Pifaqor teoreminə görə ABF düzbucaqlı üçbucağından

$$BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{2,5^2 - 1,5^2} = 2.$$

$$\text{Onda } S(ABCD) = \frac{AD+BC}{2} \cdot BF = 2,5 \cdot 2 = 5.$$

42. ABC üçbucağının daxilinə ($AB \perp AC$) mərkəzi O nöqtəsində olan AB katetinə D nöqtəsində toxunan çevrə çəkilmişdir (şəkil 46). Şərtə görə $AD=4$, $DB=6$ verilir. AC katetinin uzunluğunu tapmaq lazımdır. Çevrəyə çəkilmiş toxunanların xassəsinə görə $AD=AM=4$; $DB=BN=6$. $CM=x$ işarə edək, onda $AB=10$, $AC=4+x$, $CB=6+x$. Pifaqor teoreminə görə $CB^2=AB^2+AC^2$ və ya $(6+x)^2=100+(4+x)^2$ buradan $x=20$ və $AC=4+x=24$.



Qeyd: $AD=6$, $DB=4$ götürsək, onda CM parçasının uzunluğu mənfi qiymət olardı. Bu isə mümkün deyil.

43. Fərz edək ki, 47 və 48 -ci şəkillərdə $AB=BC=a$, $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, $BM=MC=\frac{a}{2}$, $AC=2a \cos \alpha$ olduğundan, onda AMC üçbucağından kosinuslar teoreminə görə $AM = \frac{a}{2} \sqrt{1 + 8 \cos^2 \alpha}$. 47-ci şəkildəki çevrənin daxilindəki M nöqtəsindən iki vətər keçir. Məlum teoremə görə $AM \cdot MP = BM \cdot MC$, odur ki, $MP = \frac{a}{2\sqrt{1 + 8 \cos^2 \alpha}}$ və

$AM : MP = 1 + 8 \cos^2 \alpha = 11 : 3$, buradan $\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$. İndi 48-ci şəkilə baxaq. AHC üçbucağından $AH = 2a \cos \alpha \sin \alpha$,

$HC = 2a \cos^2 \alpha$ və $BH = a(1 - 2 \cos^2 \alpha)$. Sonra yenə məlum teoremə görə (yuxarıdakı kimi) $BH \cdot HC = AH \cdot HK$, odur ki, $HK = \frac{a(1 - 2 \cos^2 \alpha) \cos \alpha}{\sin \alpha}$ və $AH : HK = \frac{2(1 - \cos^2 \alpha)}{1 - 2 \cos^2 \alpha}$. Burada $\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$ yerinə yazıb $AH : HK = 4$ alırıq.

44. Verilmiş üçbucağın oturacağı $AC = 12$ sm, hündürlüyü $BD = 8$ sm və MN -toxunandır (Şəkil 49). $\triangle ABD$ -dən

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 = 6^2 + 8^2 = 100,$$

$$AB = 10 \text{ (sm)} \quad \triangle OBL \sim \triangle ABD \text{ -dən}$$

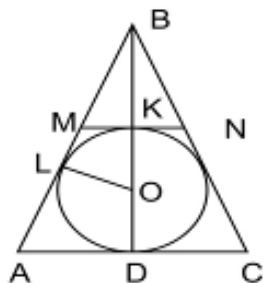
$$\frac{OL}{AD} = \frac{BL}{BD}. \quad AL = AD = 6 \text{ olduğundan,}$$

$$BL = AB - AL = 4. \quad \text{Beləliklə, } \frac{OD}{6} = \frac{4}{8},$$

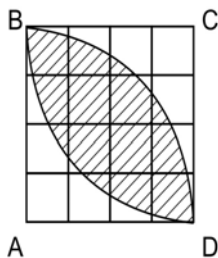
buradan $OD = 3$.

$$\triangle MBN \sim \triangle ABC \text{ -dən } \frac{MN}{AC} = \frac{BK}{BD}, \quad \text{lakin}$$

$$BK = BD - 2 \cdot OD = 2. \quad \text{Beləliklə, } \frac{MN}{12} = \frac{2}{8}, \quad MN = 3 \text{ (sm).}$$

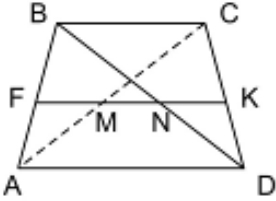


Şəkil 49

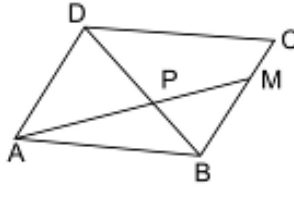


Şəkil 42.

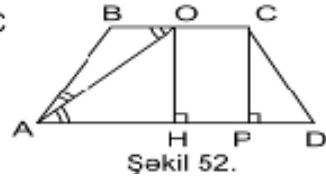
45. Fərz edək ki, FK trapesiyanın orta xəttidir, $AD=7$, $BC=4$ (Şəkil 50). $FK = \frac{AD+BC}{2} = \frac{7+4}{2} = 5,5$. FM və NK uyğun olaraq ABC və BCD üçbucaqlarının orta xətti olduğundan $FM=NK=2$ və $MN=FK-FM-NK=1,5$.



Şəkil 50



Şəkil 51



Şəkil 52.

46. BMP və DAP üçbucaqları $k = \frac{AD}{BM} = \frac{7}{5}$ oxşarlıq əmsalı ilə oxşardır (habelə homotetikdir) (Şəkil 51). Odur ki, $S(DAP) = k^2 S(BMP)$. $S(BMP) = S$, $S(ABCD) = S_1$ ilə işarə edək. Onda $S(DAP) = \left(\frac{7}{5}\right)S$, $S(ABP) = S(DAB) - S(DAP) =$

$$= \frac{1}{2} S_1 - \frac{49}{25} S ; \text{ Habelə,}$$

$$S(ABP) = S(ADM) - S(BMP) = \frac{5}{7} S(ABC) - S = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} S_1 - S . \text{ Bu}$$

ifadələrin bərabərliyindən $\frac{1}{2} S_1 - \frac{49}{25} S = \frac{5}{14} S_1 - S$, $S = \frac{25}{168} S_1$ alırıq.

47. $AB=CD=x$ olsun, onda $BA=BO=OC=x$ (Şəkil 52).

$$PD = HD - HP = \frac{AD}{2} - HP = \frac{AD}{2} - OC = 8 - x . \quad \text{CPD}$$

düzbucaqlı üçbucağına baxaq ($CP=6$, $PD=8-x$, $CD=x$). Pifaqor teoreminə görə $x^2 = 64 + (8 - x)^2$, $x = \frac{25}{4}$, onda

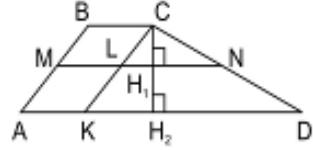
$BC = 2x = 12,5$. İndi verilmiş trapesiyanın sahəsini tapaq:

$$S(ABCD) = \frac{BC + AD}{2} \cdot CD = \frac{12,5 + 16}{2} \cdot 6 = 85,5.$$

48. $CK \parallel AB$ və $CH_2 \perp AD$ çəkək (Şəkil 53). $BC = x$ olsun, Onda

$$\frac{BC + MN}{2} \cdot CH_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC + AD}{2} \cdot CH_2 \text{ və ya}$$

$$\frac{x + 5}{2} \cdot CH_1 = \frac{x + 7}{2} \cdot \frac{1}{2} (CH_1 + H_1 H_2) \quad (1).$$



Şəkil 53.

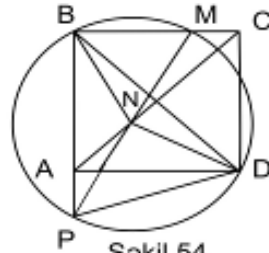
$$\Delta KCD \sim \Delta LCN \text{ -dən } \frac{KD}{LN} = \frac{CH_2}{CH_1} \text{ və ya}$$

$$\frac{7-x}{5-x} = \frac{CH_1 + H_1 H_2}{CH_1} \quad (2). \quad (1) \text{ bərabərliyindən } \frac{CH_1 + H_1 H_2}{CH_1} = \frac{2(x+5)}{x+7}$$

(3) yazarıq. (2) və (3) -dən alınır ki, $\frac{2(x+5)}{x+7} = \frac{7-x}{5-x}$, buradan $x = BC = 1(sm)$.

49. B və D nöqtələrinin kvadratin diaqonalına nəzərən simmetrik olmasından alınır ki, $NB = ND$. İndi göstərək ki, $NP = NB$. Doğrudan da ΔBNM bərabəryanlıdır, $\angle BMN = \angle MBN$, buradan $\angle NBP = 90^\circ - \angle MBN = 90^\circ - \angle BMN = \angle BPN$, deməli, ΔBNP - də bərabəryanlıdır ($NP = NB$).

$NP = NB = NM = ND$ bərabərliyi onu göstərir ki, P, B, M və D nöqtələri bir çevrə üzərindədir. (Şəkil 54). Daxilə çəkilmiş MPD və MBD bucaqları bu çevrənin eyni qövsünə söykəndiyindən $\angle MPD = \angle MBD = 45^\circ$.



Şəkil 54.

50. Fərz edək ki, ABC üçbucağında O daxilə çəkilmiş çevrənin mərkəzi, N və D bu çevrənin BC və AC tərəflərinə toxunma nöqtələridir (Şəkil 55). $AB = BC = a$, $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$, $AP = QM = n$, $PQ = x$ işarə edək. Onda $AD = CD = a \cos \alpha$ və bir nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunanlar haqqında teoremə görə

$CN = a \cos \alpha$. Odur ki, $MN = MC - CN = a(0,5 - \cos \alpha)$. Sonra bir nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunan və kəsən haqqında teoremə görə $AQ \cdot AP = AD^2$ və $MP \cdot MQ = MN^2$.

Qəbul etdiyimiz işarələrə görə buradan alırıq ki:

$$(n+x)n = a^2 \cos^2 \alpha \text{ və } (n+x)n = a^2(0,5 - \cos \alpha)^2$$

(1). Odur ki, $\cos^2 \alpha = (0,5 - \cos \alpha)^2$ və $\cos \alpha = 0,25$. AMC üçbucağından kosinuslar

teoreminə görə $AM^2 = \frac{a^2}{4}(1 + 8 \cos^2 \alpha)$ və

$$AM = \frac{a\sqrt{6}}{4}. \text{ Odur ki, } 2n + x = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Sonuncu bərabərlikdən n -i tapıb, (1) bərabərliklərindən birində yerinə yazıb

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{4} \text{ alırıq. İndi } a \text{ parçasının uzunluğunu tapmaq qalır.}$$

$\triangle COD$ -dən, burada CO şüası BCD bucağının tənbölənidir, alırıq ki, daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu $r = OD = a \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ -dir.

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{3}{5}, \text{ onda } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{15}}{5} \text{ və } r = \frac{a\sqrt{15}}{20}. \text{ Odur ki,}$$

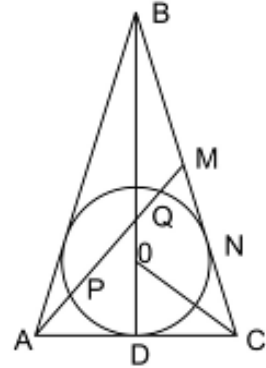
$$x = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \cdot r = 5\sqrt{\frac{2 \cdot 0,507}{15}} = 1,3.$$

51. Fərz edək ki, α rombun iti bucağı, R və r çevrələrin radiuslarıdır. $S(\text{halqa}) = \pi R^2 - \pi r^2$, $S(\text{daire}) = \pi r^2$ (Şəkil 56).

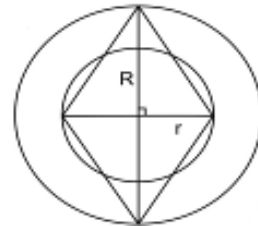
Şərtə görə

$$S(\text{halqa}) > 2S(\text{daire}), \text{ yəni}$$

$$\pi R^2 - \pi r^2 > 2\pi r^2, R^2 > 3r^2, \frac{r}{R} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Şəkil 55

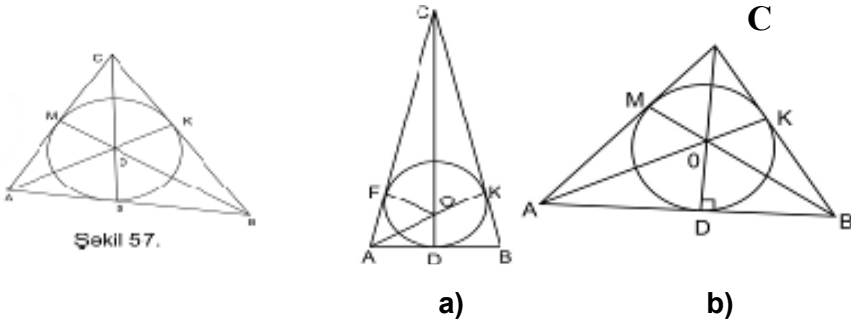


Şəkil 56.

Lakin $\frac{r}{R} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, və ya $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, buradan $\frac{\alpha}{2} < 30^\circ$, $\alpha < 60^\circ$.

Deməli rombun iti bucağı 60° -dən kiçik olduqda halqanın sahəsi kiçik çevrə dairəsi sahəsinin 2 misindən böyük olar.

52. Axtarılan nöqtələrdən biri üçbucağın təpə nöqtəsi, digəri üçbucağın bu təpədən çəkilmiş tən bölənin onun daxilinə çəkilmiş çevrə ilə kəsişmə nöqtəsidir. ABC üçbucağı bərabər tərəflidirsə (bu halda $\angle ACB = 60^\circ$) onda məsələnin üç həlli vardır (Şəkil 57). Bu A və K, B və M, C və D nöqtələr cütləridir. Fərz edək ki, $AB \neq AC$. Bu halda CD və AK –ni müqayisə edək (Şəkil 58). $CD = CO + r$, $AK = AO + r$ olduğundan CO və AO-nu müqayisə etmək kifayətdir.



Şəkil 58.

$CO > AO$ isə onda ən böyük məsafə CD-dir. Bu halda məsələnin bir həlli vardır: C və D nöqtələr cütü (Şəkil 58, a) $CO < AO$ olarsa onda ən böyük məsafə AK –dır, məsələnin iki həlli vardır: A və K habelə B və M nöqtələr cütləri (Şəkil 58, b).

Göstərilən halların hər birində ACB bucağının hansı qiyməti aldığını aydınlaşdıraraq. Fərz edək ki, $\angle ACB = 2\alpha$. İndi COF və

AOD üçbucaqlarından (Şəkil 58, a) $CO = \frac{r}{\sin \alpha}$,

$AO = \frac{r}{\sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}$ tapırıq. $CO > AO$ olduqda

$\frac{r}{\sin \alpha} > \frac{r}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$, odur ki, $\sin \alpha < \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$, buradan

$\alpha < 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\alpha < 30^\circ$, onda $\angle ACB < 60^\circ$. Analoji olaraq

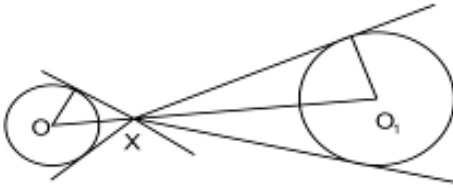
$CO < AO$ olduqda $\angle ACB > 60^\circ$. Deməli, $\angle ACB = 60^\circ$ olduqda məsələnin üç $\angle ACB > 60^\circ$ olduqda iki, $\angle ACB < 60^\circ$ olduqda bir həlli vardır.

53. $OX = y$ işarə edək, onda $O_1X = a - y$ olar. $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{y}$,

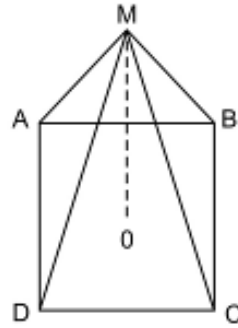
$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{2r}{a - y}$ (Şəkil 59). Şərtə görə $\frac{r}{y} = 3 \cdot \frac{2r}{a - y}$, buradan

$y = \frac{a}{7}$, onda $O_1X = a - \frac{a}{7} = \frac{6a}{7}$. Deməli X nöqtəsi OO_1

parçasını $OX : XO_1 = 1 : 6$ nisbətində bölür.



Şəkil 59



Şəkil 60

54. Kvadratın tərəfini a ilə işarə edək. AMD, DMC və BMC bucaqlarından (Şəkil 60) hansının ən böyük olduğunu müəyyənləşdirmək tələb olunur. ADM və BCM üçbucaqları bərabər olduğundan $\angle AMD = \angle BMC$, odur ki, AMD və DMC bucaqlarını müqayisə etmək kifayətdir. AMD üçbucağında

$\angle MAD = 135^0$, $AM = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, onda kosinuslar teoreminə

görə $MD^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} - 2 \cdot \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \cos 135^0 = \frac{3}{2}a^2 + a^2 = \frac{5}{2}a^2$. İndi

$\cos \angle AMD$ -ni tapaq. $a^2 = \frac{5}{2}a^2 + \frac{a^2}{2} - 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \angle AMD =$

$= 3a^2 - \sqrt{5}a^2 \cos \angle AMD$, buradan $\cos \angle AMD = \frac{2}{\sqrt{5}}$. $\triangle DMC$ -

dən $a^2 = \frac{5}{2}a^2 + \frac{5}{2}a^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}a^2 \cdot \cos \angle DMC = 5a^2 - 5a^2 \cos \angle DMC$,

buradan $\cos \angle DMC = \frac{4}{5}$. $\frac{4}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} =$, $= \frac{4 - 2\sqrt{5}}{5} < 0$, deməli

$\cos \angle DMC < \cos \angle AMD$, bucaqlar iti olduğundan isə

$\angle DMC > \angle AMD$. Kalkulyatordan istifadə etməklə tələb olunan

bucağı tapırıq: $\angle DMC = 36^0 52'$.

55. $AB = c$, $AE = b$, $\angle A = \alpha$ işarə edək. $\triangle ABE$ -dən kosinuslar teoreminə görə ($BE = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$)

(Şəkil 61,a). Həmin teoremə görə $\triangle BEF$ -dən

$$\cos \angle BEF = \frac{BE^2 + EF^2 - BF^2}{2 \cdot BE \cdot EF}, \cos \angle BEF = \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 - (b+c)^2}{2b \cdot \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}} =$$

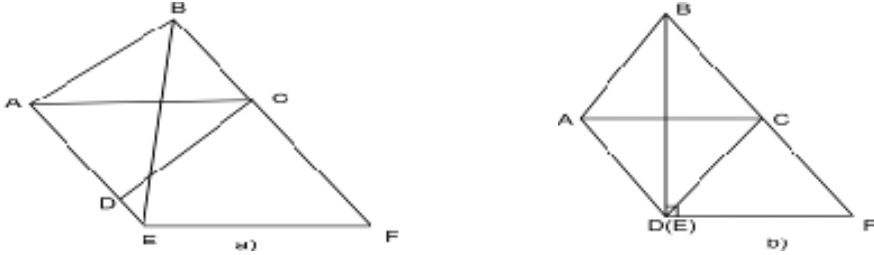
$$= \frac{b - 2c - 2c \cdot \cos \alpha}{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}}. \cos \angle BEF = 0 \text{ olarsa } \angle BEF = 90^0,$$

başqa sözlə $b - 2c - 2c \cos \alpha = 0$, buradan $\cos \alpha = \frac{b}{2c} - 1$. Lakin

$$\frac{b}{2c} = \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ onda } \cos \alpha - \cos \frac{\alpha}{2} + 1 = 0, 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = 0,$$

($0 < \alpha < 180^0$ olduğunu nəzərə alsaq) buradan $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3} = 60^0$,

$\alpha = 120^0$. Qeyd edək ki, bu halda D və E nöqtələri üst-üstə düşür (Şəkil 61, b).



Şəkil 61.

56. AD tərəfinin M orta nöqtəsindən $EF \parallel BC$ düz xəttini çəkək (Şəkil 62).

Onda

$$\triangle DEM = \triangle AFM,$$

$$MH = \frac{AH_1 + DH_2}{2} = \frac{3+7}{2} = 5 \Rightarrow S(ABCD) = S(EFBC) = MH \cdot BC = 5 \cdot 5 = 25.$$

57. BC çevrənin diametri olduğundan (Şəkil 63)

$$\angle BAD + \angle ABC = \angle ACB +$$

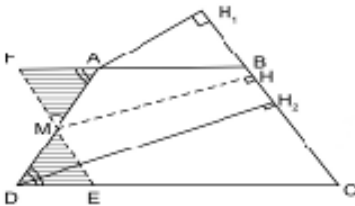
$$+ \angle ABC = 180^0 - \angle BAC = 90^0 \Rightarrow \angle BAD = 180^0 - 90^0 = 90^0,$$

$$\angle FAE = \angle BAE + \angle FAB =$$

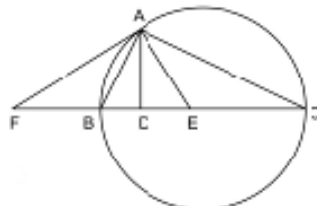
$$= \angle BAE + \angle EAC = 90^0, \text{ buradan } EC = 3x \text{ işarə edib}$$

$$3(2+4) = AD^2 = 2 \cdot (3+3x) \Rightarrow 6(1+2) = 6(1+x) \Rightarrow x = 2,$$

$$BC = 2 + 3 + 6 = 11.$$



Şəkil 62



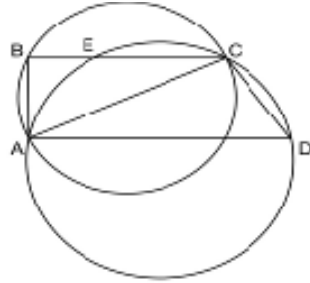
Şəkil 63

58. CD – ikinci çevrəyə toxunduğundan (Şəkil 64)

$$\angle ACD = \frac{1}{2} \overset{\cup}{\widehat{AC}} = \angle ABC, \quad \angle CAD = \angle ACB \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle CBA,$$

odur ki, $\angle BAC = \angle CDA = \frac{1}{2} \overset{\cup}{\widehat{AC}}$. Beləliklə, AB birinci çevrənin

toxunanıdır, buradan $12^2 = 4x \cdot (4x + 5x) = 4 \cdot 9x^2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow BC = 9x = 18$ (şərtədən alınır ki, $BE = 4x, EC = 5x$). Məsələnin şərtinin ödənilməsi üçün tərəfləri $AB=12$ və $BC=18$ olan ABC üçbucağının varlığı, $BC=AC$ halından başqa, (onda $AC=AD$ olar və ABCD paraleloqramdır) zəruri və kafidir (D nöqtəsi müvafiq bucaqların bərabərliyindən, AD və BC tərəflərinin paralelliyindən, AB, CD düz xətlərinin uyğun çevrələrə toxunmasından və E nöqtəsinin BC kəsəni lazımi nisbətdə bölməsindən bərpa olunur).

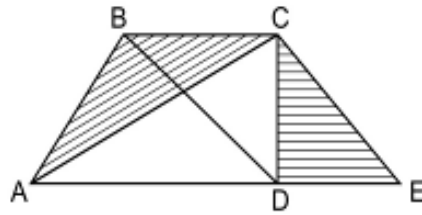


Şəkil 64.

Bununla çevrələrin radiuslarının nisbəti (bu çevrələr oxşar ACD və ABC üçbucaqlarının xaricinə çəkilməşdir);

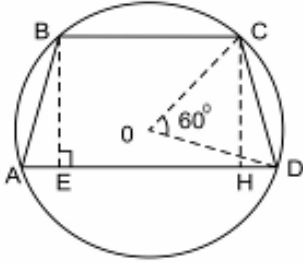
$$1 \neq \frac{r_1}{r_2} = \frac{AC}{BC} \in \left(\frac{18-12}{18}; \frac{18+12}{18} \right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3} \right).$$

59. ABCD trapesiyasının BC oturacağı və BD diaqonalı üzərində BCED paraleloqramını quraq (Şəkil 65). Onda $(CDE)=S(ABC)$ və Heron düsturunu tətbiq edib $S(ABCD)=S(ABC)+S(ACD)=S(ACD)+S(CDE)=S(ACE)=\sqrt{16 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 2} = 16\sqrt{5}$.



Şəkil 65.

60. Trapesiya çevrənin daxilinə çəkildiyindən o bərabəryanlıdır (Şəkil 66). Fərz edək ki, $CH \perp AD$, $BE \perp AD$, onda $BE = CH = 2$, $EH = BC$, ABE və DCH üçbucaqlarının bərabərliyindən isə $AE = HD$ alınır.



Şəkil 66.

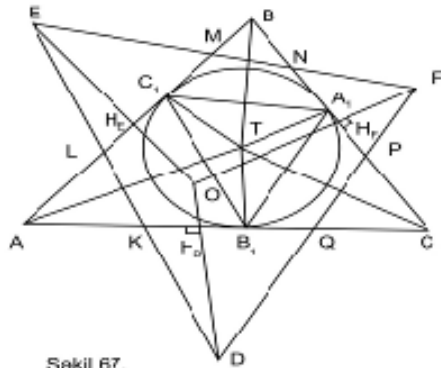
Daxilə çəkilmiş $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD = 30^\circ$.

Düzbucaqlı CHA üçbucağından

$AH = CH \operatorname{ctg} 30^\circ = 2\sqrt{3}$ alırıq. Onda

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CH = AH \cdot CH = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

61. Fərz edək ki, $q(A)$, $q(B)$, $q(C)$ düz xətlərinin kəsişməsindən DEF üçbucağı alınır. Bu düz xətlərin ABC üçbucağının tərəfləri ilə kəsişmə nöqtələrini K , L , M , N , P , Q ilə işarə edək. (Şəkil 67); aşkardır ki, bu nöqtələr uyğun olaraq AB_1 , AC_1 , BC_1 , BA_1 , CA_1 , CB_1 parçalarının ortalarıdır. DKQ , ELM və FPN üçbucaqlarında DH_D , EH_E və FH_F hündürlüklərini çəkək. İsbat edək ki, bu hündürlüklərin oturacaqları ABC üçbucağının tərəflərinin orta nöqtələri ilə üst-üstə düşür. $AK = KB_1 = a$, $CQ = QB_1 = b$, $KH_D = x$, $QH_D = y$, $\angle BAC = 2\alpha$, ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzini T ilə işarə edək. Onda $\angle TAC = \alpha$,



Şəkil 67.

$$\angle AKL = \angle QKD = 90^\circ - \alpha, \quad \angle KDH_D = \alpha, \quad TAB_1 \text{ və } KDH_D$$

üçbucaqları oxşardır. Odur ki, $\frac{TB_1}{x} = \frac{2a}{DH_D}$. Analoji olaraq

$\frac{TB_1}{y} = \frac{2b}{DH_D}$ bərabərliyini alırıq. Son iki bərabərlikdən isə

$2ax = 2by$ (bu hasillərin hər ikisi $TB_1 \cdot DH_D$ -yə bərabərdir) və $x + y = a + b$ olduğunu nəzərə alıb (tənliklər sistemini həll edib)

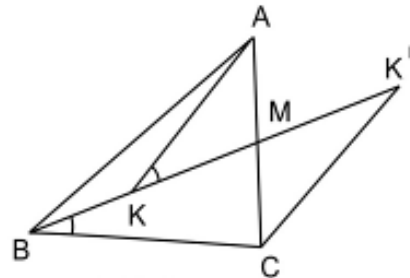
$x = b, y = a$ tapırıq. Beləliklə, $AH_D = a + x = a + b = \frac{AC}{2}$,

deməli H_D nöqtəsi AC tərəfinin ortasıdır. Analoji olaraq isbat edilir ki, H_E və H_F uyğun olaraq AB və BC tərəflərinin orta nöqtələridir. Bununla da müəyyən etdik ki, DH_D , EH_E və FH_F parçaları ABC üçbucağının tərəflərinin orta perpendikulyarlarıdır, ona görə də bu üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi olan O nöqtəsindən keçirlər. DEF üçbucağı üçündə O nöqtəsinin xaricə çəkilmiş çevrənin mərkəzi olduğunu isbat etmək qalır. Yuxarıda $\angle BAC = 2\alpha$ bərabərliyindən $\angle KDH_D = \alpha$ bərabərliyini aldığımızı. Analoji olaraq almaq olar ki, $\angle LEH_E = \alpha$ -dir, onda DOE üçbucağı bərabəryanlıdır, $OD = OE$. Eyni qayda ilə $\angle ABC = 2\beta$ işarə edərək $\angle MEH_E = \beta$ və $\angle NFH_F = \beta$ alırıq, buradan $OE = OF$. Deməli O nöqtəsi D , E və F nöqtələrindən eyni məsafədədir. Bu da o deməkdir ki, O nöqtəsi DEF üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. Məsələ tamamı ilə həll olundu.

62. M nöqtəsinə nəzərən K ilə simmetrik K' nöqtəsini quraq. (Şəkil 68). Onda $AM = MC$, $KM = MK'$ və $\angle KMA = \angle K'MC$ olduğundan $\triangle KMA = \triangle K'MC$, buradan $\angle MK'C = \angle AKM = \angle MBC$.

Beləliklə BCK' üçbucağı bərabəryanlıdır, $CK' = BC$ -dir ki, bu da $CK' = AK$ ($\triangle KMA = \triangle K'MC$ olduğundan) ilə birlikdə məsələnin hökmünü verir.

63. Əvvəlcə bilmək lazımdır ki, bütün təpələri parabola üzərində olan üçbucaq bu əyrinin daxi-



Şəkil 68.

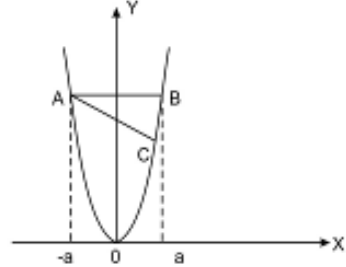
linə çəkilmişdir. Fərz edək ki, $y = x^2$ parabolası daxilə çəkilmiş ABC üçbucağının AB hipotenuzu Ox oxuna paraleldir. (Şəkil 69).

$AB = 2a$ hesab edib AB-yə çəkilmiş hündürlüyün uzunluğunu h ilə işarə edək;

onda A, B, C nöqtələrinin koordinatları uyğun olaraq

$$(-a; a^2), (a; a^2) \text{ və } (\sqrt{a^2 - h}; a^2 - h)$$

ədədlər cütləri olacaqdır. $\angle C = 90^\circ$ olduğundan



Şəkil 69.

$\vec{AC} = \{\sqrt{a^2 - h} + a; -h\}$ və $\vec{BC} = \{\sqrt{a^2 - h} - a; -h\}$ vektorlarının skalyar hasilı sıfıra bərabərdir, yəni

$$(\sqrt{a^2 - h} + a) \cdot (\sqrt{a^2 - h} - a) + (-h) \cdot (-h) = -h + h^2 = h(h - 1) = 0$$

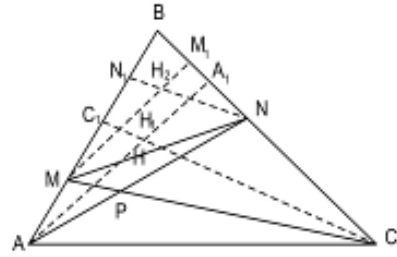
. Məsələnin mənasına görə $h \neq 0$, beləliklə $h = 1$. İndi tərs hökmü isbat edək: hipotenuzu çəkilmiş hündürlüyünün uzunluğu 1-ə bərabər olan ixtiyari düzbucaqlı üçbucağı tələb olunan qaydada $y = x^2$ parabolasının daxilinə çəkmək olar. Fərz edək ki, $2a$ verilmiş Δ -ın hipotenuzudur, $a \geq 1$. Verilmiş Δ -a bərabər və $y = x^2$ parabolasının daxilinə çəkilmiş Δ -i göstərək.

$$P(-a; a^2), Q(a; a^2) \text{ və } R(\sqrt{a^2 - 1}; a^2 - 1)$$

nöqtələri parabolanın üzərindədir, PQ parçasının uzunluğu $2a$ olub absis oxuna paraleldir. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $PQ^2 = PR^2 + QR^2$ bərabərliyi ödənilir, buradan $\angle PRQ = 90^\circ$. Habelə qeyd edək ki, R nöqtəsi PQ parçasından 1-ə bərabər məsafədə yerləşir ki, bu nəticə də üçbucaqların bərabərliyindən alınır.

64. Fərz edək ki, AA_1 və CC_1 parçaları ABC üçbucağının, MM_1 və NN_1 isə BMN üçbucağının hündürlükləridir. Bu

üçbucaqların ortosentrlərini uyğun olaraq H_1 və H_2 ilə işarə edək; $\angle B \neq 90^\circ$ şərtinə görə H_1 və H_2 nöqtələri müxtəlifdir (Şəkil 70). Diametrləri AN və CM olan çevrələri uyğun olaraq ω_1 və ω_2 ilə işarə edək. AC_1H_1 və CA_1H_1 üçbucaqların oxşarlığından

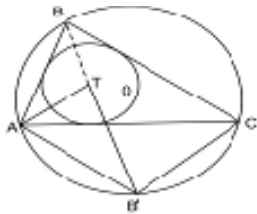


Şəkil 70.

$H_1A \cdot H_1A_1 = H_1C \cdot H_1C_1$ bərabərliyi başqa sözlə H_1 nöqtəsinin ω_1 və ω_2 çevrələrinə görə, MN_1H_2 və NM_1H_2 üçbucaqlarının oxşarlığından isə $H_2M \cdot H_2M_1 = H_2N \cdot H_2N_1$ başqa sözlə H_2 nöqtəsinin həmin çevrələrə görə dərəcələrinin bərabərliyi alınır. H_1 və H_2 nöqtələrindən hər birinə radikal OX haqqında teoremi tətbiq edib belə nəticəyə gəlirik ki, H_1H_2 düz xətti ω_1 və ω_2 çevrələrinin radikal oxları ilə üst-üstə düşür.

Fərz edək ki, AN və CM parçaları P nöqtəsində kəsişir. Onda A , M , N və C nöqtələrindən keçən çevrənin varlığı $AP \cdot PN = CP \cdot PM$ (başqa sözlə P nöqtəsinin ω_1 və ω_2 çevrələrinə görə dərəcələrinin bərabərliyi) bərabərliyi ilə eynigüclüdür, bu isə xatırlatdığımız teoremə görə P nöqtəsinin ω_1 və ω_2 çevrələrinin radikal oxları üzərində olması deməkdir. Bu ox isə, göstərdiyimiz kimi, H_1H_2 düz xətti ilə üst-üstə düşür.

65. ABC üçbucağının daxilinə və xaricinə çəkilmiş ω və ω_1 çevrələrinin mərkəzlərini uyğun olaraq T və O , CA qövsünün orta nöqtəsini isə B' ilə işarə edək. (Şəkil 71). BB' şüası ABC bucağının tən bölməni olduğundan $B'A = B'C$, bu isə o deməkdir ki,



Şəkil 71.

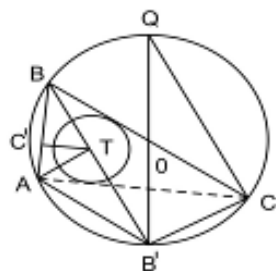
ω_1 çevrəsinin ABB' və $B'BC$ bərabər bucaqlarına söykənən vətərləri bərabərdir. İndi $B'T$ və $B'A$ parçalarının bərabərliyini isbat etmək kifayətdir ki, bu da ATB' üçbucağının bərabəryanlı olması ilə birgüclüdür. Buna isə ATB' və TAB' bucaqlarının bərabərliyini isbat etməklə inanmaq olar. ABT üçbucağının xarici

bucağı olan $\angle ATB'$ onun iki daxili bucaqlarının cəminə bərabərdir, yəni $\angle ATB' = \angle BAT + \angle ABT = \frac{\angle A + \angle B}{2}$.

Sonra $\angle TAB' = \angle TAC + \angle CAB'$, lakin $\angle TAC = \frac{\angle A}{2}$, xaricə çəkilmiş çevrənin eyni qövsünə söykənən $\angle CAB'$ və $\angle B'BC$ hər biri $\frac{\angle B}{2}$ -yə bərabərdir. Beləliklə ATB' üçbucağının AT oturacağındakı bucaqların hər biri $\frac{\angle A + \angle B}{2}$ -yə bərabərdir. Bu da o deməkdir ki, həmin üçbucağın AB' və $B'T$ tərəfləri bərabərdir.

Analoji olaraq üçbucağın qarşı təpə nöqtəsi daxil olmayan AB və BC qövslərinin orta nöqtəsi üçün hökmlər isbat edilir.

66. Məsələnin həlli bilavasitə qövsün ortası haqqında əvvəlki 65-ci məsələyə və vətərlər haqqında məlum teoremə (dairənin içərisində götürülmüş nöqtədən istənilən qədər vətər keçirilərsə, hər vətərin parçalarının hasili bütün vətərlər üçün sabit olur, çünki hər vətər üçün bu hasil götürülmüş nöqtədən keçən diametrin parçaları hasilinə bərabərdir) əsaslanır. Həmin sabit ədəd $R^2 - d^2$ -na bərabərdir, burada R – çevrənin radiusu, d isə çevrənin mərkəzindən verilmiş nöqtəyə qədər məsafədir. Baxdığımız halda çevrənin daxilindəki T nöqtəsindən BB' vətəri keçir, beləliklə $BT \cdot TB' = R^2 - TO^2$ (2), burada $TO = d$ –dir. İndi hər hansı üsulla $BT \cdot TB'$ hasilini hesablamaq qalır. Burada



Şəkil 72.

da 65-ci məsələdən istifadə etməklə TB' -i başqa düzbucaqlı $B'CQ$ üçbucağından istifadə etməklə tapmaq olar (Şəkil 72), burada Q xaricə çəkilmiş çevrə üzərində B' ilə diametral əks vəziyyətdə olan nöqtədir (başqa sözlə Q xaricə çəkilmiş çevrənin B təpəsinin daxil olduğu CA qövsünün orta nöqtəsidir) BTC' (C' - daxilə çəkilmiş üçbucağın AB tərəfinə toxunma nöqtəsidir) və QCB' düzbucaqlı

üçbucaqların oxşarlığından alınır ki,

$$\frac{BT}{TC'} = \frac{B'Q}{B'C} \Rightarrow BT \cdot B'C = B'Q \cdot TC' \quad \text{və ya} \quad BT \cdot TB' = 2R \cdot r.$$

Buradan (2) bərabərliyinə əsasən $2R \cdot r = R^2 - TO^2$ və ya $TO^2 = R^2 - 2Rr$ alırıq. Tələb edilən isbat oldu.

67. Xaricdən daxilə çəkilmiş ω_a çevrəsinin mərkəzini T_a , radiusunu R_a , ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş ω çevrəsinin radiusunu R , onun mərkəzini O ilə işarə edək (Şəkil 73). $AK=AM$ olduğundan AP düz xətti KAM bucağının tənbölənidir. Beləliklə, AP düz xətti T və T_a nöqtələrindən keçir, P nöqtəsi isə ω

çevrəsinin BC qövsünün orta nöqtəsidir. Əvvəl məsələnin həllində lazım olan $PT = PT_a = PB = PC$ bərabərliklərinin doğru olduğunu isbat edək.

$$\angle BAT = \angle CAT = \alpha,$$

$$\angle ABT = \angle CBT = \beta \text{ işarə edək. Aş-}$$

kardır ki, $\angle CBP = \angle CAP = \alpha$ (eyni qövsə söykənən daxilə çəkilmiş bucaqlar olduğundan)

$$\angle TBG = \angle TBC + \angle CBP = \beta + \alpha \text{ BTP}$$

bucağı ABT üçbucağının xarici

bucağıdır, odur ki, $\angle BTP = \angle ABT + \angle BAT = \beta + \alpha$. Aldıq ki,

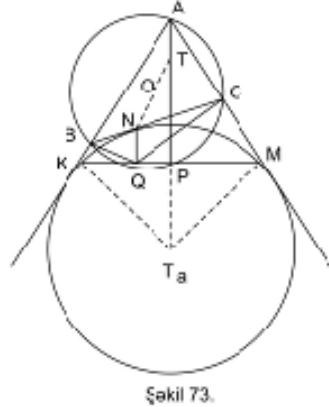
$$\angle TBP = \angle BTP, \text{ buradan } BT = TP. \text{ Sonra } \angle TBT_a = 90^\circ \text{ (ABC}$$

və ona qonşu CBK bucaqlarının tənbölənləri arasındakı bucaq).

$$\text{Onda } \angle PBT_a = 90^\circ - \angle TBP, \angle PT_aB = 90^\circ - \angle BTT_a = 90^\circ - (\alpha + \beta).$$

Aldıq ki, $\angle PBT_a = \angle PT_aB$, $BP = T_aP$. Analoji olaraq isbat edilir ki, $CP = TP = T_aP$. Köməkçi fakt (lemma) isbat edildi.

Aşkardır ki, $\angle PKT_a = 90^\circ - \angle KT_aP = \angle KAT_a = \alpha$. ΔKPT_a -dan $PT_a = KT_a \cdot \sin \alpha = R_a \sin \alpha$. Sinuslar teoreminə görə



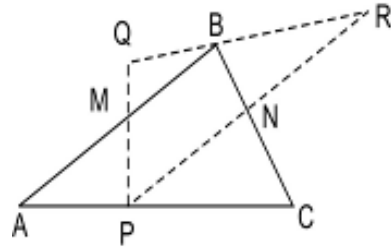
Şəkil 73.

$\triangle ABP$ -dən $BP = 2R \sin \alpha$. Lemmadan alınır ki, $PT_a = BP$, buradan $R_a = 2R$. Fərz edək ki, NT parçasının orta nöqtəsi O -dır. Onda $O'P \parallel NT_a$, beləliklə, $O'P \perp BC$.

Sonra $O'P = 0,5T_aN = 0,5R_a = R$ Lakin $OP \perp BC$ və $OP = R$. Bu o deməkdir ki, $O' = O$, buradan da məsələdə tələb olunan alınır.

68. Fərz edək ki, A, C bucaqları iti olan ABC üçbucağı verilir. AB və BC parçalarının orta nöqtələrini uyğun olaraq M və N , M nöqtəsinin AC tərəfi üzərindəki proyeksiyasını P , bu nöqtə ilə M, N nöqtələrinə nəzərən simmetrik nöqtələri uyğun olaraq Q və R ilə işarə edək (Şəkil 74).

$\angle A < 90^\circ$ və $\angle C < 90^\circ$ bərabərsizliklərinə görə P nöqtəsi AC parçasının daxilində yerləşir. ABC üçbucağını PM və PN parçaları üzrə kəsməklə, düzbucaqlı üçbucaq əmələ gətirən, üç fiqur alırıq. Doğrudan da $\triangle AMP = \triangle BMQ$,



$\triangle CNP = \triangle BNR$. Habelə qeyd edək ki,

Şəkil 74

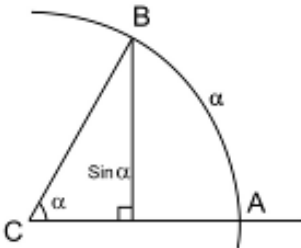
$\angle QBM - \angle ABC + \angle RBN = \angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ$. Beləliklə

$\triangle MBQ, \triangle BNR$ və $BMPN$ dördbucaqlısı, $\angle PQR = \angle MPA = 90^\circ$ olan, PQR üçbucağını əmələ gətirir.

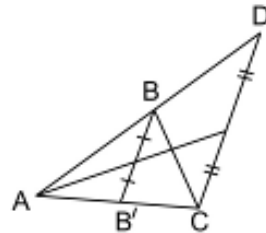
69. Məsələni həll etmək üçün $\sin \alpha \leq \alpha$ faktını bilmək lazımdır (Şəkil 75). Onda qalan addımlar aşkardır:

$$\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n = \sin(\pi - \alpha_1) + \sin(\pi - \alpha_2) + \dots + \sin(\pi - \alpha_n) \leq \pi - \alpha_1 + \pi - \alpha_2 + \dots + \pi - \alpha_n = \pi n - (n-2)\pi = 2\pi = 6,28$$

. Deməli, $\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n \leq 2\pi < 6,29; n \in N, n \geq 3$.



Şəkil 75.



Şəkil 76.

70. Mərkəzi A nöqtəsində və əmsali $\frac{AC}{AB'}$ olan homotetiya

BB' tən böləninə ortasını ona paralel olan DC parçasının ortasına çevirir, burada D bu homotetiyada B nöqtəsinin obrazıdır (Şəkil 76).

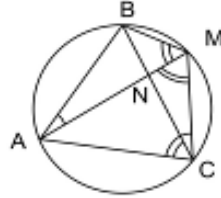
DC və BB' düz xətlərinin paralelliyindən $\angle BCD = \frac{1}{2} \angle ABC = \angle BDC$

alındığından CBD bərabəryanlı ($CB=BD$) üçbucaqdır. Beləliklə, DC parçası CBD bucağının tən böləninə perpendikulyardır və bu tən bölənlə yarıya bölünür. Buradan da tələb olunan alınır.

71. Həllin iki üsulunu göstərək.

I. Üçbucağın tərəfi a olsun. ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrə qövsü üzərindəki nöqtəni M ilə işarə edək. İsbat etmək lazımdır ki, $AM^2 + BM^2 + MC^2 = 2a^2$.

Əvvəlcə, üç MA, MB, MC parçalarından ən böyüyünün MA olduğunu qəbul edərək, isbat edək ki, $MA=MB+MC$. Bunu məsələnin həllinə hazırlıq hesab etmək olar. AM parçası üzərində $AN=MC$ ayıraq (Şəkil 77). Onda ABN və CBM üçbucaqları, iki tərəflərinə və onlar arasındakı bucağa görə bərabərdir. Bu bərabərlikdən BN və BM tərəflərinin bərabərliyi alınır.



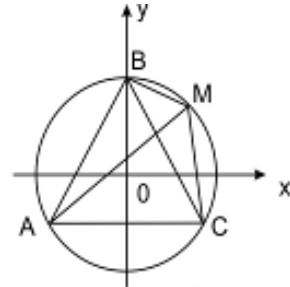
Şəkil 77.

Beləliklə BNM üçbucağı BMN bucağı 60° olan bərabəryanlı üçbucaqdır, buradan da onun düzgün olması alınır. Onda $AM=AN+NM=MC+BM$. Bu bərabərliyin hər tərəfini kvadrata yüksəldib $AM^2=BM^2+MC^2+2BM \cdot MC$ (1) alırıq. $\angle BMC=120^\circ$ olan BMC üçbucağından kosinuslar teoreminə görə $BC^2=BM^2+MC^2-2BM \cdot MC \cdot \cos 120^\circ=BM^2+MC^2+BM \cdot MC$; $BM \cdot MC=BC^2-BM^2-MC^2$ (2). (1) və (2)-dən

$$AM^2 = BM^2 + MC^2 + 2BC^2 - 2BM^2 - 2MC^2$$

və buradan tələb olunan $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 2a^2$ alınır.

II. Çevrənin mərkəzini koordinat başlanğıcında götürməklə koordinat sistemi seçək (Şəkil 78). Fərz edək ki, üçbucağın tərəfi 1-dir, onda $OB = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Üçbucağın təpə nöqtələrinin və M-in koordinatlarını da göstərək:



Şəkil 78.

$$B\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right); C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}\right); A\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}\right); M(x; y)$$

. (Müəyyənlik üçün M nöqtəsini BC qövsü üzərində götürürük). Bizi maraqlandıran parçaların göstərilən koordinatlara görə

ifadələrini yazaq: $AM^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$;

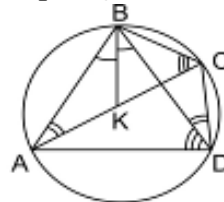
$$CM^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2; BM^2 = x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

İsbat edəcəyimiz $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 2BC^2$ bərabərliyi koordinatlarla $3x^2 + 3y^2 = 1$ və ya $x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ şəklində

olur. Bu işə, baxılan çevrənin tənliyi olduğundan, doğrudur.

72. Məsələnin üç üsulla həllini göstərək. I Fərz edək ki, ABD bucağı CBD-dən böyük olan ABCD dördbucaqlısı çevrə daxilində çəkilmişdir (Şəkil 79). İsbat edək ki, $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

CBD bucağına bərabər olan ABK bucağını quraq (K nöqtəsi AC diaqonalı üzərindədir). Üçbucaqların oxşarlığının



Şəkil 79.

birinci əlamətinə görə $\triangle ABK \sim \triangle DBC$. Odur ki, $\frac{AB}{AK} = \frac{BD}{CD}$ və

ya $AB \cdot CD = AK \cdot BD$ (1) bərabərliyi doğrudur.

$\angle ABD = \angle CBK$ və $\angle BCA = \angle BDA$ olduğundan iki bucağına

görə $\triangle BCK \sim \triangle ABD$. Odur ki, $\frac{BC}{KC} = \frac{BD}{AD}$ və ya

$BC \cdot AD = KC \cdot BD$ (2). (1) və (2) bərabərliklərini hədbəhəd toplayıb $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC$ alırıq.

II. Dördbucaqlının tərəflərini a, b, c, d diaqonallarını isə m, n ilə işarə edək (Şəkil 80). ABD və BCD üçbucaqlarından

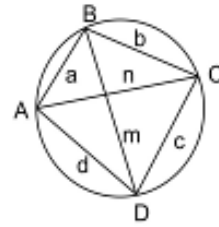
kosinuslar teoreminə görə $m^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$,
 $m^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(180^\circ - A)$. Bu bərabərlikdən

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - m^2}{2ad} = \frac{m^2 - b^2 - c^2}{2bc};$$

$$\frac{a^2 + d^2 - m^2}{2ad} = \frac{m^2 - b^2 - c^2}{2bc},$$

$$a^2bc + d^2bc - m^2bc - m^2ad + b^2ad + c^2ad = 0,$$

$$m^2 = \frac{(cd + ab)(db + ac)}{bc + ad} \text{ alırıq.}$$



Şəkil 80

Analoji olaraq ikinci diaqonalin kvadratını tapırıq:

$$n^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}. \text{ Son iki bərabərliyi tərəf tərəfə vurub}$$

$$m^2 \cdot n^2 = (ac + bd)^2 \text{ və ya } mn = ac + bd \text{ nəticəsinə gəlirik.}$$

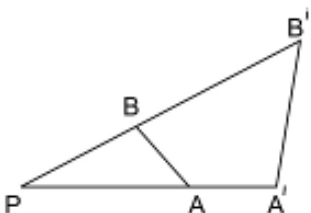
III. Fərz edək ki, P inversiya mərkəzidir (Şəkil 81).

İnversianın tərifinə görə $PB' \cdot PB = PA' \cdot PA$ və ya $\frac{PB'}{PA} = \frac{PA'}{PB}$.

Onda $\triangle PAB \sim \triangle PB'A'$ (ikinci əlamətə görə). Beləliklə,

$$A'B' : AB = PA' : PB \Rightarrow A'B' = \frac{AB \cdot PA'}{PB}$$

. İnversiya əmsalını h ilə işarə edək:

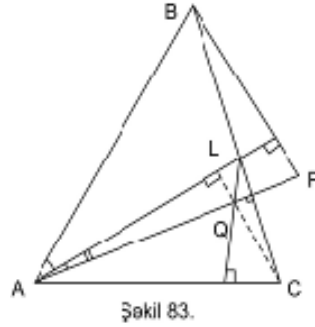
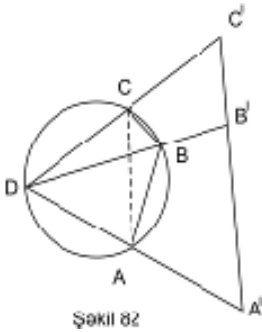


Şəkil 81

$$PA' = \frac{h}{PA} \Rightarrow A'B' = \frac{h}{PA} \cdot \frac{AB}{PB}. \quad \text{Fərz edək ki, } ABCD$$

dördbucaqlısı çevrə daxilinə çəkilmişdir. İnversiya mərkəzi D olsun (Şəkil 82). Onda bu çevirmədə çevrə düz xəttə çevrilir: $A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C'$. Bu halda $A'C' = A'B' + B'C'$ və ya $\frac{h \cdot AC}{DA \cdot DC} = \frac{h \cdot AB}{DA \cdot DB} + \frac{h \cdot BC}{DC \cdot DB}$, buradan eyni çevirmədən sonra $AC \cdot DB = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ alırıq. Bu üsulla həll inversiya çevirməsilə tanış olan şagirdlər və ya bakalavrlar üçün münasibdir.

73. Fərz edək ki, P və Q uyğun olaraq ABL və ACL üçbucaqlarının ortosentrləridir. Onda A nöqtəsi BAC bucağının daxilində yerləşən PQ parçasının uzantısı üzərində yerləşir (ABC üçbucağı iti bucaqlı olduğuna görə). $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle PAL = \varphi = \angle QAL$ işarə edərək $0^\circ \leq \varphi < \alpha \leq 90^\circ$ alırıq. (Şəkil 83).



$BP \perp AL$ və $CQ \perp AL$ olduğundan AP və AQ parçalarının AL düz xətti üzərindəki proyeksiyaları uyğun olaraq AB və AC parçalarının proyeksiyaları ilə üst-üstə düşür:

$$AP \cos \varphi = AB \cos \alpha, \quad AQ \cos \varphi = AC \cos \alpha. \quad \text{Beləliklə,}$$

$$PQ = |AP - AQ| = |AB - AC| \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}, \quad \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} < 1 \quad \text{olduğundan (bu}$$

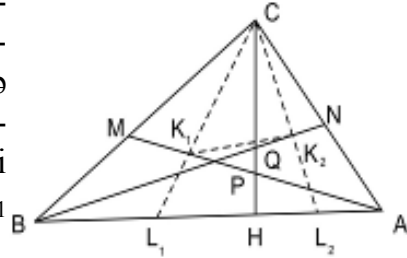
$$0^\circ \leq \varphi < \alpha < 90^\circ \text{ bərabərsizliyindən alınır), } PQ \leq |AB - AC| \text{ alı-}$$

nır ki, bunu da isbat etmək tələb olunurdu. Yalnız üçbucaq bərabəryanlı ($AB=AC$) olduqda $PQ = |AB - AC|$ bərabərliyi alınır.

74. BCH və ACH üçbucaqlarında PM və QN parçalarını uyğun olaraq K_1 , K_2 nöqtələrində kəsən CL_1 və CL_2 tən bölmələrini çəkək (Şəkil 84).

$CB \perp AC$ və $CH \perp AB$ olduğundan CL_1 düz xətti AM düz xəttinə perpendikulyar olacaqdır. Beləliklə, MCP üçbucağında CK_1 tən bölməni həm də hündürlükdür, onda isə $MC=CP$ və $MK_1=K_1P$. Analoji olaraq müəyyən edilir ki, K_2 nöqtəsi QN parçasının ortasıdır. $CK_1=K_1L_1$ və $CK_2=K_2L_2$ bərabərliklərini aldıq.

Onlardan birincisini, AK_1 -in eyni zamanda hündürlük və tən bölmə olduğu, CAL_1 üçbucağına baxmaqla almaq olar; analoji səbəbə görə ikinci bərabərlik ödənilir. K_1K_2 parçası L_1CL_2 üçbucağının orta xəttidir və L_1L_2 parçasına paraleldir; buradan da məsələnin tələbi alınır.

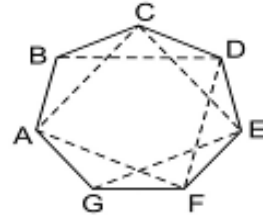


Şəkil 84.

75. Göstərilən parçaların paralelliyindən ardıcıl olaraq üçbucaqların sahələrinin aşağıdakı bərabərlikləri alınır:

$$S(GBD) = S(BDF) = S(DFA) = S(FAC) = \\ = S(ACE) = S(CEG) = S(EGB).$$

$S(GBD) = S(EGB)$ bərabərliyi o deməkdir ki, $GB \parallel DE$ (Şəkil 85).

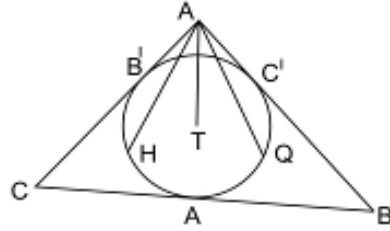


Şəkil 85.

Analoji məsələ (qabarıq $ABCDE$ beşbucaqlısında $BC \parallel AD$, $CD \parallel BE$, $DE \parallel AC$ və $AE \parallel BD$ isə $AB \parallel CE$ olduğunu isbat edin). [28] –də vektorun tətbiqi ilə həll edilir.

76. 1) Əvvəlcə bilmək lazımdır ki, üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi və ortosentri onun daxilinə çəkilmiş

çevrə üzərində ola bilər. Belə üçbucaq sunərgizi üçbucağı adlanır. Bu üçbucaq itibucaqlıdır. Fərz edək ki, mərkəzi T nöqtəsində olan çevrə ABC sunərgizi üçbucağının daxilinə çəkilmişdir və onun AB, BC və CA tərəflərinə uyğun olaraq C' , A' , B' nöqtələrində toxunur (Şəkil 86). Onda çevrənin bölündüyü $A'B'$, $B'C'$ və $C'A'$ qövsləri arasında xaricə çəkilmiş çevrənin O mərkəzi və ABC üçbucağının H ortosentri daxil olmayan qövs vardır. Belə qövs $B'C'$ olarsa onda



Şəkil 86

$$\angle CAH = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB = 90^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - 2\angle OAB) = \angle OAB.$$

(ACB bucağı ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrə daxilinə çəkildiyindən AOB mərkəzi bucağı ilə eyni qövsə söykənir. Odur ki, $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$ bərabərliyi ödəyir;

$\angle AOB = 180^\circ - 2\angle OAB$ bərabərliyi isə $OA=OB$ bərabərliyindən alınır). Buradan asanlıqla alınır ki, $AB'H$ və $AC'O$ üçbucaqları AT düz xəttinə nəzərən bir-biri ilə simmetrikdirlər; xüsusi halda $AH=AO$ bərabərliyini alırıq. $BH \perp AC$ olduğundan AB və AH parçalarının AC düz xətləri üzərindəki proyeksiyaları eynidir. $AB \cdot \cos \angle CAB = AH \cdot \cos \angle CAH$. Beləliklə,

$$\cos \angle CAB = \frac{AH}{AB} \cdot \cos \angle CAH = \frac{AH}{AB} \cdot \sin \angle ACB = \frac{AH}{AB} \cdot \frac{AB}{2AO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH}{AB} \cdot \frac{AB}{AH} = \frac{1}{2}.$$

($\sin \angle ACB = \frac{AB}{2AO}$ bərabərliyi, xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu AO olan, ABC üçbucağından sinuslar teoerminin tətbiqi nəticəsində alınır). Beləliklə $\angle CAB = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$, deməli məsələdə tələb edilən alındı.

2) Müqayisə məqsədi ilə bu məsələni “Hesablama məsələləri” hissəsinə daxil etmədik.

Əvvəlki bənddəki işarələri saxlamaqla habelə B və H nöqtələrinin AT düz xəttindən müxtəlif tərəflərdə yerləşdiyini qəbul edərək (Şəkil 86) kosinuslar teoreminə görə

$$\cos \angle TAO = \cos \angle TAH = \frac{AT^2 + AH^2 - TH^2}{2 \cdot AT \cdot AH} = \frac{4r^2 + \left[(1 + \sqrt{2})r\right]^2 - r^2}{2 \cdot 2r(1 + \sqrt{2})r} =$$

$$= \sqrt{2} - \frac{1}{2} \text{ (burada } r \text{ — daxilə çəkilmis çevrənin radiusudur)}$$

Buradan

$$\angle ABC = 90^\circ - \angle BAH = 90^\circ - \angle BAT - \angle TAO = 60^\circ - \arccos\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \approx 36^\circ,$$

$$\angle ACB = 60^\circ + \arccos\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \approx 84^\circ.$$

77. Belə bir faktdan istifadə edirik ki, verilən ixtiyari üç ədədlərdən hasili mənfi olmayan ikisini seçmək olar. Müəyyənlik üçün fərz edək ki, $xy \geq 0$. $z = -(x + y)$ olduğundan $a^2xy + b^2yz + c^2zx = a^2xy - b^2y(x + y) - c^2(x + y)x = -c^2x^2 - b^2y^2 - (b^2 + c^2 - a^2)xy = -(cx - by)^2[(b + c)^2 - a^2]xy = -(cx - by)^2 - (a + b + c)(b + c - a)xy$ a, b, c üçbucağın tərəfləri olduğundan $a + b + c > b + c - a > 0$, buradan isə məsələnin tələbi alınır.

78. $\angle BOM = \angle DOC$ və $\angle OBM = \angle ODC$ olduğundan $\triangle OBM \sim \triangle ODC$; buradan $OM : OC = OB : OD$ (1). Analoji olaraq OAB və OCN üçbucaqlarının oxşarlığından $ON : OB = OC : OA$ (2) alırıq. (1) və (2)-dən $OM : ON = OA : OD$, buradan isə, Fales teoreminin tərsinə görə, məsələnin tələbi alınır.

79. 1,2,3,4,5,6 rəqəmləri ilə işarə olunmuş hissələrin sahələrini uyğun olaraq $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ ilə işarə edək (Şəkil 87, bu şərtə göstərilir.) Aşkardır ki, $S_1 = S_3 + S_5$, $S_6 = S_2 + S_3$. Odur ki, $S_1 + S_3 + S_6 - (S_2 + S_5) = S_3 + S_5 + S_3 + S_2 + S_3 - S_2 - S_5 = 3S_3$ buradan tələb edilən alınır.

80. $AM_1, AM_2, AM_3, AK_1, AK_3$ parçalarını çəkib (Şəkil 88)

$$\angle AM_1B = \angle AK_1B \quad (1)$$

$$\angle AM_2B = \angle AK_2B \quad (2)$$

$$\angle AM_3B = \angle AK_3B \quad (3)$$

bərabərliklərini yazsaq (AM_iB və

AK_iB ω_i çevrəsi daxilinə çəkilmiş ($i = 1, 2, 3$) eyni qövsə söykənən bucaqlar olduğundan bərabərdir). (1) və (2) –dən uyğun

olaraq $\angle AM_1M_2 = \angle AK_1K_2$ (4) və $\angle AM_2M_3 = \angle AK_2K_3$ (5)

alırıq. Odur ki, (2) və (4) görə $\triangle AM_1M_2 \sim \triangle AK_1K_2$, (3) və (5)-ə görə isə $\triangle AM_2M_3 \sim \triangle AK_2K_3$, buradan uyğun olaraq

$$\frac{M_1M_2}{AM_2} = \frac{K_1K_2}{AK_2} \quad \text{və} \quad \frac{AM_2}{M_2M_3} = \frac{AK_2}{K_2K_3} \quad \text{yazırıq. Sonuncu iki}$$

bərabərliyi tərəf-tərəfə vurub tələb olunanı alırıq.

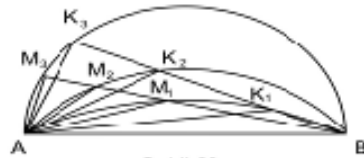
81. Belə bir məlum fakta əsaslanırıq: KM və LN parçaları O nöqtəsində kəsişirlərsə, onda yalnız və yalnız $\frac{OK}{OM} = \frac{OL}{ON}$ münasibəti ödənildikdə $KL \parallel MN$ olur.

Fərz edək ki, $ABCD$ trapesiyadır ($AD \parallel BC$), o isə onun diaqonallarının kəsişmə nöqtəsidir, A_1, B_1, C_1, D_1 isə göstərilən simmetriyada A, B, C, D nöqtələrinin obrazlarıdır. Aşkardır ki, onda O nöqtəsi A_1C_1 və B_1D_1 parçalarının hər birinə daxildir, başqa sözlə A_1, B_1, C_1, D_1 dördbucaqlısının diaqonallarının kəsişmə nöqtəsidir. Simmetriyanın xassəsinə görə $OA_1 = OA$,

$$OB_1 = OB, \quad OC_1 = OC, \quad OD_1 = OD, \quad \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB} \quad \text{və} \quad \frac{OA}{OC} \neq \frac{OB}{OD}$$

olduğundan isə $\frac{OA_1}{OC_1} = \frac{OD_1}{OB_1}$ və $\frac{OA_1}{OC_1} \neq \frac{OB_1}{OD_1}$ alırıq. Beləliklə,

A_1D_1 və B_1C_1 düz xətləri bir-birinə paraleldir, A_1B_1 və C_1D_1

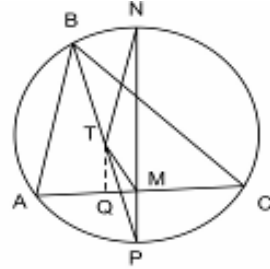


Şəkil 83.

düz xətləri isə yox. Bu da o deməkdir ki, A_1, B_1, C_1, D_1 dördbucaqlısı trapesiyadır.

82. $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, daxilə və xaricə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını uyğun olaraq r və R ilə işarə edək (Şəkil

89). Aşkardır ki, $\angle TMA < 180^\circ$, $\angle TNB < 180^\circ$. Q daxilə çəkilmiş çevrənin AC tərəfinə toxunma nöqtəsi olarsa, onda məlumdur ki, $AQ = \frac{b+c-a}{2}$, $c < a$ şərtindən isə alınır ki, $Q \in AM$. Odur ki,



Şəkil 89.

$$\operatorname{tg} \angle TMA = \frac{r}{QM} = \frac{r}{AM - AQ} = \frac{r}{\frac{b}{2} - \frac{b+c-a}{2}} = \frac{2r}{a-c}$$

(1). NP xaricə çəkilmiş çevrənin diametri olarsa, onda $M \in NP$,

$\angle NBP = 90^\circ$; bundan əlavə $\overset{\cup}{AP} = \overset{\cup}{PC}$, buradan

$$\angle ABP = \angle CBP = \frac{\beta}{2} \quad \text{və} \quad T \in BP, \quad \overset{\cup}{BN} = \overset{\cup}{NP} = \overset{\cup}{BC} + \overset{\cup}{CP}$$

bərabərliyi $\angle BPN = \alpha + \frac{\beta}{2} - 90^\circ$ -ni tapmağa imkan verir, odur

$$\text{ki, } BN = 2R \sin \angle BPN = 2R \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} - 90^\circ \right) = -2R \cos \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right).$$

$$BT = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}} \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \angle TNB &= \frac{BT}{BN} = -\frac{r}{2R \sin \frac{\beta}{2} \cos \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right)} = -\frac{r}{2R \cdot \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha]} = \frac{2r}{2R \sin \alpha - 2R \sin \gamma} = \\ &= \frac{2r}{a-c} \end{aligned} \quad (2). \quad (1) \text{ və } (2)\text{-dən tələb olunan alınır.}$$

83. ABCD rombunun bucaqları üzərinə qoyulmuş şərt onu göstərir ki, AKBCMD altıbucaqlısı qabarıqdır (Şəkil 90). Aşkardır ki, onda A, N və D, N nöqtələri uyğun olaraq BK və CN düz xətlərindən bir tərəfdə yerləşirlər.

Göstərək ki, N nöqtəsi mərkəzi A nöqtəsində və radiusu AB olan çevrə üzərində yerləşir. BK parçası bu çevrənin vətəri olduğundan

$$\angle BNK = \frac{1}{2} \angle BAK \text{ bərabərliyini}$$

müəyyən etmək kifayətdir. Fərz edək

ki, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$ ($\beta + \gamma = 180^\circ$), onda $\angle KBC = 60^\circ + \beta$,

$\angle BCM = 60^\circ + \gamma$, KBC və BCM üçbucaqları bərabəryanlı

olduğundan isə $\angle BCK = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ - \beta) = 60^\circ - \frac{\beta}{2}$,

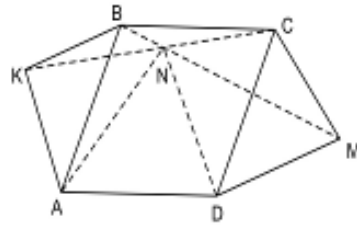
$$\angle CBM = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ - \gamma) = 60^\circ - \frac{\gamma}{2}, \text{ buradan}$$

$$\begin{aligned} \angle BNK &= 180^\circ - \angle BNC = \angle BCK + \angle CBM = \\ &= 60^\circ + 60^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2} = 30^\circ = \frac{1}{2} \angle BAK. \end{aligned}$$

Beləliklə, $AN=AB$. Analoji olaraq mərkəzi D nöqtəsində və radiusu DC olan çevrəyə baxmaqla $DN=DC$ bərabərliyini ala bilərik. Onda isə $AN=DN=AD$, bunu da isəbat etmək tələb olunurdu.

84. Fransa riyaziyyatçısı və mexaniki Per Varinon (1654-1722) elementar həndəsədən dərslik yazmışdır. Onun diqqətini belə bir aşkar fakt xüsusi cəlb etmişdir: qabarıq dördbucaqlının tərəflərinin orta nöqtələri paraleloqramın təpələridir. Doğrudan da

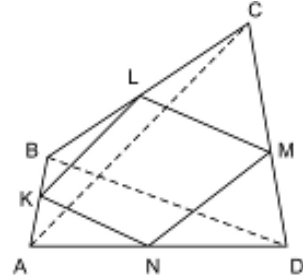
91-ci şəkildəki KLMN paraleloqramdır, çünki $KL = \frac{1}{2} AC$,



Şəkil 90

$MN = \frac{1}{2}AC$ və $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$ (üçbucağın orta xəttinin xassəsinə görə, deməli $KL = MN$ və $KL \parallel MN$. Odur ki, KLMN paraleloqramına Varinon paraleloqramı dördbucaqlının qarşı tərəflərinin ortalarını birləşdirən KM və LN parçalarına isə dördbucaqlının orta xətti deyilir. Sonrakı 85-94 məsələlərində bu paraleloqramın tətbiqlərini göstəririk.

Qoyulan məsələnin isəbatına gəldikdə isə deyə bilərik ki, $KL = MN = \frac{1}{2}AC$ və $LM = KN = \frac{1}{2}BD$ olduğundan onda $P(KLMN) = AC + BD$ (Şəkil 91).



Şəkil 91.

85. ABCD dördbucaqlısının KM və LN orta xətləri məsələ 84-dəki paraleloqramın diaqonalları olduğundan (Şəkil 92) kəsişmə nöqtəsi onları yarıya bölür.

86. İxtiyari paraleloqramda, o, cümlədən, məsələ 84-dəki paraleloqramın diaqonallarının kvadratları cəmi onun bütün tərəflərinin kvadratları cəminə bərabərdir, yəni

$$KM^2 + LN^2 = 2(KL^2 + LM^2); \quad KL = \frac{1}{2}AC \quad \text{və} \quad LM = \frac{1}{2}BD$$

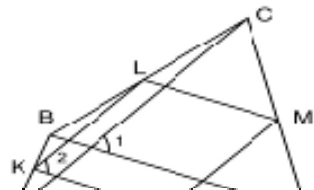
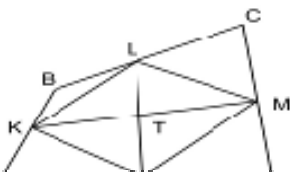
(Şəkil 92) olduğunu nəzərə alıb $KM^2 + LN^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2)$,

$$AC^2 + BD^2 = 2(KM^2 + LN^2) \text{ yazırıq.}$$

$$87. S(ABCD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin \angle 1; \quad S(KLMN) = KL \cdot KN \sin \angle 2$$

(Şəkil 93). $\angle 1 = \angle 2$, $KL = \frac{1}{2}AC$, $KN = \frac{1}{2}BD$ olduğunu nəzərə

$$\text{alsaq, } S(KLMN) = \frac{1}{4}AC \cdot BD \cdot \sin \angle 1 = \frac{1}{2}S(ABCD)$$



88. Bütün belə dördbucaqlılar üçün eyni bir (84-cü məsələdə baxılan) paraleloqram təyin edilmişdir. Bu paraleloqramın sahəsi hər bir əsas dördbucaqlının sahəsinin yarısına bərabərdir (Məsələ 87), bununla da onların müadil olması alınır.

89. 94-cü şəkilə əsasən $S(ABCD) = AC \cdot LN \cdot \sin \varphi$ bərabərliyini isbat etməliyik. KLN üçbucağı, təpələri dördbucaqlının tərəflərinin orta nöqtələrində olan, paraleloqramın yarısıdır.

$$S(KLN) = \frac{1}{2} KL \cdot LN \sin \varphi \quad (\angle AEN = \angle KLN = \varphi). \quad KL = \frac{1}{2} AC$$

olduğundan $S(KLN) = \frac{1}{4} AC \cdot LN \sin \varphi$, deməli

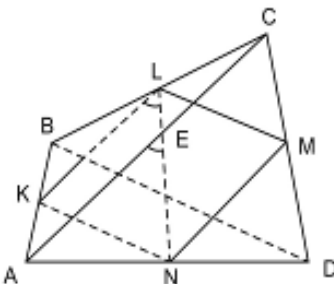
$$S(KLMN) = \frac{1}{2} AC \cdot LN \sin \varphi, \text{ digər tərəfdən isə}$$

$$S(KLMN) = \frac{1}{2} S(ABCD) \text{ (Məsələ 87), onda } S(ABCD) = AC \cdot LN \cdot \sin \varphi.$$

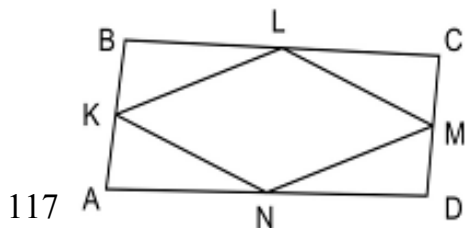
90. Dördbucaqlının AC və BD diaqonalları bərabər olduğu halda o düzbucaqlıdır və təpələri bu düzbucaqlının orta nöqtələrində olan paraleloqram rombdur (Şəkil 95), rombun sahəsi isə onun diaqonalları hasilinin yarısına bərabərdir:

$$S(KLMN) = \frac{1}{2} KM \cdot LN. \text{ Onda}$$

$$S(ABCD) = 2S(KLMN) = KM \cdot LN.$$



Şəkil 94



Şəkil 95

$$91. S(KBL) = S_1, S(LCM) = S_2, S(MDN) = S_3, S(AKN) = S_4$$

ilə işarə edək. $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = \frac{1}{4} S(ABCD)$ olduğunu isbat

etmək tələb edilir (Şəkil 96). Artıq isbat etmişik ki, KLMN paraleloqramdır. Diaqonalları onu dörd müadil üçbucağa bölür, odur ki,

$S(TKBL) + S(TMDN) = S(TLCM) + S(TNAB)$ bərabərliyini isbat etmək

kifayətdir (Şəkil 96). Məlumdur ki,

median üçbucağı iki müadil hissəyə

bölür. Bərabər sahələri eyni hərflər-

lə işarə edək: $S(ATK) + S(KTB) = x$;

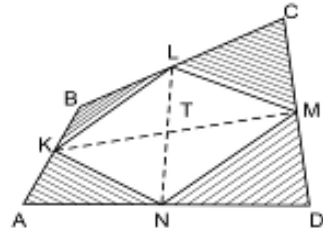
$$S(BTL) + S(LTC) = y$$

$$S(TCM) + S(TMD) = z$$

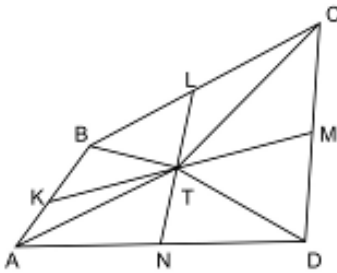
$$S(TDN) + S(ATN) = t$$

Onda $S(TKBL) + S(TMDN) = x + y + z + t$ (Şəkil 97). İndi aşkar-

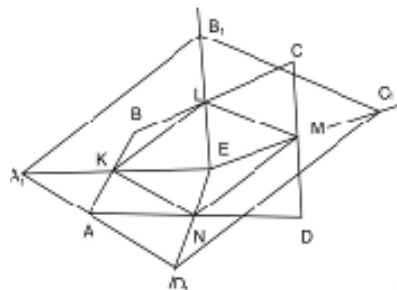
dır ki, $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = \frac{1}{4} S(ABCD)$ (Şəkil 96).



Şəkil 96.



Şəkil 97.



Şəkil 98

92. Təpəsi verilmiş dördbucaqlının orta nöqtələrində olan paraleloqramla $A_1B_1C_1D_1$ paraleloqramının tərəfləri uyğun olaraq paraleldir (Şəkil 98). $KL = \frac{1}{2} A_1B_1$, $KN = \frac{1}{2} A_1D_1$ (üçbucaqda orta xəttin xassəsinə görə), onda
 $S(A_1B_1C_1D_1) = 4S(KLMN) = 2S(ABCD) = 2S$.

93. $S(KLMN) = \frac{1}{2} S(ABCD)$ olduğundan, E və F nöqtələrinin

KLMN paraleloqramının ciddi olaraq daxilində yerləşdiyini isbat etmək kifayətdir, burada K,M uyğun olaraq dördbucaqlının AB və CD tərəflərinin orta nöqtələridir.

Aşkardır ki, $T_1T_2 = KL = \frac{1}{2} AC$ və

$AE = EC = \frac{1}{2} AC$ (Şəkil 99). Fərz

edək ki, E nöqtəsi G-nin üzərinə düşür və KLMN – in xaricində yerləşir, onda

$GC = \frac{1}{2} AC > T_1T_2$ lakin bu $T_1T_2 = \frac{1}{2} AC$

bərabərliyinə ziddir. E nöqtəsi T_1 ilə

üst-üstə düşərsə, onda $T_1C = \frac{1}{2} AC = T_1T_2$ olar ki, bu da mümkün

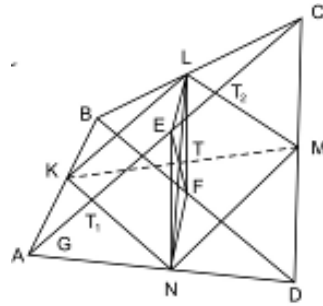
deyil. Deməli, E nöqtəsi KLMN paraleloqramının daxilində yerləşir. Analoji olaraq, göstərmək mümkündür ki, F nöqtəsi də KLMN paraleloqramının daxilində yerləşir. Onda

$S(ELFN) < S(KLMN) = \frac{1}{2} S(ABCD)$.

94. İsbat etmək lazımdır ki,

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$ (Şəkil 99).

ELN üçbucağında ET median üçün



Şəkil 99

$$ET^2 = \frac{EF^2}{4} = \frac{2(EL^2 + EN^2) - LN^2}{4}, \text{ burada } EL = \frac{1}{2}AB, EN = \frac{1}{2}CE$$

$$\text{buradan } LN^2 = \frac{AB^2 + CD^2}{2} - EF^2 \quad (1). \text{ Analoji olaraq KFM}$$

$$\text{üçbucağının FT medianının ifadəsini tapıb və } KF = \frac{1}{2}AD,$$

$$FM = \frac{1}{2}BC, \quad FT = \frac{1}{2}EF \quad \text{olduğunu nəzərə alıb tapırıq:}$$

$$KM^2 = \frac{AD^2 + BC^2}{2} - EF^2 \quad (2). \text{ Bundan əlavə}$$

$$LN^2 + KM^2 = \frac{AC^2 + BD^2}{2} \quad (\text{Məsələ 86}). \quad (3). \text{ Beləliklə, (1), (2)}$$

$$\text{və (3)-dən } \frac{AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2}{2} - 2EF^2 = \frac{AC^2 + BD^2}{2} \quad \text{və}$$

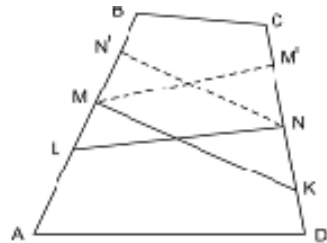
$$\text{buradan } AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2 \quad \text{alırıq.}$$

95. İsbat edək ki, CDL üçbucağı bərabərtərəflidir, burada L nöqtəsi AB düz xətti ilə CD parçasının orta perpendikulyarının kəsişməsidir (Şəkil 100). Fərz edək ki, M və N nöqtələri uyğun olaraq AB və CD parçalarının ortaları, M', N' isə M və N nöqtələrinin uyğun olaraq CD və AB düz xətləri üzərində proyeksiyalarıdır. Onda $\angle MKC = \angle NLB$ (bu bucaqlardan hər

birisi $270^\circ - \angle ABC - \angle BCD$ -yə bərabərdir), beləliklə düzbucaqlı MM'K və NN'L üçbucaqları oxşardır. Odur ki, $\frac{MM'}{MK} = \frac{NN'}{NL}$ (1) münasibəti doğ-

$$\text{rudur. } S(BMN) = \frac{1}{2}BM \cdot NN' \quad \text{və}$$

$$S(CMN) = \frac{1}{2}CN \cdot MM'. \quad BC \text{ və } MN \text{ parçaları paralel olduqun-}$$

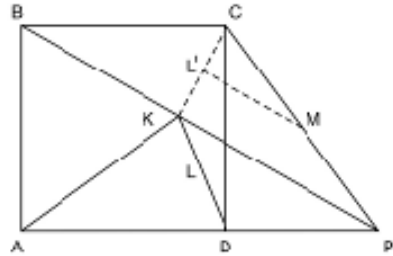


Şəkil 100.

dan $S(BMN) = S(CMN)$. Odur ki, $BM \cdot NN' = CN \cdot MM'$ (2).

(1) və (2) –dən $\frac{BM}{MK} = \frac{CN}{NL}$ alırıq. Bu isə o, deməkdir ki, BMK və CNL düzbucaqlı üçbucaqları oxşardır. Onda isə $\angle LCN = \angle KBM = 60^\circ$, buradan da alınır ki, CDL üçbucağı bərabərtərəflidir.

96. Fərz edək ki, L , L' və M uyğun olaraq KD , KC və CP parçalarının orta nöqtələridir (Şəkil 101). Aşkardır ki, L və L' nöqtələri KM düz xəttinə (habelə bu düz xətt $ABCD$ kvadratının simmetriya oxudur) nəzərən simmetrikdir. Odur ki, $LM = L'M$, $L'M$ isə KCP üçbucağının orta xətti olduğundan



Şəkil 101.

$LM = L'M = \frac{1}{2}KP$, indi KP parçasının kvadratın tərəfinə bərabər olduğunu isbat etmək qalır. $\angle KAP = 90^\circ - \angle KAB = 30^\circ$ və $\angle KPA = 90^\circ - \angle ABK = 30^\circ$, deməli AKP bərabəryanlıdır ($AK = KP$).

97. Fərz edək ki, ABC üçbucağında $\angle A = \frac{\pi}{7}$, $\angle B = \frac{2\pi}{7}$, $\angle C = \frac{4\pi}{7}$ və AA_1, BB_1, CC_1 - tən bölənlərdir. $A_1B_1C_1$ üçbucağının bərabəryanlı olduğunu isbat etmək lazımdır. $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (Şəkil 102) işarə edək. Belə üçbucağın tərəfləri arasında $bc = ab + ac$ asılılığı olduğunu müəyyən edək. ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu 1 qəbul edərək aşağıdakı cəmə baxaq:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{b+c}{bc} = \frac{\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7}} = \frac{2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7}} = \frac{\cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7}} = \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{a} \quad \text{və ya} \quad bc = ab + ac \quad (1). \end{aligned}$$

$\triangle ACB \sim \triangle BCB_1$ ($\angle C = \gamma$ ortaqdır və $\angle B_1BC = \frac{\beta}{2} = \alpha$); odur

ki, $\frac{c}{BB_1} = \frac{a}{CB_1} = \frac{b}{a}$ və ya $CB_1 = \frac{a^2}{b}$ (2). Üçbucağın AA_1 tənbö-

ləninin xassəsinə görə $\frac{c}{BA_1} = \frac{b}{CA_1} = \frac{b+c}{a}$ və ya $BA_1 = \frac{ac}{b+c}$ və

(1) bərabərliyini nəzərə almaqla $BA_1 = ac \cdot \frac{a}{bc} = \frac{a^2}{b}$ (3). (2) və

(3) bərabərliklərindən alınır ki, $CB_1 = BA_1$. Onda $\triangle BA_1C_1 = \triangle CB_1C_1$

(2-ci əlamət: $\angle B_1CC_1 = \angle A_1BC_1$, çünki $\beta = \frac{\gamma}{2}$, bərabəryanlı

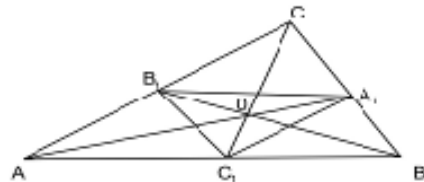
BC_1C üçbucağının yan tərəfləri kimi $BA_1 = CB_1$ və $CC_1 = BC_1$)
və $A_1C_1 = B_1C_1$. Bunu da isbat etmək lazım idi.

98. CB_1C_1 və BA_1C_1 üçbucaqlarının bərabərliyindən alınır
ki, $\angle C_1A_1B = \angle CB_1C_1$, habelə

$\angle CA_1C_1 = 180^\circ - \angle BA_1C_1$, on-

da $\angle CA_1C_1 + \angle CB_1C_1 = 180^\circ$
alırıq (Şəkil 102), deməli

$B_1CA_1C_1$ dördbucaqlısının
xaricinə çevrə çəkmək olar.



Şəkil 102.

99. 1) COB_1 üçbucağı bərabəryanlıdır, çünki

$\angle OCB_1 = \angle OB_1C = \frac{\gamma}{2}$. Habelə COA_1 üçbucağı da bərabəryan-

lıdır: $\angle OA_1C = \angle COA_1 = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}$, başqa sözlə $OB_1 = OC = CA_1$;

$CA_1 = a - BA_1 = a - \frac{a^2}{b} = \frac{a(b-a)}{b}$. Bundan əlavə 97-ci məsələ-

nin həllindəki (3) bərabərliyindən alınır ki, $\frac{b-a}{b} = \frac{a}{c}$, odur ki,

$CA_1 = \frac{a^2}{c}$ (4). $\triangle CB_1B \sim \triangle CBA$ (Şəkil 102): $\frac{a}{b} = \frac{BB_1}{c} = \frac{CB_1}{a} = \frac{b}{a+c}$

($BB_1 = AB_1$, çünki $\triangle AB_1B$ bərabəryanlıdır) və ya $b^2 = a^2 + ac$

(5). $\triangle AC_1C \sim \triangle ACB$: $\frac{b}{c} = \frac{AC_1}{b} = \frac{CC_1}{a} = \frac{c}{a+b}$ ($CC_1 = C_1B$,

çünki $\triangle CC_1B$ bərabəryanlıdır) və ya $c^2 = b^2 + ab$ (6).

(5) və (6) –dan $c^2 = a^2 + ab + ac$ alınır və 97-ci məsələnin həllindəki (1) bərabərliyini nəzərə almaqla $c^2 = a^2 + bc$. Onda

$\frac{a^2}{c} = c - b$. Beləliklə, $CA_1 = c - b$

2) 1)-də baxılan üçbucaqların oxşarlığından alınır.

3) $CA_1 = c - b$ olduğundan $BA_1 = a - CA_1 = b + a - c$

4) $CC_1 = \frac{ab}{c}$ və $BB_1 = \frac{ac}{b}$ bərabərliklərindən, (6) və (4)

bərabərliklərini də nəzərə almaqla, alınır ki, $CC_1 \cdot BB_1 = a^2$,

$BB_1 - CC_1 = a \cdot \frac{c^2 b^2}{bc} = \frac{a^2 b}{bc} = \frac{a^2}{c} = CA_1$

5) $\triangle BOQ$ - bərabəryanlıdır ($\angle COB = \frac{\gamma + \beta}{2} = \angle OC_1B = \frac{\gamma}{2} + \alpha = \frac{3\pi}{7}$),

odur ki, $OB = BC_1 = CC_1$, onda $BB_1 = OB_1 = BC_1 + OC = CC_1 + OC$.

6) 4)-dən alınır ki, $a = \sqrt{BB_1 \cdot CC_1}$. 97-ci məsələnin həllindəki (1) bərabərliyindən alırıq ki, $\frac{ab}{c} = b - a = CC_1$ və

$$\frac{ac}{b} = c - a = BB_1 \text{ və ya } a = b - CC_1 = c - BB_1, \text{ yəni}$$

$$b = a + CC_1 = \sqrt{BB_1 \cdot CC_1} + CC_1 \text{ və } c = \sqrt{BB_1 \cdot CC_1} + BB_1$$

7) $a + b > c$ bərabərliyindən alınır ki,

$$2\sqrt{BB_1 \cdot CC_1} + CC_1 > \sqrt{BB_1 \cdot CC_1} + BB_1, \quad \sqrt{BB_1 \cdot CC_1} > BB_1 - CC_1,$$

$$\left(\frac{BB_1}{CC_1}\right)^2 - \frac{3BB_1}{CC_1} + 1 < 0, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{BB_1}{CC_1} < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad BB_1 > CC_1$$

$$\text{olduğundan } 1 < \frac{BB_1}{CC_1} < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

100. $ABCD$ dördbucaqlısı xaricə çəkildiyindən $\angle OAD = \angle OAE$, $\angle OBA = \angle OBC$, $\angle OCB = \angle OCD$, $\angle ODC = \angle ODA$; habelə $\angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle AOD = 180^\circ$ (1) bərabərliyi də ödənilir. $P \in [OA]$ isə, onda aşkardır ki, $Q \in [OC]$ və (1) bərabərliyindən nəticə olaraq

$$\sin \angle POB = \sin \angle QOD \quad (2),$$

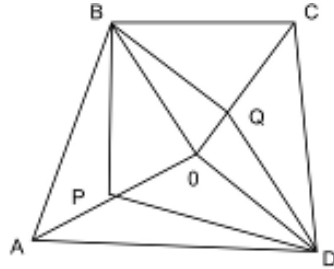
$$\sin \angle POD = \sin \angle QOB \quad (3) \text{ alınır.}$$

$$\angle DAP = \angle BAP = \alpha, \quad \angle ABP = \beta_1,$$

$$\angle PBO = \beta_2, \quad \angle OBQ = \beta_3, \quad \angle QBC = \beta_4,$$

$$\angle ADP = \delta_1, \quad \angle PDO = \delta_2,$$

$$\angle ODQ = \delta_3, \quad \angle QDC = \delta_4 \quad (4) \text{ işarə edək (Şəkil 103).}$$



Şəkil 103

ABP, OBP, ADP və ODP üçbucaqlarına sinuslar teoremini tətbiq edib uyğun olaraq $\frac{AP}{\sin \beta_1} = \frac{PB}{\sin \alpha}, \quad \frac{PB}{\sin \angle POB} = \frac{OP}{\sin \beta_2},$

$$\frac{PD}{\sin \alpha} = \frac{AP}{\sin \delta_1}, \quad \frac{OP}{\sin \delta_2} = \frac{PD}{\sin \angle POD} \quad \text{bərabərliklərini alırıq. Bun-}$$

$$\text{lardan} \quad \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{\sin \angle POB}{\sin \angle POD} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \quad (4) \quad \text{alınır. Analoji}$$

olaraq, BCQ, OBQ, COQ, və ODQ üçbucaqlarına baxıb

$$\frac{\sin \delta_3}{\sin \delta_4} = \frac{\sin \angle QOD}{\sin \angle QOB} \cdot \frac{\sin \beta_3}{\sin \beta_4} \quad (5) \quad \text{bərabərliyini ala bilərik:}$$

$$\angle PBQ = \frac{1}{2} \angle ABC \quad \text{şərtindən və} \quad \angle OBA = \angle OBC \quad \text{bərabərliyindən}$$

alınır ki, $\beta_1 = \beta_2$ və $\beta_3 = \beta_4$; onda (2) – (5) bərabərliklərini

$$\text{nəzərə almaqla} \quad \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{\sin \beta_3}{\sin \beta_4} \quad (6). \quad \text{Buradan isə} \quad \delta_1 = \delta_3 \quad \text{alınır.}$$

Əslində $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ və δ_4 iti bucaqlardır; $\delta_1 + \delta_2 = \delta_3 + \delta_4$;

$\delta_1 > \delta_3$ bərabərsizliyindən $\delta_2 < \delta_4$ və (6) bərabərliyinin əksinə

olaraq $\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} > \frac{\sin \delta_3}{\sin \delta_4}$ alınır. Eyni qayda ilə $\delta_1 < \delta_3$ bəra-

bərsizliyin mümkün olmadığı müəyyən edilir. Beləliklə,

$$\delta_1 = \delta_3, \quad \text{onda isə} \quad \angle PDQ = \delta_2 + \delta_3 = \left(\frac{1}{2} \angle ADC - \delta_1 \right) + \delta_3 = \frac{1}{2} \angle ADC$$

alınır ki, bunu da isbat etmək tələb olunurdu.

101. T nöqtəsindən AB, BC, CA tərəflərinə uyğun olaraq TC_1 , TA_1 , TB_1 perpendikulyarlarını endirək (Şəkil 104). Aşkardır ki,

bu perpendikulyarların uzunluqları

bərabərdir; bundan əlavə bir nöqtədən

daxilə çəkilmiş çevrəyə toxunanlar

kimi $AC_1 = AB_1$ və $CA_1 = CB_1$. Onda

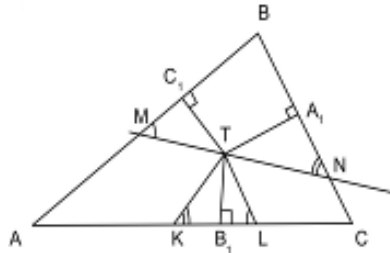
katetlərinə və bunların qarşısındakı iti

bucaqlarına görə TKB_1 və TNA_1 düz-

bucaqlı üçbucaqları bərabərdir, odur

ki, $B_1K = A_1N$. Analoji olaraq

$B_1L = C_1M$. Beləliklə,

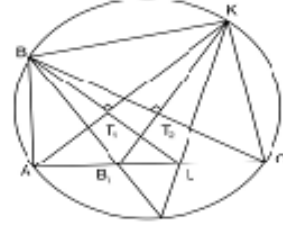


Şəkil 104.

$AM+KL+CN=AM+MC_1+NA_1++CN=AC_1+CA_1=AB_1+CB_1=AC$.

Qeyd: BMN korbucalı üçbucaq olan halda da məsələnin tələbi ödənilir.

102. Fərz edək ki, T_1 və T_2 uyğun olaraq B_1 və B -dən endirilmiş perpendikulyarların oturacaqlarıdır (Şəkil 105). ALT_1 və BT_2K düzbucaqlı üçbucaqların da $\angle T_2BK = \angle LAT_1 = \alpha$ (eyni bir KC qövsünə söykənən bucaqlar olduğundan); odur ki,



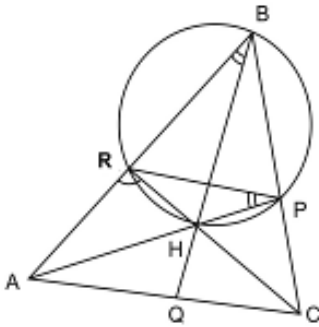
Şəkil 105.

$\angle B_1LB = \angle ALT_1 = 90^\circ - \alpha = \angle BKT_2 = \angle BKB_1$, yəni B, B_1, L, K nöqtələri bir çevrə üzərində yerləşir. Buradan $\angle BB_1K = \angle BLK = \beta$ və BB_1T_2 və $KL T_1$ düzbucaqlı üçbucaqlarından

$\angle AKL = \angle T_1KL = 90^\circ - \beta = \angle B_1BT_2 = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AKC$, bu

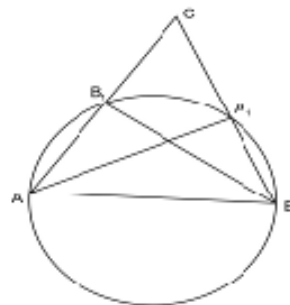
isə o deməkdir ki, KL düz xətti, B -nin daxil olmadığı, AC qövsünün orta nöqtəsindən keçir.

103. ABC üçbucağında hündürlüklərin kəsişmə nöqtəsi H olsun (Şəkil 106). $\angle APB$ və $\angle CRB$ düz olduğundan BH diametr olmaqla $BPHR$ dördbucaqlısının xaricinə çevrə çəkmək olar. Onu qurmaqla görürük ki, $\angle ABQ = \angle APR$ (eyni bir qövsə söykənən daxilə çəkilmiş bucaqlar olduğundan). Beləliklə, köməkçi çevrənin qurulması daxilə çəkilmiş bucaqlar haqqında teoremdən istifadə etməyə imkan verdi və bununla da məsələdə göstərilən bucaqlar arasında əlaqə yarada bildik.



Şəkil 106.

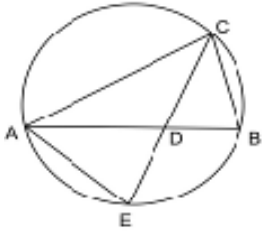
104. Fərz edək ki, AA_1 və BB_1 verilmiş ABC itibucaqlı üçbucağın hündürlükləridir (Şəkil 107). $\angle AA_1B$ və $\angle AB_1B$ düzdür, odur ki, AB tərəfi



Şəkil 107.

diametr olmaqla onun üzərində qurulmuş çevrə A_1, B_1 nöqtələrindən keçir. Sonra $\angle ABC = 180^\circ - \angle AB_1A_1$, $\angle A_1B_1C = 180^\circ - \angle AB_1A_1$, odur ki, $\angle ABC = \angle A_1B_1C$ və $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$.

105. ABC üçbucağının xaricinə çevrə çəkək və CD tən-bölənini çevrə ilə E nöqtəsində kəsişənə qədər uzadaq (Şəkil 108). $BC = a$, $AC = b$, $AD = m$, $BD = n$, $CD = l$, $DE = x$ olsun. Şərtə görə $\angle ACE = \angle BCE$, bundan əlavə $\angle AEC = \angle ABC$ (eyni qövsə söykənən daxilə çəkilmiş bucaqlar olduğuna görə).

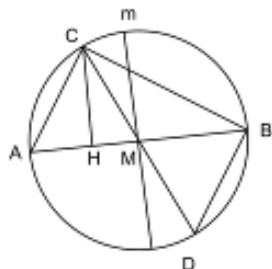


Şəkil 108.

Beləliklə, $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ və $\frac{l+x}{b} = \frac{a}{l}$

bərabərliyi doğrudur, buradan $l^2 = ab - lx$.
 AB və CE vətərləri D nöqtəsində kəsişirlər.
 Odur ki, $lx = mn$. Onda $l^2 = ab - mn$.

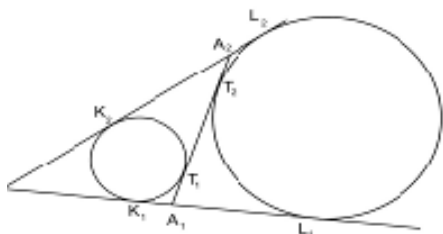
106. ABC üçbucağının CH hündürlüyü və CM tən böləninin AC, BC tərəfləri ilə bərabər bucaqlar əmələ gətirdiyini fərz edək (Şəkil 109). ABC üçbucağının xaricinə çevrə çəkək və CM medianı çevrə ilə D nöqtəsində kəsişənə qədər uzadaq. ACH və BCD üçbucaqlarına baxaq. Şərtə görə $\angle ACH = \angle BCM$ və eyni bir qövsə söykənən daxilə çəkilmiş bucaqlar olduğundan $\angle A = \angle D$, onda



Şəkil 109.

$\angle AHC = \angle CBD = 90^\circ$. Beləliklə, CD çevrənin diametridir. Çevrənin mərkəzi CD diametri və AB parçasına onun M orta nöqtəsində m perpendikulyarı üzərindədir. CM medianı hündürlük olmadığından, CD və m düz xətlərinin bir ortaq nöqtəsi var ki, bu da xaricə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. Beləliklə, AB çevrənin diametridir və $\angle ACB = 90^\circ$.

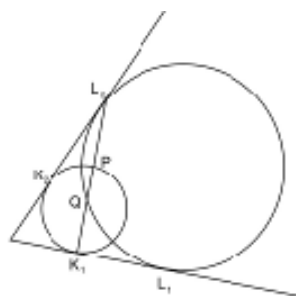
107. 1) Belə hesab etmək olar ki, T_1, T_2 nöqtələri A_1A_2 düz xətti üzərində A_1, T_1, T_2, A_2 ardıcılıqda yerləşir (Şəkil 110). Onda bir nöqtədən çevrəyə çəkilmiş iki toxunan bərabər olduğundan:



Şəkil 110

$$\begin{aligned} A_1T_1 &= A_1K_1, & A_1T_2 &= A_1L_1, \\ A_2T_2 &= A_2K_2, & A_2T_1 &= A_2L_2, \\ K_2L_2 &= K_1L_1 & \text{buradan} \\ A_1T_1 + A_1T_2 &= & A_2T_1 + A_2T_2, \\ 2A_1T_1 + T_1T_2 &= & 2A_2T_2 + T_1T_2, \\ A_1T_1 &= A_2T_2. \end{aligned}$$

2) Fərz edək ki, P və Q uyğun olaraq bucağın tərəflərinə K_1, K_2 və L_1, L_2 nöqtələrində toxunan çevrələrin K_1L_2 ilə kəsişmə nöqtələridir (Şəkil 111). Verilmiş nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunan və kəsən haqqındakı teoremə görə



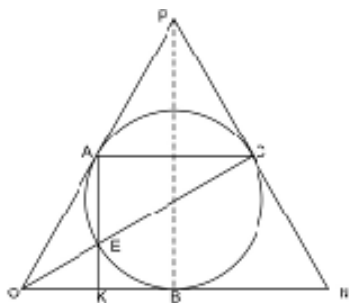
Şəkil 111.

$$L_1K_1^2 = K_1Q \cdot K_1L_2,$$

$$L_2K_2^2 = L_2P \cdot L_2K_1. \text{ Aşkardır ki,}$$

$L_1K_1 = L_2K_2$, odur ki, $K_1Q \cdot K_1L_2 = L_2P \cdot L_2K_1$, buradan $K_1Q = L_2P_1$. Bu bərabərliyin hər tərəfinə PQ -ni əlavə edib (və ya P , Q nöqtələrinin K_1L_2 parçası üzərində yerləşməsi ardıcılığından asılı olaraq hər tərəfdən PQ -ni çıxıb) tələb olunanı alırıq: $K_1P = L_2Q$.

108. Məsələni kəsən və toxunan, daxilə çəkilmiş bucaq haqqında teoremlərdən, üçbucaqların oxşarlığından və s. istifadə etməklə müxtəlif üsullarla həll etmək olar. Həllərdən daha qısa və



Şəkil 112

münasibini göstərək. Çevrəyə C nöqtəsində toxunan çəkək. Fərz edək ki, bu toxunanın AOB bucağının AO və OB tərəfləri ilə kəsişmə nöqtələri P və N -dir (Şəkil 112). Aşkardır ki, PB düz xətti OPN üçbucağının simmetriya oxudur, ona görə toxunanların dördü də bərabərdir:

$OA=OB=BN=CN$. $\angle CNO = \angle AOK$; $\angle NOC = \angle ACO = \angle OAK$ olduğundan $\triangle NOC \sim \triangle OAK$ (Son iki bucağın hər biri AE qövsünün yarısı ilə ölçülür). Odur ki, $\frac{OK}{OB} = \frac{OK}{OA} = \frac{CN}{ON} = \frac{1}{2}$; $2OK = OB$, $2OK = OK + OB$, $OK = KB$.

109. Aşkardır ki, $KLMN$ dördbucaqlısının diaqonallarından heç olmasa biri, $ABCD$ paraleloqramının tərəfinə paraleldirsə, onda dördbucaqlının $S(MNKL)$ sahəsi, paraleloqramın $S(ABCD)$ sahəsinin yarısına bərabərdir (Şəkil 113, a). Fərz edək ki, LN diaqonalı AD -yə paralel deyil. L , M və N nöqtələrinin yerləşməsi vəziyyətini qeyd edək və $S(MNKL)$ sahəsinin K nöqtəsinin BC tərəfi üzərindəki vəziyyətindən asılı olaraq necə dəyişdiyinə diqqət edək. LMN üçbucağının sahəsi dəyişmədiyindən, qeyd olunmuş LN oturaqlı KLN üçbucağının sahəsi isə K nöqtəsindən LN düz xəttinə qədər məsafə ilə mütənasibdir. Onda aşkardır ki, K nöqtəsi B -dən C -yə hərəkət etdikdə $KLMN$

dördbucaqlısının sahəsi monoton dəyişəcəkdir: $LC > BN$ olduqda artır, $LC < BN$ olduqda isə azalır. Bizə məlumdur ki, $KM \parallel AB$ olarsa onda $S(KLMN) = \frac{1}{2} S(ABCD)$; Lakin $S(KLMN)$ kəmiyyəti monoton dəyişdiyindən, onda K nöqtəsinin bütün başqa vəziyyətlərində $S(KLMN)$ sahəsi $\frac{S(ABCD)}{2}$ -dən böyük və ya kiçik olar. Beləliklə, yalnız və yalnız $LN \parallel AD$ və ya $KM \parallel AB$ olduqda $S(KLMN) = \frac{S(ABCD)}{2}$.

Monotonluqdan istifadə etmədən, sadəcə $\frac{S(KLMN)}{S(ABCD)}$ nisbətini

$$BC = AD = a, \quad AB = CD = b,$$

$$AM = x_1, \quad BK = x_2, \quad AN = y_1,$$

$DL = y_2$ (Şəkil 113, b) parçalarının uzunluqları ilə ifadə etməklə də, məsələni həll etmək olar: $NB = b - y_1$,

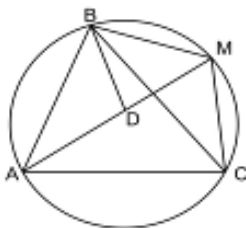
$$KC = a - x_2, \quad CL = b - y_2,$$

$DM = a - x_1$ olduğunu da nəzərə alsaq

$$\frac{S(KLMN)}{S(ABCD)} = 1 - \frac{x_1 y_1 + x_2 (b - y_1) - (a - x_2)(b - y_2) + (a - x_1) y_2}{2ab} = \frac{1}{2} - \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{2ab}$$

Buradan görünür ki, yalnız $x_1 = x_2$ və ya $y_1 = y_2$ olduqda

$$\frac{S(KLMN)}{S(ABCD)} = \frac{1}{2} \text{ olar.}$$

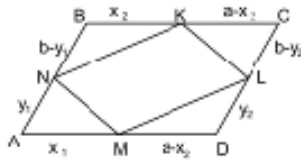
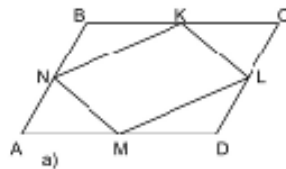


Şəkil 114.

110. Məsələni həndəsi və trigonometriyanın tətbiqi ilə həll etmək olar. Hər iki üsulu göstərək.

1) Fərz edək ki, göstərilən parçalardan ən böyüyü MA-dır (Şəkil 114). M nöqtəsindən $MD = MB$ parçasını ayıraq.

$$\angle AMB = \angle ACB = 60^\circ \text{ (hər iki bucaq eyni)}$$



Şəkil 113 b)

AB qövsünə söykənir). Buradan alınır ki, BMD düzgün üçbucaqdır. Bundan sonra asanlıqla müəyyən etmək olar ki, $\triangle ABD = \triangle BMC$. Beləliklə $MA = AD + DM = MC + MB$.

2) ABC üçbucağının tərəfini a , $\angle BAM = \alpha$ ilə işarə edək. Sinuslar teoremini tətbiq etməklə göstərilən parçaları a və α ilə

$$\text{ifadə edək: } MB = \frac{a \sin \alpha}{\sin 60^\circ}, \quad MC = \frac{a \sin(60^\circ - \alpha)}{\sin 60^\circ}, \quad MA = \frac{a \sin(60^\circ + \alpha)}{\sin 60^\circ}.$$

$$MB + MC = \frac{a}{\sin 60^\circ} [\sin \alpha + \sin(60^\circ - \alpha)] = \frac{a \cos(30^\circ - \alpha)}{\sin 60^\circ} = \frac{a \sin(60^\circ + \alpha)}{\sin 60^\circ}.$$

Alınmış son nəticəni MA ilə müqayisə etməklə məsələ də tələb ediləni alırıq.

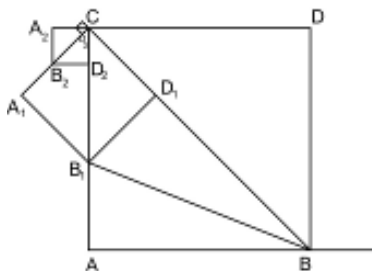
3) Baxılan məsələni Ptolomey teoreminin tətbiqi ilə də həll etmək olar. Bu teoremin riyazi ifadəsi belədir:

$MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$. Şərtə görə $AB = BC = AC$ olduğundan $MA = MB + MC$.

111. Kvadratin diaqonalı üzərində B nöqtəsindən onun tərəfini $AB = BD_1$ ayıraq (Şəkil 115).

Bunu yalnız bir dəfə etmək mümkündür.

Alınmış D_1 nöqtəsindən kvadratin diaqonalına qaldırılmış perpendikulyar kvadratin tərəfini B_1 nöqtəsində kəsir, B_1 nöqtəsini B ilə birləşdirək. AB_1B və BB_1D_1 üçbucaqları bərabərdir, çünki onlar düzbucaqlıdır, BB_1 tərəfi ortaqdır və qurmaya görə $BD_1 = BA$. Beləlik-



Şəkil 115.

lə, $AB_1 = D_1B_1$. Düzbucaqlı B_1CD_1 üçbucağında $\angle B_1CD_1 = 45^\circ$

(BC kvadratin diaqonalıdır), beləliklə $\angle CB_1D_1 = 45^\circ$, ona görə

$B_1D_1 = D_1C$. İsbat etdik ki, $AB_1 = B_1D_1 = D_1C$, buradan

$D_1C < CD$. İndi CB diaqonalına C nöqtəsində perpendikulyar

qaldırıraq, onun üzərində $CA_1 = D_1B_1$ ayıraq və A_1 nöqtəsini B_1 ilə birləşdirək. $A_1B_1D_1C$ dördbucaqlısı diaqonalı B_1C olan kvadratdır. Kvadratlar qurmaq prosesini davam etdirmək olar.

Bununla parçaların sonsuz ardıcillığını alırıq:

$CD_1 > CD_2 > CD_3 > CD_4 \dots > 0$; bu parçaların hər biri eyni bir kvadratin diaqonalı ilə tərəfi arasındakı fərkdir. Onların uzunluğu üçün ifadələri asanlıqla tapmaq olar: $CD_1 = CB - AB$,

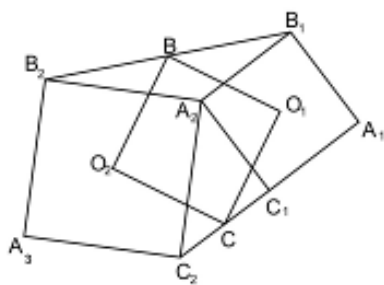
$$CD_2 = CB_1 - A_1B_1, \dots$$

İndi fərz edək ki, başlanğıcdakı kvadratin diaqonalı ilə tərəfinin ortaq ölçüsü vardır, yəni elə l parçası uzunluq vahidi, vardır ki, diaqonal və BC tərəfində tam dəfə yerləşir. Başqa sözlə BC və AB parçalarının uzunluğu tam ədədlə ifadə olunur. Bu halda $CD_1 = CB - AB$ və $A_1CD_1B_1$ kvadratının $AC - AB_1 = AB - CD_1$ fərqlərinə bərabər olan B_1C diaqonalının uzunluğu tam ədədlə ifadə olunur.

Beləliklə biz tam müsbət ədədlərin sonsuz

$CD > CD_1 > \dots > CD_k \dots > \dots > 0$ ardıcillığını qurduq, baxmaya-raq ki, bu sonsuz ola bilməz (burada CD ilə CD_i parçalarının uzunluğu işarə edilmişdir). Alınmış ziddiyyət kvadratin diaqonalı ilə tərəfinin ortaq ölçüsünün olmadığını isbat edir.

112. Məsələnin həllində həndəsi çevirmələrdən istifadə edək. Əlbəttə bu məsələni, əlavə qurmalar aparmaqla və bir sıra konqruent üçbucaqlara baxmaqla, həndəsi çevirməni tətbiq etmədən də həll etmək olar. Lakin məsələdə “düzgün” fiqurlardan – kvadratlardan söhbət getdiyindən onun həllində həndəsi



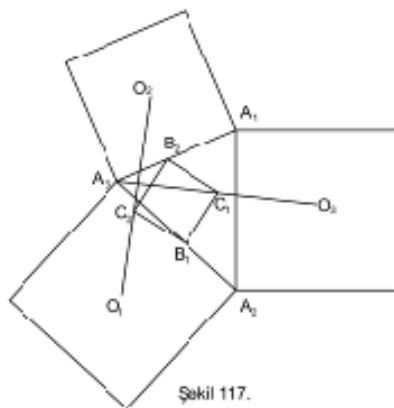
Şəkil 116.

çevirmələrin tətbiqini göstərmək maraqlıdır. Aşkardır ki, O_1 nöqtəsi ətrafında 90° dönmə B_1 nöqtəsinə A_2 nöqtəsinə, O_2 nöqtəsi ətrafında 90° dönmə isə A_2 nöqtəsinə B_2 nöqtəsinə çevirir (Şəkil 116). Bu iki dönmənin

ardıcıl aparılması (kompozisiyası) 180° dönməlidir, başqa sözlə hər hansı nöqtəyə nəzərən simmetriyadır. Bu iki dönmənin ardıcıl

aparılması nəticəsində B_1 nöqtəsi B_2 nöqtəsinə keçdiyindən baxdığımız dönmələrin kompozisiya B_1B_2 parçasının orta nöqtəsi B-yə görə simmetriyadır. Digər tərəfdən məlumdur ki, bu iki dönmənin mərkəzi O_1 və O_2 nöqtələrindən keçən və uyğun olaraq O_1O_2 düz xətti ilə 45^0 bucaq əmələ gətirən iki düz xəttin kəsişmə nöqtəsindədir. Deməli bu düz xətlər B nöqtəsində kəsişirlər və O_1BO_2 düz bucağı B nöqtəsində olan bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqdır. Analoji olaraq isbat edilir ki, C_1BO_2 üçbucağı bərabəryanlı, C bucağı düz olan, düzbucaqlı üçbucaqdır. Bu iki üçbucağın birləşməsi O_1BO_2C kvadratını verir ki, bunu da isbat etmək lazım idi.

113. A_3A_2 və A_1A_3 parçalarının orta nöqtələrini uyğun olaraq B_1 və B_2 ilə işarə edək (Şəkil 117). Mərkəzi O_2 və O_3 nöqtələrində olan kvadratlara əvvəlki məsələnin nəticəsini tətbiq edərək alırıq ki, $O_2B_1O_3$ üçbucağı B_1 təpə bucağı düz olan bərabəryanlı üçbucaqdır. Beləliklə, B_1 nöqtəsi ətrafında 90^0 dönmə A_3O_3 parçasını O_1O_2



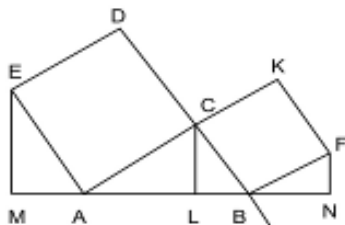
Şəkil 117.

parçasına çevirir bu isə 1)-in isbatıdır. B_2 nöqtəsi ətrafında 90^0 dönmə O_2 nöqtəsinə A_3 nöqtəsinə çevirdiyindən bu iki dönmənin (B_1 və B_2 nöqtələri ətrafında) ardıcıl aparılması nəticəsində əvvəlki məsələdə olduğu kimi alırıq ki, $B_2C_1B_1$ (burada C_1 ilə A_3O_3 parçasının

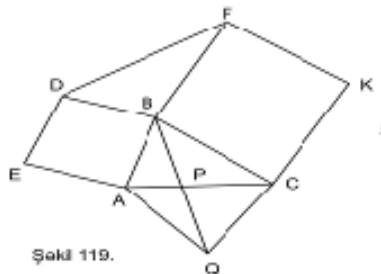
ortası işarə edilir). C_1 təpə bucağı 90^0 olan bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqdır. Analoji olaraq alırıq ki, $B_2C_2B_1$ (burada C_2 nöqtəsi O_1O_2 parçasının ortasıdır) C_2 təpə bucağı 90^0 olan bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqdır. Bu da 2)-nin isbatıdır. Alınmış kvadratın B_1B_2 diaqonalı $A_1A_2A_3$ üçbucağının orta

xəttidir və mərkəzi O_3 nöqtəsində olan kvadratin A_1A_2 tərəfindən 2 dəfə kiçikdir. Buradan isə 3)-in isbatı alınır.

114. Düzbucaqlı ACB üçbucağında CL hündürlüyünü çəkək. (Şəkil 118). Aşkardır ki, $\triangle ACL = \triangle EAM$, $\triangle BCL = \triangle FBN$. Odur ki $EM=AL$, $FN=BL$, $EM+FN=AL+LB=AB$.



Şəkil 118.

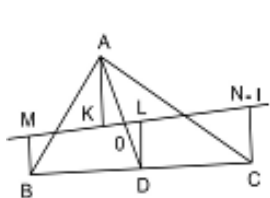


Şəkil 119.

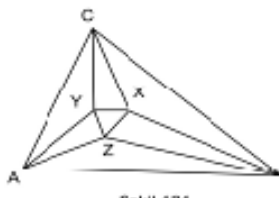
115. ABC üçbucağını paraleloqrama tamamlayaq. BP medianını isə onun diaqonalına çatdıraq (Şəkil 119). Fərz edək ki, $\angle ABC = \alpha$, onda $\angle DBF = 180 - \alpha$. Lakin $\angle BCQ = 180^\circ - \alpha$, bu bucağın aralarında yerləşdiyi tərəflər də öz aralarında bərabərdir, odur ki, $\triangle DBF = \triangle QCB$. Beləliklə, $BQ=2BP=DF$.

116. Fərz edək ki, o üçbucağın medianlarının kəsişmə nöqtəsi, AD mediandır (Şəkil 120). l düz xəttinə BM , DL , CN , AK perpendikulyarları qaldıraq. Aşkardır ki, DL parçası $BMNC$ trapesiyasının orta xəttidir. Odur ki, $DL = \frac{BM + CN}{2}$ və

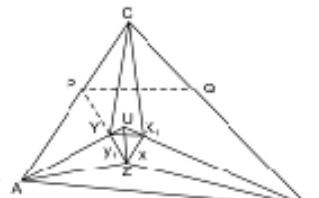
$\triangle AKO \sim \triangle DLO$, ona görə $\frac{DL}{AK} = \frac{DO}{OA} = \frac{1}{2}$ və $AK = 2DL = BM + CN$.



Şəkil 120.



Şəkil 121.



Şəkil 122

117. Məlumdur ki, üçbucağın tən bözlənləri bir nöqtədə kəşişir. Bu bucağı yarıya bölən düz xətdir. Üçbucağın bucağını üç bərabər hissəyə bölən düz xətlər onun trisekstrisləri adlanır. Üçbucağın hər təpəsindən onun iki trisekstrisini çəkmək olar. Tən bözlənlər əvəzində trisekstrislərə baxaq və onların kəşisməsindən alınan XYZ üçbucağının düzgün üçbucaq olduğunu (Şəkil 121) isbat edək. Həllin iki üsulunu göstəririk.

I(həndəsi). ABC üçbucağının bucaqlarını $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$ ilə işarə edək (Şəkil 122). $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$ olduğundan $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$,

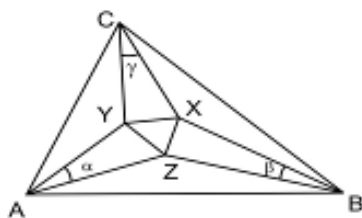
$\alpha + \beta = 60^\circ - \gamma$. Fərz edək ki, AY və BX trisekstrisləri U nöqtəsində kəşişir. AZ və BZ düz xətləri AUB üçbucağının tən bözləni olduğundan, ZU da bu üçbucağın tən bözlənidir. Odur ki, $\angle AUZ = \angle ZUB = \frac{1}{2} \angle AUB = \frac{1}{2}(180 - 2\alpha - 2\beta) = 90^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ - (60^\circ - \gamma) = 30^\circ + \gamma$.

İndi bir təpəsi Z nöqtəsində, X_1 və Y_1 təpələri isə uyğun olaraq BX və AY düz xətləri (aşağıda isbat edəcəyik ki, bunlar X və Y nöqtələrinin üzərinə düşür) üzərində olan bərabər tərəfli X_1Y_1Z üçbucağını quraq. Bunun üçün Z nöqtəsindən ZU ilə 30° -lik bucaq əmələ gətirən iki ZX_1 və ZY_1 şüalarını çəkək. Bu şüaların BX və AY ilə (başqa sözlə, BU və AU ilə kəşismə nöqtələrini X_1 və Y_1 ilə işarə edək. Aşkardır ki, $\Delta ZX_1U = \Delta ZY_1U$ olduğundan (Şəkil 122) (bu üçbucağın bərabər bucaqları və ortaq tərəfi vardır) $ZX_1 = ZY_1$; odur ki, ΔZY_1X_1 təpə bucağı 60° olan bərabər-yanlı başqa sözlə, düzgün üçbucaqdır. Sonra AY və BX düz xətlərinə nəzərən Z nöqtəsi ilə simmetrik nöqtələri P və Q ilə işarə edək. AY və BX düz xətləri ZAC və ZBC bucaqlarının tən bözlənləri olduğundan P və Q nöqtələri ABC üçbucağının uyğun olaraq AC və BC tərəfləri üzərindədir. PY_1X_1 və QX_1Y_1 bucaqlarının qiymətlərini tapaq. $\angle ZX_1Y_1 = 60^\circ$ (düzgün üçbucağın bucağı) olduğundan $\angle ZX_1B = \angle X_1ZU + \angle X_1UZ = 30^\circ + (30^\circ + \gamma) = 60^\circ + \gamma$ (ΔZX_1U - un xarici bucağı) və $\angle QX_1B = \angle ZX_1B$ (bu bucaqlar BU düz xəttinə nəzərən simmetrikdirlər),

$$\angle QX_1Y_1 = 360^0 - 60^0 - (60^0 + \gamma) - (60^0 + \gamma) - (60^0 + \gamma) = 180^0 - 2\gamma.$$

Eyni qayda ilə $\angle PY_1X_1 = 180^0 - 2\gamma$ bərabərliyi isbat edilir. Beləliklə, $\angle PY_1X_1 = \angle QX_1Y_1$; bundan əlavə $PY_1 = Y_1Z = ZX_1 = X_1Q$ (birinci iki parça AU düz xəttinə nəzərən, sonuncu iki parça isə BU düz xəttinə nəzərən simmetrikdirlər). Buradan alınır ki, PY_1X_1Q dördbucaqlısı bərabəryanlı trapesiyadır (Y_1 və X_1 nöqtələrindəki bucaqlar $180 - 2\gamma$ -ya, odur ki, P , Q təpələrindəki bucaqlar 2γ -ya bərabərdir). İndi PY_1X_1Q trapesiyasının xaricinə çevrə çəkək (şəkildə bu göstərilmiş). Bu çevrənin PY_1 , Y_1X_1 , X_1Q vətərləri konqruent olduğundan, bu vətərlərin söykəndiyi daxilə çəkilmiş bucaqlar da konqruentdir; ona görə $\angle PQY_1 = \angle Y_1PX_1 = \angle X_1PQ = \gamma$. Lakin $\angle PCQ = 3\gamma$, Ona görə PY_1X_1Q trapesiyasının xaricinə çəkilmiş çevrə C nöqtəsindən də keçir. İndi bu çevrənin PY_1 , Y_1X_1 , X_1Q qöslərinin bərabərliyindən (bərabər vətərlərin gərdiyi) alınır ki, $\angle PCY_1 = \angle Y_1CX_1 = \angle X_1CQ = \gamma$, buradan isə $\Delta X_1Y_1Z = \Delta XYZ$ alınır. Bu isə baxılan teoremin isbatıdır (məsələnin həllidir).

II (hesablama ilə). Yenə belə hesab edək ki, $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$; ABC üçbucağının tərəfləri uzunluğunu a, b, c onun xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu isə d ilə işarə edək (Şəkil 123). XYZ üçbucağının $XY = z$ tərəfinin uzunluğunu



Şəkil 123

tapmağa çalışaq. Bunun üçün hər şeydən əvvəl $CX = m$ və $CY = n$ parçalarını tapmaq; bundan sonra ΔCXY -dən kosinuslar teoreminə görə XY -i tapmaq olar. m və n -i hesablamaq üçün isə sinuslar teoremindən istifadə edirik. Bu

teoremi tərəfləri $AC = b$, $CY = n$ və bucaqları $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, $\angle Y = 180^0 - (\alpha + \gamma) = 180^0 - (60^0 - \beta) = 120^0 + \beta$ olan ΔAYC -yə tətbiq edib (burada yenə aşkar $\alpha + \beta + \gamma = 60^0$

bərabərliyindən istifadə edirik). $\frac{n}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(120^\circ + \beta)}$ və ya

$n = \frac{b \sin \alpha}{\sin(120^\circ + \beta)}$ alırıq. Yenə sinuslar teoreminə görə $\triangle ABC$ -

dən $\frac{b}{\sin \angle B} = d$ və ya $b = d \sin \angle B = d \sin 3\beta$. Odur ki,

$$n = \frac{d \sin \alpha \sin 3\beta}{\sin(120^\circ + \beta)} = \frac{d \sin \alpha \cdot \sin 3\beta}{\sin(60^\circ - \beta)}.$$

Məlumdur ki, $\sin 3\beta = 3\sin \beta - 4\sin^3 \beta$. Bu ifadəni belə çevirmək olar.

$$\sin 3\beta = 3\sin \beta - 4\sin^3 \beta = 4\sin \beta \left(\frac{3}{4} - \sin^2 \beta \right) = 4\sin \beta \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \sin^2 \beta \right] =$$

$$= 4\sin \beta (\sin^2 60^\circ - \sin^2 \beta) = 4\sin \beta (\sin 60^\circ + \sin \beta)(\sin 60^\circ - \sin \beta) =$$

$$= 4\sin \beta \sin(60^\circ + \beta) \sin(60^\circ - \beta).$$

$\sin 3\beta$ -in bu ifadəsini $n = 4d \sin \alpha \sin 3\beta \cdot \sin(60^\circ - \alpha)$ -da yerinə yazıb $n = 4d \sin \alpha \sin \beta \cdot \sin(60^\circ + \alpha)$ alırıq. Tamamilə analogi qaydada isbat edilir ki, $m = 4d \sin \alpha \sin \beta \cdot \sin(60^\circ + \alpha)$. İndi

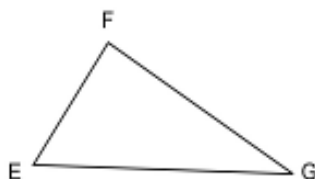
$\triangle CXY$ -dən kosinuslar teoreminə görə

$$z^2 = XY^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \gamma = 16d^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta [\sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ + \beta) -$$

$$- 2 \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ + \beta) \cos \gamma].$$

Qeyd edək ki, $(60^\circ + \alpha) + (60^\circ + \beta) + \gamma = 120^\circ + (\alpha + \beta + \gamma) = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$,

odur ki, bucaqları $\angle E = 60^\circ + \alpha$, $\angle F = 60^\circ + \beta$ və $\angle G = \gamma$ olan $\triangle EFG$ vardır (Şəkil 124). Fərz edək ki, bu üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin δ diametri 1-ə bərabərdir. Onda sinuslar teoreminə görə bu üç



Şəkil 124.

ucağın tərəfləri $l = FG = \sin(60^\circ + \alpha)$, $f = EG = \sin(60^\circ + \beta)$,
 $g = EF = \sin \gamma$ olacaqdır. Həmin $\triangle EFG$ -yə kosinuslar teoremini
tətbiq edib $\sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ + \beta) -$
 $2 \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ + \beta) \cos \gamma = l^2 + f^2 - 2lf \cos \gamma = g^2 =$
 $= \sin^2 \gamma$ alırıq. Beləliklə, $z^2 = 16d^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$ və ya
 $z = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. XZ və YZ parçalarının y, x uzunluqları
 $z = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ ifadəsindən α, β, γ bucaqlarının dövrü
əvəzlənməsi ilə alınır. α, β, γ bucaqları z-in ifadəsinə simmetrik
daxil olduğundan $x = y = z = 4d \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. Deməli,
tərəfləri x,y,z olan $\triangle XYZ$ bərabərtərəflidir.

118. Fərz edək ki, MNPQ verilmiş dördbucaqlı, A onun
diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi, B, C isə uyğun olaraq MN, QP
qarşı tərəflərinin orta nöqtələridir və A, B, C bir düz xətt

üzərindədir (Şəkil 125). $\vec{a} = \vec{AM}$,

$\vec{b} = \vec{AN}$ işarə edək. Onda $\vec{AP} = k \vec{a}$
(çünkü A,M,P nöqtələri bir düz xətt

üzərindədir), habelə $\vec{AQ} = l \vec{b}$. B nöq-
təsi MN parçasının ortası olduğundan

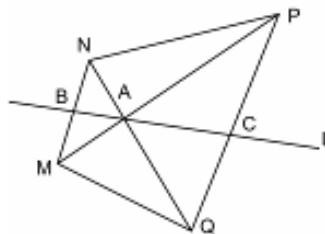
$$\vec{AB} = \frac{1}{2} \vec{AM} + \frac{1}{2} \vec{AN} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}. \text{ Eləcə}$$

də $\vec{AC} = \frac{1}{2} \vec{AP} + \frac{1}{2} \vec{AQ} = \frac{k}{2} \vec{a} + \frac{l}{2} \vec{b}$. Şərtə görə A, B, C nöqtələri

bir düz xətt üzərində yerləşirlər, ona görə də elə m ədədi vardır

ki, $\vec{AC} = m \vec{AB}$, yəni $m \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) = \frac{k}{2} \vec{a} + \frac{l}{2} \vec{b}$. Burada $\vec{a}$ və

$\vec{b}$ vektorlarının kollienar olmadığından alınır ki, $m=k=l$.



Şəkil 125.

Nəhayət, $\vec{MN} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{PQ} = l\vec{b} - k\vec{a} = k\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$, yəni

$\vec{PQ} = k\vec{MN}$. Beləliklə, $PQ \parallel MN$, bu da o deməkdir ki, MNPQ dördbucaqlısı trapesiya və ya paraleloqramdır.

119. $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{ON} = \vec{b}$ işarə edək. Onda $\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC} = \vec{AO} + \frac{1}{n+1}\vec{OM}$; $\vec{AO} = \vec{AB} - \vec{OB} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$;

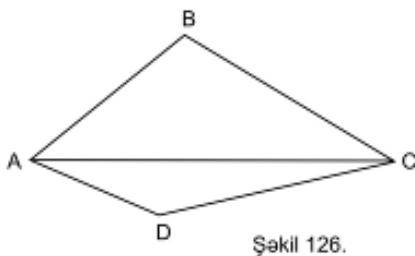
$\vec{OM} = \vec{ON} - \vec{AO} = \vec{b} - \left(\vec{a} - \frac{1}{n}\vec{b}\right) = \frac{n+1}{n}\vec{b} - \vec{a}$, başqa sözlə

$\vec{AC} = \left(\vec{a} - \frac{1}{n}\vec{b}\right) + \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{n}{n+1}\vec{a}$; $\vec{AC} = \frac{n}{n+1}\vec{AB}$.

Buradan alınır ki, A, B, C nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşir.

120. Dördbucaqlını diaqonalı ilə iki üçbucağa ayıraraq (Şəkil 126). Onda $S(ABCD) = S(ABC) + S(ADC)$. Məlumdur ki,

$S(ABC) = \frac{1}{2}ab \sin B$, $ab \geq \frac{a^2 + b^2}{2}$. Buradan



Şəkil 126.

$S(ABC) \leq \frac{a^2 + b^2}{4}$ (1). Analoji olar

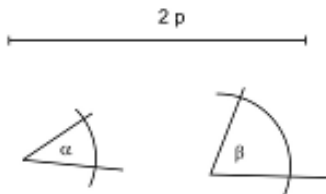
aq, $S(ADC) \leq \frac{c^2 + d^2}{4}$ (2). (1) və

(2) -dən tələb olunan alınır.

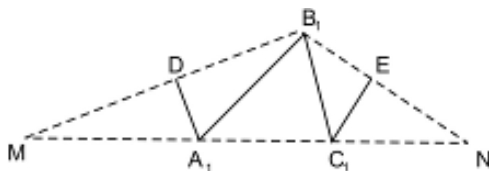
$\angle B = \angle D = 90^\circ$ və

$a = b = c = d$ və ya ABCD kvadrat olarsa, onda şərtə verilən münasibət bərabərliyə çevrilir.

121. Şərtin sxematik yazılışı (Şəkil 127) Verilir: $2p = AB + BC + AC$, $\angle \alpha$ və $\angle \beta$. Bu verilənlərə görə ABC üçbucağını qurmaq lazımdır. Həllin ənənəvi sxemini göstərək.



Şəkil 127



Şəkil 128

I. Analiz. Fərz edək ki, məsələ həll edilmişdir və $A_1B_1C_1$ axtarılan üçbucaqdır (Şəkil 128). Məsələnin şərtində perimetr verilir. İki bucağı ($\angle A_1$ və $\angle C_1$) 180° -yə qədər açmaqla bu üçbucağın perimetrini quraq. MN parçası ($MN = MA_1 + A_1C_1 + C_1N$) $\Delta A_1B_1C_1$ -in perimetridir. MN parçasının uclarını B_1 nöqtəsi ilə birləşdirib ΔMB_1N -i və iki bərabəryanlı MB_1A_1 və C_1B_1N üçbucaqlarını alırıq ($MA_1 = A_1B_1$ və $C_1B_1 = C_1N$). $\angle B_1A_1C_1$ və $\angle A_1C_1B_1$ uyğun olaraq ΔMB_1A_1 və ΔB_1C_1N -in xarici bucaqları olduğundan köməkçi MB_1N üçbucağında oturacağa bitişik bucaqları $\angle M = \angle MB_1A_1 = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1$ və $\angle N = \angle NB_1C_1 = \frac{1}{2}\angle A_1C_1B_1$ -dir. Beləliklə ΔMB_1N -da bir tərəf ($MN=2p$) və ona bitişik iki bucaq ($\angle M = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1$ və $\angle N = \frac{1}{2}\angle A_1C_1B_1$) məlumdur. B_1 eyni zamanda axtarılan üçbucağın təpə nöqtəsidir. MA_1B_1 və NC_1B_1 üçbucaqlarında uyğun olaraq A_1 və C_1 təpələrindən hündürlüklər çəksək onlar eyni zamanda bu üçbucaqların axtarılan üçbucağın digər iki təpəsini (A_1 və C_1) üzərində saxlayan, medianları olacaqdır. Odur ki, axtarılan üçbucağın həmin iki təpə nöqtələrini qurmaq üçün: 1) köməkçi üçbucaqların hər birinin yan tərəflərinin ortasından axtarılan üçbucağın perimetrinə bərabər üçüncü tərəfi kəsənə qədər perpendikulyarlar qaldırmaq; 2) həmin perpendikulyarların perimetrlə kəsişmə

nöqtələrini B_1 nöqtəsi ilə birləşdirmək lazımdır. Aparılan analizdən qurmanın yolu görünür. Buradan axtarılan fiqurun qurulması planı alınır. 1) İxtiyari düz xətt üzərində verilmiş perimetərə bərabər parça qurmaq; 2) bu parçanı üçbucağın tərəfi qəbul edərək onun uclarında eyni yarımmüstəvidə verilmiş bucaqlara bərabər bucaqlar qurmalı; 3) bu bucaqların hər birinin tən bölünələrini qurub onları kəsişənə qədər uzadıq. 4) Tən bölünələrin kəsişmə nöqtəsi axtarılan üçbucağın təpələrindən biri olacaqdır. 5) Köməkçi üçbucaqların hər birinin yan tərəflərinin ortasından perpendikulyarlar qaldırıb axtarılan üçbucağın perimetrinə bərabər olan üçüncü tərəfi kəsənə qədər uzadıq; 6) Alınmış kəsişmə nöqtələrini köməkçi üçbucağın təpə nöqtəsi ilə birləşdirməli; onda axtarılan üçbucaq alınır.

II. Qurma: Məsələnin həllinin bu mərhələsi 1)-6) bəndlərindən ibarət plan əsasında aparılır (Şəkil 129).

III. İsbat. ABC axtarılan üçbucaqdır (Şəkil 129). Doğrudan

da: 1) $A_1A + AC + CC_1 = 2p$

(qurmaya görə). Lakin, $A_1A = AB$,

$C_1C = BC$ (proyeksiyaları bərabər

olan maillər olduğundan). Beləliklə, $AB + BC + AC = 2p$;

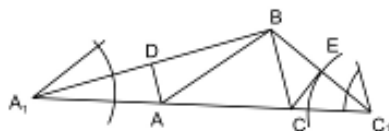
2) A_1BA və BCC_1 üçbucaqlarında xarici bucaqlar olduğundan $\angle BAC = \angle BAA_1 + \angle A_1BA$, $\angle ACB = \angle CC_1B + \angle CBC_1$.

Lakin, $\angle BA_1A = \angle A_1BA = \frac{1}{2} \angle A$, $\angle CC_1B = \angle CBC_1 = \frac{1}{2} \angle C$

(qurmaya görə), odur ki, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$. 3) Beləliklə, ABC məsələnin şərtini ödəyən üçbucaqdır.

IV. Araşdırma. 1) $\angle A + \angle C < 180^\circ$ olduqda məsələnin həlli vardır, qurmanın aparılmasının bütün mərhələlərində bu məhdudluq yerinə yetirilmişdir. 2) göstərilən məhdudlaşdırma olmaqla məsələnin həmişə yeganə həlli vardır, bu isə həllin

analizi prosesindən alınır: bir tərəfi $(2p)$ və iki bucağına $\frac{1}{2} \angle A$ və



Şəkil 129.

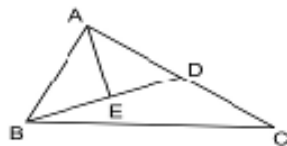
$\frac{1}{2}\angle C$ görə yeganə köməkçi üçbucaq qurmaq olar; bu üçbucağın

yan tərəflərinin hər birinin yalnız bir ortaq nöqtəsi vardır; yan tərəflərin hər birinin ortalarından yalnız bir perpendikulyar qaldırmaq olar, bunlar isə üçbucağın üçüncü tərəfini yalnız iki nöqtədə kəsə bilər; bu iki nöqtə birinci təpə nöqtəsi ilə birlikdə yeganə üçbucağı təyin edir.

122. Uzunluğu a olan BC parçasını quraq. ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin O mərkəzi radiusları R və mərkəzləri B, C nöqtələrində olan iki çevrənin kəsişmə nöqtələrindədir. Bu kəsişmə nöqtələrindən birini mərkəz götürməklə ABC üçbucağının xaricinə çevrə çəkirik. Axtarılan üçbucağın A təpə nöqtəsi bu çevrə ilə BC tərəfinə, h_a -ya bərabər məsafədə, paralel çəkilmiş düz xəttin kəsişməsidir (Belə düz xətt ikidir).

123. BC və AC tərəfləri üzərində uyğun olaraq $BA_1 : A_1C = 1 : 3$ və $AB_1 : B_1C = 1 : 2$ olmaqla A_1 və B_1 nöqtələrini quraq. Fərz edək ki, X nöqtəsi ABC üçbucağının daxilində yerləşir. Aşkardır ki, yalnız və yalnız X nöqtəsi BB_1 parçası üzərində yerləşdikdə $S(ABX) : S(BCX) = 1 : 2$ və yalnız və yalnız X nöqtəsi AA_1 parçası üzərində yerləşdikdə $S(ABX) : S(ACX) = 1 : 3$. Odur ki, axtarılan M nöqtəsi AA_1 və BB_1 parçalarının kəsişmə nöqtəsidir.

124. Analiz. Fərz edək ki, məsələ həll edilmiş və tələb olunan ABC üçbucağı qurulmuşdur (Şəkil 130). Burada $BC = a$ oturacağı məlumdur. $AC - AB = m$ fərqi şəkildə daxil etmək üçün AC tərəfi üzərində $AD = AB$ ayıraq, onda $DC = m$ alarıq. Digər tərəfdən $\angle DBC = \frac{1}{2}\alpha$ olar.



Doğrudan da $\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = \angle ABC - \angle ADB = \angle ABC - (\angle DBC + \angle DCB) = \angle ABC - \angle DBC - \angle DCB$; deməli,

$$2\angle DBC = \angle ABC - \angle DCB \text{ və ya } \angle DBC = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB) = \frac{1}{2}\alpha.$$

Beləliklə, $\triangle BDC$ -də iki tərəf ($BC = a, DC = m$) və bir bucaq $\left(\angle DBC = \frac{\alpha}{2}\right)$ məlumdur, odur ki, onu qurmaq olar. Bu üçbucağı qurduqdan sonra $\triangle ABC$ -ni asanlıqla qura bilərik.

Qurma. $\angle DBC = \frac{\alpha}{2}$ qurub, onun BC tərəfi üzərində $BC = a$

parçasını ayıraq. Sonra mərkəzi C nöqtəsində və radiusu $CD = m$ olan qövsə həmin bucağın BD tərəfini D nöqtəsində kəsir və C nöqtəsi ilə D nöqtəsini birləşdiririk. Sonra alınmış BDC üçbucağının BD tərəfinin E orta nöqtəsində bu tərəfə perpendikulyar çəkirik və onu üçbucağın CD tərəfinin uzantısı ilə A nöqtəsində kəsişənə qədər uzadıırıq. A və B nöqtələrini birləşdirib tələb olunan $\triangle ABC$ -ni alırıq.

İsbat : ABC üçbucağında qurmaya görə $BC = a$ və $AC - AB = AC - AD = DC = m$ -dir. Digər tərəfdən $\angle ABC - \angle ACB = (\angle ABD + \angle DBC) - (\angle ADB - \angle DBC) = 2\angle DBC$, deməli $\triangle ABC$ tələb olunandır.

Araşdırma: $0 < \alpha < 180^\circ$ və $a > m$ (üçbucağın bir tərəfi qalan iki tərəfin fərqindən böyükdür) olduqda məsələnin yeganə həlli vardır.

125. Fərz edək ki, o verilmiş çevrənin mərkəzi, AB verilmiş P nöqtəsindən keçən vətər, M isə bu vətərin orta nöqtəsidir. Aşkardır ki, $|AP - BP| = 2PM$ $\angle PMO = 90^\circ$ olduğundan M nöqtəsi diametri OP olan çevrənin üzərindədir. OP parçasını diametr götürməklə S çevrəsini quraq. Sonra $PM = \frac{a}{2}$ olmaqla S çevrəsinin PM vətərini qururuq (belə vətər ikidir). Bu vətər PM düz xətt ilə verilir.

126. S çevrəsinin radiusunu R, mərkəzini O ilə işarə edək. Fərz edək ki, S çevrəsi A nöqtəsindən keçən l düz xəttindən PQ vətərini ayırır; PQ vətərinin ortası M nöqtəsi olsun. Onda

$OM^2 = OQ^2 - MQ^2 = R^2 - \frac{1}{4}d^2$. Deməli axtarılan düz xətt A

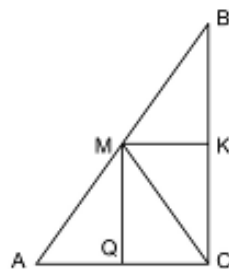
nöqtəsindən keçir və radiusu $\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}d^2}$, mərkəzi O nöqtəsində olan çevrəyə toxunur.

127. A nöqtəsini koordinat başlanğıcı, OX oxunun istiqaməti AB şüası üzrə olmaqla koordinat sistemi daxil edək. M nöqtəsinin koordinatları $(x; y)$ olsun. Onda $AM^2 = x^2 + y^2$ və $BM^2 = (x - a)^2 + y^2$, burada $a = AB$. Odur ki, $AM^2 - BM^2 = 2ax - a^2$. $AM^2 - BM^2 = k$ və ya $k = 2ax - a^2$ olan nöqtələr çoxluğu $\left(\frac{a^2 + k}{2a}, y\right)$ nöqtələrindən ibarətdir, burada y ixtiyari götürülür. Beləliklə, axtarılan həndəsi yer (çoxluq) AB parçasına perpendikulyar olan $x = \frac{a^2 + k}{2a}$ düz xəttidir.

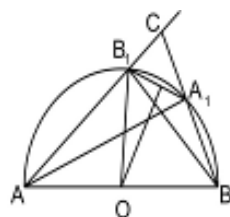
128. Bu hipotenuza çəkilmiş hündür-lüyün oturacağıdır. Düzbucaqlı ABC üçbucağının hipotenuzu üzərindəki hər bir M nöqtəsi üçün $MK^2 + MQ^2 = QK^2 = MC^2$ (Şəkil 131).

MC-in uzunluğu ən kiçik, yəni hündür-lük, olduqda axtarılan minimum alınır.

129. Fərz edək ki, A_1 və B_1 verilmiş nöqtələrdir (Şəkil 132). Bu nöqtələr üçbucağın oturacağı diametr olmaqla qurulmuş çevrə üzərindədir. Çevrənin mərkəzi isə (bununla birlikdə üçbucağın AB oturacağı) A_1B_1 parçasının orta perpendikulyarı ilə verilmiş l düz xəttinin kəsişmə nöqtəsindədir. Beləliklə üçbucağın iki təpə nöqtəsi



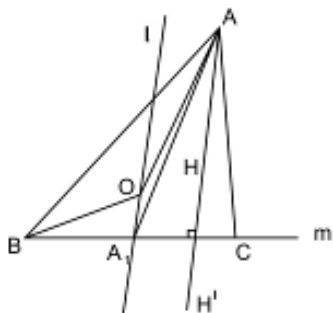
Şəkil 131.



Şəkil 132

(A və B) məlumdur. Üçüncü təpə nöqtəsini tapmaq üçün AB_1 və BA_1 düz xətlərini çəkib onların C kəsişmə nöqtəsini tapmaq lazımdır.

130. Fərz edək ki, A nöqtəsi (üçbucağın təpəsi), H – ortasentr, A_1 - qarşı tərəfin orta nöqtəsi verilir (Şəkil 133). Üçbucağın A təpəsindən çəkilmiş hündürlüyü AH düz xətti, onun xaricinə çəkilmiş çevrənin O mərkəzi isə A_1 nöqtəsindən keçən



Şəkil 133.

və AH düz xəttinə paralel olan l düz xətti üzərindədir. Üçbucağın BC tərəfi l düz xəttinə perpendikulyar olan və A_1 nöqtəsindən keçən m düz xətti üzərindədir. Onu da qeyd edək ki, ABC üçbucağının BC tərəfinə nəzərən H ortasentrinə simmetrik H' nöqtəsi bu üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrə üzərindədir (Bu hökmü əsaslandırmaq lazımdır).

Bütün deyilənlərdən alınır ki, üçbucağın qurulmasını belə yerinə yetirmək olar: 1) AH, l və m düz xətlərini qururuq; 2) AH' parçasının orta perpendikulyarı və l düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi kimi xaricə çəkilmiş çevrənin O mərkəzini tapırıq. 3) Mərkəzi O nöqtəsində, radiusu AO olan çevrə qururuq. Bu çevrənin m düz xətti ilə kəsişdiyi B və C nöqtələri ABC üçbucağının qalan iki təpə nöqtələridir.

131. Düzgün eyni adlı çoxbucaqlıdan parket yığmağın mümkün olması üçün onun daxili bucağının bir neçə dəfə təkrarı nəticəsində tam bucaq, yəni 360^0 alınmalıdır. Düzgün n bucaqlının hər bir daxili bucağı $\frac{180^0(n-2)}{n}$ olduğundan

$360 : \frac{180(n-2)}{n}$ natural ədəd olmalıdır. Bu şərtəndən istifadə

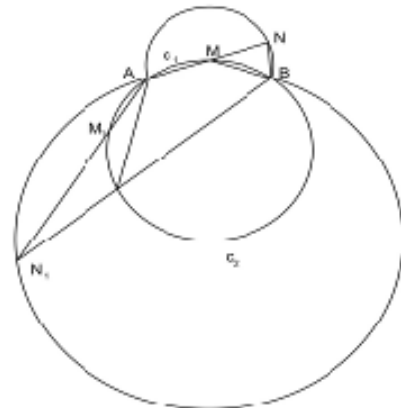
edərək n -in hansı qiymətlər ala biləcəyini təyin edək.

$$\frac{360n}{180(n-2)} = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2} = 2 + k, \quad \text{burada} \quad k = \frac{4}{n-2},$$

$k(n-2)=4$, $n=\frac{4}{k}+2$. $0 < k < 4$ olduğundan, həm də k tam

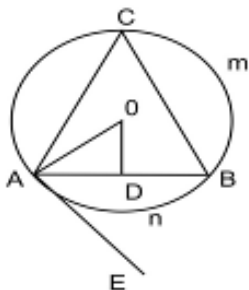
ədəddir, odur ki, n -in tam olması üçün k yalnız 4 ədədinin bölənləri (1; 2; 4) ola bilər. Bu da n üçün 6; 4; 3 qiymətlərini verir. Beləliklə, tələb olunan çoxbucaqlı yalnız düzgün üçbucaq, kvadrat və düzgün altıbucaqlı ola bilər. Göstərək ki, bu həmdə kafidir, yəni həqiqətən göstərilən çoxbucaqlı növlərindən parket yığmaq olar. Bir-birindən eyni məsafədə yerləşən paralel düz xətlər sistemini belə paralel düz xətlər sistemi ilə düz bucaq altında kəsəndə kvadratlardan parket yığımı alınır. Biri-birindən eyni məsafədə yerləşən paralel düz xətlər sistemini belə düz xətlər sistemi ilə 60^0 -lik bucaq altında kəsəndə alınan eyni rombların kiçik diaqonalını çəkməklə üçbucaqlardan ibarət parket alırıq. Üçbucaqlardan ibarət parketdən müvafiq şəkildə altı üçbucağı birləşdirməklə altıbucaqlılardan ibarət parket alırıq.

132. AB vətəri çevrəni iki c_1 və c_2 qövsələrinə bölür (Şəkil 134). c_1 qövsü üzərində götürülmüş M nöqtəsi üçün N nöqtələrinin həndəsi yeri, ucları A , B nöqtələrində olan AB vətərindən c_1 -in yerləşdiyi tərəfdəki digər çevrə qövsü olacaqdır. Bu qövsün daxilinə çəkilmiş AB vətərinin uclarına söykənmiş bucaq c_1 qövsünün daxilinə çəkilmiş analoji bucaqdan iki dəfə kiçikdir. c_2 qövsü üzərində götürülmüş M_1 nöqtəsi üçün axtarılan nöqtələrin həndəsi yeri ucları A , B nöqtələrində olan AB vətərindən c_2 -in yerləşdiyi tərəfdəki digər çevrə qövsüdür. Bu qövsün daxilinə çəkilmiş AB vətərinin uclarına söykənən bucaq c_2 qövsünün daxilinə çəkilmiş analoji bucaqdan iki dəfə kiçikdir.



Şəkil 134.

133. Analiz. Fərz edək ki, məsələ həll olunmuşdur; tutaq ki, AmB seqmentində α bucağı yerləşir, yəni bu seqment daxilinə çəkilmiş hər hansı ACB bucağı α -ya bərabərdir (Şəkil 135). Çevrəyə A nöqtəsində toxunan yardımçı AE düz xəttini çəkək. Onda toxunan ilə vətərin əmələ gətirdiyi BAE bucağı daxilə çəkilmiş ACB bucağına bərabər olacaqdır, çünki həmin bucaqların hər biri AnB qövsünün yarısı ilə ölçülür. İndi çevrənin mərkəzinin (O nöqtəsi), AB düz xəttinin ortasından qaldırılmış



Şəkil 135

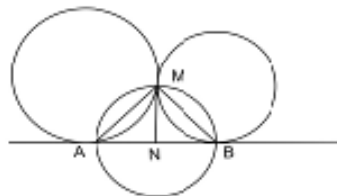
DO perpendikulyarı və eyni zamanda AE toxunanına toxunma nöqtəsində qaldırılmış AO perpendikulyarı üzərində olduğuna diqqət edək. Buradan qurmanın üsulu alınır.

Qurma. AB parçasının ucunda α bucağına bərabər BAE bucağını quraq; AB -in ortasından DO perpendikulyarını çəkib, A nöqtəsindən AE düz xəttinə perpendikulyar qaldıraq. Bu iki perpendikulyarın kəsişdiyi O nöqtəsini mərkəz götürüb, AO radiusu ilə çevrə çəkək.

İsbatı: AmB seqmenti daxilinə çəkilmiş hər hansı bucaq AnB qövsünün yarısı ilə və $BAE = \alpha$ bucağı da həmin qövsün yarısı ilə ölçüldüyünə görə, AmB tələb olunan seqmentdir.

Qeyd edək ki, 135-ci şəkildə seqment, AB parçasından yuxarıda qurulmuşdur. Bu seqment AB parçasının o biri tərəfində də qurula bilər. Deməli, verilmiş AB parçasının verilən α bucağı altında göründüyü nöqtələrin həndəsi yeri iki seqment qövsündən əmələ gəlir, bunlardan hər birində α bucağı yerləşir və biri AB parçasının bir tərəfində, o biri isə həmin parçanın digər tərəfində olur. Bu məsələnin 132 ilə əlaqəsinə də diqqət vermək lazımdır.

134. M nöqtəsini çevrələrin düz xətlə toxunma nöqtələri A və B ilə birləşdirək və çevrələrin MN ortaq toxunanını çəkək (Şəkil 136), burada N ilə MN və AB düz xətlərinin kəsişmə nöqtələri göstərilmişdir.



Şəkil 136

AMB üçbucağında AN, NM və NB parçaları, eyni bir N nöqtəsindən çevrələrə çəkilmiş toxunanlar kimi, bərabər olduğundan N nöqtəsi AMB üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. Beləliklə məsələnin şərtini ödəyən ixtiyari iki çevrə üçün M nöqtəsi radiusu NM və mərkəzi N olan çevrə üzərində yerləşir. Asanlıqla isbat etmək olar ki, bu hökmün tərsi də doğrudur, belə ki, radiusu $\frac{1}{2}AB$ və mərkəzi N nöqtəsində olan

çevrənin A, B-dən fərqli ixtiyari M nöqtəsi, düz xəttə uyğun olaraq A və B nöqtələrində toxunan hər hansı iki çevrənin toxunma nöqtəsidir.

Beləliklə, axtarılan həndəsi yer radiusu $\frac{1}{2}AB$ və mərkəzi AB parçasının N orta nöqtəsində olan, A, B nöqtələri müstəsna olmaqla, çevrədir.

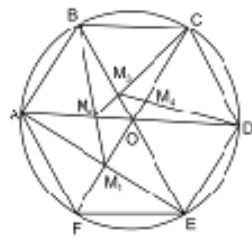
135. Fərz edək ki, ABCDEF verilmiş altıbucaqlı və O dairənin mərkəzidir (Şəkil 137). AD, BE, CF və AE çəkək. M_1 nöqtəsi OF radiusunu yarıya bölür. Bu aşkardır. BM_1 çəkək. BM_1C və M_2M_1O üçbucaqlarının oxşarlığından alınır ki, M_2 nöqtəsi OA radiusunu 1:2 nisbətində bölür.

Beləliklə $OM_2 = \frac{1}{3}R$. İndi CM_2 çəkək.

Alınmış M_3 nöqtəsi elədir ki, $OM_3 = \frac{1}{4}R$.

Bu CM_2D və M_3M_2O üçbucaqlarının oxşarlığından alınır. M_3 və D nöqtələrini

birləşdirib elə M_4 nöqtəsi alırıq ki, $OM_4 = \frac{1}{5}R$ və s.



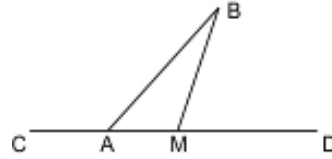
Şəkil 137.

136. a) Verilmiş A və B nöqtələri verilmiş CD düz xətti üzərindədirsə, onda AB parçası üzərindəki ixtiyari M nöqtəsi tələb edilən nöqtədir.

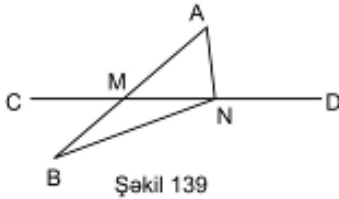
b) A nöqtəsi CD düz xətti üzərində, B nöqtəsi isə bu düz xəttin xaricində olarsa (Şəkil 138) onda A axtarılan nöqtədir.

Doğrudan da, CD düz xəttinin A-dan fərqli ixtiyari M nöqtəsi üçün $AM+MB>AB$ bərabərsizliyi ödənilir.

c) A və B nöqtələri CD düz xəttindən müxtəlif tərəflərdədirsə (Şəkil 139) onda AB və CD düz xətlərinin M kəsişmə nöqtəsi axtarılındır. Doğrudan da, CD düz xəttinin ixtiyari başqa N nöqtəsi üçün $AN+NB>AB=AM+MB$.

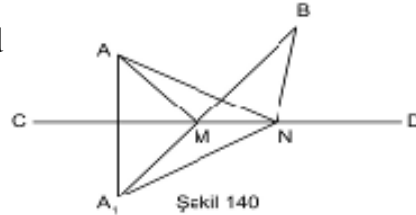


Şəkil 138.



Şəkil 139

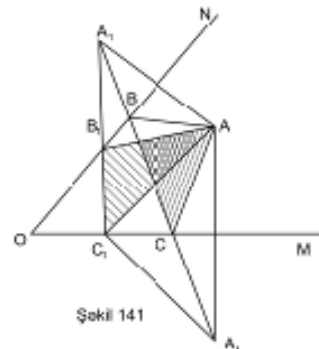
d) A
və
B
nöq



Şəkil 140

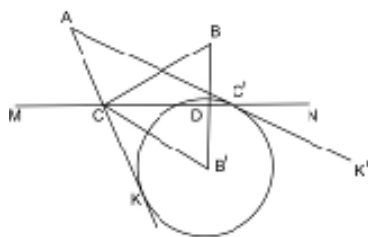
tələri CD düz xəttindən eyni tərəfdədirsə (Şəkil 140), onda CD düz xəttinə nəzərən A nöqtəsilə simmetrik A_1 nöqtəsini qurub, A_1B və CD düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsi kimi axtarılan M nöqtəsini tapırıq. Aşkardır ki, CD düz xəttinin ixtiyari başqa N nöqtəsi üçün $NA+NB=NA_1+NB>A_1B=A_1M+MB=MA+MB$ münasibətləri doğrudur.

137. Fərz edək ki, AB_1C_1 üçbucağının B_1 , C_1 təpələri uyğun olaraq MON bucağının ON, OM tərəfləri üzərində, üçüncüsü isə verilmiş A nöqtəsindədir (Şəkil 141). A nöqtəsi ilə uyğun olaraq ON və OM-ə nəzərən simmetrik A_1 və A_2 nöqtələrini quraq və A_1 ilə B_1 -i sonra isə A_2 və C_1 -i birləşdirək. AB_1C_1 üçbucağının perimetri $A_1B_1C_1A_2$ sınıq xəttinin perimetrinə bərabərdir, bu isə A_1A_2 parçasından böyükdür. Buradan alınır ki, baxılan növ üçbucaqlardan perimetri ən kiçik olanı təpələri A, B və C nöqtələrində olandır, burada B və C nöqtələri A_1A_2 düz xəttinin uyğun olaraq ON və OM düz xətləri ilə kəsişmə nöqtələridir.



Şəkil 141

138. Analiz. Fərz edək ki, MN düz xətti üzərində tələb edilən C nöqtəsi qurulmuşdur. Bu nöqtəni A və B ilə birləşdirək (Şəkil 142). Onda $\angle ACM = 2\angle BCN$ olar. AC düz xəttini C nöqtələrindən öz istiqamətində uzadaq və bu uzantı üzərində ixtiyari K nöqtəsi qeyd



Şəkil 142.

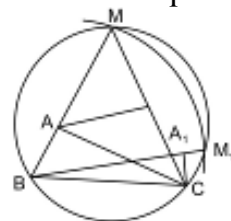
edək, sonra MN düz xəttinə nəzərən B nöqtəsinə simmetrik olan B' nöqtəsini quraq və B' ilə C nöqtəsini birləşdirək. Onda $\angle BCN = \angle B'CN$ (oxa nəzərən simmetrik olan iki düz xəttin kəsişmə nöqtəsi OX üzərindədir və OX, həmin düz xətlərin arasındakı bucağın tənbölənidir) və $\angle ACM = \angle NCK$ olar. Verilən şərti burada nəzərə alsaq $\angle KCN = 2\angle BCN$. Deməli, $B'C$ düz xətti KCN bucağının tənbölənidir. İndi mərkəzi B' nöqtəsində və radiusu $B'D$ olan çəvrə quraq (D ilə BB' ilə MN düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi işarə edilmişdir). Onda MN və AK düz xətləri bu çəvrənin toxunanları olacaqdır, C nöqtəsi isə AK toxunanı ilə MN düz xəttinin kəsişmə nöqtəsidir.

Qurma: Əvvəlcə MN düz xəttinə nəzərən B nöqtəsinə simmetrik olan B' nöqtəsini, sonra (B' , $B'D$) çəvrəsini quraq. Bundan sonra isə A nöqtəsindən qurduğumuz çəvrəyə AK toxunanı çəkək. AK toxunanı ilə MN düz xəttinin C kəsişmə nöqtəsi tələb olunan nöqtədir.

A nöqtəsindən (B' , $B'D$) çəvrəsinə AK və AK' kimi iki toxunan çəkmək mümkün olduğundan məsələnin həmişə iki həlli (C və C' nöqtələri) vardır.

139. ABC axtarılan üçbucaq olsun (Şəkil 143). Yan tərəflərin cəmini nəzərə almaq üçün BA-nı uzadaq və $BM=m$ ayıraq. MC parçasını çəkərək köməkçi BMC üçbucağını alırıq. Bu üçbucağı qurduqdan sonra, axtarılan ABC üçbucağını asanlıqla qura bilərik. BMC üçbucağını qurmaq, M nöqtəsinin tapılmasına gətirilir. AMC üçbucağı bərabəryanlıdır ($AM=AC$), deməli

$\angle M = \frac{1}{2} \angle BAC$; M nöqtəsinin aşağıdakı iki şərti ödəməsinin lazım gəldiyini görürük: 1) bu nöqtə B-dən m məsafədədir, 2) verilmiş BC parçası bu nöqtədən $\frac{\alpha}{2}$ -yə bərabər bucaq altında görünür (Məsələ 133). İlkci şərti ataraq, mərkəzi B nöqtəsində olan və m radiusu ilə çəkilən çevrə üzərində sonsuz sayda M nöqtələri alırıq. Birinci şərti ataraq, BC üzərində qurulmuş və $\frac{\alpha}{2}$ -yə bərabər olan bucağın yerləşdiyi seqmentin qövsü üzərində də sonsuz sayda M nöqtələri alırıq. Beləliklə, M nöqtəsinin tapılması iki həndəsi yerin qurulmasından ibarət olur və bunların hər birini qurmaq mümkündür. Bu həndəsi yerlərin ortaq nöqtələri olmazsa, məsələ də mümkün olmaz; bu həndəsi yerlərin toxunma və ya kəsişməsindən asılı olaraq məsələnin bir və ya iki həlli ola bilər. Şəkildə məsələnin şərtlərini ödəyən iki ABC və A_1BC üçbucağı alınır.



Şəkil 143.

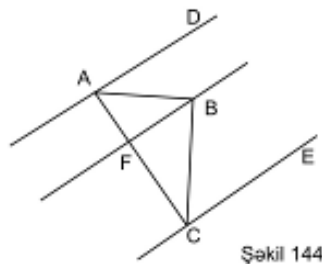
Bəzən məsələ, nöqtələrin təyini deyil, bir neçə şərti ödəyən düz xəttin tapılmasından ibarət olur. Şərtlərdən birini atsaq, sonsuz sayda düz xətlər alırıq; onda bu düz xətlərin bir xətti təyin etmələri halı da ola bilər (məsələn, bu düz xətlərin hamısı bir çevrənin toxunanları olar).

Başqa bir şərti atıb, əvvəlki atılan şərti nəzərə aldıqda, təkrar olaraq sonsuz sayda düz xətt alınır və bunlar ola bilsin ki, başqa bir xətti təyin edirlər. Mümkün olarsa, bu iki xətt qurulur, bundan sonra axtarılan xətt asanlıqla tapılır. Sonrakı məsələ bu baxımdan maraqlıdır.

140. Şərtlərdən yalnız birini, məsələn kəsənin O çevrəsi daxilindəki hissənin a -ya bərabər ola bilməsi şərtini götürsək, onda bu çevrənin mərkəzindən eyni məsafədə olan sonsuz sayda kəsənlər alırıq (çünki bərabər vətərlər mərkəzdən eyni uzaqlıqda olur). Ona görə, O çevrəsi daxilində a -ya bərabər bir vətər

qurub, sonra bu vətərlə mərkəz arasındakı məsafəyə bərabər radiusla O çevrəsi ilə konsentrik çevrə çəksək, bütün kəsənlər, bu köməkçi çevrəyə toxunmalıdır; eyni qayda ilə, nəzərdə yalnız ikinci şərti tutsaq, axtarılan kəsənin O_1 ilə konsentrik olan ikinci köməkçi çevrəyə toxunduğunu görürük. Deməli məsələ hər iki çevrəyə ortaq toxunanın qurulmasından ibarətdir.

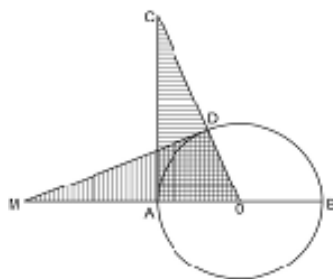
141. a) Fərz edək ki, verilmiş A, B, C nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşmir (Şəkil 144). Belə hesab edək ki, məsələ həll edilmişdir və AD, BF, EC tələb olunan düz xətlərdir. BF düz xətti AD və CE düz xətləri arasındakı məsafəni yarıya bölməli olduğundan o, AC parçasının F orta nöqtəsindən keçməlidir. Buradan alınır ki, düz xətlərdən birini ABC üçbucağının BF medianı üzrə çəkmək, digər ikisini isə A və C nöqtələrindən ona paralel keçirmək lazımdır. Bu halda məsələnin üç həlli (üç median çəkmək olar) vardır.



Şəkil 144

b) Nöqtələr bir düz xətt üzərindədirsə və onlardan ikisi üçüncüyə nəzərən simmetrikdirsə, onda bu nöqtələrdən keçən ixtiyari paralel düz xətlər tələb olunandır. Qonşu nöqtələr arasındakı məsafələr bərabər deyildirsə, onda məsələnin həlli yoxdur.

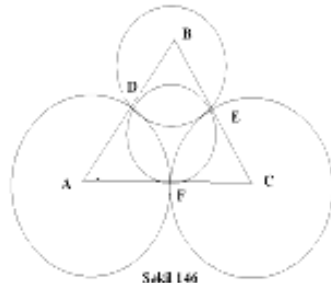
142. Fərz edək ki, AB çevrənin diametri O isə onun mərkəzidir (Şəkil 145). $AC \perp AB$ çəkək və $AC=AB$ ayıraq. C və O nöqtələrini birləşdirək. CO-un çevrə ilə kəsişmə nöqtəsi D olarsa, onda D nöqtəsində çevrəyə toxunan MD düz xətti AB diametrinin uzantısını axtarılan M nöqtəsində kəsəcəkdir. Doğrudan da $OA=OD$ və $\angle AOD$ ortaq olduğundan $\triangle OCA = \triangle OMD$. Buradan isə $OM=OC=AB$ alınır.



Şəkil 145.

143. Axtarılan çevrələr D, E, F toxunma nöqtələri ilə üçbucağın tərəflərini $AD=AF$, $BD=BE$, $CE=CF$ parçalarını

ayırmalıdır (Şəkil 146). Bir nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunanlar bərabər olmasından belə nəticəyə gəlirik ki, D, E, F nöqtələri üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin bu üçbucağın tərəflərinə toxunma nöqtələridir. Buradan aydındır ki, ABC üçbucağının daxilinə çevrə çəkməklə məsələ asanlıqla həll edilir. Göründüyü kimi tələb olunan çevrələri qurmaq üçün onların radiuslarını bilmək lazımdır. Mərkəzləri üçbucağın A, B və C təpələrində olan çevrələrin radiuslarını uyğun olaraq x, y və z ilə işarə edək. Onda şəkilə əsasən



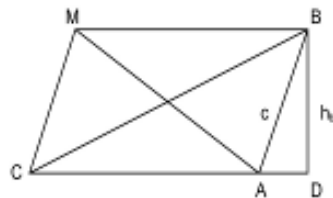
$x + y = c$, $y + z = a$, $x + z = b$ olar (üçbucaq verildiyindən onun a , b, c tərəfləri məlum hesab edilir). Bu tənliklərdən isə $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{a+c-b}{2}$ və $z = \frac{a+b-c}{2}$ alırıq.

Bunlar isə qurulması tələb edilən çevrələrin radiuslarıdır. Mərkəzləri və radiusları məlum çevrələri qurmaqla məsələni həll etmiş oluruq.

Üçbucağın tərəfləri arasındakı asılılığa görə $b + c > a$; $a + c > b$; $a + b > c$ olduğu üçün x, y və z parçalarının qurulması həmişə mümkündür. Məsələnin yalnız bir həlli vardır.

144. $c = AB$ hipotenuzuna, $h_b = BD$

katetinə görə düzbucaqlı ABD üçbucağını quraq (Şəkil 147). $BM \parallel AD$ çəkək və radiusu $AM = 2m_a$ və mərkəzi A nöqtəsində olan çevrə qövsü ilə BM parçasını ayıraq. Tapılmış M nöqtəsindən $CM \parallel AB$ çəkək və CM ilə AD



Şəkil 147

düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi C olduğunu qeyd edək. C nöqtəsi axtarılan ABC üçbucağının üçüncü təpə nöqtəsi olacaqdır. $2m_a = h_b$ və ya $2m_a = c$ olarsa həll yeganədir. $2m_a > h_b$, lakin $2m_a \neq c$ isə məsələnin iki həlli vardır. $2m_a < h_b$ və ya $h_b \leq c$ isə onda məsələnin həlli yoxdur.

145. Məsələnin həlli “İtibucaqlı üçbucağın hündürlüklərinin oturacaqlarını birləşdirən düz xətlər, tənbölənləri verilən üçbucağın hündürlükləri olan üçbucaq əmələ gətirir” teoreminə əsaslanır. Odur ki, əvvəlcə bu teoremi isbat etmək lazımdır.

Fərz edək ki, AD, BE və CF itibucaqlı ABC üçbucağının hündürlükləridir (Şəkil 148). İsbat etmək lazımdır ki, AD, BE və CF parçaları DEF üçbucağının tənbölənləridir. Məsələn, isbat edək ki, $\angle EDA = \angle ADF$. $\angle AFC = \angle ADC = 90^\circ$ olduğundan

AFDC dördbucaqlısının xaricinə çevrə çəkmək olar. Eyni bir AF qövsünə

söykəndiyindən $\angle ADF = \angle ACF$.

Eyni qayda ilə isbat edirik ki,

$\angle EDA = \angle EBA$. Lakin düzbucaqlı

ABE və ACF üçbucaqlarından alırıq

ki, $\angle ABE = 90^\circ - \angle BAC = \angle ACF$.

Beləliklə $\angle EDA = \angle ADF$. Deməli

AD parçası EDF bucağının tənbölə-

nidir. Analoji olaraq digər iki bucağın tənbölənləri müəyyən

edilir. Məsələnin həllinə gəldikdə demək lazımdı, təpələri veril-

miş nöqtələrdə olan üçbucağın daxili bucaqlarının tənbölənlərini

çəkək. Bu üçbucağın hər bir təpəsindən bu bucaqların tənbö-

lənələrinə perpendikulyar düz xətlər çəkək. Bu qayda ilə qurulmuş

düz xətlərin əmələ gətirdiyi üçbucaq isbat etdiyimiz teoremə görə

tələb olunan üçbucaqdır.

146. Kiçik çevrənin OA radiusunun uzantısı üzərində

AB=OA parçasını ayırıq. (Şəkil 149).

AB parçası diametr olmaqla çevrə

çəkək və bu çevrənin böyük çevrə ilə

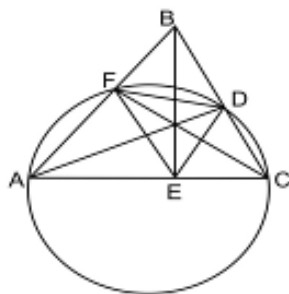
kəsişmə nöqtəsini C ilə işarə edək. CA

axtarılan kəsəndir. Doğrudan da O_1CA

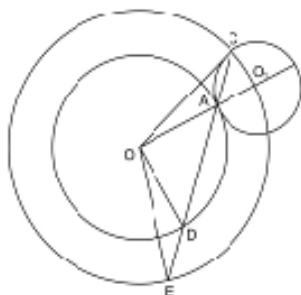
və OAD üçbucaqlarının oxşarlığından

görünür ki, $AC = \frac{1}{2}AD$ və bərabər

OCA, OED üçbucaqlarından $AC=ED$



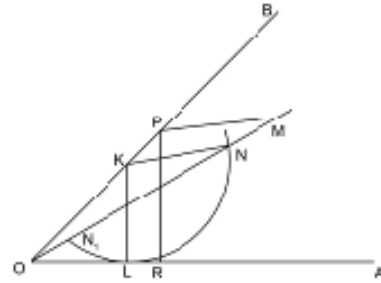
Şəkil 148.



Şəkil 149.

alınır. Beləliklə, $CE=CA+AD+DE=AC+2AC+CA=4CA$,
 $AD=2CA$, onda $CE=2AD$. Böyük çevrənin radiusu kiçik çevrənin
diametrindən böyük olduqda məsələnin həlli yoxdur.

147. Verilmiş M nöqtəsindən
və verilmiş AOB bucağının O
təpəsindən keçən OM düz xəttini
çəkək (Şəkil 150). Bucağın OB
tərəfi üzərində ixtiyari K nöqtəsi
qeyd edib və ondan OA-ya KL
perpendikulyarı endirib, sonra
mərkəzi K nöqtəsində və radiusu
KL olan çevrə qövsü ilə OM düz

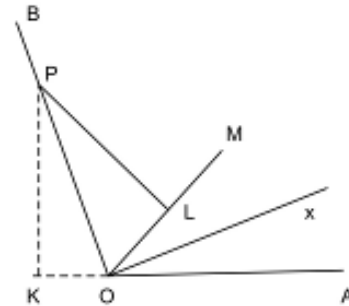


Şəkil 150.

xəttini N nöqtəsində kəsək. İndi M nöqtəsindən bucağın OB
tərəfini P nöqtəsində kəsən $MP \parallel NK$ çəksək onda P axtarılan
nöqtə olacaqdır. Doğrudan da, $PR \perp OA$ çəkildikdə görürük ki,

$$\frac{OP}{OK} = \frac{PR}{KL} = \frac{PM}{KN}, \text{ buradan isə}$$

$KL=KN$ olduğundan $PR=PM$
alırıq. Həmin tərəf üzərində
məsələnin şərtini ödəyən daha bir
nöqtə vardır. Bu M nöqtəsindən
 KN_1 -ə paralel çəkilmiş düz xəttin
OB ilə kəsişmə nöqtəsidir. Bucaq
düz və ya kor olduqda P nöqtəsi
belə tapılır: AOB bucağının O
təpə nöqtəsi ilə M nöqtəsi OM



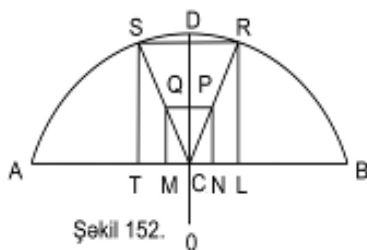
Şəkil 151.

parçası ilə birləşdirilir və OM parçasının L orta nöqtəsindən
 $PL \perp OM$ çəkirik. (Şəkil 151). OB və PL düz xətlərinin P kəsişmə
nöqtəsi axtarılan nöqtədir. Düz bucaq halında belə nöqtə OB
tərəfi üzərində yeganədir. Bucaq kor olduqda OB tərəfi üzərində
belə nöqtə ya bir dənədir yaxud yoxdur. Aşkardır ki, bu sonuncu
 $OX \perp OB$ olmaqla M nöqtəsi AOX bucağının daxilində və ya
onun sərhədlərində olduqda mümkündür.

Qeyd. P nöqtəsindən OA şüasına qədər məsafə OA düz xəttinə
perpendikulyar PK parçasının uzunluğu deyil OP parçasının

uzunluğudur. PK-ın uzunluğu OA şüasına qədər məsafə deyil. OA düz xəttinə qədər məsafədir.

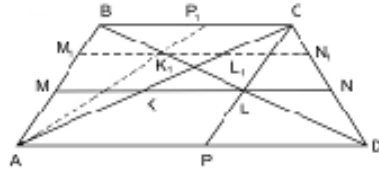
148. Seqmentin oturacağı olan AB vətərinə perpendikulyar OD radiusunu çəkək (Şəkil 152) OD və AB-in kəsişmə nöqtəsi C olsun. MN tərəfi AB-in üzərində olan OD-yə nəzərən simmetrik ixtiyari MNPQ kvadratını quraq. Seqmentin qövsünü uyğun olaraq S və R nöqtələrində kəsən CQ və CP düx xətlərini çəkək. S



Şəkil 152.

və R nöqtələrindən AB-yə perpendikulyar endirək və onların oturacaqlarını T, L ilə işarə edək. S, R, L və T nöqtələri axtarılan kvadratın təpələri olacaqdır. Aşağıdakı üç cüt oxşar üçbucaqlara baxmaqla qurmanın doğruluğunu asanlıqla göstərmək olar: CST və CQM; CRL və CPN; CSR və CQP. Seqmentin qövsü: $\alpha \leq 270^0$ olduqda məsələnin yeganə həlli vardır. $\alpha > 270^0$ olan halda məsələnin həlli yoxdur.

149. Fərz edək ki, ABCD trapesiyası AD-yə paralel MN parçası ilə $MK=KL=LN$ olmaqla kəsilmişdir (Şəkil 153). Byöük oturacağı P nöqtəsində kəsən CL düz xəttini çəkək. $KN=2LN$ olduğundan $AD=2PD$. Beləliklə P nöqtəsi AD parçasının ortasıdır. Buradan alınır ki, axtarılan parçanı qurmaq üçün diaqonalla bir oturacağın ortasını digər oturacağın sonu ilə birləşdirən düz xəttin kəsişmə nöqtəsindən trapesiyanın oturacaqlarına paralel düz xətt çəkmək kifayətdir. Çəkilən bu düz xətlə trapesiyanın yan tərəflərinin kəsişmə nöqtələrindən başlayaraq axtarılan bərabər parçalar müəyyən edilir. Qurmanın doğruluğunun isbatı əvvəl ACP və PCD, sonra isə ABC və DCB üçbucaqlarına baxmaqla asanlıqla alınır. Məsələnin iki həlli vardır. İkinci həll şəkildə qırıq xətlə göstərilmişdir.



Şəkil 153.

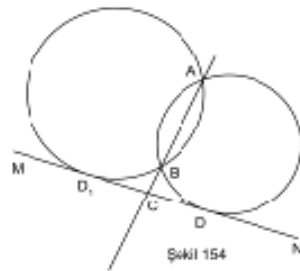
150. A və B verilmiş nöqtələr, MN isə verilmiş düz xətt olsun.

a) A və B nöqtələri MN düz xəttindən müxtəlif tərəflərdə və ya onun üzərində olarsa, onda məsələnin həlli yoxdur.

b) $AB \parallel MN$ olarsa onda həll yeganədir. Bu halda axtarılan çevrə AB parçasının ortasından MN-ə çəkilmiş perpendikulyarın oturacağından keçir.

c) A və B nöqtələrinin MN düz xəttindən bir tərəfdə yerləşməsi halına baxmaq üçün əvvəlcə verilmiş nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunan və kəsən haqqındakı teoremi xatırlamaq lazımdır.

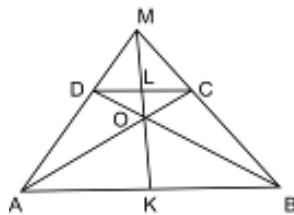
A və B nöqtələri MN düz MN düz xəttindən bir tərəfdə yerləşirsə və AB düz xətti MN-i hər hansı C nöqtəsində kəsirsə (Şəkil 154) onda axtarılan çevrə MN düz xəttinin elə D nöqtəsindən keçir ki, CD parçası AC və BC arasında orta mütənasib kəmiyyət olur (xatırladılan teorem). Bu halda məsələnin iki həlli vardır.



Şəkil 154

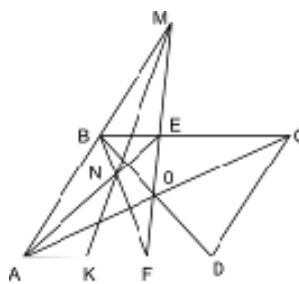
d) A və ya B nöqtələrindən biri, lakin hər ikisi eyni zamanda yox, MN üzərində yerləşərlərsə, onda həll yeganədir.

151. Verilmiş ABCD trapesiyasının AD və BC yan tərəflərini M nöqtəsində kəsişənə qədər uzadaq. (Şəkil 155). Bu nöqtədən və diaqonalların kəsişmə nöqtəsindən keçən düz xətt trapesiyanın oturacaqlarını L və K nöqtələrində kəsir. Bu düz xətt trapesiyanı iki müadil hissəyə bölür. Doğrudan da MK düz xətti L və K nöqtələri ilə trapesiyanın oturacaqlarını bərabər parçalara ayırır. Buradan da ADLK və KLCB trapesiyalarının müadilliyi alınır. K və L nöqtələrinin trapesiyanın oturacaqlarının ortaları olduğunu isbat etmək üçün AMB üçbucağının M təpəsindən medianın çəkək. Bu median DC oturacağını da yarıya bölür. Məlumdur ki, trapesiyanın oturacaqlarının orta nöqtələrini birləşdirən düz xətt, diaqonalların kəsişmə nöqtəsindən keçir (Bunu isbat etmək lazımdır). Beləliklə, çəkilmiş median MK düz xəttinin üzərinə düşür, L və K nöqtələri isə trapesiyanın oturacaqlarını yarıya bölür.



Şəkil 155.

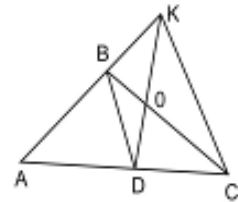
152. Verilmiş ABCD paraleloqramının diaqonalları O kəsişmə nöqtəsindən onun tərəflərinə paralel olmayan ixtiyari MF düz xətti keçirək (Şəkil 156). Bu düz xətt paraleloqramı iki müadil ABEF və FECD trapesiyalarına bölür, burada E və F ilə MF düz xəttinin paraleloqramının qarşı tərəfləri ilə kəsişmə nöqtələri işarə edilmişdir. Paraleloqramın AB tərəfinin uzantısı MF düz xətti ilə M nöqtəsində kəşir. M, N nöqtələrindən keçən düz xətt ABEF trapesiyasının diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindən keçir. Bu düz xətt ABEF trapesiyasını iki müadil dördbucaqlıya (məsələn 151-ə baxmalı) və paraleloqramı, sahələri nisbəti 1:3 olan, iki hissəyə ayırır.



Şəkil 156.

153. Verilmiş ABC üçbucağının AC oturacağı üzərində axtarılan üçbucağın verilən oturacağına bərabər olan AD parçasını ayıraq (Şəkil 157). D nöqtəsini B ilə birləşdirək.

C nöqtəsindən BD -yə paralel düz xətt çəkək. Bu düz xəttin AB ilə kəsişmə nöqtəsi K olsun. Bu nöqtə axtarılan üçbucağın üçüncü təpəsidir. İsbat $S(KBD)=S(BCD)$ olmasından alınır. Başqa sözlə $S(KBD)=S(BCD)$ olduğundan $S(ABC)=S(AKD)$.



Şəkil 157

154. a) Verilmiş A və B nöqtələrindən keçən düz xətt verilmiş CD düz xəttinə paralel və perpendikulyar deyildirsə, onda CD düz xəttinin AB parçasının orta perpendikulyarı ilə kəsişmə nöqtəsi üçün $|AM-MB|$ ifadəsinin sıfıra bərabər ən kiçik, AB və CD düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsi üçün isə AB parçasının uzunluğuna bərabər ən böyük qiyməti vardır.

b) AB düz xətti CD düz xəttinə paraleldirsə onda $|MA-MB|$ -in ən kiçik qiymət aldığı M nöqtəsi AB parçasının ortasından CD -yə çəkilmiş perpendikulyarın oturacağıdır. Bu minimum sıfıra bərabərdir.

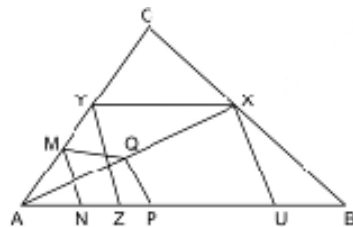
CD düz xətti üzərində $|AM-MB|$ -in ən böyük qiymət aldığı belə nöqtə yoxdur.

c) $AB \perp CD$ olarsa onda $|AM-MB|$ -in ən böyük qiyməti AB ilə CD -in kəsişmə nöqtəsi üçün müəyyən edilir. Bu qiymət AB parçasının uzunluğuna bərabərdir. CD düz xətti üzərində $|AM-BM|$ -in ən kiçik qiymət aldığı belə M nöqtəsi isə yoxdur.

155. Əvvəlcə, rombun təpələrindən birinin BC tərəfi üzərində olması tələbini ataq. Bu halda məsələnin qalan şərtlərini ödəyən sonsuz sayda romb qurmaq olar.

Bunlardan birini quraq (Şəkil 158).

AC tərəfinin üzərində hər hansı bir M nöqtəsi götürək. Təpəsi bu nöqtədə olmaqla, verilən bucağa bərabər bucaq quraq; bu bucağın bir tərəfi AB oturacağına paralel olsun, o biri tərəfi isə AB oturacağını bir N



Şəkil 158.

nöqtəsində kəssin. AB tərəfi üzərində N nöqtəsindən başlayaraq MN-ə bərabər AP parçasını ayırıb, tərəfləri MN və NP olan romb quraq. Fərz edək ki, Q nöqtəsi rombun dördüncü təpəsidir. Sonra A təpəsini oxşarlıq mərkəzi götürüb, MNPQ rombuna oxşar olan bir romb qururuq, bu halda oxşarlıq əmsalını elə seçirik ki, yeni rombun, MNPQ rombunun Q təpəsinə uyğun olan təpəsi BC tərəfinin üzərində olsun. Bunun üçün AQ düz xəttini, BC tərəfi ilə bir X nöqtəsində kəsişincəyə qədər uzadıırıq. Bu X nöqtəsi tələb edilən rombun təpələrindən biri olacaqdır. Bu nöqtədən MNPQ rombunun tərəflərinə paralel düz xətlər çəkərək, tələb edilən XYZU rombunu alırıq.

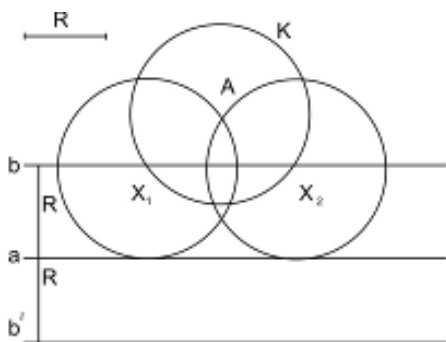
$$156. S(AQX) = \frac{1}{2} S(PQR) \text{ isə (Şəkil 159),}$$

$$\text{onda } QX \cdot AQ = \frac{1}{2} PQ \cdot QR \text{ və ya } \frac{QX}{QR} = \frac{PQ}{2AQ}$$



157. Axtarılan çevrə üç şərti ödəməlidir:

1) onun radiusu verilmiş R parçasına bərabər olmalıdır; 2) Verilmiş A nöqtəsindən keçməlidir; 3) Verilmiş a düz xəttinə toxunmalıdır (Şəkil 160). 3) şərtini ataq və 1), 2) şərtini ödəyən çevrələrin mərkəzlərinin həndəsi yerini tapaq. Belə çevrələrin mərkəzləri A nöqtəsindən R məsafədə olmalıdır və tərsinə A nöqtəsindən R məsafədə olan bütün nöqtələr belə çevrələrin



Şəkil 160

mərkəzləridir. Beləliklə axtarılan həndəsi yer mərkəzi A nöqtəsində və radiusu R olan çevrədir. 2) şərtini ataq və 1), 3) şərtlərini ödəyən çevrələrin mərkəzlərinin həndəsi yerini tapaq. Belə çevrələrin mərkəzləri a düz xəttindən R məsafədə olmalıdır və tərsinə düz xətdən R məsafədə olan hər bir nöqtə belə çevrənin

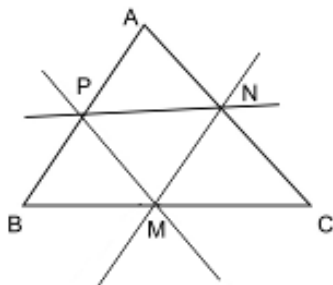
mərkəzidir. Beləliklə, axtarılan həndəsi yer a düz xəttinə paralel

olan və ondan R məsafədə yerləşən bir cüt b, b' düz xətləridir. Axtarılan çevrələrin X mərkəzləri şərtlərin üçünü də ödəməlidir və beləliklə tapılan hər iki həndəsi yerin üzərindədir. Bu həndəsi yerlərin ortaq nöqtəsi varsa, onda onların hər birini mərkəz götürməklə R radiuslu çevrələr çəkməklə, məsələnin şərtlərini ödəyən bütün çevrələri alırıq. 160-ci şəkildə K çevrəsi b düz xəttini X_1 və X_2 nöqtələrində kəsir və b' düz xətti ilə ortaq nöqtəsi yoxdur. Beləliklə, məsələnin iki həlli vardır. Lakin, başqa hallar da ola bilər. A nöqtəsinin a düz xəttindən məsafəsi $2R$ dən böyük olarsa, onda K çevrəsinin b, b' düz xətləri ilə ortaq nöqtəsi yoxdur; deməli məsələnin həlli də yoxdur. A nöqtəsinin a düz xəttindən məsafəsi $2R$ -ə bərabədirsə, onda K çevrəsi b, b' düz xətlərindən birinə toxunur, digəri ilə isə ortaq nöqtəsi yoxdur; bu halda məsələnin bir həlli vardır. A nöqtəsinin a düz xəttindən məsafəsi $2R$ -dən kiçikdirsə, lakin sıfırdan böyük isə, onda K çevrəsi b, b' düz xətlərindən birini kəsir, digəri ilə isə ortaq nöqtəsi yoxdur; bu halda məsələnin iki həlli vardır. A nöqtəsindən a düz xəttinə qədər məsafə sıfıra bərabədirsə, onda K çevrəsi b, b' düz xətlərinin hər ikisinə toxunur, onda məsələnin yenə iki həlli vardır. Beləliklə, məsələnin R -in qiymətindən, A və a -ın nisbi vəziyyətlərindən asılı olaraq 0, 1 və 2 həlli vardır.

158. Verilmiş nöqtələri A, B, C ilə işarə edək. Axtarılan çevrənin mərkəzi bu nöqtələrin üçündən də eyni məsafədə olmalıdır. A, B nöqtələrindən bərabər məsafədə olan nöqtələrin həndəsi yeri AB parçasının orta perpendikulyarıdır. Eyni şəkildə, A, C nöqtələrindən bərabər məsafədə olan nöqtələrin həndəsi yeri AC parçasının orta perpendikulyarıdır. A, B, C nöqtələrinin üçündən də eyni məsafədə olan nöqtələrin həndəsi yeri yalnız bu iki perpendikulyarın kəsişmə nöqtəsi ola bilər. A, B, C nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşmirlərsə, onda həmin perpendikulyarlar hər hansı nöqtədə kəsişir. Bu nöqtə ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. A, B, C nöqtələri bir düz xətt üzərində olduqda isə onda perpendikulyarlar bir-birinə

paraleldir və deməli ortaq nöqtələri yoxdur. Beləliklə, məsələnin ya bir həlli var yaxud heç bir həlli yoxdur.

159. Verilmiş nöqtələr A, B, C olsun (Şəkil 161). A, B nöqtələrindən eyni məsafədə olan düz xətt ya AB parçasının P orta nöqtəsindən keçir və ya AB düz xəttinə paraleldir. A, C nöqtələrindən eyni məsafədə olan düz xətt ya AC parçasının N orta nöqtəsindən keçir və ya AC düz xəttinə paraleldir. A, B, C



Şəkil 161

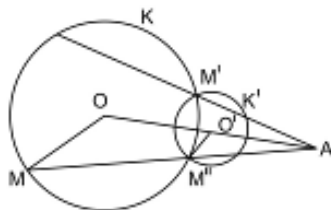
nöqtələrinin üçündən də eyni məsafədə olan düz xətt ya P və N nöqtələrindən keçir, bu PN düz xətti olacaqdır və ya P nöqtəsindən keçir və AC düz xəttinə paraleldir, bu PM düz xətti olacaqdır və ya N nöqtəsindən keçir və AB -yə paraleldir, bu NM düz xəttidir və ya AB və AC -yə paraleldir, A, B, C nöqtələri bir düz

xətt üzərində deyildirsə belə düz xətlər ola bilməz. Beləliklə, A, B, C nöqtələri bir düz xətt üzərində deyildirsə, onda axtarılan düz xətt yalnız ABC üçbucağının orta xətləridir. A, B, C nöqtələri bi düz xətt üzərindədirsə, onda PN, PM, NM düz xətləri bu düz xəttin üzərinə düşür və bundan əlavə bu düz xəttə paralel olan bütün düz xətlər A, B, C nöqtələrindən eyni məsafədədir. Beləliklə, birinci halda məsələnin üç, ikincidə isə sonsuz sayda həlli vardır.

160. A verilmiş nöqtə, K verilmiş dairə, O onun mərkəzi olsun (Şəkil 162). Fərz edək ki, məsələ həll edilmişdir və AM/M axtarılan kəsənlərdən biridir, M' nöqtəsi AM -in ortasıdır. O' nöqtəsi AO -ın ortası olsun. $O'M'$ düz xətti AOM üçbucağının orta

xəttidir, beləliklə $O'M' = \frac{1}{2}OM$,

başqa sözlə $O'M'$ parçası K dairəsinin radiusunun yarısına bərabərdir. Beləliklə, M' nöqtəsi üçün iki həndəsi yer müəyyən oldu: K çevrəsi və mərkəzi OA parçasının orta O' nöq-

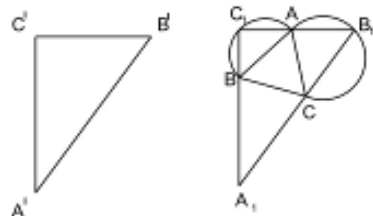


Şəkil 162

təsində və radiusu iki dəfə kiçik K' çevrəsi; bu M' nöqtəsini tapmağa imkan verir. Verilənlərin daxil olduğu və qurmanın aparıldığı 162 şəkilli üzərində analizi də aparmaq olar. Lakin, praktikada çox vaxt analizə ayrıca baxılır. Məsələnı həll etmək üçün hər hansı radiusla K dairəsi çəkilir, sonra bu dairənin radiusunun yarısına bərabər radiusla OA parçasının orta O' nöqtəsi mərkəz olmaqla K' çevrəsini çəkirik. Sonra A nöqtəsini K, K' çevrələrinin M' ortaq nöqtəsi ilə birləşdirib axtarılan kəsəni alırıq. Məsələnı araşdırmaq məqsədi ilə K dairəsinin radiusunu R , OA məsafəsini d ilə işarə edək. Onda K' dairəsinin radiusu $\frac{1}{2}R$ və OO' məsafəsi $\frac{1}{2}d$ olar. K, K' dairələrinin radiusları cəmi $\frac{3}{2}R$, fərqi isə $\frac{1}{2}R$ -dir. $\frac{1}{2}d > \frac{3}{2}R$ və ya $d > 3R$ olduqda K, K' çevrələrinin ortaq nöqtəsi yoxdur, beləliklə də məsələnin həlli yoxdur. $\frac{1}{2}d = \frac{3}{2}R$ və ya $d = 3R$ olduqda məsələnin bir həlli vardır. $\frac{1}{2}d < \frac{3}{2}R$ və ya $d < 3R$ olduqda məsələnin iki həlli

vardır. Mümkün hallar yalnız bunlardır, çünki $\frac{1}{2}d \leq \frac{1}{2}R$ ola bilməz, çünki bu halda $d \leq R$ olardı və A nöqtəsi məsələnin şərtinin əksinə olaraq K dairəsinin xaricində yerləşməzdi.

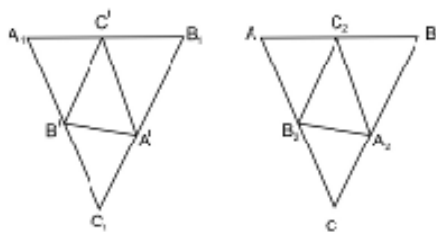
161. $ABC, A'B'C'$ verilmiş üçbucaqlar olsun (Şəkil 163). ABC üçbucağının xaricinə $A'B'C'$ üçbucağına bərabər olan $A_1B_1C_1$ üçbucağı çəkmək tələb olunur. Yalnız $A_1B_1C_1$ üçbucağının hansı tərəfi ABC üçbucağının hansı təpəsindən keçməsi göstərildikdə məsələ kifayət qədər müəyyən ola bilər. Fərz edək ki, $A'B'$ tərəfinə bərabər A_1B_1 tərəfinin C -dən, $A'C'$ tərəfinə bərabər A_1C_1 tərəfinin B -dən $B'C'$ tərəfinə bərabər B_1C_1 tərəfinin A -dan keç-



Şəkil 163

məsi tələb olunur. B' bucağına bərabər olan B_1 bucağı AC tərəfinin qarşısında durmalı olduğundan B' bucağına bərabər bucağın yerləşdiyi AC -yə söykənən qövs üzərində olmalıdır. Eləcə də C_1 nöqtəsi C' bucağına bərabər bucağın yerləşdiyi AB -yə söykənən qövs üzərində olmalıdır. B_1C_1 tərəfi bu iki qövsün ortaq A nöqtəsindən keçən kəsəni və $B'C'$ tərəfinə bərabər olmalıdır. Belə kəsəni 160 məsələsinin həllində göstərilən üsulla qurmaq olar. Sonra C_1B , B_1C düz xətlərini çəkib A_1 nöqtəsində kəsişənə qədər uzatmaqla, B_1C_1 , $B'C'$ tərəfləri və bunlara bitişik B_1 , B' və C_1 , C' bucaqlarına görə $A'B'C'$ üçbucağına bərabər $A_1B_1C_1$ üçbucağını alırıq. Həllərin sayı 160 məsələsində olduğu kimi $B'C'$ -ə bərabər B_1C_1 kəsənin sayı qədər 2; 1 və 0 ola bilər. Məsələnin şərtində bir üçbucağın digər üçbucaq xaricinə hansı ardıcılıqla çəkilməsi göstərlmədiyindən mümkün kombinasiyaların sayı üzrə baxılan növdə altı qurma aparmaq lazım gəlir.

162. Fərz edək ki, ABC üçbucağının daxilinə $A'B'C'$ üçbucağına bərabər olan üçbucaq çəkmək tələb olunur (Şəkil 164). Burada tərs metodu tətbiq etmək olar. Yəni əvvəlcə $A'B'C'$ üçbucağının xaricinə, 161 məsələsində olduğu kimi, ABC üçbucağına bərabər $A_1B_1C_1$ üçbucağını çəkək. Sonra AB , BC , CA tərəfləri üzərində uyğun olaraq A_1C' , B_1A' , C_1B' -ə bərabər AC_2 , BA_2 , CB_2 parçalarını ayıraq. Onda ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş, $A'B'C'$ üçbucağına bərabər, $A_2B_2C_2$ üçbucağını alırıq. Buradan görünür ki, tərs məsələnin hər bir həllinə düz məsələnin müəyyən həlli uyğun olur. Habelə asanlıqla inanmaq olar ki, tərsinə, düz məsələnin hər bir həllinə tərs məsələnin müəyyən



Şəkil 164.

həlli uyğundur. Buradan da aydın olur ki, tərs metod baxılan məsələnin bütün həllərini, almağa imkan verir.

163. Yunan xacı adlanan fiqur və ondan kvadratin necə alınması və tərsinə 165-ci şəkildə göstərilir.

$$\frac{1}{2} EC \cdot CF \sin C = \frac{1}{4} AC \cdot CB \cdot \sin C \quad \text{вə ya} \quad EC \cdot CF = \frac{1}{2} AC \cdot CB$$
$$EF^2 = EC^2 + CF^2 - 2EC \cdot CF \cdot \cos C = (EC - CF)^2 + 2EC \cdot CF(1 - \cos C) = (EC - CF)^2 + AC \cdot CB(1 - \cos C).$$

Verilmiş ABC üçbucağı üçün $AC \cdot CB(1 - \cos C)$ sabit kəmiyyətdir, odur ki, $EC = CF$ olduqda EF ən kiçik qiymət alır. Bu halda (1)dən $EC^2 = \frac{1}{2} AC \cdot CB$ və ya $EC = \sqrt{\frac{AC \cdot BC}{2}}$ alırıq.

Fərz edək ki, axtarılan üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzi olan T və O nöqtələri verilmişdir. Onda TO parçasının uzunluğu daxilə çəkilmiş çevrənin r radiusuna bərabərdir (Şəkil 86).

165

arasındakı məsafə olduğundan $d = TO = r$, onda $R = (1 + \sqrt{2})r$ alırıq.

Bilirik ki, sunərgizi üçbucağının bucaqlarından biri 60^0 -yə bərabərdir (Məsələ 76). Fərz edək ki, bu bucağın təpəsi A nöqtəsindədir (Şəkil 86), onda $AT = \frac{r}{\sin \frac{60^0}{2}} = 2r$. Hər iki

çevrəni və ATO üçbucağını qurub A nöqtəsindən daxilə çəkilmiş çevrəyə toxunan çəkək. Bu toxunanın xaricə çəkilmiş çevrə ilə kəsişmə nöqtələri sunərgizi üçbucağının digər iki təpə nöqtələri olacaqdır.

166. Fərz edək ki, A verilmiş nöqtə, K verilmiş dairə, O onun mərkəzidir (Şəkil 167). AM/M kəsənin elə çəkmək tələb olunur ki, $AM' = 2M'M$ olsun. Bu məsələ 160-ın ümumiləşdirilməsidir və oxşar qaydada həll edilə bilər. $MO' \parallel MO$ çəkək. Məsələnin

şərtindən $AM' = \frac{2}{3}AM$ və

sonra $AM'O'$, AMO üçbucaqla-

rının oxşarlığından $M'O' = \frac{2}{3}MO$

alırıq. M' nöqtəsi üçün iki hən-

dəsi yer alınır: K çevrəsi və mər-

kəzi OA parçası üzərində A nöqtəsindən başlayaraq onun üçdə

ikisinə bərabər məsafədə yerləşən O' nöqtəsində və radiusu K

çevrəsi radiusunun üçdə ikisi olan K' çevrəsi. Onda M' bu həndəsi

yerlərin ortaq nöqtəsidir. Lakin həmin həllə daha ümumi mü-

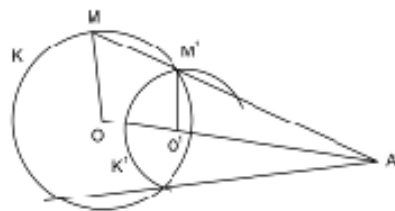
hakimə ilə də gəlmək olar. M nöqtəsinin K çevrəsi üzərində

olması, M' nöqtəsinin isə AM parçası üzərində onun A baş-

lanğıcından $\frac{2}{3}AM$ məsafədə və bundan əlavə K çevrəsi üzərində

olması tələb olunur. Sonuncu şərti atsaq, onda birinci iki şərt M'

nöqtəsinin həndəsi yeri kimi oxşarlıq mərkəzi A və əmsalı $\frac{2}{3}$



Şəkil 167

olan K çevrəsinə oxşar K' çevrəsini verir. Bu metodu 160-da tətbiq etmək olardı.

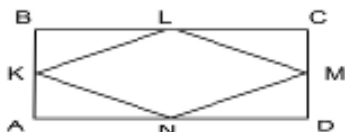
167. Düzbucaqlının diaqonalları bərabər olduğundan təpələri düzbucaqlının tərəflərinin orta nöqtələrində olan KLMN dördbucaqlısı rombdur (Şəkil 168).

168. $S(KLMF) = S(KFMN)$ olduğunu təmin edən F nöqtəsini tapmaq tələb olunur. Məlumdur ki, $S(KBL) + S(MND) = \frac{1}{4} S(ABCD)$

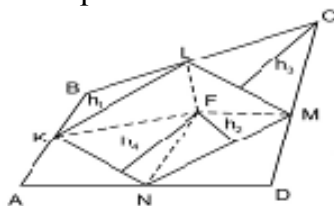
(məsələ 91, şəkil 96) və şərtə görə $S(NFMD) = \frac{1}{4} S(ABCD)$ (Şəkil 169). Deməli, $S(KBL) + S(MND) = S(NFM) + S(NMD)$, buradan $S(KBL) = S(NFM)$ və $h_1 = h_2$ odur ki, F nöqtəsi MN-ə paralel və ondan h_1 məsafədə olan düz xətt üzərindədir. Analoji olaraq $S(LCM) + S(AKN) = \frac{1}{4} S(ABCD)$ (məsələ 91, şəkil 96) və şərtə

görə $S(LFM) + S(LCM) = \frac{1}{4} S(ABCD)$ (Şəkil 169). Deməli, $S(LCM) + S(AKN) = S(LMF) + S(LCM)$, buradan $S(AKN) + S(LMF)$

və $h_3 = h_4$ odur ki, F nöqtəsi KN-ə paralel və ondan h_3 məsafədə olan düz xətt üzərindədir. Beləliklə F qırıq xətlərlə göstərilməklə çəkilən düz xətlərin kəsişmə nöqtəsindədir.

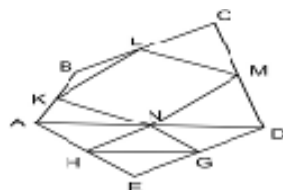


Şəkil 168.



Şəkil 169.

169. Fərz edək ki, K, L, M, G, H uyğun olaraq axtarılan ABCDE beşbucaqlısının AB, BC, CD, DE, EA tərəflərinin orta nöqtələridir (Şəkil 170). Analiz göstərir ki, ABCD dördbucaqlısının tərəflərinin K, L, M orta nöqtə-

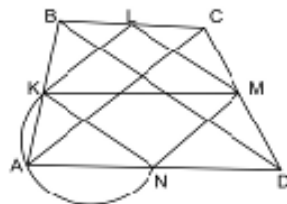


Şəkil 170

lərinə görə KLMN paraleloqramını (məsələ 84-ün həlli ilə əlaqədar izahata baxmalı), sonra isə tərəflərinin H,N,G orta nöqtələrinə görə AED üçbucağını qurmaq olar. Sonrası aşkardır.

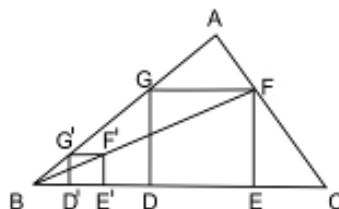
170. Fərz edək ki, qurulması tələb olunan trapesiyada AC, BD diaqonallarının uzunluqları, LN parçası və A bucağının qiyməti məlumdur (Şəkil 171). $KL = \frac{1}{2}AC$ və $KN = \frac{1}{2}BD$

olduğundan üç tərəfinə görə KLN üçbucağını qura bilərik. Sonra bu üçbucağı trapesiyanın tərəflərinin orta nöqtələrinin birləşdirilməsindən alınan paraleloqrama (məsələ 91) qədər tamamlayırıq. Daha sonra isə KN parçası üzərində A bucağının yerləşdiyi seqmenti qururuq (məsələ 133) və N nöqtəsindən KM-ə paralel düz xətt çəkirik bu düz xətt seqmenti A nöqtəsində kəsir. Qurmanın sonrası aşkardır.



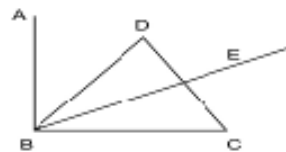
Şəkil 171.

171. ABC üçbucağı verilir (Şəkil 172) DE tərəfi üçbucağın AC oturacağı, G təpəsi AB tərəfi və F təpəsi AC tərəfi üzərində olan DEFG kvadratı qurmaq tələb olunur. Sonuncu tələbi atıb sonsuz sayda, o cümlədən tələb olunan DEFG kvadratı da daxil olmaqla, $D'E'F'G'$ şəkildə kvadratlar alırıq. Hər hansı iki belə kvadrat oxşardır, məsələnin şərtinə görə onların uyğun tərəfləri isə paraleldir. Uyğun D' təpələri BC düz xətti, uyğun G' təpələri isə BA düz xətti üzərində yerləşdiyindən oxşarlıq mərkəzi BC, BA xətlərinin B kəsişmə nöqtəsidir, beləliklə isə F' şəkildə uyğun təpələr də B nöqtəsindən keçən düz xətt üzərindədir. Buradan qurmanın yolu alınır: $D'E'F'G'$ şəkildə hər hasın kvadrat qururuq; BF' düz xəttini çəkib onu AC tərəfi ilə F nöqtəsində kəsişənə qədər uzadıırıq. Tələb olunan DEFG kvadratını qururuq. Məsələnin həmişə bir həlli vardır.



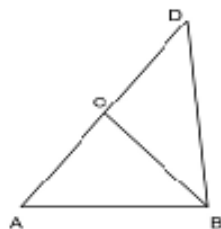
Şəkil 172.

172. BDC bərabərtərəfli üçbucaqdır, odur DBC bucağı düz bucağın üçdə ikisinə bərabərdir. Onu BE düz xətti ilə yarıya bölüb $\angle CBE = \angle EBD = \angle DBA$ alırıq (Şəkil 173).



Şəkil 173

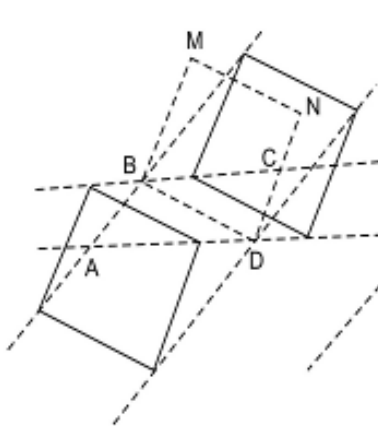
173. AB parçası üzərində bərabərtərəfli CAB üçbucağını qurub və AC tərəfinin uzantısı üzərində $CD=CB$ ayırıq (Şəkil 174). D və B nöqtələrindən keçən DB tələb olunan düz xəttir. Göründüyü kimi son iki məsələnin hər ikisinin həlli eyni bir ideyaya əsaslanır: qurmada düzgün üçbucaqdan istifadə. Bu üsuldan həndəsə məsələlərinin həllində, yeri gələdikcə, istifadə etmək olar.



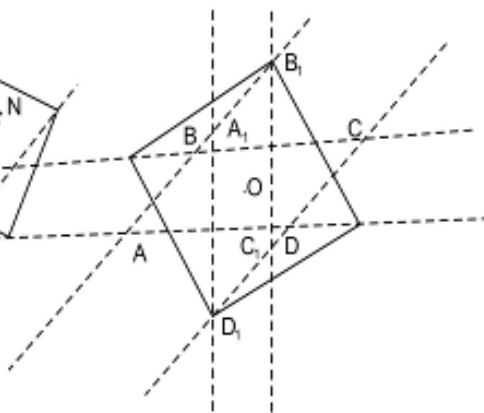
Şəkil 174

174. Fərz edək ki, ABCD verilmiş düz xətlərin kəsişərək əmələ gətirdiyi paraleloqramdır (Şəkil 175). Onun BD diaqonalını tərəf kimi götürməklə BMND kvadratını quraq. Bu kvadratı hər bir paralel düz xətlər cütü üzrə paralel köçürməklə iki həll alırıq. (Bu kvadrları – həlli 175-ci şəkildə səlis xətlə göstəririk). AC diaqonalı üzərində kvadrat qurub analoji köçürmə ilə daha iki həll alırıq. Sonra ABCD paraleloqramının simmetriya mərkəzini O ilə işarə edib AD və BC düz xətlərini bu nöqtə ətrafında 90° dərəcə döndərək. Fərz edək ki, $A_1B_1C_1D_1$ dördbucaqlısı AB, CD düz xətləri və bunları kəsən AD və BC düz xətlərinin dönməsindən sonra alınan paraleloqramdır. Aşkardır ki, bu paraleloqramın simmetriya mərkəzi O nöqtəsi üzərinə düşür, başqa sözlə O nöqtəsi A_1C_1 və B_1D_1 parçalarının hər birinin ortasıdır. Odur ki, diaqonallar kimi bu parçaların hər biri üzərində qurulmuş kvadrlar da daha iki həlli verir. 176-cı şəkildə diaqonalı B_1D_1 olan kvadrat səlis xətlə göstərilmişdir. Qeyd edək ki, ABCD kvadrat olmayan düzbucaqlı olarsa, onda son iki həll olmaz, çünki bu halda $A_1B_1C_1D_1$ paraleloqramı yoxdur. ABCD kvadrat olduqda isə həllərin sayı sonsuzdur. Yenidən ümumi

şəkildə ABCD-i paraleloqram hesab edərək göstərək ki, yuxarıda sadaladığımızdan başqa həllər yoxdur.



Şəkil 175.



Şəkil 176.

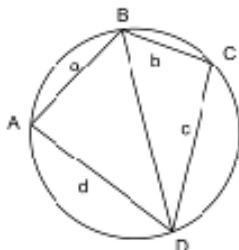
Kvadratın təpələrinin verilmiş düz xətlər üzərində yerləşməsi ilə əlaqədar iki hal mümkündür: 1) kvadratın hər bir tərəfinin sonu kəsişən düz xətlərin üzərindədir; 2) kvadratın iki qarşı tərəfi müxtəlif paralel düz xətlər cütünün əmələ gətirdiyi zolağa düşür. İkinci hal ödənirsə onda zolaqda yerləşən tərəflər ABCD paraleloqramının diaqonallarından birinə bərabər və paralel olmalıdır. Birinci halda isə kvadratın qarşı təpələri paralel düz xətlər üzərində, kvadratın mərkəzi isə düz xətlərin zolağın daxilində yerləşən kəsişmə nöqtəsində (zolaq bu nöqtədən keçən düz xətlə yarıya bölünür) yerləşəcəkdir. Beləliklə, kvadratın mərkəzi O nöqtəsi ilə üst-üstə düşür, öz mərkəzi ətrafında 90° dönmədə kvadrat özünə çevrildiyindən O nöqtəsi ətrafında paralel düz xətlərdən bir cütü və kvadratın dönməsi ilə bir diaqonal digərinə keçir.

175. Fərz edək ki, a, b, c, d daxilə çəkilmiş dördbucaqlının tərəfləridir və $\angle A = \alpha$ (Şəkil 177). Kosinuslar teoreminə görə $\triangle ABD$ və $\triangle BCD$ -dən $a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha$,

$$\text{buradan } \cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}.$$

İndi α bucağını və sonra dördbucaqlını qura bilərik. Bucağı qurmaq üçün ixtiyari l parçası götürək və

$$u = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{l} \quad (\text{müəyyənlik}$$



Şəkil 177.

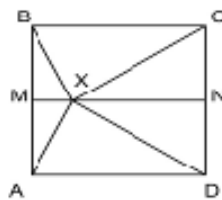
üçün belə hesab edək ki, $a^2 + d^2 \geq b^2 + c^2$), $g = \frac{2(ad + bc)}{l}$

parçalarını quraq. Onda α kateti u və hipotenuzu g olan düzbucaqlı üçbucağın ($\cos \alpha = \frac{u}{g}$) bucağı olacaqdır. Sonrası

aşkardır.

176. B və C bucaqlarının tənbölənlərini l_b və l_c ilə işarə edək. Onda üçbucağın tərəflərini bu tənbölənlər vasitəsi ilə ifadə etmək olar: $a = \sqrt{l_b l_c}$, $b = l_c + \sqrt{l_b l_c}$, $c = l_b + \sqrt{l_b l_c}$. Bu parçaları pərgar və xətkəş vasitəsilə asanlıqla qurmaq olar. Beləliklə məsələ üç tərəfinə görə üçbucağın qurulmasına gətirildi.

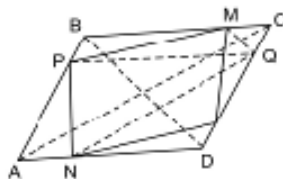
177. Bu kvadratin orta xəttinin, yəni qarşı tərəflərin ortasını birləşdirən parçanın nöqtələridir. Doğrudan da, fərz edək ki, ABCD kvadratının MN orta xətti üzərində ixtiyari X nöqtəsi qeyd edilmişdir (Şəkil 178). Bu nöqtəni kvadratin təpə nöqtələri ilə birləşdirdikdə alınan ABX və DCX bərabəryanlı



Şəkil 178.

üçbucaqlarından $\begin{cases} AX=BX \\ CX=DX \end{cases}$ yazarıq. Buradan tələb edilən alınır.

178. ABCD paraleloqramında $PQ \parallel AD$, $QM \parallel BD$ və $QN \parallel AC$ çəkək. Onda M, P, N nöqtələri axtarılan paraleloqramın uc təpələridir (Şəkil 179).

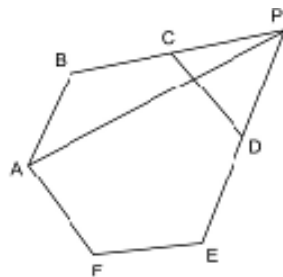


Şəkil 179.

179. Verilmiş düzgün altıbucaqlının bir tərəfini buraxıb digər iki tərəfini P nöqtəsində kəsişənə qədər uzatdıqda bu nöqtədən altıbucaqlının təpələrindən birinə qədər məsafə $\sqrt{7}$ -yə bərabərdir. BC və ED tərəflərinin uzantısı P nöqtəsində kəsişir. P nöqtəsini A ilə birləşdirək (Şəkil 180). PCD düzgün üçbucaqdır. Odur ki $CP=1$, $\angle ABC = 120^\circ$ (düzgün altıbucaqlının daxili bucağı olduğundan). ABP üçbucağından kosinuslar teoreminə görə

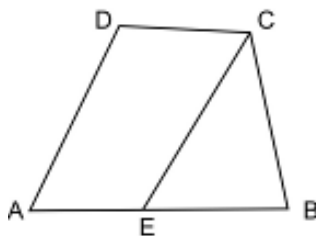
$$AP^2 = PB^2 + AB^2 - 2AB \cdot BP \cos 120^\circ =$$

$4 + 1 + 2 = 7$. $AP = \sqrt{7}$. Altıbucaqlının kiçik diaqonalı ilə onunla ortaq nöqtəsi olmayan tərəfin kəsişmə nöqtəsindən altıbucaqlının təpələrindən birinə qədər məsafə isə $\sqrt{13}$ -ə bərabərdir. Bunu əsaslandırmaq lazımdır.



Şəkil 180.

180. Trapesiyanın böyük oturacağı a , kiçik oturacağı b və c, d yan tərəfləri verilir; bu verilənlərə görə onu qurmaq tələb olunur. Fərz edək ki, ABCD axtarılan trapesiyadır (Şəkil 181). $CE \parallel DA$ çəkək. Onda CEB üçbucağını üç $CE=c$, $CB=d$, $EB=a-b$ tərəflərinə görə qurmaq olar. Bundan sonra $EA=b$ parçasını ayıraraq EA, EC parçaları üzərində AECD paraleloqramını qurmaq kifayətdir. Bununla tələb edilən trapesiyanın üç təpəsi məlumdur. Dördüncü təpə nöqtəsini almaq üçün AE parçasının uzantısı üzərində $EB=a-b$ parçasını qurmaq lazımdır.



Şəkil 181.

“Təbiətdə bərk cisimlər olmasa idi həndəsə də olmazdı”

A.Puankare.

II Stereometriya

Əsas düsturlar

1. İxtiyari prizma (l -yan tili; p -oturacağın perimetri; S -oturacağın sahəsi; H – hündürlük; P_k - perpendikulyar kəsiyin perimetri; S_y -yan səthin sahəsi; V -həcm).

$$S_y = P_k l \quad (\text{II. 1})$$

$$V = SH \quad (\text{II.2})$$

$$V = S_k l \quad (\text{II.3})$$

2. Düz prizma:

$$S_y = Pl \quad (\text{II.4})$$

3. Düzbucaqlı paralelepiped (a, b, c - onun ölçüləri; d - diaqonal):

$$S_y = pH \quad (\text{II.5})$$

$$V = abc \quad (\text{II.6})$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad (\text{II.7})$$

4. Kub (a - til)

$$V = a^3 \quad (\text{II.8})$$

$$d = a\sqrt{3} \quad (\text{II.9})$$

5. İxtiyari piramida (S - oturacağın sahəsi; H – hündürlük; V -həcm):

$$V = \frac{1}{3}SH \quad (\text{II.10})$$

6. Düzgün piramida (P – oturacağın perimetri; l - apofem; S_y - yan səthin sahəsi)

$$S_y = \frac{1}{2}pl \quad (\text{II.11})$$

$$V = \frac{1}{3}SH \quad (\text{II.12})$$

7. İxtiyari kəsik piramida (S_1 və S_2 - oturacaqların sahəsi; h – hündürlük; V -həcm):

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}) \quad (\text{II.13})$$

8. Düzgün kəsik piramida (P_1 və P_2 - oturacaqların perimetri; l -apofem; S_y -yan səthin sahəsi):

$$S_y = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l \quad (\text{II.14})$$

9. Silindr (R – oturacağın radiusu; H – hündürlük; S_y -yan səthin sahəsi; V -həcm):

$$S_y = 2\pi RH \quad (\text{II.15})$$

$$V = \pi R^2 H \quad (\text{II.16})$$

10. Konus (R oturacağının radiusu; H – hündürlük; l -doğuran; S_y -yan səthinin sahəsi; V - həcm)

$$S_y = \pi Rl \quad (\text{II.17})$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H \quad (\text{II.18})$$

11. Kürə, sfera (R - kürənin radiusu; S - sferik səthin sahəsi; V - həcm):

$$S = 4\pi R^2 \quad (\text{II.19})$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (\text{II.20})$$

12. Kürə seqmenti (R – kürənin radiusu; h - seqmentin hündürlüyü; S – seqmentin sferik səthinin sahəsi; V – həcm):

$$S = 2\pi Rh \quad (\text{II.21})$$

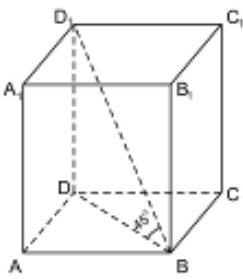
$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h \right) \quad (\text{II.22})$$

13. Kürə sektoru (R – kürənin radiusu; h – seqmentin hündürlüyü; V -həcm)

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h \quad (\text{II.23})$$

181. $\triangle ABD$ -dən (Şəkil 182)

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ (sm)}.$$



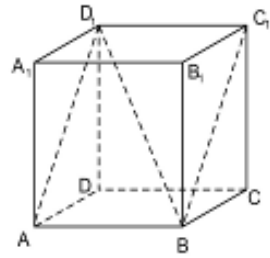
Şəkil 182.

$D_1D \perp (ADC)$, BD parçası BD_1 diaqonalı ilə oturacaq müstəvisi arasındakı bucaqdır, deməli, $\angle D_1BD = 45^0$; D_1BD - bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqdır. Odur ki, $D_1D = DB = 13 \text{ (sm)}$.

182. Kubun tilini a ilə işarə edək. Onda

$$BC_1 = a\sqrt{2} \quad (\text{Şəkil 183}). \quad BA \perp AD \quad \text{və}$$

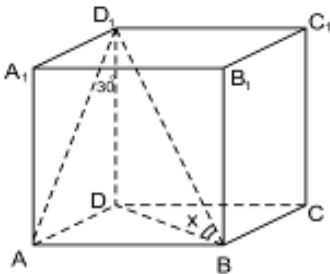
$BA \perp AA_1$, odur ki, BA tili ADD_1A_1 üzünün müstəvisinə perpendikulyardır, onda $BA \perp AD_1$. Deməli ABC_1D_1 kəsiyi düzbucaqlıdır, onun sahəsi $S = AB \cdot BC_1$, $64\sqrt{2} = a \cdot a\sqrt{2}$, $a^2 = 64$, $a = 8 \text{ (sm)}$. Düzbucaqlı paralelepipedin diaqonalı haqqında teoremə görə $BD_1^2 = 3a^2$, $BD_1^2 = 3 \cdot 8^2$, $BD_1 = 8\sqrt{3} \text{ (sm)}$.



Şəkil 183.

183. $AB \perp (ADD_1)$, odur ki, AD_1 parçası BD_1 diaqonalının ADD_1A_1 üzünün müstəvisi üzərindəki proyeksiyasıdır, deməli

BD_1 diaqonalı ilə bu üzün müstəvisi arasındakı bucaq $\angle AD_1B$ -dir, yəni $\angle BD_1A = 30^0$ (Şəkil 184).



Şəkil 184

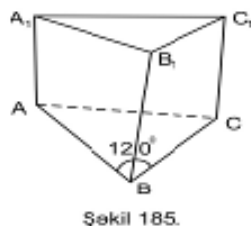
BD parçası BD_1 diaqonalının prizmanın oturacaq müstəvisi üzərindəki proyeksiyasıdır, beləliklə $\angle D_1BD$ prizmanın diaqonalı ilə oturacaq müstəvisi arasındakı bucaqdır. Fərz edək

ki, oturacağın tərəfi a -ya bərabərdir, onda onun diaqonalı $a\sqrt{2}$ olar. Düzbucaqlı ABD_1 üçbucağında $BD_1 = 2a$ (30° -lik bucaq qarşısındakı katetin xassəsinə görə). ΔD_1DB -dən

$$\cos x = \frac{BD}{BD_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = 45^\circ.$$

184. ΔABC -dən (Şəkil 185) kosinuslar teoreminə görə $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 120^\circ = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$;
 $AC = 7 \text{ sm}$.

AC parçası ABC üçbucağının böyük tərəfidir, odur ki, ACC_1A_1 -prizmanın böyük yan üzüdür. Onda, $AC \cdot h = 35$, $7 \cdot h = 35$,
 $h = 5 \text{ (sm)}$. $S_{yan} = p \cdot h = (5 + 3 + 7) \cdot 5 = 75 \text{ (sm}^2\text{)}$;



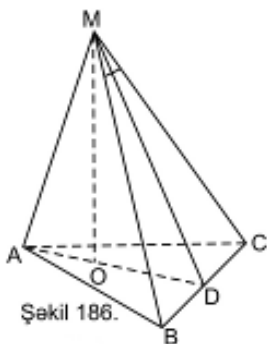
185. Düzgün üçbucaqlı piramidanın hündürlüyü onun ABC oturacağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən keçir. Hündürlüyün oturacağını O ilə işarə edək (Şəkil 186). Onda

$OA=R$ bu çevrənin radiusudur. Aşkardır ki,

$$AB = R\sqrt{3}, \quad R = AO = \frac{8}{\sqrt{3}},$$

$$OD = \frac{AO}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}. \quad \Delta MBD\text{-dən}$$

$$BD = MD \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad MD = \frac{4}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}. \quad \Delta MOD\text{-dən}$$



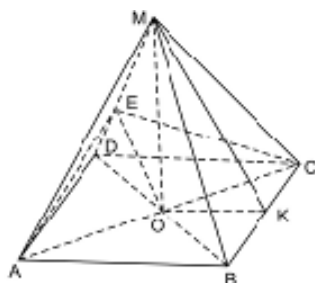
$$MO = \sqrt{MD^2 - OD^2} = \sqrt{\frac{16}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{16}{3}} = \frac{4}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

186. $MABCD$ verilmiş piramida, O isə onun hündürlüyünün oturacağı olsun (Şəkil 187). 1) $ABCD$ –kvadrattır, $\angle BMC = \alpha$,

k isə BC tərəfinin orta nöqtəsidir.

$$OK=BK=\frac{m}{2}. \Delta MBK \text{ -dan; } MK=\frac{m}{2tg\frac{\alpha}{2}};$$

$$\Delta MOK \text{ -dan } MO = \sqrt{MK^2 - OK^2} = \\ = \sqrt{\frac{m^2}{4tg^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{m^2}{4}} = \frac{m\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$



Şəkil 197.

$$2) \Delta MBK \text{ -dan } MB = \frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

3) $OK \perp BC$, $MK \perp BC$, odur ki, $\angle OKM$ yan üzün (MBC) müstəvisi ilə piramidanın oturacağı arasındakı ikiüzlü bucağın xətti bucağıdır. $\angle OKM = \beta$ işarə edək, onda ΔOMK -dan

$$\cos\beta = \frac{OK}{MK} = \frac{m}{2} : \frac{m}{2tg\frac{\alpha}{2}} = tg\frac{\alpha}{2}, \beta = \arccos\left(tg\frac{\alpha}{2}\right)$$

4) $OE \perp MD$ çəkək. $MD \perp OE$ və $MD \perp AC$ olduğundan $MD \perp (ACE)$. Odur ki, AEC bucağı MD yan tilindəki ikiüzlü bucağın xətti bucağıdır. $\angle AEC = \gamma$ olsun. ΔMEC -dən,

$$\angle EMC = \alpha, \frac{EC}{MC} = \sin\alpha, EC = \frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\alpha = m \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

$$\Delta OEC \text{ -dən } OC = EC \sin\frac{\gamma}{2}, \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{m\sqrt{2}}{2} : m \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{\gamma}{2} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right), \gamma = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right).$$

187. MABCDEF piramidasında MO onun hündürlüyü, $AB = a$ oturacağın tərəfi, MK isə AMB yan üzünün hündürlüyü olsun (Şəkil 188). Oturacağın tərəfi a olduğundan onun böyük diaqonalı $2a$ olar.

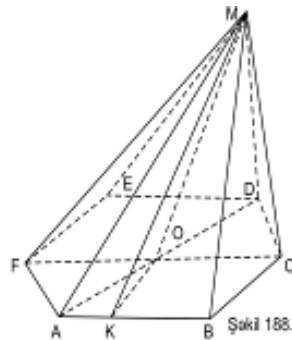
$$S(AMB) = \frac{1}{2} AB \cdot MK; S(MAD) = \frac{1}{2} AD \cdot MO.$$

Məsələnin şərtinə görə

$$\frac{1}{2} a \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot MO, \quad MK = 2MO, \quad \text{beləliklə, } \angle MKO = 30^\circ$$

$$\Delta AOK \text{ -dan } OK = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad \Delta MOK \text{ -dan } MK = \frac{OK}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = a.$$

$$S_{yan} = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot a = 3a^2.$$



188. Şərtə görə $AB=5\text{m}$, $AD=4\text{m}$, $BD=3\text{m}$ (Şəkil 189). ABD düzbucaqlı üçbucağında $\angle ADB = 90^\circ$ (Pifaqor teoreminin tərsinə görə AB hipotenuz, AD , DB katetlərdir). $AD \perp DO$ olduğundan üç perpendikulyar haqqında teoremə görə

$AD \perp MD$, deməli MD parçası MAD üzünün hündürlüyüdür.

$$\Delta MDO \text{ -dan } MD = \sqrt{2^2 + 1,5^2} = 2,5.$$

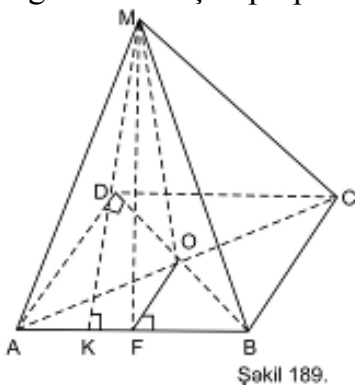
ΔADB -dən, $DK \perp AB$,

$$AB \cdot DK = AD \cdot DB, \quad 5 \cdot DK = 4 \cdot 3,$$

$$DK = \frac{12}{5}. \quad \Delta MOF \text{ -dən, } DF \parallel DK,$$

$$OF = \frac{1}{2} DK = \frac{6}{5};$$

$$MF = \sqrt{MO^2 + OF^2} = \sqrt{4 + \frac{36}{25}} = \frac{2\sqrt{34}}{5};$$

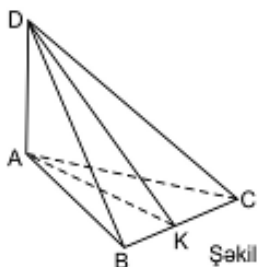


$$S(\text{yan}) = 2 \cdot S(\text{AMD}) + 2S(\text{AMB}) = 4 \cdot 2,5 + 5 \cdot \frac{2\sqrt{34}}{5} = 10 + 2\sqrt{34};$$

$$S(\text{otur.}) = 4 \cdot 3 = 12, \quad S(\text{tam}) = (22 + 2\sqrt{34})(m^2).$$

189. $AK \perp BC$ çəkək, onda üç perpendikulyar haqqında teoremə görə $BC \perp DK$, deməli DK parçası DBC üçbucağının hündürlüyüdür (Şəkil 190). $\triangle ABK$ - dan

$$DK = \sqrt{DA^2 + AK^2} = AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{169 - 25} = 12;$$

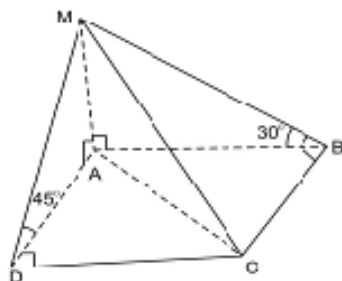


Şəkil 190.

$\triangle DAK$ -dan $\sqrt{81 + 144} = 15$. ADB və ADC üçbucaqları iki katetlərinə görə bərabərdir. Odur ki,.

$$S(\text{yan}) = 2S(\text{ADB}) + S(\text{BDC}) = 13 \cdot 9 + 5 \cdot 15 = 192(\text{sm}^2)$$

190. Fərz edək ki, MAB və MAD müstəviləri oturacaq müstəvisinə perpendikulyardır, onda onların MA kəsişmə xətti oturacaq müstəvisinə perpendikulyardır (Şəkil 191). $CB \perp AB$ olduğundan, üç perpendikulyar teoreminə görə $CB \perp MB$, odur ki, MBA bucağı CB tilindəki ikiüzlü bucağın xətti bucağıdır, $\angle MBA = 30^\circ$. Analoji olaraq $AD \perp DC$, $MD \perp DC$, MDA bucağı DC tilindəki ikiüzlü bucağın



Şəkil 191.

xətti bucağıdır və şərtə görə, $\angle MDA = 45^\circ$. Fərz edək ki, $MA = x \text{ sm}$, onda $MB = 2x \text{ sm}$, $AB = x\sqrt{3} \text{ sm}$. $\triangle MAD$ -dən $MA = AD = x \text{ sm}$, $MD = x\sqrt{2} \text{ sm}$. $\triangle ABC$ -dən, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $3x^2 + x^2 = 64$, $x^2 = 16$, $x = 4$. Beləliklə, $MA = 4 \text{ sm}$, $AB = DC = 4\sqrt{3} \text{ sm}$, $MB = 8 \text{ sm}$, $MD = 4\sqrt{2} \text{ sm}$, $AD = BC = 4 \text{ sm}$.

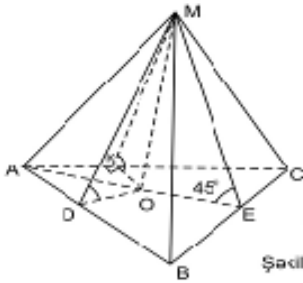
$$S(\text{yan}) = \frac{1}{2} AB \cdot AM + \frac{1}{2} AD \cdot AM + \frac{1}{2} BC \cdot BM + \frac{1}{2} DC \cdot DM =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} = 24 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{6}.$$

$$S(\text{otur.}) = 4\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}$$

$$S(\text{tam}) = 24 + 24\sqrt{3} + 8\sqrt{6} = 8(3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6})(\text{sm}^2).$$

191. Fərz edək ki, $AB=AC=10\text{sm}$, $BC=12\text{ sm}$, MO – piramidanın hündürlüyü, AE isə ABC üçbucağının BC tərəfinə çəkilmiş hündürlük və mediandır (Şəkil 192). $\triangle ABE$ -dən $BE=6\text{sm}$, $AE=8\text{ sm}$.



Şəkil 192.

$$S(ABC) = 6 \cdot 8 = 48(\text{sm}^2).$$

Fərz edək ki, OD və OK parçaları ABC üçbucağının AB və AC tərəflərinə çəkilmiş perpendikulyarlardır, onda MEO , MDO , MKO yan

oturacağı arasındakı ikiüzlü bucaqların xətti bucaqlarıdır.

Deməli, $\angle MEO = \angle MDO = \angle MKO = 45^\circ$. MEO , MDO , MKO üçbucaqları katətlərinə və onların qarşısındakı iti bucaqlarına görə bərabərdirlər. Odur ki, $OE=OD=OK$, onda O nöqtəsi piramidanın oturacağının daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir.

$$OE = r = \frac{S(ABC)}{p} = \frac{48}{16} = 3 \quad (\text{p} - \text{üçbucağın perimetrinin}$$

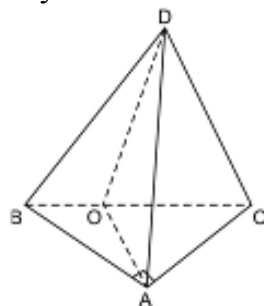
yarısıdır). $\triangle MOE$ -dən, $OE=3\text{ sm}$, $ME=3\sqrt{2}\text{ sm}$.

$$S(\text{yan}) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot ME = \frac{1}{2}(10 + 12 + 10) \cdot 3\sqrt{2} = 48\sqrt{2}(\text{sm}^2).$$

Məsələnin cavabını daha tez belə almaq olar:

$$S(\text{otur}) = 6 \cdot 8 = 48, \quad S(\text{yan}) = \frac{S(\text{otur})}{\cos 45^\circ}, \quad S(\text{yan}) = \frac{48}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 48\sqrt{2}(\text{sm}^2).$$

192. Fərz edək ki, piramidanın hündürlüyü DO-dur. Onda DAO, DBO və DCO üçbucaqları hipotenuzları və katetlərinə görə bərabərdirlər. Beləliklə, OA=OB=OC, deməli, O nöqtəsi ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir (Şəkil 193). ABC düzbucaqlı üçbucaq olduğundan, onun xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi BC hipotenuzunun ortasıdır. $\triangle DOC$ -dən



Şəkil 193.

$$DC = \sqrt{DO^2 + OC^2} = \sqrt{144 + 25} = 13 \text{ (sm)}.$$

193. Kəsik piramidanın oturacaqlarının mərkəzləri O və O_1 olsun (Şəkil 194). $\triangle ABC$ -dən $AB = R\sqrt{3}$, burada $R = AO$;

$$AO = \frac{4}{\sqrt{3}}; \quad OK = \frac{AO}{2}; \quad OK = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\triangle A_1B_1C_1\text{-dən: } A_1O_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad O_1M = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

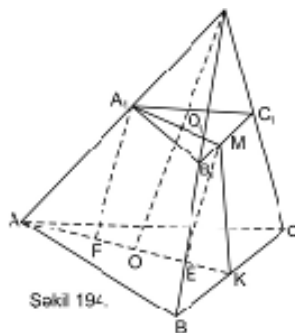
$$EK = OK - OE, \quad OE = O_1M;$$

$$EK = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \triangle AA_1F\text{-dən:}$$

$$AF = AO - FO, \quad FO = A_1O_1,$$

$$AF = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad A_1F = \sqrt{AA_1^2 - AF^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ (dm)}.$$

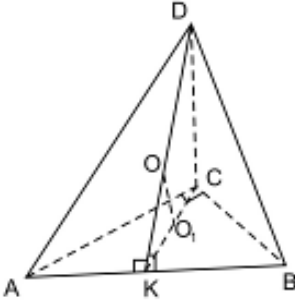
$$\triangle MEK\text{-dan: } MK = \sqrt{ME^2 + EK^2} = \sqrt{\frac{8}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{3} \text{ (dm)}.$$



Şəkil 194.

194. Şərtə görə $CD \perp (ABC)$, $DK \perp AB$ çəkək, onda üç perpendikulyar haqqında teoremə görə $CK \perp AB$. Bərabərtərəfli ABD üçbucağının mərkəzi, hündürlüklərin kəsişmə nöqtəsidir, bu nöqtəni O ilə işarə edək (Şəkil 195). Deməli, $O \in DK$. KDC və KOO_1 üçbucaqlarına (O_1 - nöqtəsi O nöqtəsinin ABC müstəvisi üzərindəki proyeksiyasıdır) baxaq: $\angle DKC = \angle OKO_1$ və

$\angle DCK = \angle OO_1K = 90^0$, bu üçbucaqlar oxşardır, odur ki,
 $\frac{CK}{O_1K} = \frac{DK}{OK}$ (1).



Şəkil 195.

ABD üçbucağında O, həm də medianların kəsişmə nöqtəsi olduğundan $\frac{DK}{OK} = 3$, onda (1) bərabərliyi $\frac{CK}{O_1K} = 3$,

$O_1K = \frac{CK}{3}$ (2) şəklinə düşür. AD və BD

mailləri bərabər olduğundan onların proyeksiyaları da bərabərdir ($AC=BC$).

Beləliklə, ABC, $\angle CAB = \angle CBA = 45^0$ olan, bərabəryanlı üçbucaqdır. Bu üçbucaqda CK hündürlüyü, həm də mediandır və O,

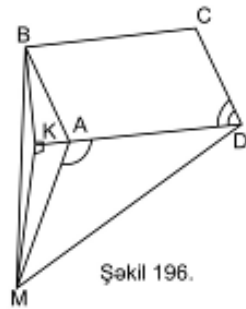
$CK = AK \operatorname{tg} \angle 45^0 = \frac{c}{2}$ -dir. CK-nın qiymətini (2)-də yerinə yazıb

$O_1K = \frac{c}{6}$ alırıq.

195. MAK və BAK üçbucaqlarına baxaq: (Şəkil 196). $\angle BKA = \angle MKA = 90^0$ (ikiüzlü bucağın qurulması qaydasına əsasən); $AM=AB$ (şərtə görə);

$\angle KAM = 180^0 - 120^0 = 60^0$ və

$\angle KAB = 180^0 - 120^0 = 60^0$, beləliklə, $\angle KAM = \angle KAB$. Düzbucaqlı MAK və BAK üçbucaqları, hipotenuzları və iti

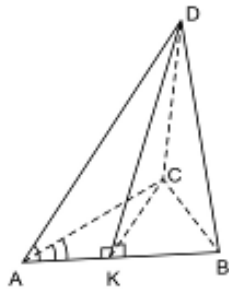


Şəkil 196.

bucaqlarına görə, bərabərdir, yəni $BK=MK$ və $MK = a \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

BKM, $\angle BKM = 90^0$ (Çünki uyğun müstəvilər perpendikul-

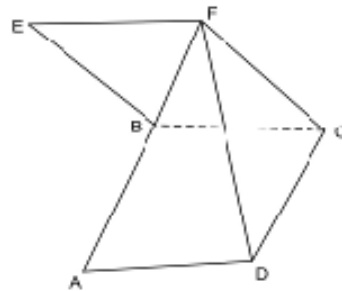
yardır) və $BK = MK = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ olan, bərabəryanlı düzbuxaqlı üçbucaqdır, odur ki, $MB = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$.



Şəkil 197.

$$= c \cdot \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha}} = \frac{c}{\cos \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$

197. ABCD kvadratının və BEFC rombunun diaqonalları uyğun olaraq $BD = a\sqrt{2}$ və $BF = a$ (Şəkil 198). $(BCE) \perp (ABC)$ və $CD \perp BC$ (şərtə görə) olduğundan $CD \perp (BCE)$, beləliklə $CD \perp FC$, deməli DCF düzbuxaqlı üçbucaqdır və ondan $FD = \sqrt{FC^2 + DC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.



Şəkil 198

BFD üçbucağının sahəsini Heron düsturuna əsasən tapaq:

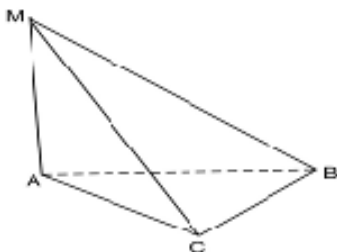
$$p = \frac{1}{2}(a + a\sqrt{2} + a\sqrt{2}) = \frac{a}{2} + a\sqrt{2}.$$

$$S(BFD) = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + a\sqrt{2}\right)\left(a\sqrt{2} - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{a^2}{4}\sqrt{7}.$$

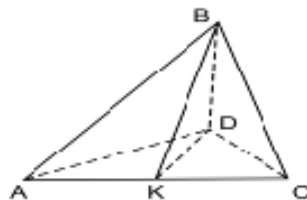
198. $MA \perp (ABC)$ və $AC \perp BC$ olduğundan, üç perpendikulyar haqqında teoremə görə $MC \perp BC$, beləliklə BCM və ABC müstəviləri arasındakı ikiüzlü bucağın xətti bucağı ACM dir və şərtə görə $\angle ACM = 30^0$ (Şəkil 199). Düzbucaqlı AMC üçbucağında $MC = \frac{AM}{\sin 30^0} = 2h$; $AC = \frac{AM}{\operatorname{tg} 30^0} = h\sqrt{3}$.

Düzbucaqlı ABC üçbucağında $BC = \frac{AC}{\operatorname{ctg} 60^0} = h$.

$$S(MBC) = \frac{1}{2} MC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2h \cdot h = h^2.$$



Şəkil 199.



Şəkil 200

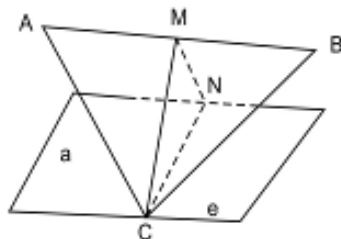
199. Şərtə görə $BD \perp (ADC)$, ADC müstəvisində $DK \perp AC$ çəkək, onda üç perpendikulyar haqqında teoremə görə (Şəkil 200) $BK \perp AC$. Tərifə görə ADB və ACB müstəviləri arasındakı bucaq BKD –dir, şərtə görə isə $\angle BKD = \alpha$. BDK üçbucağından $(\angle BDK = 90^0)$, $BK = \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin \alpha}$. Düzbucaqlı

ABK üçbucağından

$$AB = \frac{BK}{\sin \beta} = \frac{d}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} \cdot \sin \beta = \frac{d^2}{2 \sin^2 \alpha \cdot \sin \beta}$$

200. ABC və a müstəvisinin bir ortaq C nöqtəsi vardır və l düz xətti üzrə kəsişirlər (Şəkil 201), $l \parallel AB$ (əks halda AB düz xətti a müstəvisini kəsərdi). Şərtə görə $MN \perp a$ və $MC \perp AB$, beləliklə $MC \perp l$. Üç perpendikulyar haqqında teoremə görə $NC \perp l$. ABC və a müstəviləri arasındakı bucaq MCN-dir və şərtə görə α -ya bərabərdir.



Şəkil 201.

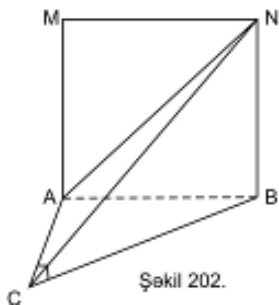
Düzbucaqlı MNC üçbucağından $MC = \frac{MN}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin \alpha}$.

Düzbucaqlı CAM üçbucağından $AC = \frac{MC}{\cos \beta} = \frac{h}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$.

MBC üçbucağında ($\angle CMB = 90^\circ$) $\angle BCM = 90^\circ - \beta$,

$$BC = \frac{MC}{\cos(90^\circ - \beta)} = \frac{h}{\sin \alpha \sin \beta}. S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\sin \alpha \cdot \cos \beta} \times \frac{h}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{h^2}{\sin^2 \alpha \cdot \sin 2\beta}.$$

201. Şərtə görə $(AMN) \perp (ABC)$, $BN \perp AB$, odur ki, $BN \perp (ABC)$. $BN \perp (ABC)$ və $BC \perp AC$ olduğundan,



Şəkil 202.

$NC \perp AC$ və ANC də düzbucaqlı üçbucaqdır (Şəkil 202). Bərabəryanlı ABC üçbucağında ($\angle ACB = 90^\circ$)

$$BC = AC = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Düzbucaqlı CNB üçbucağında ($\angle CBN = 90^\circ$) isə

$$CN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Onda } S(ANC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

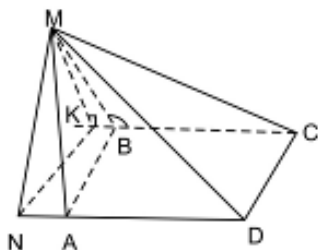
202. İki ABC və MBC müstəviləri arasındakı MKN bucağı, şərtə görə, 90° -dir, deməli MKN düzbucaqlı üçbucaqdır (Şəkil 203). MK parçası MBC üçbucağının

hündürlüyüdür. $MK = MB \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.

Qurmaya görə $NK = AB = a$. MN isə AMD üçbucağının hündürlüyüdür (üç perpendikulyar haqqında teoremə görə

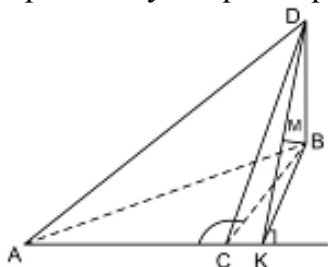
$$MN \perp ND), \quad MN = \sqrt{\frac{3}{4} a^2 + a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{7};$$

$$S(AMD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{7} \cdot a = \frac{a^2}{4} \sqrt{7}.$$



Şəkil 203.

203. B təpə nöqtəsindən ACD müstəvisinə çəkilmiş perpendikulyarı qurmaq üçün bu müstəviyə perpendikulyar və B



Şəkil 204.

ki, $(ACD) \perp (BDK)$. ACD və ADK müstəviləri isə üst-üstə düşür. $BM \perp DK$ qurub $BM \perp (ACD)$ alınır. Korbucaqlı

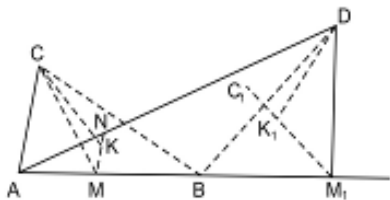
$$ABC \text{ üçbucağının } BK \text{ hündürlüyü } BK = BC \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

olur. DBK bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqdır, yəni $BD = DK = 3$ dm, beləliklə onun hipotenuza bitişik bucaqları 45° -dir. Onda,

$$BM = BK \sin 45^\circ = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

204. 1) ABC və ABD müstəviləri arasındakı bucağı quraq: $CM \perp AB$ və $NM \perp AB$, şərtə görə $\angle CMN = \alpha$. Düz xətt və müstəvinin perpendikulyarlıq əlamətinə görə $AB \perp (CMN)$, Onda iki müstəvinin perpendikulyarlıq əlamətinə görə $(ABD) \perp CMN$.

CMN müstəvisində C nöqtəsindən MN -ə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğu (Şəkil 205) axtarılan məsafə olacaqdır. AMC



Şəkil 205.

üçbucağında $AM = \frac{c}{2}$ (M nöqtəsi AB -in ortasıdır); $\angle ACM = 60^\circ$ (CM – tən böləndir); $CM = \frac{AM}{\tan 60^\circ} = \frac{c}{2\sqrt{3}}$.

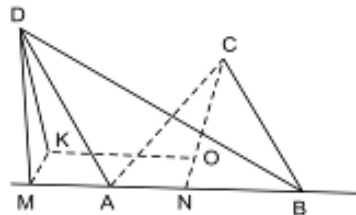
Düzbucaqlı CNK üçbucağında ($\angle CKM = 90^\circ$) $CK = CM \sin \alpha = \frac{c}{2\sqrt{3}} \sin \alpha$.

2) $DM_1 \perp AB$ və $C_1M_1 \perp AB$ ($C_1 \in ABC$) quraq, onda $(C_1M_1D) \perp AB$ (Şəkil 205); $(C_1M_1D_1) \perp (ABD)$. C_1M_1D müstəvisində D təpəsindən C_1M_1 -ə şəkildə göstərildiyi kimi, perpendikulyar çəkək. $\triangle DBM_1$ -dən $DM_1 = BD \sin 60^\circ = c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle DK_1M_1$ -dən ($\angle DK_1M_1 = 90^\circ$) $DK_1 = DM_1 \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} c \cdot \sin \alpha$.

3) CNM və C_1M_1D müstəviləri paraleldir (bu qurmadan görünür), onlar arasındakı məsafə MM_1 parçasının uzunluğu olacaqdır. $MM_1 = MB + BM_1$; $MB = \frac{c}{2}$ (M nöqtəsi AB -in ortasıdır), $BM_1 = BD \cos 60^\circ = \frac{c}{2}$ (düzbucaqlı DBM_1 üçbucağından). Onda, $MM_1 = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$.

205. D nöqtəsindən ABC müstəvisinə çəkilmiş perpendikulyarın oturacağı K ilə işarə edək (Şəkil 206). Şərtə görə $OK \parallel AB$. $KM \perp AB$ quraq, üç perpendikulyar haqqında teoremə görə $DM \perp AB$ və ABD üçbucağının hündürlüyü DM -dir. Üçbucaqların müstəviləri arasındakı bucaq DMK olacaqdır (tərifə görə). Düzbucaqlı MKO üçbucağından $\cos \angle DMK = \frac{MK}{DM}$ (1) ($\angle DKM = 90^\circ$).



Şəkil 206.

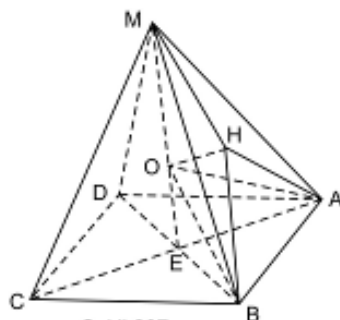
$$\Delta MDA\text{-dan } DM = DA \cdot \sin 60^\circ = \frac{c}{2} \sqrt{3}$$

(2). Aşkardır ki, $MK = NO = \frac{1}{3} CN$, düzgün ABC üçbucağından

$$CN = BC \sin 60^\circ = c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Onda } MK = \frac{c}{6} \sqrt{3} \quad (3). \quad (1) \text{ d\ae } (2) \text{ v\ae}$$

(3) nəzərə alıb $\cos \angle DMK = \frac{c\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{c\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$ tapırıq.

206. Fərz edək ki, O – hər iki sferanın mərkəzidir. AMB müstəvisinə OH perpendikulyarını çəkək (Şəkil 207). $OM=OA=OB$ olduğundan $HM=HA=HB$. Odur ki, H nöqtəsi AMB üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. E nöqtəsi, $ABCD$ oturacağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. O nöqtəsi daxilə çəkilmiş sferanın mərkəzi olduğundan, onun radiusu OE və ya OH -dir, deməli $OE=OH$. Düzbucaqlı OEB və OHB üçbucaqlarının bərabərliyindən alırıq ki, $EB=BH$. Analoji olaraq, $EA=AH$. Üç tərəfinə görə ABE və ABH üçbucaqları



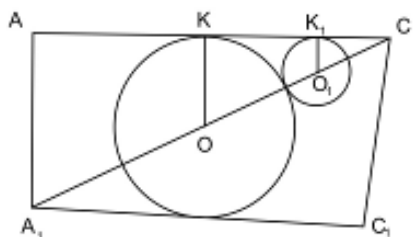
Şəkil 207.

bərabərdir. ABE düzbucaqlı üçbucaqdır, odur ki, AEB bucağına bərabər olan AHB bucağı düz bucaqdır. Deməli, daxilə çəkilmiş, AB qövsünə söykənən BMA bucağı 45^0 -yə bərabərdir.

Qeyd edək ki, məsələ sferaları qurmadan, hətta onların mərkəzlərini dəqiq müəyyənləşdirmədən həll edildi. Lakin, həldə sferaların mərkəzlərinin yerləşdiyi parçanın məlum olması mühüm oldu, bu parça piramidanın ME hündürlüyüdür.

Sfera ilə çoxüzlülərin kombinasiyasına aid bəzi məsələlərin həllində sferanın böyük çevrə üzrə kəsiyinə baxmaq münasibdir, çünki mərkəz belə müstəvilərdə yerləşir.

207. Məsələnin şərtinin fəzada təsvir edilməsi, birincisi xeyli mürəkkəbdir, ikincisi isə, belə təsvir məsələni həll etməyə kifayət qədər məlumat vermir. Lakin, qeyd edək ki, kubun daxilinə çəkilmiş sferanın mərkəzi onun diaqonallarının kəsişmə nöqtəsidir. Fərz edək ki, ikinci sfera C təpəsindən çıxan üzlərə toxunur. Bu ikinci sferanın mərkəzi həmin üç üzə eyni məsafədə olan nöqtədir. Üç müstəvidən eyni məsafədə olan



Şəkil 208.

nöqtələr çoxluğu kubun diaqonallından ibarət A_1C düz xəttidir. Deməli, axtarılan sferanın mərkəzi diaqonal üzərində yerləşir. Beləliklə, məsələnin sonrakı həlli üçün kubun diaqonal kəsiyini - AA_1C_1C düzbucaqlısını qurmaq

lazımdır (Şəkil 208). OK və O_1K_1 uyğun olaraq böyük və kiçik

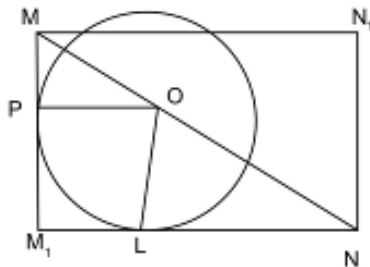
sferaların radiuslarıdır: $OK = \frac{a}{2}$, $OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $O_1K_1 = x$ işarə

edək, onda $OO_1 = x + \frac{a}{2}$ və $O_1C = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \left(x + \frac{a}{2}\right)$.

$\Delta KOC \sim \Delta K_1O_1C$ -dən alınır ki, $\frac{KO}{K_1O_1} = \frac{OC}{O_1C}$ və ya

$$\frac{a}{2x} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3} - a - 2x} \Rightarrow x = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{3}).$$

208. Baxılan halda kubu və sferanı təsvir etməyə ehtiyac yoxdur. Hələlik, heç bir şəkil çəkmədən, qeyd edək ki, sferanın mərkəzi, N nöqtəsində kəsişən üç müstəvidən eyni məsafədə yerləşən, O nöqtəsidir. Bu nöqtə MN diaqonalı üzərindədir. Deməli, MM_1NN_1 diaqonal kəsiyini çəkmək münasibdir, burada MM_1 və NN_1 parçaları kubun a – ya bərabər tilləridir, MN və M_1N_1



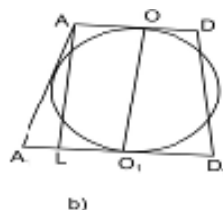
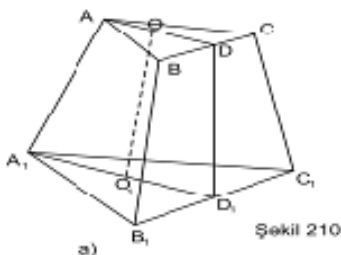
Şəkil 209.

parçaları isə kubun oturacaqlarının $a\sqrt{2}$ -yə bərabər diaqonallarıdır. MM_1NN_1 diaqonal müstəvisi sferanı, MM_1 tilinə və M_1N diaqonalına toxunan, lakin, məsələdə haqqında danışılan sfera verilmiş kubun daxilinə çəkilmədiyindən, tamamı ilə MM_1NN_1 düzbucaqlısında yerləşməyən, böyük dairə çevrəsi üzrə kəsir (Şəkil 209). Sferanın radiusunu x ilə işarə edək.

M_1MN və LON üçbucaqlarının oxşarlığından $\frac{x}{a} = \frac{a\sqrt{2} - x}{a\sqrt{2}}$ və

buradan $x = (2 - \sqrt{2})a$ alırıq.

209. Məsələnin şərti ilə əlaqədar kürənin təsvir edilməsi o, qədər də asan olmadığından, kəsik piramidanı təsvir etməklə kifayətlənmək olar. (Şəkil 210, a). Sonra, AA_1 tilindən və oturacaqların mərkəzindən keçən AA_1D_1D müstəvisinə baxaq. (Şəkil 210, b).



AA_1D_1D müstəvisinin hər bir nöqtəsi kəsik piramidanın yan tillərindən eyni məsafədə olduğundan, sferanın mərkəzi onun üzərində yerləşir. Fərz edək ki, $AB = x$, onda $A_1B_1 = 2x$, $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $A_1D_1 = x\sqrt{3}$. Bir nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxuna-

nın xassəsindən istifadə etməklə $AA_1 = AO + A_1O_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{3} = x\sqrt{3}$ yazmaq olar. Şəkil 210, b-dən görünür ki,

$$AA_1^2 = A_1L^2 + OO_1^2; \quad A_1L = A_1O_1 - AO = \frac{2}{3}x\sqrt{3} - \frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Beləliklə, } AA_1^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (2r)^2 \text{ və ya } (x\sqrt{3})^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (2r)^2.$$

Sonuncu tənlikdən $x = r\sqrt{\frac{3}{2}}$ alırıq. Beləliklə, kəsik piramidanın

yuxarı və aşağı oturacaqlarının tərəfləri uyğun olaraq $r\sqrt{\frac{3}{2}}$ və $r\sqrt{6}$ -dir.

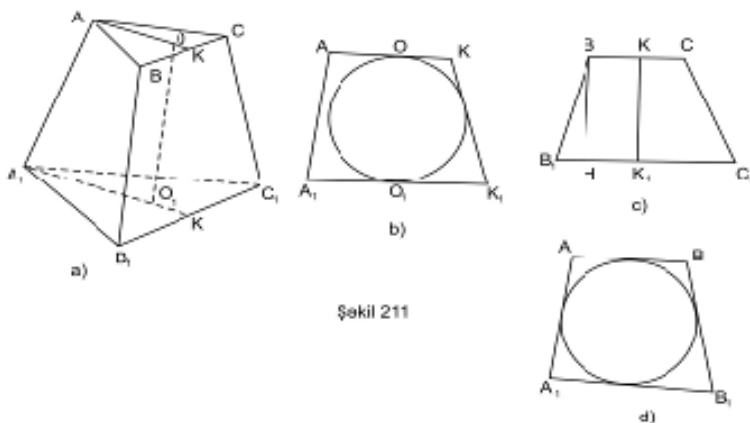
Yuxarıdakı 207-209 məsələlərində sferanın mərkəzinin çoxüzlünün hər hansı kəsiyində yerləşdiyini müəyyən etmək mümkün oldu. Lakin müəyyən qədər çətin bəzi məsələlərdə sferanın mərkəzinin vəziyyətini hətta kəsiklərin köməyi ilə də göstərmək mümkün olmur. Lakin belə məsələlər tamamı ilə müəyyən də ola bilər, başqa sözlə onlarda uyğun hesablamalar aparmaq olar. Belələlərinə nümunə göstərək (məsələ 210-212).

210. 211,a şəklində yalnız kəsik piramidanı təsvir edirik. Fərz edək ki, $AB = x$, $A_1B_1 = y$, daxilə çəkilmiş kürə KK_1 apofeminə və O, O_1 nöqtələrində oturacaqlara toxunur. AKK_1A_1 kəsiyini

təsvir edək (Şəkil 211, b) və $OK = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{x}{2\sqrt{3}}$,

$O_1K_1 = \frac{y}{2\sqrt{3}}$, $KK_1 = \frac{x+y}{2\sqrt{3}}$ tapaq. Sonra bərabəryanlı BCC_1B_1 trapesiyasına baxaq, burada KK_1 - hündürlükdür (Şəkil 211, c).

Pifaqor teoreminə görə BB_1H üçbucağından $l^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2\sqrt{3}}\right)^2$ tənliyini alırıq.



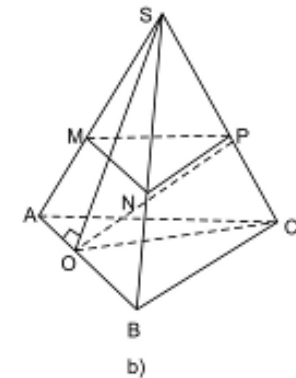
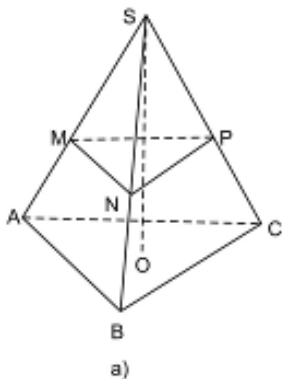
İndi tillərə toxunan sferaya baxaq. Bu sferanı ABB_1A_1 müstəvisi ilə kəsək. (şəkil 211, d). Xaricə çəkilmiş dördbucaqlının tərəflərinin xassəsindən istifadə edərək $x + y = 2l$ tənliyini

yazırıq. Beləliklə, $\begin{cases} l^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2\sqrt{3}}\right)^2 \\ x+y=2l \end{cases}$ və ya $\begin{cases} l^2 - (x-l)^2 = \frac{l^2}{3} \\ y=2l-x \end{cases}$

tənliklər sistemini və buradan $x^2 - 2xl + \frac{l^2}{3} = 0$, $x = l \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$,

$$y = l \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \text{ alırıq.}$$

211. M, N, B, A nöqtələri şəkildə təsvir etmədiyimiz sfera üzərindədir (Şəkil 212, a). Yalnız qeyd edək ki, ABMN müstəvisi



Şəkil 212.

sferanı trapesiyanın xaricinə çəkilmiş çevrə üzrə kəsir. Analoji olaraq BCPN müstəvisi də sferanı trapesiyanın xaricinə çəkilmiş çevrə üzrə kəsir. Bu trapesiyalar bərabəryanlıdır, odur ki, $AM=BN=CP$, buradan isə $AS=BC=CS$. SABC piramidasında bütün yan tillər bərabərdir, odur ki, onun hündürlüyü ABC oturacağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən keçir.

ASO, BSO, CSO iti bucağının 60° olan bərabər düzbucaqlı üçbucaqlardır. Buradan alınır ki,

$$\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO = 30^\circ \Rightarrow AO = OC = OB = \frac{AS}{2} = \frac{AB}{2}.$$

ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu

$$AO = \frac{AB}{2} = BO = CO \text{ -dur. Beləliklə, isbat edildi ki,}$$

$AO+OB=AB$. Deməli, O nöqtəsi AB tərəfi üzərindədir. ABC üçbucağında OC medianı AB-in yarısına bərabərdir. Deməli, ABC düzbucaqlı üçbucaqdır. Lakin,

$\angle AMB = \angle ANB = \angle ACB = 90^0$ olduğundan (Şəkil 212, b), AB – sferanın diametridir, burada O sferanın mərkəzidir. SOC düzbucaqlı üçbucaqdır, $OP=1$ və bu üçbucağın medianıdır.

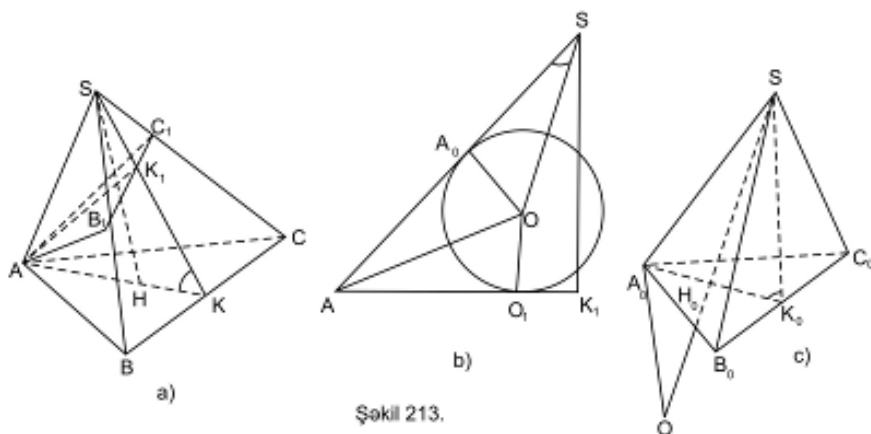
Deməli, $SC=AB=2$, $SO = SB \sin 60^0 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

212. Şərtə deyilən müstəvini quraq. Bunun üçün SBC müstəvisinə perpendikulyar AK_1 parçasını (K_1 – nöqtəsi SBC üzünün mərkəzidir) və BC-yə paralel B_1C_1 parçasını çəkək (Şəkil 213, a). AB_1C_1 müstəvisi BC-yə paralel və SBC müstəvisinə perpendikulyardır. $\angle AKS = \varphi$ işarə edək və $\cos \varphi = \frac{HK}{SK}$, burada

$$SK = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad HK = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{3}; \quad \angle SAK = \frac{\pi - \varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2},$$

$\angle K_1AK = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $\angle SAK_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\varphi}{2}$ tapaq. AO parçası SAK_1 bucağının tənböləndirsə (Şəkil 213, b), onda

$$\angle SAO = \frac{\varphi}{4}, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4}};$$



Şəkil 213.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2tg \frac{\varphi}{4}}{1 - tg^2 \frac{\varphi}{4}} \Rightarrow tg \frac{\varphi}{4} = \sqrt{3} - \sqrt{2}. \quad \text{Fərz edək ki, } A_0, B_0, C_0$$

sferanın tillərə toxunma nöqələridir (Şəkil 213, c). Onda $SA_0B_0C_0$ düzgün tetraedrdir, çünki SA_0B_0 60° -li bucağı olan bərabəryanlı üçbucaqdır. SO tərəfi tillərlə bərabər üçbucaqlar əmələ gətirir, beləliklə H_0 nöqtəsi $A_0B_0C_0$ oturacağının

$$\text{mərkəzidir} \quad \text{və} \quad \angle SK_0A_0 = \varphi, \quad \angle SA_0K_0 = \frac{\pi - \varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2},$$

$$\angle A_0SO = \alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\varphi}{2}.$$

213, c şəklində SA_0O üçbucağından $r = A_0S \cdot tg \alpha$ tapırıq.

$$\Delta AA_0O\text{-dan:} \quad r = AA_0 \cdot tg \frac{\varphi}{4} = (a - A_0S) tg \frac{\varphi}{4}. \quad \text{Onda}$$

$$A_0S \cdot tg \alpha = (a - A_0S) tg \frac{\varphi}{4} \quad \text{və} \quad A_0S = \frac{atg \frac{\varphi}{4}}{tg \alpha + tg \frac{\varphi}{4}}; \quad tg \frac{\varphi}{4} = tg \alpha,$$

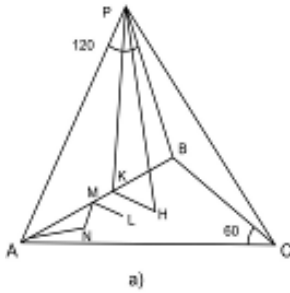
$$tg \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{Kürənin axtarılan radiusu } r\text{-dirsə onda}$$

$$r = \frac{atg \frac{\varphi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{a(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$

213. PABC piramidasının xaricinə çəkilmiş kürənin APB və ACB müstəviləri ilə kəsiyi mərkəzləri N və L nöqtələrində olan

$$\text{eyni radiuslu (Şəkil 214, a)} \quad r = \frac{AB}{2 \sin \angle APB} = \frac{AB}{2 \sin \angle ACB} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

(Sinuslar teoreminə görə) dairələrdir, çünki kosinuslar teoreminə



Şəkil 214.

$$\text{görə } AB = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{7}.$$

Xaricə çəkilmiş sferanın O mərkəzi, AB tilinin M orta nöqtəsindən, ona perpendikulyar keçirilmiş müstəvidə, NML bucağının tənbləni üzərində yerləşir (Şəkil 214, b, burada) iki bərabər vətər –

bu yuxarıda göstərilən iki bərabər dairənin kəsişməsindədir). AB tilindəki φ ikiüzlü bucağı – itidir və

$$PK = \frac{2S(PAB)}{AB} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \text{ olduğundan } \sin \varphi = \sin \angle PKH = \frac{PH}{PK} =$$

$$\sqrt{\frac{5}{21}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3}. \text{ Odur ki, } \cos \angle NML = \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2}{3},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} = \sqrt{5},$$

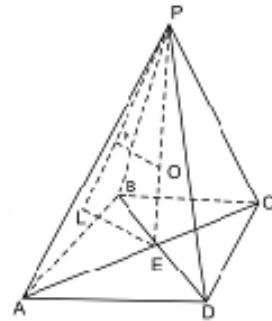
$$MN = AM \cdot \operatorname{ctg} \angle ANM = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow NO = MN \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{3}}, \text{ axtarılan}$$

$$\text{radius isə } R = \sqrt{\frac{7}{3} + \frac{35}{4 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

214. E nöqtəsindən PABCD piramidasının ixtiyari yan üzünə qədər məsafə, O nöqtəsindən bu üzlərə

$$\text{qədər } r \text{ məsafəsindən } \frac{PE}{PO} = \frac{7+2}{7} = \frac{9}{7}$$

dəfə çoxdur (PEL və POK üçbucaqlarının oxşarlığından, şəkil 215). Odur ki, $S(PBC) : S(PAB) : S(PAD) : S(PCD) =$
 $= V(EPBC) : V(EPAB) : V(EPAD) : V(EPCD) =$
 $= S(EBC) : S(EAB) : S(EAD) : S(ECD).$



Şəkil 215.

(Sonuncu bərabərlik P təpəsindən endirilmiş orta h hündürlüklü piramidaların həcmlərinin müqayisəsindən alınır). Burada

$$S(PAB) = S(PBC) \cdot \frac{S(EAB)}{S(EBC)} = 8 \cdot \frac{AE}{CE} = 8 \cdot \frac{AD}{BC} = 8 \cdot \frac{5}{2} = 20,$$

$$S(PAD) = S(PAB) \cdot \frac{AD}{BC} = 20 \cdot \frac{5}{2} = 50,$$

$$S(PCD) = S(PBC) \cdot \frac{AD}{BC} = 20. \text{ Onda}$$

$$S(\text{yan}) = 8 + 20 + 50 + 20 = 98. \text{ Sonra, analogi mühakimə ilə}$$

$$S(\text{tam}) : S(\text{otr}) = V(PABCD) : V(OABCD) = h : r = PE : OE = 9 : 2 \Rightarrow S(\text{tam}) : S(\text{yan}) = 9 : 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(\text{tam}) = 98 \cdot \frac{9}{7} = 126.$$

215. Piramidanın iki qarşı üzlərinin DM və DN apofemlərindən keçən müstəvi ilə kəsiyinə baxaq. (Şəkil 216). Piramidanın bütün tilləri a -ya bərabər olduğundan, oturacağındakı kvadratin diaqonalı $a\sqrt{2}$ -dir. Pifaqor teoreminə

görə piramidanın $OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ hündürlüyünü tapırıq. Kubun tilinin uzunluğu x

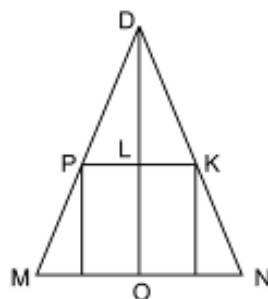
olsun. Onda onun oturacağının diaqonalı $x\sqrt{2}$ olar. $PK = x\sqrt{2}$,

$$PL = \frac{x\sqrt{2}}{2}. \text{ Aşkardır ki, } MN = a, \text{ } MO = \frac{a}{2}, \text{ } LO = x. \text{ Oxşar}$$

OMD və LPD üçbucaqlarına baxaq və $\frac{DO}{DL} = \frac{MO}{PL}$ tənəsübünü

$$\text{yazaq. Onda } \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - x\right)} = \frac{2a}{2x\sqrt{2}} \text{ yazarıq, buradan } x = \frac{a\sqrt{2}}{4} \text{ və}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{32}; S = \frac{3}{4}a^2.$$



Şəkil 216.

216. Prizmanın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsini O ilə işarə edək. Bu $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ prizmasının (Şəkil 217) xaricinə çəkilmiş radiusu $AO = OC_1 = CO = A_1 O = DO = OB = 5sm$ olan kürənin mərkəzidir. Onda

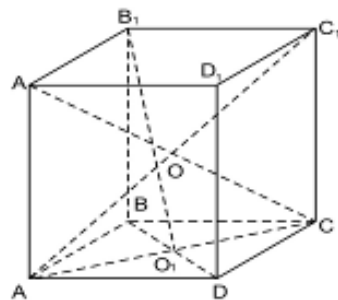
$$V_K = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{560\pi}{3} (sm^3). \quad AC_1 = 10sm,$$

$$AC = \sqrt{100 - 64} = 6(sm), \quad CD = 3\sqrt{2} sm \text{ ol}$$

duğundan

$$V_{pr} = CD^2 \cdot CC_1 = 144 sm^3. \quad \text{Onda}$$

$$\frac{V_K}{V_{pr}} = \frac{125\pi}{108}. \quad \text{Prizmanın tərifinə}$$



Şəkil 217.

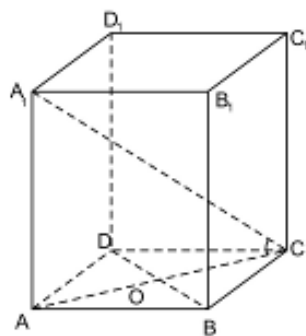
görə $BB_1 \perp (ABCD)$, yəni $B_1 B \perp BD$. Deməli BB_1 -in uzunluğu axtarılan birinci d_1 məsafəsidir. Şərtə görə $d_1 = 8sm$. B_1 və O_1 nöqtələrini birləşdirək. Onda $B_1 O$, mayilinin aşağı oturacaq müstəvisi üzərindəki proyeksiyası BO_1 -dir. $BO_1 \perp AC$ olduğundan, üç perpendikulyar haqqında teoremə görə $B_1 O_1 \perp AC$ və $B_1 O_1$ parçasının uzunluğu axtarılan ikinci d_2 məsafəsidir. Bu məsafə isə $d_2 = \sqrt{BB_1^2 + BO_1^2} = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73}$ (sm)-dir.

217. Şərtə görə $\angle ACA_1 = \beta$,
 $\angle BCD = \angle BAD = \varphi$ (Şəkil 218).

$$S(otr) = a^2 \sin \varphi \text{ və } OC = OA = a \cos \frac{\varphi}{2},$$

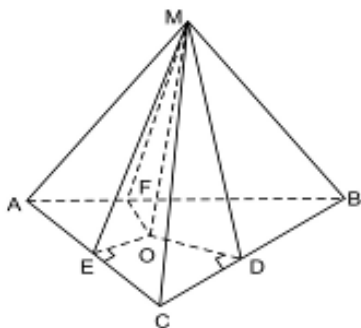
$$AC = 2a \cos \frac{\varphi}{2}, \quad AA_1 = AC \cdot \operatorname{tg} \beta = 2a \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

$$V = S(otr) \cdot AA_1 = 2a^3 \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$



Şəkil 218.

218. Üçbucaqlı MABC piramidasına baxmaq lazımdır (Şəkil 219). Bu piramidanın MO hündürlüyünü tapmaq tələb olunur. M nöqtəsindən üçbucağın tərəflərinə qədər məsafələr bərabər olduğundan, O nöqtəsi ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. Bu nəticə MDO, MEO, MFO üçbucaqlarının bərabərliyindən alınır. Bu üçbucaqların hamısı düz bucaqlıdır, MO bunlarda ortaq tərəfdir və $MD=ME=MF$. Ona görə də



Şəkil 219.

həmin üçbucaqlar bərabərdir. Daxilə

çəkilmiş çevrənin radiusu $r = \frac{S}{p}$

düsturundan tapılır, burada S ilə ABC üçbucağının sahəsi, p ilə isə onun perimetrinin yarısı işarə edilmişdir. Şərtə görə $p=18$, $S=60$ alırıq, onda

$r = \frac{10}{3}$. Düzbucaqlı MDO üçbucağından

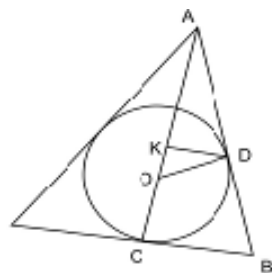
Pifaqor teoreminə görə $MO = \sqrt{MD^2 - OD^2} = \sqrt{\left(\frac{26}{3}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2} = 8 \text{ (sm)}$.

219. Silindrin oturacağıının diametri $2R$ dirsə, onda onun hündürlüyü də $2R$ -ə bərabərdir. Məsələnin şərtinə görə

$$(2R)^2 = \frac{25}{\pi} \quad \text{və} \quad \text{ya} \quad R^2 = \frac{25}{4 \cdot \pi}. \quad S(\text{tam}) = 2\pi R^2 +$$

$$+ 2\pi \cdot R \cdot (2R) = 6\pi R^2 = 6\pi \cdot \frac{25}{4\pi} = 37,5.$$

220. Konus və onun daxilinə çəkilmiş sfera kombinasiyasının ox kəsiyinə baxmaqla (Şəkil 220), belə nəticə çıxarmaq olar ki, axtarılan çevrənin radiusu sfera ilə konusun doğuranının D toxunma nöqtəsindən konusun oxuna qədər olan DK məsafəsinə bərabərdir. Məsələnin şərtinə görə $AB=12$, $BC=3$, onda $AD=12-3=9$. ADK və ABC üçbucaqlarının oxşar-



Şəkil 220

lığından $DK = \frac{9}{4}$ alırıq. Onda axtarılan çevrənin uzunluğu $4,5\pi$ olar.

ΔMOB -dən isə doğuranın uzunluğunu

$$MB = \frac{1}{2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi} = \frac{1}{\sin 2\varphi} \text{ ifadə edək. Onda baxılan konusun}$$

$$\text{yan s\ae thinin sah\ae si } S(\text{yan}) = \pi \cdot \frac{1}{2 \cos \varphi} \cdot \frac{1}{\sin 2\varphi} = \frac{\pi}{2 \sin 2\varphi \cos \varphi}$$

olar.

222. Düzbucaqlı $OMC(\angle OMC = 90^\circ)$

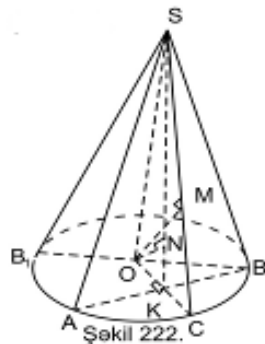
üçbucağından $OC = \frac{1}{\sin \alpha}$, düzbucaqlı

SOC üçbucağından isə $SO=OC \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

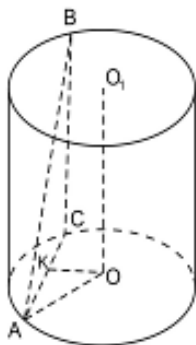
(Şəkil 222). SOK üçbucağında

$\angle KSO = 90^0 - (\alpha + \beta)$, axtarılan məsafə
isə

$$ON = SO \sin[90^\circ - (\alpha + \beta)] = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha}.$$



223. BC doğuranını çəkək (Şəkil 223). $OO_1 \parallel BC$ olduğundan, $OO_1 \parallel (ABC)$. $OK \perp AC$ quraq. $OK \perp OO_1$ və $OO_1 \parallel BC$ olduğundan, $OK \perp BC$. Beləliklə, OK düz xətti ABC müstəvisinin iki kəsişən AC və BC düz xətlərinə



Şəkil 223.

perpendikulyardır. Onda $OK \perp (ABC)$, ona görə də AB və OO_1 düz xətləri arasındakı məsafə OK -ya bərabərdir, yəni $OK=8$ dm. $\triangle AKO$ -dan $AK=\sqrt{10^2-8^2}=6$ (dm), odur ki, $AC = 12$ dm. $\triangle ABC$ -dən $BC = \sqrt{13^2-12^2}=5$ (dm). Beləliklə, $h=5$ dm.

224. $CA \perp AA_1$, $BA \perp AA_1$ olduğundan (Şəkil 224) $\angle CAB = \varphi$ AA_1 tilindəki ikiüzlü bucağın xətti bu-

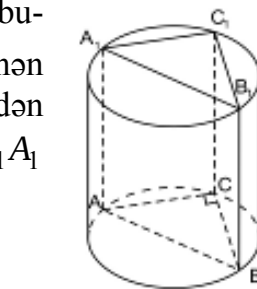
cağıdır və $\angle ACB = 90^\circ$ (diametrə söykənən daxilə çəkilmiş bucaq olduğundan). $\triangle ABC$ -dən $AC = AB \cos \varphi$. Alınmış ACC_1A_1 və ABB_1A_1 kəsikiləri düzbucaqlı olduğundan

$$\frac{S(ACC_1A_1)}{S(ABB_1A_1)} = \frac{AC \cdot AA_1}{AB \cdot AA_1} = \frac{AC}{AB} = \cos \varphi.$$

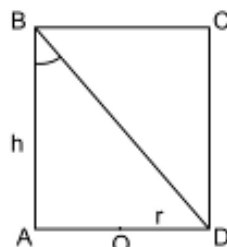
225. Silindrin ox kəsiyi $ABCD$ dördbucaqlısı olsun (Şəkil 225). Silindrin oturacağıının radiusunu r , hündürlüyünü h ilə işarə edək. $\triangle ABD$ -dən $AB = AD \operatorname{ctg} \varphi = 2r \operatorname{ctg} \varphi = h$.

$$S(\text{yan}) = 2\pi r h = 2\pi r \cdot 2r \cdot \operatorname{ctg} \varphi = 4\pi r^2 \operatorname{ctg} \varphi.$$

Məsələnin şərtinə görə $\pi r^2 = S$, beləliklə, $S(\text{yan}) = 4S \cdot \operatorname{ctg} \varphi$.

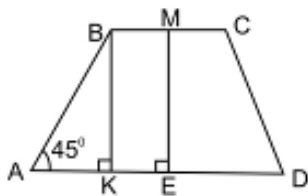


Şəkil 224.



Şəkil 225.

226. APO düzbucaqlı üçbucağında (Şəkil 226) PO hündürlüyü 30° -lik bucaq qarşısındadır, odur ki, $AP=2h$. APB



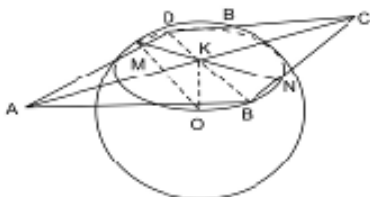
Şəkil 229.

229. Verilmiş kəsik konusun ox kəsiyi bərabəryanlı ABCD trapesiyasıdır (Şəkil 229). BC və AD parçalarının ortalarını M və E ilə işarə edək. Bu nöqtələr kəsik konusun oturmaqlarının mərkəzləridir və $BM = r$, $AE = R$. $BK \perp AD$ çəkək, onda $KE = BM = r$, $AK = R - r$. $\triangle ABK$ -dən $BK = AK = R - r$ (çünki düzbucaqlı üçbucağın iti bucaqları 45° -yə bərabərdir).

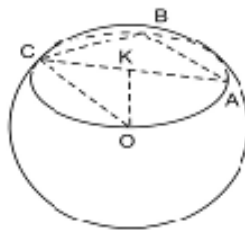
$$S(\text{kəsik}) = S(ABCD) = \frac{BC + AD}{2} \cdot BK = \frac{2r + 2R}{2} (R - r) = R^2 - r^2.$$

230. Rombun tərəfi $AB = x$ olsun (Şəkil 230). Onda $4x^2 = 15^2 + 20^2$, $4x^2 = 625$, $x = 12,5(sm)$. Rombun sahəsini hesablamaq üçün iki düsturdan istifadə etməklə, onun hündürlüyünü tapırıq: $BC \cdot MN = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, $12,5 \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15$, $MN = 12$, onda $MK = 6(sm)$. Kürənin mərkəzindən kəsən müstəviyə qaldırılmış perpendikulyar, kəsiyin mərkəzindən, başqa sözlə rombun diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindən keçir. $\triangle OKM$ -dən $OK = \sqrt{OM^2 - MK^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8(sm)$.

231. $10^2 = 6^2 + 8^2$ olduğundan $\angle ABC = 90^\circ$ (Şəkil 231). $OK \perp (ABC)$, K-sferanın müstəvi ilə kəsiyinin mərkəzidir, $AK = KC = 5$, $\triangle OKC$ -dən $OK = \sqrt{OC^2 - KC^2} = 12$.



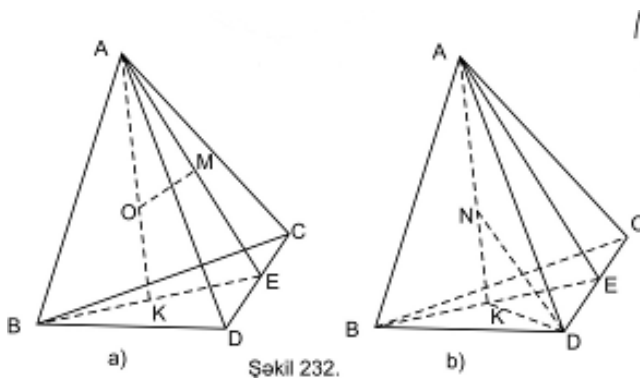
Şəkil 230.



Şəkil 231.

232. Fərz edək ki, ABCD verilmiş piramida, O daxilinə çəkilmiş sferanın mərkəzi, AK-hündürlük, K – daxilə çəkilmiş sferanın BCD üzünə toxunma nöqtəsi, M-sferanın ACD üzünə toxunma nöqtəsidir (Şəkil 232,a). M nöqtəsi AE apofemi üzərindədir, $OM \perp AE$. Daxilə çəkilmiş sferanın radiusunu r ilə işarə edək. Onda $OK=OM=r$. $KE = \frac{1}{3}BE = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

$$\text{AEC-dən } AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$



$$\Delta AKE \text{ -dən } AK = \sqrt{AE^2 - KE^2} = \frac{a}{3}\sqrt{33}. \Delta AOM \sim \Delta AEK \text{ -dan}$$

$$\text{alınır ki, } \frac{OM}{AE} = \frac{EK}{AK} \text{ və ya } \frac{r}{\frac{a\sqrt{33}}{3} - r} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{15}}{2}}, \text{ buradan}$$

$$r = \frac{(3\sqrt{5} - 1)a}{4\sqrt{33}}. \text{ İndi xaricə çəkilmiş sferanın radiusunu tapaq. Bu}$$

sferanın radiusunu R , mərkəzini N ilə işarə edək (Şəkil 232, b).

$$\text{Onda, } NA = ND = R; KD = KB = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\Delta NKD\text{-dən } NK = \sqrt{ND^2 - KD^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}; \Delta AKD\text{-dən}$$

$$AK^2 + KD^2 = AD^2, \left(R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}} \right)^2 + \frac{a^2}{3} = 4a^2. \text{ Bu tənliyi}$$

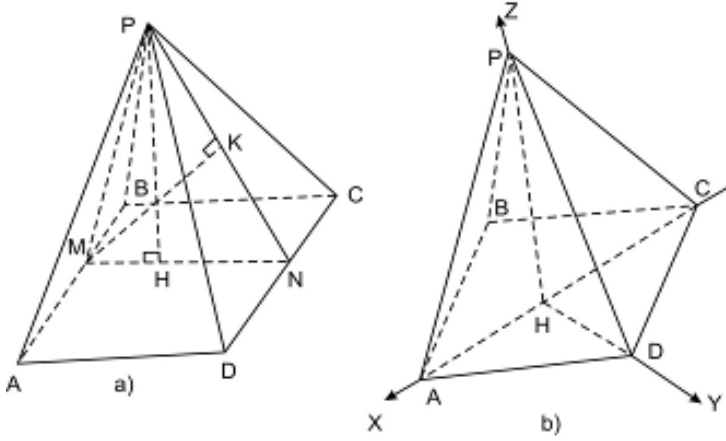
$$\text{həll edib } R = \frac{2a\sqrt{33}}{11} \text{ alırıq.}$$

233. Həllin 3 üsulunu göstəririk.

I. Axtarılan məsafə A nöqtəsindən PCD müstəvisinə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğuna bərabərdir (Şəkil 233, a). Bu perpendikulyarı, ona bərabər olan başqa münasib parça ilə əvəz edək. AB düz xətti PCD müstəvisinə paralel olduğundan, bu düz xətdən PCD müstəvisinə qədər olan məsafə A nöqtəsindən həmin müstəviyə qədər məsafəyə bərabərdir. Bunu, $\rho(A, PCD) = \rho(AB, PCD)$ kimi şərh edək. İndi AB tiliyin orta nöqtəsini M ilə göstərək və qeyd edək ki, $\rho(A, PCD) = \rho(M, PCD)$. M nöqtəsindən PCD üzünə MK perpendikulyarını qurmaq üçün, piramidanın PMN ox kəsiyini göstərib, $MN \perp CD$ çəkək, onda $PN \perp CD$ olar. Aşkardır ki, $CD \perp (PMN)$. PCD üzünü CD parçasından keçir, odur ki, $(PCD) \perp (PMN)$. Bu halda M nöqtəsindən PCD üzünə çəkilmiş perpendikulyar PMN müstəvisi üzərindədir və PMN, PCD müstəvilərinin kəsişmə xəttinə perpendikulyardır. Qeyd edək ki, 233, a şəklində PMN üçbucağı, onun müstəvisi təsvir müstəvisinə paralel olduğundan, təhrif olunmadan təsvir edilmişdir. Odur ki, MKN bucağı da təhrif edilmir: $\angle MKN = 90^\circ$. $\rho(M, PCD) = MK$ -nı hesablayaq.

$$\Delta PHN\text{-dən } PN = \sqrt{PH^2 + HN^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2};$$

$$S(PMN) = \frac{1}{2} MN \cdot PH = \frac{1}{2} PN \cdot MK \Rightarrow MK = \frac{MN \cdot PH}{PN} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{5} = 2,4$$



Şəkil 233.

II. A nöqtəsindən PCD müstəvisinə qədər məsafə APCD piramidasının A təpəsindən PCD üzünə çəkilmiş hündürlüyünün uzunluğuna bərabərdir. Əvvəlcə, PABCD piramidasının həcmi hesablayaq: $V(PABCD) = \frac{1}{3} S(ABCD) \cdot PH = 6$. Bu piramida, oturacaqları ACD, ABC və təpəsi P nöqtəsində olan iki bərabər piramidadan ibarətdir. Deməli, $V(APCD) = \frac{1}{2} V(ABCD) = 3$, lakin $V(APCD) = \frac{1}{3} S(PCD) \cdot \rho(A, PCD) = 3$ (1). Yuxarıda hesabladıq ki, $PN = \frac{5}{2}$, onda $S(PCD) = \frac{1}{2} PN \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 3 = \frac{15}{4}$. Beləliklə, $S(PCD)$ üçün tapılan qiyməti (1)-də yrinə yazıb $\rho(A, PCD)$ -yə nəzərən $\frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} \cdot \rho(A, PCD) = 3$ tənliyini alırıq və buradan $\rho(A, PCD) = \frac{12}{5} = 2,4$.

III. Koordinatlar metodunu tətbiq edək. Düzbucaqlı koordinat sisteminin başlanğıcını ABCD kvadratının H mərkəzində götürək, absis oxunu HA şüası üzrə yönəldək. Onda ordinat oxu HD, üçüncü ox isə HP şüaları üzrə yönəlsin (Şəkil 233, b). Bu

koordinat sistemində, $AC = 3\sqrt{2}$, $HP = 2$ və $HD = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ olduğunu nəzərə almaqla, A, C, D, P nöqtələrinin koordinatlarını tapaq: $A\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}; 0; 0\right)$, $C\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}; 0; 0\right)$, $D\left(0; \frac{3}{2}\sqrt{2}; 0\right)$, $P(0; 0; 2)$.

Müstəvinin, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ parçalarla, tənliyindən istifadə etməklə PCD müstəvisinin tənliyini yazaq.

$$\frac{x}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} + \frac{y}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} + \frac{z}{2} = 1 \Rightarrow -x + y + \frac{3}{4}\sqrt{2}z -$$

$$-\frac{3}{2}\sqrt{2} = 0 \Rightarrow 4x - 4y - 3\sqrt{2}z + 6\sqrt{2} = 0. A(x_0; y_0; z_0) \text{ nöqtəsindən}$$

$$\text{dən PCD müstəvisinə qədər məsafəni } \rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

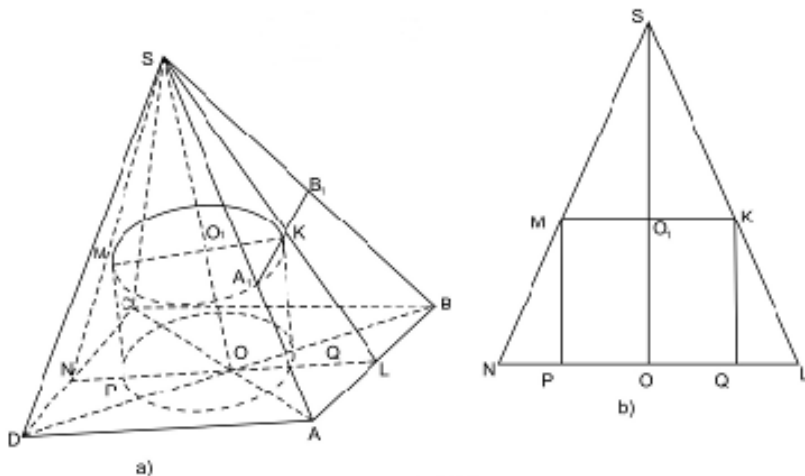
düsturundan istifadə etməklə tapırıq, burada $Ax + By + Cz + D = 0$

müstəvinin ümumi tənliyidir. Baxılan halda, $x_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

$y_0 = z_0 = 0$; $A = 4$, $B = 4$, $C = -3\sqrt{2}$, $D = 6\sqrt{2}$. Onda

$$\rho(A, PCD) = \frac{\left|4 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} + 0 + 0 + 6\sqrt{2}\right|}{\sqrt{16 + 16 + 18}} = \frac{12\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 2,4.$$

234. Bilmək lazımdır ki, piramida düzgündür, silindrin oturacağı isə piramidanın oturacağının daxilinə çəkilmiş dairə deyildir, lakin silindr piramidanın yan üzlərinin hündürlüyünə (apofeminə) toxunur. Bunu əsaslandıraraq. Fərz edək ki, silindr SAB yan üzünə K nöqtəsində toxunur (Şəkil 234, a).



Şəkil 234.

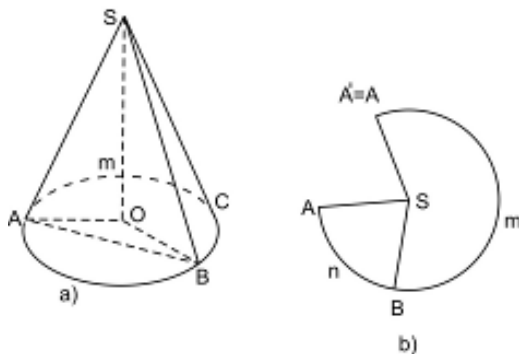
Silindrin yuxarı oturacağı, mərkəzi O , nöqtəsində olan tərəfi A_1B_1 -ə bərabər, kvadratin daxilinə çəkilmiş dairədir. $O_1K \perp A_1B_1$, $SO_1 \perp MK$ çəkək. Onda, $A_1B_1 \perp (SO_1K)$. İndi SL apofemini çəkək. $(SO_1K) \perp A_1B_1$ və $AB \parallel A_1B_1$ olduğundan, SO_1K və SOL müstəviləri paraleldir. Bu müstəvilərin ortaq S nöqtəsi olduğundan isə onlar üst-üstə düşürlər, odur ki, K nöqtəsi SL apofemi üzərindədir (Şəkil 234, a). Beləliklə, silindrin ox kəsiyi, bərabəryanlı SNL üçbucağının daxilinə çəkilmiş $MKQP$ kvadratıdır, burada SN , SL – piramidanın apofemləridir (Şəkil 234, b). Asanlıqla hesablamaq olar ki, $SN = SL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Silindrin oturacağının axtarılan PQ diametrini x ilə işarə edək və qeyd edək ki, şərtə görə $x = PQ = OO_1$. SMK və

SNL üçbucaqlarının oxşarlığından $\frac{ML}{MK} = \frac{SO}{SO_1}$ və ya

$$\frac{a}{x} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} - x} \text{ alınır. Buradan } x = a(\sqrt{2} - 1).$$

235. Fərz edək ki, SA və SB doğuranları qarşılıqlı perpendikulyardır (Şəkil 235, a). Qeyd edək ki, konusun hündürlüyü böyüdükcə, onun ox kəsiyi təpəsindəki müstəvi bucağı kiçilir, hər hansı qarşılıqlı perpendikulyar doğuranı olan konus isə kifayət qədər alçaq görünür. Verilmiş konusun yan səthinin ABA' açılışına baxaq (Şəkil 235, b). O, qövsünün uzunluğu oturacaq çevrəsinin uzunluğuna bərabər olan, dairə sektorudur.



Şəkil 235.

Onu da qeyd edək ki, həmin açılış, konusun hündürlüyü kiçildikcə onun yan səthinin sahəsi radiusu doğuranın uzunluğuna bərabər olan dairənin sahəsinə yaxınlaşdığından, sektordan ibarətdir. Məsələnin şərtinə görə $\angle ASB$ və $\angle SA'mB$ sektorlarının sahələri nisbəti 1:2 -yə bərabərdir, odur ki, $\angle ASB : \angle SA'mB = 1:2$ (1) yazı bilərik. (1) şərti ödənildiyindən $\angle ASB$ qövsünün dərəcə ölçüsü 120° -yə bərabərdir, AB vətəri isə çevrə daxilində çəkilmiş düzgün üçbucağın oturacağıdır. Konusun oturacağının radiusu $AO = x$ olarsa, onda $AB = x\sqrt{3}$. ASB bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqdır (lakin bu konusun ox kəsiyi deyil). Pifaqor teoremindən bir neçə dəfə istifadə etməklə

$$AS^2 + SB^2 = AB^2, \quad 2AS^2 = 3x^2, \quad AS^2 = \frac{3x^2}{2};$$

$$AO^2 + SO^2 = AS^2, \quad x^2 + h^2 = \frac{3x^2}{2}, \quad x^2 = 2h^2 \quad \text{yaza bilərik.}$$

Onda $V = \frac{1}{3}\pi \cdot x^2 h = \frac{2}{3}\pi h^3$. Belə məsələlərin həlli ilə əlaqədar

konusun təsviri alqoritmini düzgün yerinə yetirməyə adət etmək lazımdır. Əvvəlcə konusun oturacağıının təsviri olan ellips, onun O mərkəzindən SO hündürlüyü, S nöqtəsindən ellipsə SA, SC toxunanları çəkilir. Belə bir fakta xüsusi diqqət olunur ki, AC – konusun oturacağıının diametri, ASC üsbucağı isə ox kəsiyi deyildir.

236. Kürənin diametri - MO_1 , MC - isə onun böyük dairəsinin vətəri olsun (Şəkil 236). $\Delta MCO_2 \sim MO_1C$ -dən

$$MC^2 = MO_1 \cdot MO_2. \text{ Şərtə görə } MQ=H.$$

$$MC = x \text{ işarə edək. Onda } MO_2 = \frac{x^2}{H}.$$

MCO_2 və MAO_1 üçbucaqlarının oxşarlığından $\frac{MC}{MO_2} = \frac{MA}{MO_1}$ və ya $AM = \frac{2H}{\sqrt{3}}$

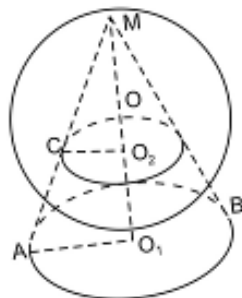
$$\text{olduğundan, } \frac{x^2}{H} = \frac{2H}{H \cdot \sqrt{3}}, \quad \text{Onda}$$

$$x = \frac{H\sqrt{3}}{2}. \text{ Şərtə görə, konus bərabərtərəflidir, odur ki,}$$

$$\angle MAO_1 = 60^0, \quad \text{buna görə də } \angle MCO_2 = 60^0. \quad \text{Onda,}$$

$$CO_2 = MC \cdot \sin 30^0 = \frac{H\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{H\sqrt{3}}{4}. \quad \text{Radiusu } CO_2 \text{ olan}$$

$$\text{çevrənin uzunluğu } \frac{\pi H\sqrt{3}}{2} \text{ olar.}$$



Şəkil 236.

Bu məsələdə baxılan halda kürə və konus səthlərinin kəsişmə xəttinin çevrə olduğunu gördük. 236-cı şəkil təkcə bu məsələnin deyil, sonrakı məsələnin də həllinə kömək edir.

236). $\frac{MC}{MA} = \frac{MO_2}{MO_1} = \frac{CO_2}{AO_1}$ alınır. Böyük və kiçik konusların yan

ilə hesablanır. Şərtə görə $\frac{\pi \cdot CO_2 \cdot MC}{\pi AO_1 \cdot MA} = \frac{1}{2}$. Buradan, $\frac{MC^2}{MA^2} = \frac{1}{2}$

вə ya $\frac{MC}{MA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, онда $\frac{MO_2}{MO_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

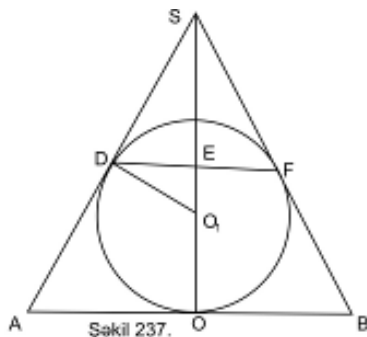
MO_1 - böyük dairənin diametri olduğundan MCO_1 düzbucaqlı üçbucaqdır, C nöqtəsi isə konusun doğurunu və sfera üzərindədir. Düzbucaqlı üçbucaqda metrik münasibətdən istifadə etməklə

$$MC^2 = MO_1 \cdot MO_2 \quad \text{alırıq.} \quad \text{Buradan,} \quad MO_2 = \frac{MO_1}{\sqrt{2}},$$
$$MA^2 = 2MC^2 \text{ olduğunu nəzərə almaqla, } \frac{MA^2}{2} = \frac{MO_1^2}{\sqrt{2}} \text{ və ya}$$
$$MA^2 = \sqrt{2} \cdot MO_1^2 \text{ nəticəsinə gəlirik. Pifaqor teoreminə görə}$$

$$AO_1^2 = MA^2 - MO_1^2 = \sqrt{2} \cdot MO_1^2 - MO_1^2 = MO_1^2(\sqrt{2} - 1).$$

Beləliklə, $\frac{AO_1}{MO_1} = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

238. Daxilə çəkilmiş kürənin mərkəzi konusun oturacağından və onun yan səthindən eyni uzaqlıqda olan nöqtədir, odur ki, kürənin mərkəzi konusun hündürlüyü üzərindədir. Konusun ox kəsiyinə baxmaqla kifayətlənmək olar (Şəkil 237). Fərz edək ki, ASB konusun ox kəsiyi, O_1 -daxilə çəkilmiş kürənin mərkəzi, D , F – kürənin konusun yan səthinə toxunma nöqtələri, DE –daxilə



çəkilmiş kürənin konusun yan səthinə toxunduğu xətt olan çevrənin radiusudur. Asanlıqla hesablamaq olar ki, $AO=8$. SDO_1

və SOA üçbucaqlarının oxşarlığından $\frac{CD}{SO} = \frac{DO_1}{AO} = \frac{SO_1}{SA}$ alınır.

$DO_1 = OO_1 = x$ işarə edək. Onda $\frac{x}{8} = \frac{15-x}{17}$. Buradan

$x = DO_1 = \frac{24}{5}$. Onda $SO_1 = SO - OO_1 = 15 - \frac{24}{5} = \frac{51}{5}$. SDO_1

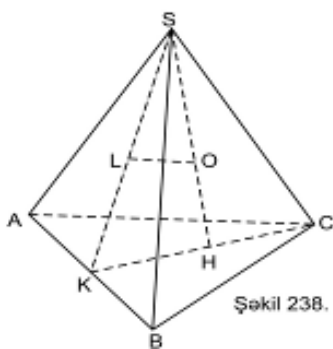
düzbucaqlı üçbucağından $DO_1^2 = SO_1 \cdot EO_1$, $EO_1 = \frac{576 \cdot 5}{25 \cdot 51} = \frac{192}{85}$;

$DE^2 = DO_1^2 - EO_1^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 - \left(\frac{192}{85}\right)^2$, $DE = \frac{72}{17}$. Onda ra-

diusu məlum çevrənin uzunluğu $2\pi \cdot \frac{72}{17} = \frac{144\pi}{17}$ olar.

Qeyd: DE parçasının uzunluğunu kalkulyatorun tətbiqi olmadan hesablamaq üçün kök altındakı $\left(\frac{24}{5}\right)^2 - \left(\frac{192}{85}\right)^2$ ifadəsinin vuruqlarını yazmalı.

239. Verilmiş piramidanın mərkəzi O olsun (Şəkil 238).



Şəkil 238.

Aşkardır ki, O nöqtəsi piramidanın hündürlüyü üzərindədir və daxilə çəkilmiş, habelə məsələdə deyilən sferaların mərkəzidir. Daxilə çəkilmiş kürənin piramidanın üzlərinə toxunma nöqtələrini H, L ilə işarə edək və əvvəlcə yan üzün SK hündürlüyünü, sonra isə piramidanın SH hündür-

lüyünü tapaq: $SK = \frac{AS\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, onda

$KH = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ və $SH = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{6}$. LSO və

HSK üçbucaqlarının oxşarlığından $\frac{OL}{KH} = \frac{SO}{SK}$ və ya

$$\frac{OL}{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6} - OL}{6\sqrt{3}} \text{ alınır. Buradan daxilə çəkilmiş kürənin}$$

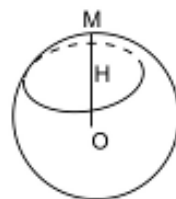
radiusunu tapırıq: $OH = OL = \sqrt{6} < 3$.

Hesablamanın bu nəticəsinin xüsusi əhəmiyyəti vardır. Alınmış bu nəticəni düzgün şərh etmək lazımdır. Daxilə çəkilmiş kürənin radiusu verilmiş kürənin radiusundan kiçikdir. Odur ki, tetraedrin hər bir üzündən kənara kürə seqmentləri çıxır. Fərz edək ki, kürə seqmentinin mərkəzi H-dır (Şəkil 239). Kürə seqmentinin HM hündürlüyü $OM - OH$ fərfinə bərabərdir, burada OM – verilmiş kürənin radiusudur, yəni $OM = 3$. Onda $HM = 3 - \sqrt{6}$. Bir kürə seqmentinin səthinin sahəsi $2\pi \cdot 3(3 - \sqrt{6})$ -dir, dörd belə seqmentinin səthinin sahəsi isə $24\pi(3 - \sqrt{6})$ olar. Verilmiş kürə səthinin sahəsi 36π , onun piramidanın daxilində qalan hissəsinin səthinin sahəsi isə $36\pi - 24\pi(3 - \sqrt{6}) = 24\pi\sqrt{6} - 36\pi$ dir.

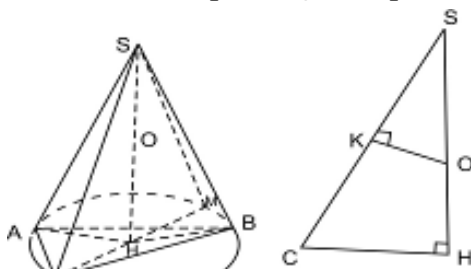
240. Şəkildə kürəni təsvir etməyib, yalnız $SA \perp SB$, $SB \perp SC$, $SA \perp SC$ və $SH \perp (ABC)$ olan konusu göstəririk (Şəkil 240). Konusun doğuranını x ilə işarə edək, onda bərabəryanlı ASB, BSC, ASC düzbucaqlı üçbucaqlarından

$AB = BC = AC = x\sqrt{2}$ alarıq. Görünür ki, konusun oturacağına düzgün ABC üçbucağı çəkilmişdir. $AB = AH\sqrt{3}$, onda axtarılan radius

$$AH = CH = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{6}}{3}$$



Şəkil 239.



Şəkil 240. a)

olur. Düzbucaqlı ACH üçbucağından $SH = \sqrt{x^2 - \frac{2x^2}{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

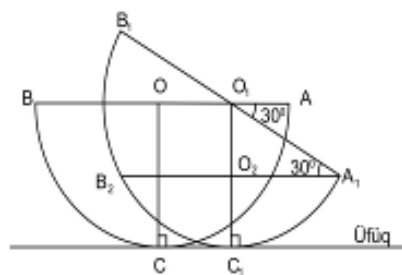
Konusun MSC ox kəsiyinə baxaq, burada O konusun daxilinə çəkilmiş verilmiş kürənin mərkəzidir. $OK \perp SC$ çəkək və qeyd edək ki, şərtə görə $OK = R$ (Şəkil 240, b). SOK və SCH

üçbucaqlarının oxşarlığından $\frac{OK}{HC} = \frac{SO}{SC}$ və ya $\frac{R}{\frac{x\sqrt{6}}{3}} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{3} - R}{x}$

alırıq. Buradan konusun doğuranının uzunluğunun $x = \frac{R\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{2}}$

olduğunu tapırıq. Onda $AH = \frac{R\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = R(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

241. Fərz edək ki, ABC kasanın ilk vəziyyətidir (suyun AB səviyyəsi üfüqi xəttə paraleldir). Kasa 30° əyildikdə o, $A_1B_1C_1$ vəziyyətində olur (Şəkil 241, suyun qalan A_1B_2 səviyyəsi üfüqü xəttə paraleldir). Suyun ilk həcmi V , qalan həcmi isə V_1 ilə işarə edək. Onda tökülən suyun



Şəkil 241.

həcmi $V - V_1$ olar. Məsələnin şərtinə görə $\frac{V - V_1}{V} = 1 - \frac{V_1}{V}$

nisbətini tapmaq tələb olunur. Suyun ilk həcmi yarımkürənin $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ həcminə, qalan suyun həcmi isə $A_1B_2C_1$ kürə

seqmentinin $V_1 = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$ həcminə bərabərdir, burada R –

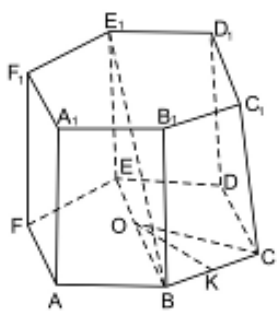
kürənin radiusu, h – kürə seqmentinin hündürlüyüdür. $\Delta O_2O_1A_1$ –

dən $O_2O_1 = \frac{R}{2}$ tapırıq, onda $h = R - O_2O_1 = \frac{R}{2}$. Beləliklə,

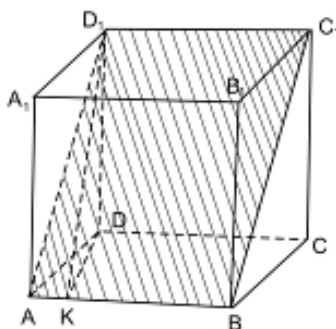
$$V_1 = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \pi \cdot \frac{R^2}{4} \left(R - \frac{R}{6} \right) = \frac{5}{24} \pi R^3. \text{ Onda}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{5}{24} \pi R^3 : \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{5}{16} \text{ və } 1 - \frac{V_1}{V} = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}.$$

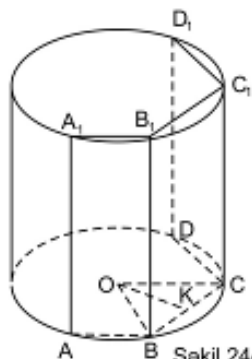
242. Yalnız prizmanı təsvir etmək kifayətdir (Şəkil 242). a) $EE_1 = 4\sqrt{3}$, $BE = 4$, $OB = 2$, $OK = \sqrt{3}$. $S(\text{prizm.otur}) = 6\sqrt{3}$, $V(\text{prizm}) = 72$; b) $V(\text{sil.xaric}) = 16\pi\sqrt{3}$; c) $V(\text{sildaxil}) = 12\pi\sqrt{3}$.



Şəkil 242.



Şəkil 243.



Şəkil 244.

243. ABC_1D_1 kəsiyi paraleloqramdır, çünki onun AB və D_1C_1 qarşı tərəfləri paraleldir (Şəkil 243). $DK \perp AB$ çəkək, onda üç perpendikulyar haqqında teoremə görə $AB \perp D_1K$. D_1KD - kəsiyin müstəvisi ilə oturacaq müstəvisi arasındakı ikiüzlü bucağın xətti bucağıdır. Odur ki, $\angle D_1KO = \beta$, $KD = KD_1 \cdot \cos \beta$. $S(ABCD) = AB \cdot KD = AB \cdot KD_1 \cdot \cos \beta = Q \cos \beta$. Şərtə görə $AB = a$ olduğundan $KD = \frac{Q \cos \beta}{a}$. ΔD_1DK -dan

$$DD_1 = KD \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{Q \cdot \sin \beta}{a}. V = S(ABCD) \cdot DD_1 = \frac{Q^2 \cdot \sin 2\beta}{2a}$$

244. Şəkildə silindrin daxilinə çəkilmiş düzgün n -bucaqlı prizmanın üç yan üzü təsvir edilmişdir (Şəkil 244). $CC_1 = h$, $OB = r$, p - prizmanın oturacağıının perimetri, S - prizmanın oturacağıının sahəsi olsun. O nöqtəsindən BC tərəfinə OK perpendikulyarını çəkib, alınan OKB üçbucağından

$$\angle BOK = \frac{180^0}{n}, \quad OK = r \cos \frac{180^0}{n}, \quad BK = r \sin \frac{180^0}{n} \text{ alırıq. Odur}$$

$$\text{ki, } BC = 2r \sin \frac{180^0}{n}. \quad p = n \cdot 2r \sin \frac{180^0}{n}, \quad S = \frac{1}{2} \cdot p \cdot OK = \frac{1}{2} nr^2 \sin \frac{360^0}{n};$$

$$\frac{V(\text{priz})}{V(\text{sil})} = \frac{S \cdot h}{\pi r^2 h} = \frac{\frac{1}{2} nr^2 \sin \frac{360^0}{n}}{\pi r^2} = \frac{n}{2\pi} \sin \frac{360^0}{n}$$

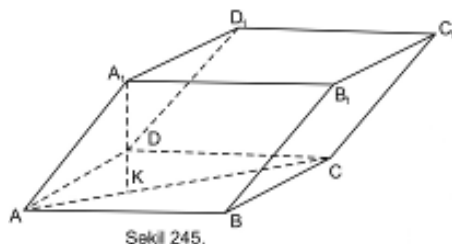
245. AA_1 tilinin proyeksiyası AK parçasıdır (Şəkil 245). $\angle A_1AK = \alpha$ olsun. Onda

$$\cos 60^0 = \cos \alpha \cdot \cos 30^0,$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\triangle AA_1K \text{ -dan } A_1K = a \sin \alpha = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$V = a^2 \sin 60^0 \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}.$$



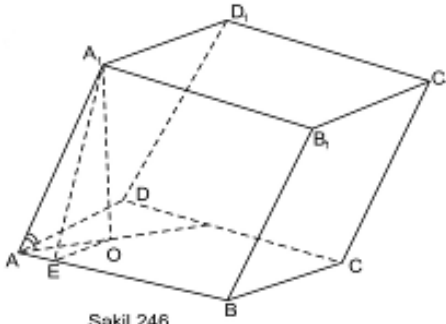
246. Həllin iki üsulunu verək.

I. Fərz edək ki, AA_1 tili AB və AD tərəfləri ilə φ -yə bərabər iti bucaq əmələ gətirir (Şəkil 246). Onda AA_1 tilinin $ABCD$ oturacaq müstəvisi üzərindəki proyeksiyası DAB bucağının tənböləni olan AO parçasıdır. $OE \perp AB$ çəkək. Onda üç perpendikulyar haqqında teoremə görə $AB \perp A_1E$. $\triangle AA_1E$ -dən $AE = c \cdot \cos \varphi$, $A_1E = c \cdot \sin \varphi$. $\triangle AEO$ -dən $EO = AE = c \cdot \cos \varphi$, çünki $\angle OAE = 45^0$. $\triangle A_1EO$ -dan

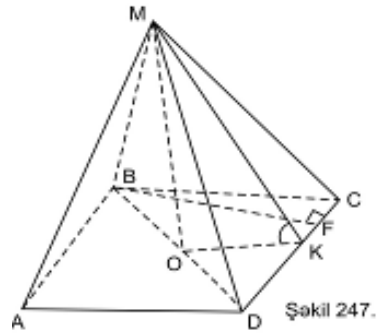
$$A_1O = \sqrt{A_1E^2 - EO^2} = \sqrt{c^2 \sin^2 \varphi - c^2 \cos^2 \varphi} = c\sqrt{-\cos 2\varphi}.$$

φ - kor bucaq olan halda da həmin nəticə alınır.

II. Fərz edək ki, $\angle A_1AO = x$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \varphi$ (Şəkil 246). Şərtə görə $\angle AOB = 45^\circ$, odur ki, $\cos \varphi = \cos x \cdot \cos 45^\circ$, buradan $\cos x = \sqrt{2} \cos \varphi$, $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - 2\cos^2 \varphi} = \sqrt{-\cos 2\varphi}$; $A_1O = AA_1 \sin x = c\sqrt{-\cos 2\varphi}$; $V = abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$.



Şəkil 246.

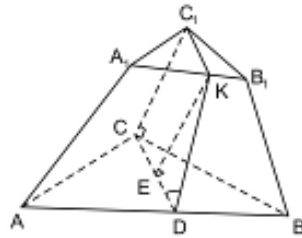


Şəkil 247.

247. Şərtə görə piramidanın oturacağı bitişik ikiüzlü bucaqları bərabərdir, odur ki, piramidanın təpə nöqtəsi rombun daxilinə çəkilmiş dairənin mərkəzinə, başqa sözlə onun diaqonallarının kəsişmə nöqtəsinə proyeksiyalanır (Şəkil 247). MKO bucağı DC tilindəki ikiüzlü bucağın xətti bucağıdır. $\triangle MOK$ bərabəryanlı olduğundan, $MO=OK=1,5$ sm. Rombun BF hündürlüyünü çəkək. $BF=2OK=3$ sm; $S(ot.) = 6 \cdot 3 = 18(sm^2)$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 1,5 = 9(sm^3).$$

248. Düz bucaqları C və C₁ olan ABC və A₁B₁C₁ üçbucaqları verilmiş kəsik piramidanın oturacağı olsun (Şəkil 248). Şərtə görə piramidanın iki yan üzü oturacaq müstəvisinə perpendikulyardır, odur ki, CC₁ tili də oturacaq müstəvisinə



Şəkil 248

perpendikulyardır, $CD \perp AB$, $C_1K \perp A_1B_1$ çəkək, onda KDC bucağı AB tilindəki ikiüzlü bucağın xətti bucağıdır və O, φ -yə bərabərdir. Bərabəryanlı düzbucaqlı ACB üçbucağında CD hündürlüyü, eyni zamanda, hipotenuza çəkilmiş mediandır, odur ki, $CD = \frac{AB}{2} = \frac{m}{2}$.

Analoji olaraq, $C_1K = \frac{n}{2}$. İndi $KE \perp CD$ çəkək, onda

$$ED = CD - CE = \frac{m-n}{2}. \quad \Delta KED\text{-dən} \quad KE = \frac{m-n}{2} \operatorname{tg} \varphi;$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} m \cdot \frac{m}{2} = \frac{m^2}{4}; \quad S(A_1B_1C_1) = \frac{n^2}{4}. \quad \text{Kəsik piramidanın}$$

$V = \frac{1}{3} h(S + S_1 + \sqrt{SS_1})$ həcm düsturundan istifadə edək. Baxılan

halda, $S = \frac{m^2}{4}$, $S_1 = \frac{n^2}{4}$, $h = \frac{m-n}{2} \operatorname{tg} \varphi$, odur ki,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{m-n}{2} \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} + \sqrt{\frac{m^2}{4} \cdot \frac{n^2}{4}} \right) = \frac{1}{24} (m^3 - n^3) \operatorname{tg} \varphi$$

249. Kürənin radiusunu R ilə işarə edək, onda $AC = CB = \frac{R}{2}$

(Şəkil 249). Kürələrin ortaq hissəsi hündürlükləri $h = \frac{R}{2}$ olan iki

bərabər kürə seqmentindən ibarətdir. $V(\text{seq.}) = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right)$,

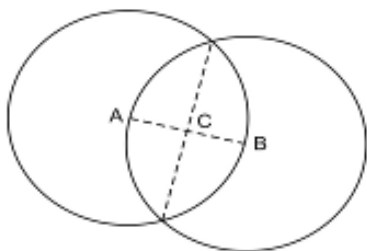
$$h = \frac{R}{2} \quad \text{olduqda} \quad V(\text{seq.}) = \pi \cdot \frac{R^2}{4} \left(R - \frac{1}{3} \cdot \frac{R}{2} \right) = \frac{5\pi R^3}{24}. \quad \text{Onda}$$

$$V(\text{ortaq.hisse}) = \frac{5\pi R^3}{12}; \quad \frac{V(\text{ortaq hisse})}{V(\text{kure})} = \frac{5}{16}.$$

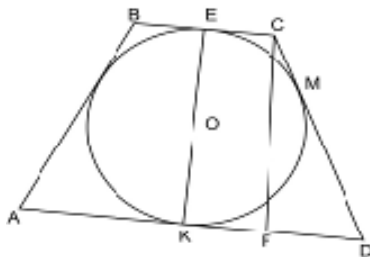
250. Daxilinə kürə çəkilmiş kəsik konusun ox kəsiyini təsvir edək (Şəkil 250). $CE = r_1$, $KD = r$ olsun, onda $CM = r_1$, $DM = r$, $DC = r + r_1$ olar. $CF \perp KD$ çəkək, onda $FD = r - r_1$. ΔCDF -dən $CF = \sqrt{(r + r_1)^2 - (r - r_1)^2} = 2\sqrt{r r_1}$. Kürənin radiusu $R = \frac{EK}{2} = \frac{CF}{2} = \sqrt{r r_1}$. Kəsik konusun və kürənin həcm düsturlarından istifadə edib

$$\frac{V(\text{kes.konus})}{V(\text{kure})} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot 2\sqrt{r r_1}(r^2 + r r_1 + r_1^2)}{\frac{4}{3}\pi(\sqrt{r r_1})^3} = \frac{r^2 + r r_1 + r_1^2}{2r r_1}$$

alırıq.



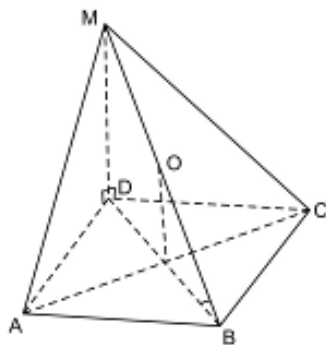
Şəkil 249.



Şəkil 250.

251. Fərz edək ki, piramidanın MD tili onun ABCD oturacaq müstəvisinə perpendikulyardır (Şəkil 251). Kürənin O mərkəzi A və C təpələrindən eyni məsafədədir, odur ki, MDB müstəvisi üzərində yerləşir. MDB düzbucaqlı üçbucaqdır, odur ki, onun xaricinə çəkilmiş çevrənin O mərkəzi MB=2R hipotenuzunun orta nöqtəsidir. Onda

$$S(MDC) = S(MDA) = \frac{1}{2} MD \cdot CD =$$



Şəkil 251.

$$= \frac{1}{2}(2R \sin \alpha) \cdot \left(\frac{2R \cos \alpha}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} R^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha. \text{ Üç perpendikulyar haqqında teoremə görə } MC \perp BC, \text{ odur ki,}$$

$$S(MCB) = S(MAB) = \frac{1}{2} MC \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{MD^2 + DC^2} \cdot BC =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{4R^2 \sin^2 \alpha + 2R^2 \cos^2 \alpha} \cdot \sqrt{2} \times R \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} R^2 \cos \alpha \sqrt{2 + 2 \sin^2 \alpha}.$$

Onda yan səthin sahəsi

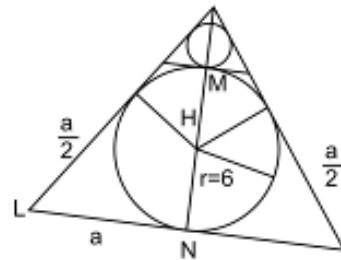
$$S(\text{yan}) = 2 \left(\sqrt{2} R^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} R^2 \cos \alpha \sqrt{2 + 2 \sin^2 \alpha} \right) = \sqrt{2} R^2 \cos \alpha \left(2 \sin \alpha + \sqrt{2 + 2 \sin^2 \alpha} \right)$$

$$R = \sqrt{17}, \quad \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{8}{17}} \quad \text{götürüb} \quad (\text{onda} \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{8}{17}},$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{17}}, \quad \text{çünki } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}). S_{\text{yan}} = \sqrt{2} \cdot 17 \cdot \frac{3}{\sqrt{17}} \left(2 \sqrt{\frac{8}{17}} + \sqrt{\frac{50}{17}} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{17} \cdot 3 \cdot \frac{4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = 54 \text{ alırıq.}$$

252. a) Piramidanın, H hündürlüyündən onun oturacağına a tilinə paralel, müstəvi ilə kəsiyinə baxaq (Şəkil 252). Bu müstəvi iki yan üzrə perpendikulyardır (çünki, H hündürlüyünə habelə a tilinə perpendikulyar olan oturacaqda ki til onların hər ikisinin üzərindədir), deməli kürənin hündürlüyün üzərində olan mərkəzi ilə birlikdə onun həmin iki yan üzrə toxunma nöqtələri də kəsiyin üzərindədir. Beləliklə, kəsikdə hipotenuzu a olan bərabər-yanlı düzbucaqlı üçbucaq və onun daxilinə çəkilmiş radiusu 6 olan çevrə alınır.



Şəkil 252.

Pifaqor teoreminə görə yan tərəfi $\frac{a}{2} + 6$ və hipotenuzu a olan bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqdan

$$\left(\frac{a}{2} + 6\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + 6\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{a^2}{4} + 36 + 6a\right) = a^2 \Leftrightarrow$$

$$= \frac{a^2}{2} - 12a - 72 = 0 \Leftrightarrow a = 2(6 \pm 6\sqrt{2}), \quad a > 0 \quad \text{olduğundan}$$

$$a = 12(1 + \sqrt{2}), \text{ buradan oturacağın sahəsi } a^2 = 144(3 + 2\sqrt{2}).$$

253. Məsələdə söhbət gedən kəsiyi quraq. Həmin kəsiyin müstəvisi (onu T ilə işarə edək). AC -yə paralel olduğundan onun $ABCD$ oturacaq müstəvisi ilə NP kəsişmə xətti də AC -yə paraleldir (Şəkil 253, a). Analoji olaraq $MQ \parallel AC$. Fərz edək ki, L və K uyğun olaraq T müstəvisi ilə BB_1 və DD_1 düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsidir. K nöqtəsinin DD_1 düz xətti üzərində vəziyyətini tapaq. Bunun üçün BB_1D_1D diaqonal kəsiyi müstəvisinə baxaq (Şəkil 253, b). KL ilə NP və MQ düz xətlərinin kəsişmə nöqtələrini uyğun olaraq E və G ilə işarə edək, H isə G nöqtəsinin kubun aşağı oturacağı üzərində proyeksiyası

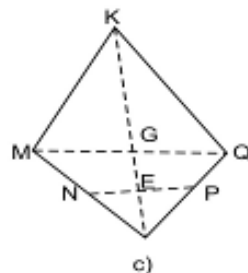
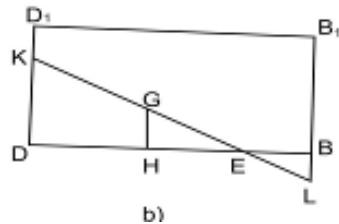
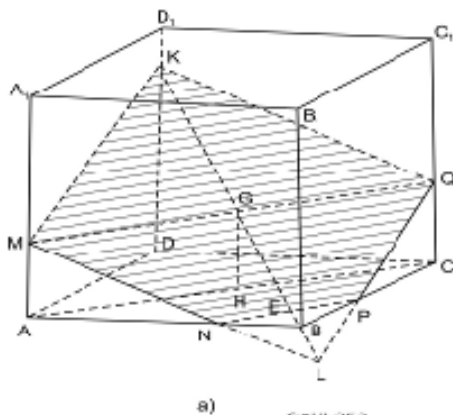
olsun. Onda $GH = MA = \frac{1}{3}$; $\triangle NBP$ -dən $BE = NB \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Aşkardır ki, $DE = BD - BE = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{7}{8}\sqrt{2}$,

$$HE = DE - DH = \frac{7\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{8}\sqrt{2}. \quad \text{KDE} \quad \text{və} \quad \text{GHE}$$

üçbucaqlarının oxşarlığından $KD = \frac{GH \cdot DE}{HE} = \frac{7}{9}$. Beləliklə,

axtarılan kəsik $MNPQK$ (Şəkil 253, a,c) beşbucaqlısıdır. Onun sahəsi MKQ bərabəryanlı üçbucağı ilə $MQPN$ trapesiyasının sahələri cəminə bərabərdir:

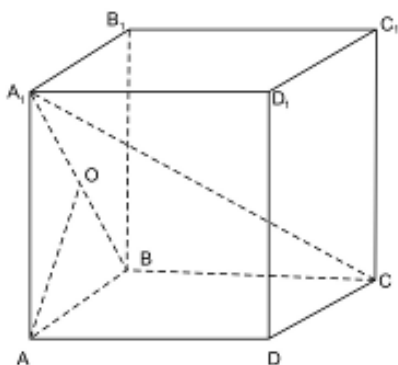


$$S(MNPQK) = \frac{1}{2} [MQ \cdot KG + (MQ + NP)GE] = \frac{1}{2} (MQ \cdot KE + NP \cdot GE).$$

$$\text{Burada } MQ = AC = \sqrt{2}; NP = NB\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}; KE = \sqrt{DE^2 + KD^2} = \frac{7}{12}\sqrt{226};$$

$$GE = \sqrt{HE^2 + GH^2} = \frac{3}{72}\sqrt{226}. \text{ Odur ki, } S = \frac{\sqrt{113}}{72} \left(7 + \frac{3}{4} \right) = \frac{31}{288}\sqrt{113}.$$

254. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubuna baxaq (Şəkil 254). Fərz edək ki, onun $A_1 C$ diaqonalı düz dairəvi silindrin oxudur. Aşkardır ki, silindrik səth kubun A_1 və C təpələrindən çıxan tillərinə toxuna



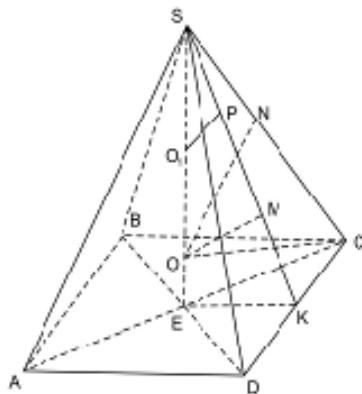
Şəkil 254.

bilməz. Kubun qalan ixtiyari, $A_1 C$ diaqonalı ilə çarpazlaşan tilləri, oturacağının radiusu bu tillərin və $A_1 C$ -in ortaq perpendikulyarı olan belə silindrin səthinə toxunur. Müəyyənlik üçün AD tilini götürək. Göstərilən ümumi perpendikulyarın r -uzunluğunu, başqa sözlə çarpazlaşan $A_1 C$ və AD düz xətləri arasındakı məsafəni tapmaq

tələb olunur. Bu məsafə A nöqtəsindən (AD tilinin ona perpendikulyar AA_1B_1B müstəvisi üzərindəki proyeksiyası) A_1C -in həmin üz üzərindəki proyeksiyası olan, A_1B parçasına qədər məsafəyə bərabərdir: $r = AO$, burada O nöqtəsi AA_1B_1B kvadratının mərkəzidir. Odur ki, $AO = \frac{1}{2} A_1B = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Qeyd edək ki, həmin nəticəni kubun A_1C diaqonalı ilə çarpaz olan ixtiyari tili üçün də almaq olar, başqa sözlə göstərilən silindrik səthi bütün belə tillərin hamısına toxunur.

255. Piramidanın oturacağı $ABCD$, S – onun təpə nöqtəsi, K və E uyğun olaraq DC və AC parçalarının orta nöqtələri, O_1 -piramidanın daxilinə çəkilmiş kürənin mərkəzi, r – onun radiusu, M və N nöqtələri O nöqtəsindən SK və SC parçalarına çəkilmiş perpendikulyarların oturacaqları, $P \in SK$ və $O_1P \perp SK$, $SE = h$ olsun (Şəkil 255). Onda $OM = OE = r$, $OS = OC = 12$, $ON = 4\sqrt{2}$, $SN = NC$.



Şəkil 255.

$$SN = \sqrt{OS^2 - ON^2} = \sqrt{144 - 32} = 4\sqrt{7},$$

$$SC = 8\sqrt{7}. \angle ESK = \alpha, \angle ESC = \beta$$

işarə edək. Onda $\cos \beta = \frac{SN}{SO} = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $h = SE = SC \cdot \cos \beta = \frac{56}{3}$,

$$EC = SC \sin \beta = \frac{8\sqrt{14}}{3}, \quad EK = \frac{EC}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{7}}{3}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{EK}{SE} = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{7}{8}}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ O nöqtəsindən piramidanın yan üzünə}$$

qədər məsafə OM -ə bərabərdir və $OM = SO \cdot \sin \alpha = 3\sqrt{2}$. Qəbul

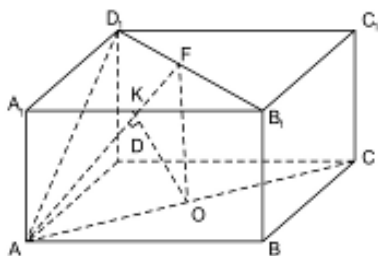
etdiyimiz işarəyə görə $O_1P = r$, ΔSO_1P -dən $\frac{r}{h-r} = \sin \alpha$,

$$\text{buradan } r = \frac{h \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{8}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

256. Verilmiş paralelepipedin ACC_1A_1 kəsiyinə baxaq (Şəkil 256, a, b). AOF üçbucağında: $OF = 3$, $AO = 3\sqrt{2}$, $AF = 3\sqrt{3}$. Axtarılan radius bu üçbucağın OK hündürlüyüdür. Bu üçbucağın sahəsi bir tərəfdən $\frac{1}{2}AO \cdot OF$, digər tərəfdən isə $\frac{1}{2}AF \cdot OK$ -dir.

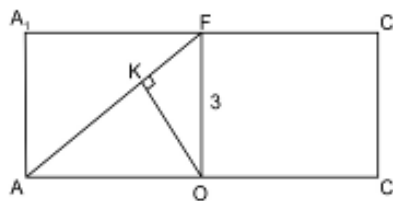
Odur ki, $AO \cdot OF = AF \cdot OK$ buradan

$$OK = \frac{AO \cdot OF}{AF} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3}{3\sqrt{3}} = \sqrt{6}.$$



a)

Şəkil 256.



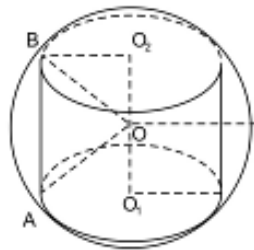
b)

$$257. V(\text{sil}) = S(\text{otr}) \cdot H = \pi r^2 \cdot AB, V(\text{kure}) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

olduğundan

$$\frac{4V(\text{sil})}{V(\text{kure})} = \frac{4\pi r^2 \cdot AB}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3r^2 \cdot AB}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3r^2 \cdot AB}{R^2} \quad (1).$$

İndi kürənin və silindrin oturacağının radiuslarını tapaq (Şəkil 257). AOB üçbucağından $R=4$ tapırıq (çünki bu üçbucaq bərabərtərəflidir). AOO_1 üçbucağından $r = 4 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$. Alınmış



Şəkil 257

qiymətləri (1)-də yerinə yazıb $\frac{4V(\text{sil})}{V(\text{kure})} = \frac{3r^2 AB}{R^3} = \frac{3 \cdot 12 \cdot 4}{64} = 2,25$

alırıq.

258. Düzbucaqlı AC_1C və DB_1B üçbucaqlarından rombun diaqonallarının uzunluqlarını tapırıq (Şəkil 258):

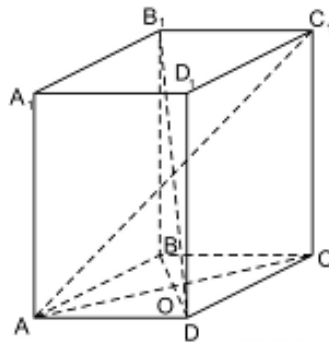
$$AC = \sqrt{AC_1^2 - CC_1^2} = \sqrt{64 - 4} = \sqrt{60};$$

$$BD = \sqrt{DB_1^2 - BB_1^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}.$$

Fərz edək ki, rombun diaqonalları O nöqtəsində kəsişir. Onda düzbucaqlı AOD üçbucağından rombun tərəfinin uzunluğunu tapırıq:

$$AD^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \frac{81}{4},$$

$$AD = 4,5 \text{ (sm)}.$$



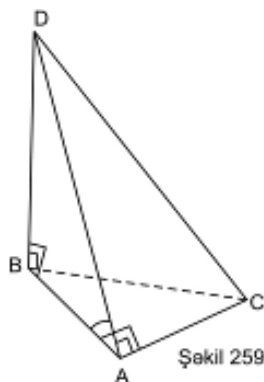
Şəkil 258.

$$259. \quad BD \perp (ABC), \quad \angle BAC = \frac{\pi}{2}$$

(Şəkil 259) olduğundan, üç perpendikulyar haqqında teoremə görə,

$$\angle DAC = \frac{\pi}{2}; \quad \angle DAB = \frac{\pi}{2}$$

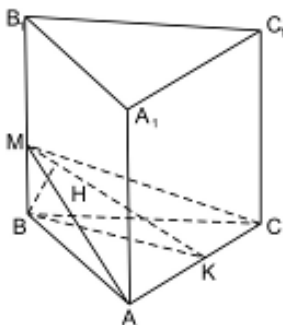
(ikiüzlü bucağın xətti bucağıdır); $AC \perp (ABD)$. Odur ki,



Şəkil 259.

$$V = \frac{1}{3} AC \cdot S(ABD) = \frac{1}{3} AC \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BD = \frac{1}{3} \sqrt{5^2 - 3^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cos \frac{\pi}{12} \times \\ \times 3 \sin \frac{\pi}{2} = 3 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}.$$

260. Şərtə görə $S(ACM) = 2\sqrt{3}$ (Şəkil 260), yəni $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot MK = 2\sqrt{3}$, buradan $MK = 2\sqrt{3}$. Düzbucaqlı ABK



Şəkil 260.

üçbucağından $BK = \sqrt{3}$, ΔBMK -dan $BM = 3$. Axtarılan BH məsafəsi BMK üçbucağının hündürlüyüdür. BKM üçbucağının sahəsi düsturunu iki formada yazmaqla onu tapa bilərik:

$$\frac{1}{2} BM \cdot BK = \frac{1}{2} MK \cdot BH, \quad BH = \frac{BM \cdot BK}{MK} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1,5.$$

261. Fərz edək ki, $ABCA_1B_1C_1D_1$ düz prizmadır, $S(AA_1D_1D) = 12 \text{ sm}^2$,

$S(BB_1C_1C) = 8 \text{ sm}^2$ (Şəkil 261). Paralel yan üzlər arasındakı məsafə BC və AD düz xətləri arasındakı məsafəyə, başqa sözlə BE -yə bərabərdir ($BE = 5 \text{ sm}$).

$$S(AA_1D_1D) = AD \cdot AA_1,$$

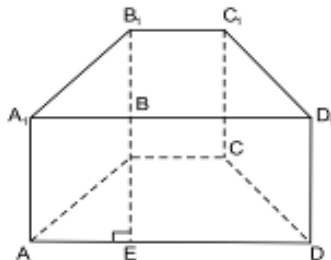
$$S(BB_1C_1C) = BC \cdot BB_1 \quad \text{olduğundan}$$

$$AD = \frac{12}{n}, \quad BC = \frac{8}{n} \quad (\text{burada } h = AA_1$$

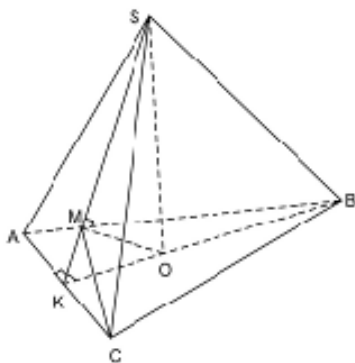
prizmanın hündürlüyüdür). Prizmanın oturacağıının sahəsi

$$S(ABCD) = \frac{(AD+BC)}{2} \cdot BE = \frac{\frac{12}{h} + \frac{8}{h}}{2} \cdot 5 = \frac{50}{h} (\text{sm}^2).$$

$$\text{Onda } V = S(ABCD) \cdot h = \frac{50}{h} \cdot h = 50 (\text{sm}^3).$$



Şəkil 261.



Şəkil 262.

262. K - nöqtəsi AC tərəfinin ortası, O – oturacağın mərkəzi, OM isə SK apofeminə çəkilmiş perpendikulyar olsun (Şəkil 262). SO və OK parçaları AC -yə perpendikulyar olduğundan $AC \perp (SOK)$, odur ki, $OM \perp AC$, ona görə də $OM \perp (ASC)$. Piramidanın oturacağının tərəfi a , yan üzün oturacaq müstəvisinə əmələ gətirdiyi

$$\angle SKO = \beta \quad \text{olsun.} \quad \text{Onda} \quad OK = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad SK = \frac{a}{2\sqrt{3} \cos \beta},$$

$$MK = \frac{a}{2\sqrt{3}} \cos \beta. \quad \text{Odur ki,}$$

$$SM = SK - MK = \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} \quad \text{və} \quad MK : SM = \operatorname{ctg}^2 \beta \cdot CM$$

parçası KSC üçbucağında tən bölən olduğundan $MK : SM = KC : SC$ tənəsübü ödənilir. Tənəsübün sağ tərəfindəki parçaları tapaq:

$$KC = \frac{a}{2} \quad \text{və} \quad SC = \sqrt{KC^2 + SK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12 \cos^2 \beta}} = \frac{a}{6} \sqrt{12 + 3 \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

Onda tənəsüb $3 \operatorname{tg}^2 \beta = \sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \beta + 12}$ şəklə düşür, buradan

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \Delta SOK \text{ -dan } SO = OK \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{2\sqrt{3}} \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{3}, \quad \text{olduğun-}$$

dan verilmiş piramidanın həcmi $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{36}$ olur.

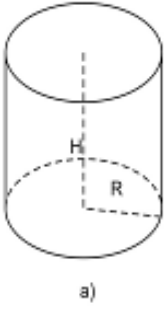
Şərtə görə $\frac{a^3 \sqrt{3}}{36} = 162\sqrt{3}$, buradan $a^3 = 36 \cdot 162 = 9 \cdot 4 \cdot 81 \cdot 2 = 9^3 \cdot 2^3$,

$$a = 9 \cdot 2 = 18.$$

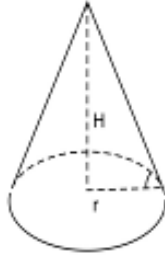
$$263. \quad \text{Şərtə görə } H_S = H_K, \quad \frac{S(\text{yan.sil})}{S(\text{yan.kon})} = \frac{5}{6}; \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{3}.$$

$$V(\text{sil}) = \pi R^2 H, \quad V(\text{kon}) = \frac{1}{3} \pi r^2 H \quad \text{olduğundan,} \quad \frac{V(\text{sil})}{V(\text{kon})} = \frac{\pi R^2 H}{\frac{1}{3} \pi r^2 H} = \frac{3R^2}{r^2},$$

beləliklə silindr və konusun oturacaqlarının radiuslarının nisbətini tapmaq lazımdır (Şəkil 263, a, b).



a)



b)

Şəkil 263.

$$\frac{S(\text{yansil})}{S(\text{yankonus})} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{2\pi RH}{\pi rl} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{RH}{rl} = \frac{5}{12}.$$

İndi H və l arasındakı əlaqəni tapaq. $\frac{H}{l} = \sin \alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$,

$$\text{deməli } \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3};$$

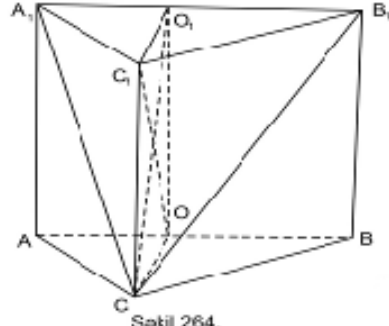
$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad \text{Onda } \frac{R}{r} \cdot \frac{H}{l} = \frac{5}{12};$$

$$\frac{R}{r} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{5}{12}, \quad \frac{R}{r} = \frac{5\sqrt{3}}{12\sqrt{2}} \quad \text{və} \quad \frac{V(\text{sil})}{V(\text{kon})} = 3 \left(\frac{5\sqrt{3}}{12\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{25}{32} = 0,78125.$$

264. $AC=BC$ olduğundan, ABC üçbucağında C düz bucaqdır (Şəkil 264). ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi AB hipotenuzunun ortasıdır,

odur ki, $CO = \frac{\sqrt{2}}{2}$; COO_1C_1 -

kvadrat olduğundan, C nöqtəsindən keçən C_1O -ə perpendikulyar CO_1 -dir. Onda axtarılan CA_1B_1 kəsiyinin sahəsini asanlıqla hesablamaq olar: $\triangle CO_1O$ -dan



Şəkil 264.

$$CO_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1; \quad S(CA_1B_1) =$$

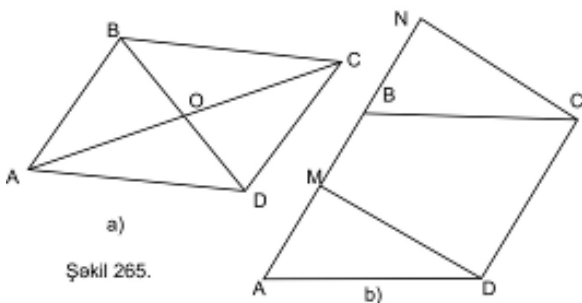
$$= \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot CO_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

265. $ABCD$ verilmiş romb olsun (Şəkil 265, a), $AB = a$, $\angle BAD = \alpha$ işarə edək. Onda $AO = a \cos \frac{\alpha}{2}$, $BO = a \sin \frac{\alpha}{2}$.

Aşkıdır ki, rombun AC və BD diaqonalları ətrafında fırlanmasından alınan cismlərin həcmələri uyğun olaraq

$$V_1 = \frac{2}{3} \pi a^3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{və} \quad V_2 = \frac{2}{3} \pi a^3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{dır.}$$

Rombun, onun tərəfi ətrafında fırlanmasından (Məsələn, AB, şəkil 265, b) alınan cismin həcmi tapmaq üçün MNCD



Şəkil 265.

düzbucaqlısının MN tərəfi ətrafında fırlanmasından alınan silindrin həcminə AMD üçbucağının fırlanmasından alınan konusun həcmi əlavə edib və BNC üçbucağının fırlanmasından alınan

konusun həcmi çıxmaq lazımdır. Bu üçbucaqlar öz aralarında bərabərdir və $MD = a \sin \alpha$. Odur ki, $V = \pi a^3 \sin^2 \alpha$. Axtarılan

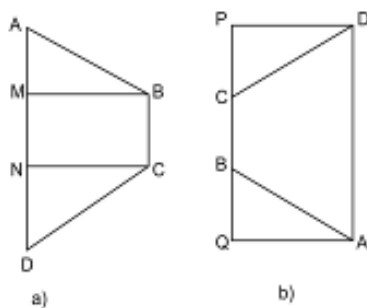
V həcmi tapmaq lazımdır. $\frac{V}{V_1} = 6 \sin \frac{\alpha}{2}$, $\frac{V}{V_2} = 6 \cos \frac{\alpha}{2}$

olduğundan $V^2 \left(\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} \right) = 36$ və $V = \frac{6V_1V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$. Burada,

$V_1 = 1$, $V_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ yazıb, $V = 3$ alırıq.

266. Verilmiş ABCD trapeyasında $AD = a$, $BC = b$, $\angle BAD = \alpha$, $BM = CN = h$ hündürlük olsun (Şəkil 266, a). Onda $AM = DN = h \operatorname{ctg} \alpha$ və fırlanmadan alınan axtarılan cismin həcmi

$$V(AD) = \pi h^2 b + \frac{2}{3} \pi h^3 \operatorname{ctg} \alpha =$$



Şəkil 266.

$\pi h^2 \left(b + \frac{2}{3} h \operatorname{ctg} \alpha \right)$ olar. $h \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a-b}{2}$ olduğundan, $V(AD) = \frac{1}{3} \pi h^2 (a+2b)$.

$AQ = DP = h$ və $BQ = CP = h \operatorname{ctg} \alpha$ olduğundan (Şəkil 266, b) fırlanmadan alınan verilən cismin həcmi

$$V(BC) = \pi h^2 a - \frac{2}{3} \pi h^3 \operatorname{ctg} \alpha = \pi h^2 \left(a - \frac{2}{3} h \operatorname{ctg} \alpha \right) = \frac{1}{3} \pi h^2 (2a+b)$$

olar. Odur ki, $\frac{V(AD)}{V(BC)} = \frac{a+2b}{2a+b}$ və trapesiyanın xaricinə çevrə

çəkmək mümkün olduğundan $AB = CD = \frac{a+b}{2}$ və

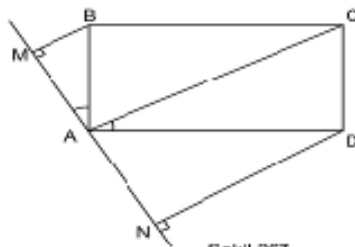
$$\cos \alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{a-b}{a+b}, \quad \cos \alpha = \frac{a-b}{a+b}, \quad \text{buradan } b = a \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

$$\text{Onda } \frac{V(AD)}{V(BC)} = \frac{a+2a \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}{2a + a \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{3 - \cos \alpha}{3 + \cos \alpha}. \quad \text{Şərtə görə}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}. \quad \text{Onda } \frac{V(AD)}{V(BC)} = \frac{3 - \frac{2}{3}}{3 + \frac{2}{3}} = \frac{7}{11} \Rightarrow V(AD) = \frac{7}{11} \cdot V(BC) = \frac{7}{11} \cdot 11 = 7.$$

Deməli, $V(AD) = 7$.

267. Düzbucaqlının A təpəsindən AC-yə perpendikulyar keçən düz xətt MN olsun. Düzbucaqlının B və D təpələrindən MN düz xəttinə perpendikulyarlar endirək. Deməli, BM, AC, DN parçalarının hər biri MN-ə perpendikulyardır (Şəkil 267). Onda axtarılan həcm $V = V_1 + V_2$ -dir, burada



$$V_1 = \frac{\pi}{3} \cdot AM (AC^2 + AC \cdot MB + MB^2) - \frac{\pi}{3} \cdot AM \cdot MB^2 \quad \text{və}$$

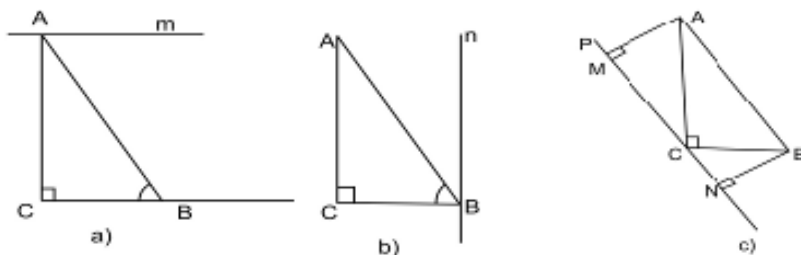
$$V_2 = \frac{\pi}{3} \cdot AN \left(AC^2 + AC \cdot ND + ND^2 \right) - \frac{\pi}{3} \cdot AN \cdot ND^2$$

$AC = d$, $\angle CAD = \alpha$ ilə işarə edək, onda $\angle MAB = \alpha$, $\angle BAC = \angle DAN = 90^\circ - \alpha$ və $MB = d \sin^2 \alpha$, $ND = d \cos^2 \alpha$, $AM = AN = d \sin \alpha \cos \alpha$. Göstərilənləri $V = V_1 + V_2$ -də yerinə yazıb, çevirmələr apardıqdan sonra $V = \pi d^3 \cos \alpha \sin \alpha$ alırıq. Düzbucaqlının onun tərəfləri ətrafında fırlanmasından alınan silindrlərin həcmələri $V(AB) = \pi d^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$ və $V(AD) = \pi d^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$ -dır. $\frac{V(AB)}{V} = \cos \alpha$, $\frac{V(AD)}{V} = \sin \alpha$ olduğundan $V^2(AB) + V^2(AD) = V^2$ və burada $V(AB) = 1$, $V(AD) = \sqrt{3}$ yerinə yazıb $V = 2$ alırıq.

268. $AB = c$, $\angle ABC = \alpha$ işarə edək (Şəkil 268, a, b, c). Onda $AC = c \sin \alpha$, $BC = c \cdot \cos \alpha$ və ABC üçbucağının m düz xətt ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi $V_1 = \frac{2}{3} \pi c^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$ olur. Analoji olaraq ABC üçbucağının n düz xətti ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi $V_2 = \frac{2}{3} \pi c^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$ -dir. İndi ABC üçbucağının p düz xətti ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi V ifadəsini müəyyən edək. $AM \perp p$ və $BN \perp p$ çəkək (Şəkil 268, c). Onda $AM = BN = c \sin \alpha \cos \alpha$, $MC = c \sin^2 \alpha$ və $NC = c \cos^2 \alpha$ və ABC üçbucağının p düz xətti ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi $V = \frac{2}{3} \pi c^3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$ olur. $\frac{V}{V_1} = \cos \alpha$,

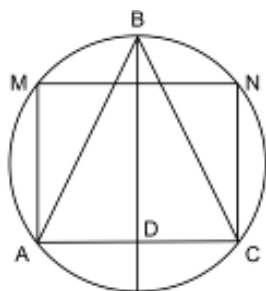
$$\frac{V}{V_2} = \sin \alpha \text{ olduğundan } \left(\frac{V}{V_1} \right)^2 + \left(\frac{V}{V_2} \right)^2 = 1 \text{ və } V = \frac{V_1 \cdot V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}},$$

burada $V_1 = 65$, $V_2 = 156$ şərtini nəzərə alıb $V = 60$ tapırıq.



Şəkil 268.

269. Konfigurasiyanın ox kəsiyinin təsvirinə baxaq (Şəkil 269). Konusun oturacağının radiusu $AD = r$, onun doğruları ilə oturacaq müstəvisi arasındakı bucaq $\angle BAD = \alpha$ olarsa, onda



Şəkil 269.

konusun həcmi $V_1 = \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{tg} \alpha$ olar.

$\angle ANC = \angle ABC = \pi - 2\alpha$ olduğundan, silindrin hündürlüyü $NC = -2r \operatorname{ctg} 2\alpha$, onun həcmi isə $V_2 = -2\pi r^3 \operatorname{ctg} 2\alpha$ -dir.

Şərtə görə $V_1 = V_2$ buradan $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{3}{2}$ və

ya $\cos^2 \alpha = \frac{2}{5}$. Kürənin radiusu

$$R = \frac{2r}{2 \sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{r}{\sin 2\alpha}, \text{ onun səthinin sahəsi } S_1 = \frac{4\pi r^2}{\sin^2 2\alpha}.$$

Konusun yan səthinin sahəsi $S_2 = \frac{\pi r^2}{\cos \alpha}$ -dir, odur ki,

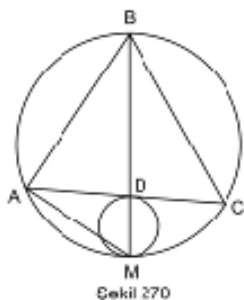
$$\frac{S_2}{S_1} = \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \text{ və } S_2 = S_1 \cdot \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 5\sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 6.$$

270. Konfigurasiyanın ox kəsiyini təsvir edək (Şəkil 270). Konusun oturacağının radiusunu $r = AD$ və $\angle BAD = \alpha$ işarə edək, onda onun həcmi $V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 \operatorname{tg} \alpha$ olar. $\angle DAM = 90^\circ - \alpha$ olduğundan, daxildəki kürənin radiusunun iki misli

$2r_1 = DM = r \operatorname{ctg} \alpha$, həcmi $V_2 = \frac{1}{6} \pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \alpha$, məlum həcmlərin

nisbəti isə $\frac{V_1}{V_2} = 2 \operatorname{tg}^4 \alpha$ olar. Şərtə görə $V_1 = 4$, $V_2 = 8$, onda

$$2 \operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{1}{2} \text{ və } \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2} \text{ alırıq.}$$



Şəkil 270

Xaricə çəkilmiş kürenin radiusu $R = \frac{2r}{2 \sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{r}{\sin 2\alpha}$, onun həc-

mi isə $V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{r}{\sin 2\alpha} \right)^3$ -dir. Onda

$$\frac{V}{V_2} = \frac{4\pi r^3}{3 \sin^3 2\alpha} : \frac{\pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \alpha}{6} = \frac{1}{\cos^6 \alpha} = (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^3 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{8};$$

$$\frac{V}{V_2} = \frac{27}{8}, V = \frac{27}{8} \cdot 8 = 27.$$

271. Konusun ox kəsiyi müstəvisinə perpendikulyar keçirilmiş kəsiyi quraq (Şəkil 271). Burada BD –konusun hündürlüyü, O –daxilə çəkilmiş kürenin mərkəzi, $r = OD = ON$ onun radiusu, BK – iki müstəvinin kəsişmə xətti, OT parçası MN-ə çəkilmiş perpendikulyar

$MT = TN = r_1$ daxilə çəkilmiş

kürenin kəsiyinin radiusu,

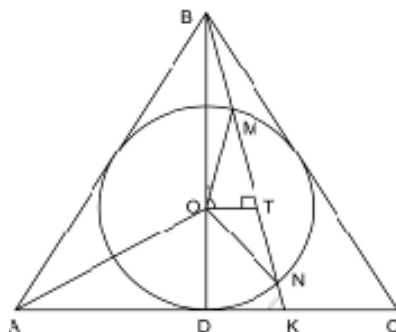
$$\angle BAD = \angle BCD = \alpha,$$

$\cos \alpha = 0,8$. Fərz edək ki,

$$\angle BKD = \beta, \text{ onda } \angle BOT = \beta$$

və $OT = BO \cdot \cos \beta$. Lakin, AO

parçası ABD üçbucağında tən böləndir, odur ki,



Şəkil 271.

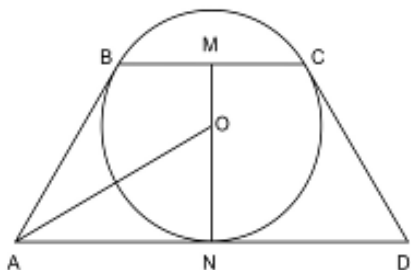
$$\frac{r}{BO} = \frac{AD}{AB} = \cos \alpha \quad \text{və} \quad BO = \frac{r}{\cos \alpha}. \quad \text{Buradan} \quad OT = \frac{r \cos \beta}{\cos \alpha} \quad \text{və}$$

$$OTN \quad \text{üçbucağından} \quad r_1^2 = r^2 - OT^2 = r^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \right). \quad \text{İndi}$$

kəsiyin sahəsinin kürənin səthi sahəsinə nisbətini asanlıqla tapmaq olar: $(\pi r_1^2) : (4\pi r^2) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \right)$. Şərtə görə bu

nisbət 0,24-ə bərabərdir, odur ki, $\cos \beta = 0,2 \cos \alpha = 0,16$.

272. Konfigurasiyanın ox kəsiyini təsvir edək (Şəkil 272). Konusun aşağı və yuxarı oturacaqlarının radiuslarını $R = AN$, $r = BM$ kürənin toxunma nöqtələrinə çəkilmiş radiusunu $\rho = OB = ON$, $\alpha = \angle BAN$ ilə işarə edək. Onda



Şəkil 272.

$$\angle OAB = \angle OAN = \frac{\alpha}{2} \quad \text{və} \quad \text{bir}$$

nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunanlar kimi $AB = AN = R$.

$R - r = R \cos \alpha$ olduğundan, $r = R(1 - \cos \alpha)$ və konusun yan səthinin sahəsi $S(kon) = \pi r^2 (2 - \cos \alpha)$.

Lakin, $\rho = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Odur ki,

kürənin səthinin sahəsi

$$S(kur) = 4\pi R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = 4\pi R^2 \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \text{olur. Şərtə görə}$$

$$S(kur) : S(kon) = 5 : 7 \quad \text{və ya} \quad \frac{4(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(2 - \cos \alpha)} = \frac{7}{5}, \quad \text{buradan}$$

$5 \cos^2 \alpha - 33 \cos \alpha + 18 = 0$ tənliyini alırıq, onun da iki kökündən yalnız birinin $\cos \alpha = 0,6$ mənası vardır.

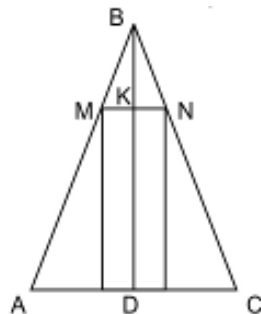
273. Konfigurasiyanın ox kəsiyini təsvir edək (Şəkil 273). Əvvəlki konusun və silindrin radiusları $R = AD$, $r = MK$ və hündürlükləri $H = BD$, $h = KD$ olsun.

Onda silindrin və kəşik konusun həcmələri

uyğun olaraq $V_1 = \pi r^2 h$ və

$V_2 = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$ olar, buradan

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{3} \left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{R}{r} + 1 \right)$. Şərtə görə bu nisbət



Şəkil 273.

7-yə bərabərdir. Yəni, $\frac{1}{3} \left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{R}{r} + 1 \right) = 7$,

$\left(\frac{R}{r} \right)^2 + \frac{R}{r} + 1 = 21$, $\left(\frac{R}{r} \right)^2 + \frac{R}{r} - 20 = 0$, $\frac{R}{r} = 4$. İndi MKB və

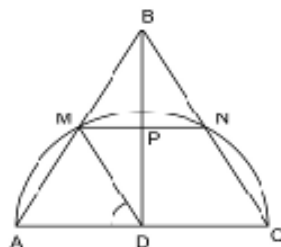
ABD üçbucaqlarının oxşarlığından $\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R} = \frac{1}{4}$, $\frac{H}{h} = \frac{4}{3}$.

Əvvəlki konusun axtarılan həcmi V olarsa onda

$\frac{V}{V_1} = \frac{\pi R^2 H}{3\pi r^2 h} = \frac{1}{3} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(\frac{H}{h} \right)$ və ya $\frac{V}{9} = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot \frac{4}{3}$, $V = 64$.

Göründüyü kimi, məsələnin həllinə səmərəli yanaşdıqda, mürəkkəb çevirmələr aparmaq lazım gəlmir. Odur ki, şagirdlərə səmərəli həlli tapmağı öyrətmək lazımdır.

274. Konfigurasiyanın ox kəsiyini təsvir edək (Şəkil 274). İlk konusun həcmi – V , kəşik konusun məlum həcmi – V_1 , axtarılan konusun həcmi – V_2 ilə işarə edək. Habelə $R = DA = DM$ və $r = PM$ uyğun olaraq əvvəlki və kəsilmədən alınan konusun oturacaqlarının radiusları, $H = BD$, $h = BP$ həmin



Şəkil 274.

konusların hündürlükləri olsun. Onda $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V - V_2}{V_2} = \frac{V}{V_2} - 1$ və

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H, \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \text{olduğundan,} \quad \frac{V}{V_2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \frac{H}{h}. \quad \text{ABD}$$

və MBP üçbucaqlarının oxşarlığından alınır ki, $\frac{H}{h} = \frac{R}{r}$, onda

$$\frac{V}{V_2} = \left(\frac{R}{r}\right)^3. \quad \text{Xatırlayaq ki,} \quad \angle ABC = \beta, \quad \text{ona görə}$$

$$\angle BAD = \angle AMD = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \quad \text{beləliklə} \quad \angle ADM = \beta \quad \text{və}$$

$$\angle MDB = 90^\circ - \beta. \quad \text{İndi aşkardır ki,} \quad r = R \cos \beta \quad \text{və}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{\cos^3 \beta} - 1 = \frac{1}{\frac{8}{27}} - 1 = \frac{27}{8} - 1 = \frac{19}{8}; \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{8},$$

$$V_2 = \frac{8}{19} V_1 = \frac{8}{19} \cdot 19 = 8.$$

275. Piramidanın h hündürlüyü ilə yan üzlərinin hündürlükləri arasındakı bucağı

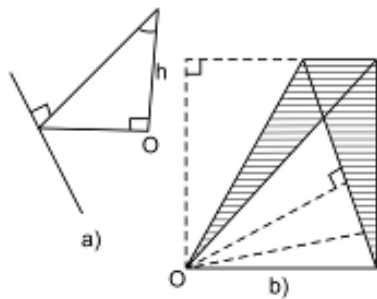
$\alpha \geq 30^\circ$ ilə işarə edək (Şəkil 275, a). Onda piramidanın hündürlüyünün o oturacağından piramidanın oturacağındakı tillərini üzərində saxlayan üç düz xəttə qədər məsafələr eynidir və

$R = h \cdot \operatorname{tg} \alpha = r_i, \quad (i = 0; 1; 2; 3)$ -ə bərabərdir, burada r_i tərəfləri

$a_1 = 5, \quad a_2 = 12, \quad a_3 = 13$ olan

oturacaqdakı üçbucağın (düzbucaqlı üçbucağın) sahəsi

düsturundan tapılır: $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 = r_i P_i, \quad 2P_0 = a_1 + a_2 + a_3,$



Şəkil 275.

$P_{1,2,3} = P_0 - a_{1,2,3}$, çünki mərkəzi O nöqtəsində və radiusu r olan çevrə ya üçbucağın bütün tərəflərinə toxunur, onda $S = rP_0$, ya a_3 tərəfinə və digər iki tərəfin uzantılarına (Şəkil 275, b) toxunur,

onda $S = \frac{1}{2}ra_1 + \frac{1}{2}ra_2 - \frac{1}{2}ra_3 = rp_3$, yaxud a_1 və a_2 tərəflərinə, digər iki tərəflərin uzantılarına toxunur və onda $S = rp_1$ və ya $S = rp_2$. Odur ki, piramidanın həcmi üçün

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}S \cdot r \cdot \text{ctg}\alpha \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{S^2 \cdot \text{ctg}30^\circ}{P_3} = \frac{30^2 \sqrt{3}}{3 \cdot 2} = 150\sqrt{3}$$

qiymətini alırıq. Bu da $\alpha = 30^\circ$ və $r = r_3$ olduqda bərabərliyə çevrilir.

276. Fərz edək ki, $SH = h$, $AB = a$ (Şəkil 276) və R axtarılan radiusdur. Onda oturacağın diaqonalı $BD = a\sqrt{2}$,

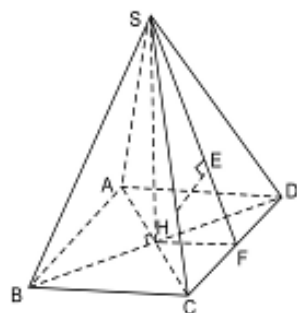
$BH = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Düzbucaqlı SBH üçbucağın-

dan $SH = BH \text{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, deməli

$h\sqrt{2} = a\sqrt{3}$ (1). H nöqtəsinin SDC üzündəki E proyeksiyası bu üzün SF apofemi üzərindədir. Düzbucaqlı SHF və SEH üçbucaqlarının oxşarlığından $SH : HE = SF : HF$ tənəsübünü alırıq,

deməli $\frac{h}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{4h^2 + a^2}}{a}$ (2). (1) və (2) -dən $h = \sqrt{42}$ və

$a = 2\sqrt{7}$ alırıq. SABCD piramidasının xaricinə çəkilmiş sferanın radiusu SH düz xətti üzərində yerləşir, beləliklə, bu sferanın R radiusu BSD üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusuna bərabərdir. $SB = SD$, $\angle SBD = \frac{\pi}{3}$ olduğundan bu üçbucaq



Şəkil 276

bərabərtərəflidir. Deməli, $\angle BSD = \frac{\pi}{3}$, onda sinuslar teoreminin

$$\text{nəticəsinə görə } BD = 2R \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow a\sqrt{2} = R\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \frac{2\sqrt{42}}{3}.$$

277. Konusun doğuranı - l , kəsiyin sahəsi S_1 olarsa, onda

$$S_1 = \frac{1}{2} l^2 \sin \left(\arcsin \frac{\pi}{5} \right) = \frac{\pi l^2}{10} \text{ (Şəkil 277).}$$

Konusun tam səthinin sahəsi S_2 olsun, onda $S_2 = \pi R l + \pi R^2 = \pi R(l + R)$, burada R -konusun oturacağının radiusudur.

$\triangle AMO$ -dan $\frac{R}{l} = \cos \beta$, $R = \frac{l}{4}$, onda

$$S_2 = \pi \left(\frac{l}{4} \cdot l + \frac{l^2}{16} \right) = \frac{5\pi l^2}{16}. \text{ Beləliklə,}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi l^2}{10} : \frac{5\pi l^2}{16} = 0,32.$$

278. Verilmiş prizma düzdür, deməli $CC_1 \perp (ABC)$, odur ki, $CC_1 \perp BC$ və $CC_1 \perp AC$ (Şəkil 278). Beləliklə,

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{10^2 + (3\sqrt{21})^2} = 17,$$

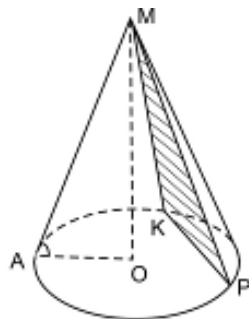
$$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{(6\sqrt{7})^2 + (3\sqrt{21})^2} = 21.$$

Heron düsturuna görə

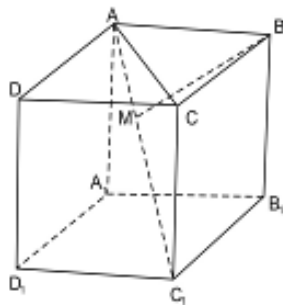
$$S(ABC_1) = \sqrt{p(p-AB)(p-BC_1)(p-AC_1)} = \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)} = 84.$$

Eyni zamanda, $S(ABC_1) = \frac{1}{2} AC_1 \cdot BM$. Onda $\frac{1}{2} AC_1 \cdot BM = 84$,

$$\text{buradan } BM = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8.$$

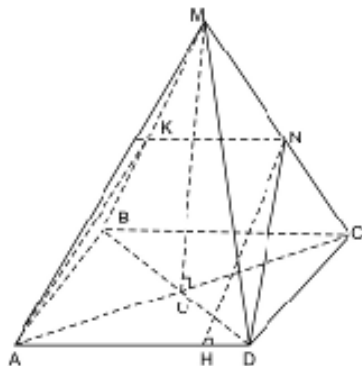


Şəkil 277.



Şəkil 278.

279. MO – verilmiş piramidanın hündürlüyü olsun (Şəkil 279). Şərtə görə $AM=BM=CM=DM$, beləliklə, $AO=BO=CO=DO$. Odur ki, O nöqtəsi piramidanın outacağıının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir.



Şəkil 279

$AB=BC=CD=DA$ olduğundan ABCD rombudur. Çevrə daxilinə çəkilmiş romb kvadrattır. Odur ki, MABCD düzgün piramidadır. Fərz edək ki, MB parçasının orta nöqtəsi K, MC-in orta nöqtəsi isə N-dir. KN və AD düz xətləri BC-yə paraleldir, odur ki, özləri də paraleldir. KN düz xəttinin hər hansı nöqtəsindən (məsələn, N nöqtəsindən) AD-yə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğu axtarılan məsafə olacaqdır. $KN \parallel AD$ və

$KN \neq AD \left(KN = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AD \right)$ olduğundan AKND dördbucaqlısı trapesiyadır, axtarılan məsafə isə onun hündürlüyüdür.

Fərz edək ki, NH parçası AKND trapesiyasının hündürlüyüdür. KN parçası MBC üçbucağının orta xəttidir, deməli

$$KN = 0,5\sqrt{11}. \text{ Onda } DH = \frac{AD - KN}{2} = 0,25\sqrt{11}. \text{ N - nöqtəsi}$$

düzgün MCD üçbucağının MC tərəfinin ortasıdır, deməli,

$$DN = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{11} = \frac{\sqrt{33}}{2}. \text{ Beləliklə, } DNH \text{ üçbucağından}$$

$$NH = \sqrt{DN^2 - DH^2} = \sqrt{\frac{33}{4} - \frac{11}{16}} = \sqrt{\frac{121}{16}} = \frac{11}{4} = 2,25.$$

280. A nöqtəsindən BCM müstəvisinə perpendikulyar müstəvi keçirsək, onda A nöqtəsindən bu müstəvilərin kəsişmə xəttinə çəkilmiş perpendikulyar BCM müstəvisinə də perpendikulyar olar. Fərz edək ki, $AH \perp BC$ (Şəkil 280), onda üç perpendikulyar haqqında teoremə görə $MH \perp BC$. Beləliklə, $BC \perp (AMH)$ və $(MBC) \perp (AMH)$. AMH müstəvisində

$AK \perp MH$ çəkək. Onda $AK \perp (BCM)$. AK parçasının uzunluğu A nöqtəsindən BCM müstəvisinə qədər olan məsafədir. $\triangle ABC$ -dən,

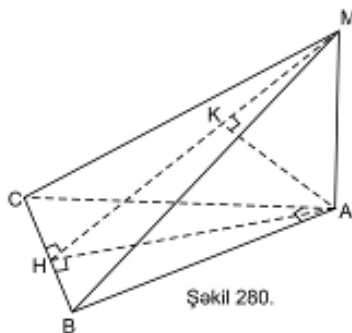
$$BC = \sqrt{39^2 + 52^2} = 65.$$

$$2S(ABC) = 39 \cdot 52 = 65 \cdot AH$$

$$\text{olduğundan, } AH = \frac{39 \cdot 52}{65} = \frac{156}{5}.$$

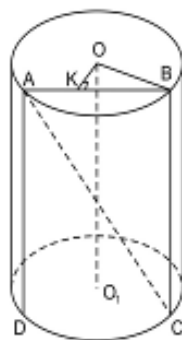
$$\triangle AMH \text{ -dən, } MH = \sqrt{13^2 + \left(\frac{156}{5}\right)^2} = \frac{169}{5}. 2S(AMH) = 13 \cdot \frac{156}{5} = \frac{169}{5} \cdot AK$$

$$\text{olduğundan, } AK = \frac{13 \cdot 156}{169} = 12.$$



Şəkil 280.

281. Silindrin doğurunu onun oxuna paraleldir, odur ki, ox və kəsən müstəvi paraleldirlər. BC -də silindrin doğurunu olsun (Şəkil 281). AB vətərinin orta nöqtəsini K , silindrin yuxarı oturacağının mərkəzini O ilə işarə edək. Onda $OK \perp AB$. $BC \perp (AOB)$ olduğundan $OK \perp (ABC)$. Deməli, OK parçasının uzunluğu, axtarılan məsafəyə bərabərdir.

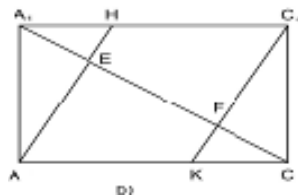
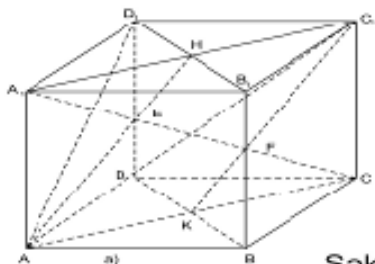


Şəkil 281.

$\triangle ABC$ -dən $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$. $\triangle BOK$ -dən $OK = \sqrt{OB^2 - BK^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

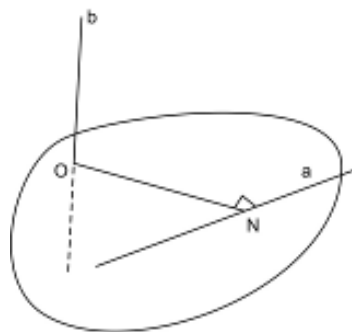
282. $AB_1 \parallel DC_1$ və $AD_1 \parallel BC_1$ (Şəkil 282, a) olduğundan AB_1D_1 və BDC_1 müstəviləri paraleldir. A_1C düz xətti B_1D_1 və BD habelə AH və C_1K (AA_1C_1C kəsiyinə baxmalı) düz xətlərinə perpendikulyar olduğundan (nə üçün) bu müstəvilərin ortaq perpendikulyarıdır. Göstərilən kəsiyin təsvirindən (Şəkil 282, b) istifadə edib asanlıqla göstərmək olar ki,

$A_1E = EF = FC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Kubun tili $a = \sqrt{3}$ olduğundan axtarılan məsafə $EF = 1$ dir.



Şəkil 282.

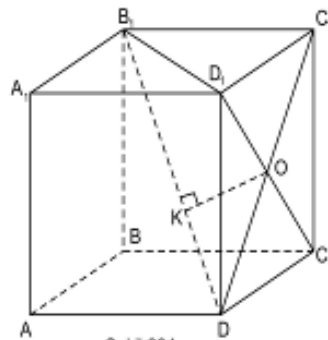
Çarpaz düz xətlər arasındakı məsafəyə aid hesablama məsələlərini həll edərkən iki halı fərqləndirmək faydalıdır (Məsələ 283-289). 1) çarpaz düz xətlər perpendikulyardır; 2) çarpaz düz xətlər perpendikulyar deyil. Çarpaz düz xətlər perpendikulyardırsa ($a \perp b$) onların birindən (məsələn, a düz xəttindən) digər b düz xəttinə perpendikulyar müstəvi (α) keçirmək daha sadədir (Şəkil 283). b düz xətti ilə α müstəvisinin kəsişmə nöqtəsindən (O nöqtəsi) α müstəvisində a düz xəttinə ON perpendikulyarı çəkilərsə onda bu çarpaz düz xətlərin ortaq perpendikulyarı olacaqdır (nə üçün?), onun uzunluğu isə həmin düz xətlər arasındakı məsafə bərabərdir. Məsələnin şərtinin təsvir olunduğu konfigurasiyada artıq belə müstəvinin olması mümkündür. Bu halda onu tapmaq lazımdır (Məsələ 283-ə baxmalı).



Şəkil 283.

283. $CD_1 \perp DC_1$, DC_1 parçası isə B_1D -in CC_1D_1 müstəvisi üzərindəki proyeksiyası olduğundan (Şəkil 284) $CD_1 \perp B_1D$ (üç perpendikulyar haqqında teoremə görə).

Beləliklə, düz xətt və müstəvinin perpendikulyarlıq əlamətinə görə $CD_1 \perp (DB_1C_1)$. CD_1 və DC_1 düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsini O ilə işarə edək. O nöqtəsindən B_1D düz xəttinə OK perpendikulyarını çəkək, onda OK çarpazlaşan B_1D və CD_1 düz xətləri arasındakı məsafədir. Onu tapmaq. OKD və B_1C_1D

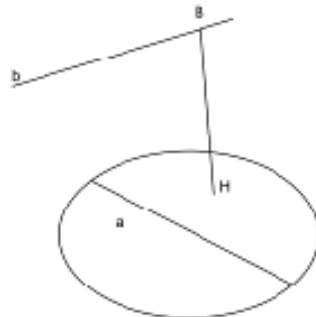


Şəkil 284

düzbucaqlı üçbucaqları oxşardır, odur ki, $OK : B_1C_1 = OD : B_1D$.

Buradan
$$OK = \frac{OD \cdot B_1C_1}{B_1D} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = 1.$$
 Çarpaz düz xətlər

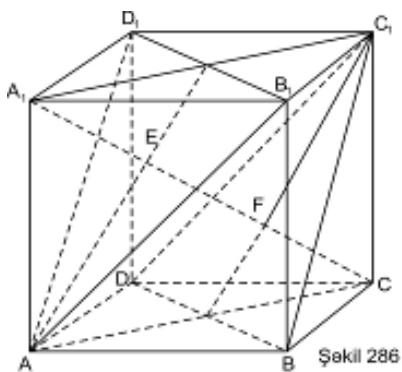
perpendikulyar deyildirsə, onda onların birindən ikinci düz xəttə paralel müstəvi keçirməyi sınamaq olar (asanlıqla isbat etmək olar ki, belə müstəvi yeganədir). Sonra ikinci düz xəttin hər hansı nöqtəsindən qurulmuş müstəviyə qədər məsafəni tapmaq lazımdır (Şəkil 285). Məsələnin şərtinin təsviri konfigurasiyasında belə müstəvinin olması mümkündür. Onda onu tapmaq lazımdır.



Şəkil 285

Çarpaz düz xətlər paralel müstəvilər üzərində yerləşirsə, onda bu düz xətlər arasındakı məsafə həmin paralel müstəvilər arasındakı məsafəyə bərabərdir (284 məsələsinə baxmalı).

284. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ verilən kub olsun (Şəkil 286). Məsələn, AB_1 və BC_1 çarpaz düz xətləri arasındakı məsafəni tapmaq. Bu düz xətlər $AB_1 D_1$ və BDC_1 paralel müstəviləri üzərində yerləşir. Beləliklə, axtarılan məsafə $AB_1 D_1$ və BDC_1 müstəviləri arasındakı məsafəyə, yəni $\frac{1}{3} A_1 C$ -yə bərabərdir (məsələ, 282-yə



baxmalı) $A_1C = AB\sqrt{3}$ olduğundan, axtarılan məsafə 1-ə bərabərdir.

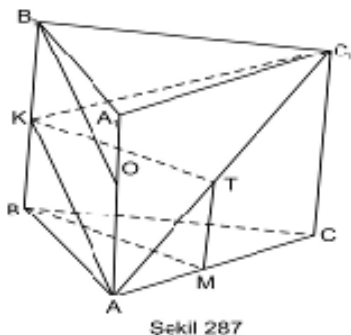
Bucağın qiymətinin hesablanmasına aid stereometriya məsələlərinin həllində aşağıdakıları tapmaq təklif olunur:

- 1) kəsişən düz xətlər arasındakı bucağı;
- 2) çarpaz düz xətlər arasındakı bucağı;
- 3) düz xətt və müstəvi arasındakı bucağı;
- 4) ikiüzlü bucağı;
- 5) iki müstəvi arasındakı bucağı.

Çarpaz düz xətlər arasındakı bucağın tapılmasına aid məsələlərin həlli ilə əlaqədar çox vaxt bu düz xətlərdən birinin üzərində nöqtə qeyd etmək və ya artıq mövcud konfigurasiyada verilmiş çarpaz düz xətlərə paralel kəsişən düz xətləri tapmaq münasib olur.

285. BB_1 tilinin orta nöqtəsini K ilə işarə edək (Şəkil 287). Onda $AK \parallel B_1O$ və KAC_1 bucağı AC_1 və B_1O düz xətləri arasındakı bucağa bərabərdir. Prizma düz olduğundan $BB_1 \perp AB$, $\triangle ABK$ -dan $AK = \sqrt{20^2 + 10^2} \cdot 5 = 30$.

Fərz edək ki, $KT \perp AC_1$. $\triangle ABK = \triangle C_1B_1K$ olduğundan (iki katetə görə) $AK = KC_1$, odur ki, $AT = TC_1$. Fərz edək ki, AC tilinin orta nöqtəsi M -dir. Onda $TM \parallel CC_1$ və $TM = 0,5CC_1$ (ACC_1 üçbucağının orta xətti). Beləliklə, $TM \parallel CC_1 \parallel KB$ və $TM = KB$. Deməli, $KBMT$ dördbucaqlısı paraleleqramdır, odur ki, $KT = BM$, $AB = BC$, $AM = MC$,



beləliklə, $BM \perp AC$. Deməli, $KT = BM = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$.

Beləliklə, $\sin \angle KAC_1 = \frac{KT}{AK} = \frac{12}{30} = 0,4$.

286. Fərz edək ki, $TM \perp BC$ (Şəkil 288). Düzgün prizmanın yan tilləri onun oturacağına perpendikulyar olduğundan $MT \perp (BB_1C)$. Beləliklə, MB_1T bu-

cağı, B_1T düz xətti ilə BCC_1B_1 yan üzünün müstəvisi arasındakı, axtarılan bucaqdır. Prizma düzgündür, beləliklə, $BB_1 \perp (ABC)$, deməli BB_1T düzbucaqlı üçbucaqdır, odur ki,

$$B_1T = \sqrt{BT^2 + BB_1^2} = \sqrt{4 + 8} = 2\sqrt{3}.$$

ABC üçbucağı bərabərtərəfli olduğundan, onun AK medianı hündürlükdür,

odur ki, $AK = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. AK və TM

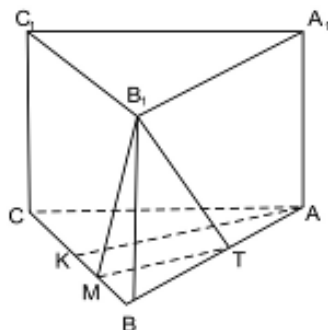
parçaları BC -yə perpendikulyardır, odur ki, BMT və BKA üçbucaqları oxşardır. $AT=BT$, deməli, $KM=MB$. Onda

$$MT = \sqrt{3}. \sin \angle TB_1M = \frac{MT}{B_1T} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 0,5.$$

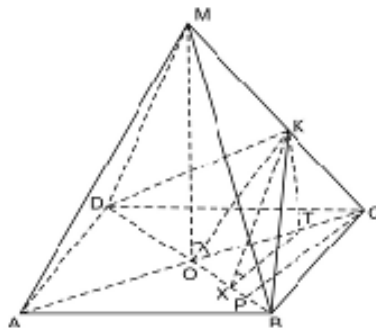
287. Piramidanın hündürlüyü MO , oturacağın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi O olsun (Şəkil 289). AMC müstəvisində AM düz xəttinə paralel OK düz xəttini çəkək, onda $MK=KC$. $KBDC$ iki-

üzlü bucağı düz bucaqdan kiçikdir, deməli onun qiyməti BCD və BKD müstəviləri arasındakı axtarılan bucağın qiymətinə bərabərdir. $KBDC$ ikiüzlü bucağın xətti bucağını quraq. Fərz edək ki,

$KT \perp AC (T \in AC)$, onda $KT \parallel MO$, deməli $KT \perp (ABC)$. Belə



Şəkil 288

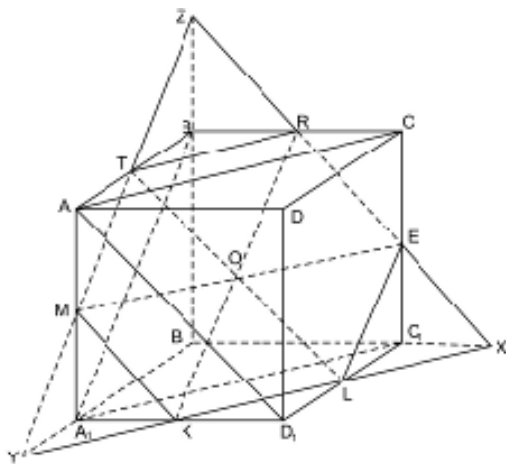


Şəkil 289

hesab edəcəyik ki, ABCD düzbucaqlısında BOC bucağı COD bucağından kiçikdir. Onda T nöqtəsindən BD düz xəttinə çəkilmiş perpendikulyarın oturacağı (X nöqtəsi) B və O nöqtələri arasında yerləşəcəkdir. Üç perpendikulyar haqqında teoremə görə $XK \perp BD$, ona görə də KXT bucağı ikiüzüzlü KBDC bucağının axtarılan xətti bucağıdır.

$KT \parallel MO$ və $MK = KC$ olduğundan $KT = 0,5 \cdot MO = 1,25$. Fərz edək ki, $CP \perp BD$. Düzbucaqlı OCP üçbucağında $\angle COP = 30^\circ$, odur ki, $CP = 0,5 \cdot OC = 0,5 \cdot 1 = 0,5$; $XT = 0,5 \cdot CP = 0,25$. ΔXKT -dən axtarılan xətti φ bucağının tangensini tapırıq: $tg\varphi = KT : XT = 1,25 : 0,25 = 5$.

288. AB və AA₁ tillərinin ortaları olan T və M nöqtələri ABB₁ və kəsən müstəvilərin üzərindədir, beləliklə TM parçası axtarılan kəsiyin tərəfidir (Şəkil 290). K nöqtəsi A₁D₁ tərəfinin ortası olsun. Analoji olaraq deyə bilərik ki, MK parçası da kəsiyin tərəfidir. MT və B₁A₁ düz xətləri Y nöqtəsində kəsişir. Y və K nöqtələri A₁BC₁ və kəsən müstəvi üzərindədir, odur ki, KY onların ortaq düz xəttidir. Bu düz xətt C₁D₁ tilini L nöqtəsində kəsir. Beləliklə, KL parçası kəsiyin tərəfidir. Fərz edək ki, KL düz xətti B₁C₁ düz xəttini X nöqtəsində, MT isə BB₁-i Z nöqtəsində kəsir. X və Z nöqtələrini düz xətlə birləşdirib kəsiyin daha iki təpəsini K və E nöqtələrini alırıq.



MT parçası ABA₁ üçbucağının orta xəttidir, beləliklə, $MT \parallel A_1B$ və $MT = 0,5 \cdot A_1B = 0,5\sqrt{2}a$. Analoji olaraq

$MK \parallel AD_1$ və $MT = 0,5 \cdot AD_1 = 0,5\sqrt{2}a$. $MT \parallel A_1B$ olduğundan B_1YZ və B_1A_1B üçbucaqları oxşardır, odur ki, $\angle B_1YZ = \angle B_1A_1B = 45^0$. Beləliklə, $A_1Y = A_1M = 0,5a$.

$\Delta KLD_1 = \Delta KYA_1$ olduğundan (katet və iti bucağa görə) $LD_1 = A_1Y = 0,5a$, beləliklə, L nöqtəsi D_1C_1 tilinin ortasıdır. Onda $KL \parallel A_1C_1$ və $KL = 0,5A_1C_1 = 0,5\sqrt{2}a$.

ABC və $A_1B_1C_1$ müstəviləri paraleldir, odur ki, kəsən müstəvi onları paralel düz xətlər ($TR \parallel KL$) üzrə kəsir. $TR \parallel KL \parallel A_1C_1 \parallel AC$ olduğundan $TR \parallel AC$ və deməli, R nöqtəsi BC tilinin ortasıdır, $TR = 0,5 \cdot AC = 0,5\sqrt{2}a$. Analoji olaraq E nöqtəsi CC_1 tilinin ortasıdır və $LE = 0,5 \cdot CD_1 = 0,5\sqrt{2}a$. Onda $RE = 0,5\sqrt{2}a$. Beləliklə, axtarılan kəsik bütün tərəfləri bərabər və cüt-cüt paralel olan $TMKLER$ altıbucaqlısıdır. $TR \parallel KL$ və $TR = KL$ olduğundan, $TRLK$ dördbucaqlısı paraleloqramdır və deməli, TL və KR diaqonalları onların orta O nöqtəsində kəsişir. $BR = A_1K$ və $BR \parallel A_1K$ olduğundan $BRKA_1$ dördbucaqlısı paraleloqramdır, beləliklə, $RK = BA_1$. Analoji olaraq isbat edilir ki, $TL = AD_1$ və $ME = AC$. Beləliklə, $TL = RK = ME = 0,5\sqrt{2}$. Onda $TMKLER$ altıbucaqlısı altı bərabər düzgün üçbucaqlardan ibarətdir, deməli, bu düzgün altıbucaqlıdır və onun sahəsi

$$6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \text{ -dır.}$$

289. Fərz edək ki, K, M, T uyğun olaraq A_1C_1, AA_1, AB tillərinin orta nöqtələridir (Şəkil 291). Verilmiş prizmanı paralelepipedə qədər tamamlayaq. $BD \parallel B_1D_1 \parallel AC$, $CD \parallel C_1D_1 \parallel AB$ və $DD_1 \parallel CC_1$ olsun. $ABDCA_1B_1D_1C_1$ paralelepipedinin bütün üzləri kvadratdır, odur ki, o kubdur. İsbat

etmək olar ki, qurulmuş kubun kəsiyi tərəfi

$\frac{a\sqrt{2}}{2}$ olan düzgün

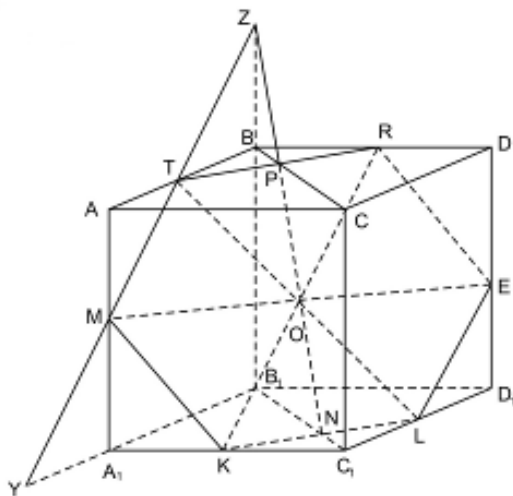
$KMTREL$ altıbucaqlısıdır (Məsələ 288-də bu isbat edilmişdir). Verilmiş prizmanın kəsiyi bu altıbucaqlının yarısından ibarətdir

($KMTPN$ beşbucaqlısı), deməli onun sahəsi

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 6\sqrt{3} \text{ -dir.}$$

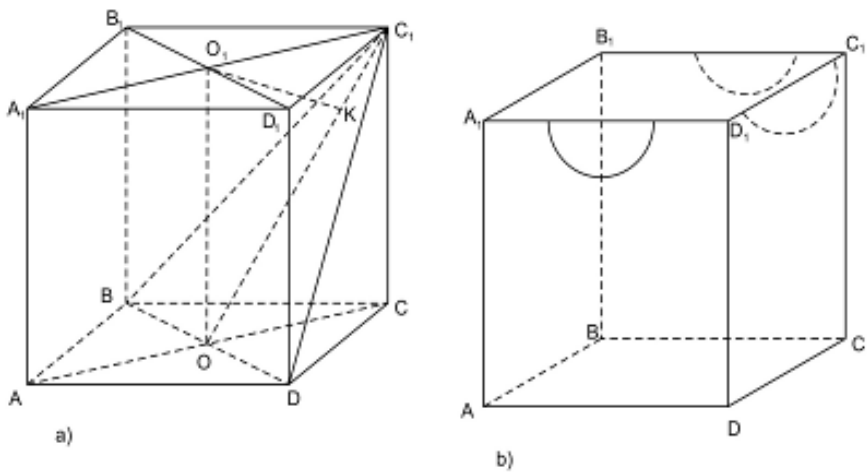
290. Konusun oturacağıının radiusu 2-yə bərabərdir. Onda oturacağına paralel kəsinin radiusu 1, sahəsi isə π olar.

291. $A_1B_1C_1$ müstəvisi kürənin mərkəzindən keçir, deməli kürəni yarıya bölür, onun həcmi $\frac{2}{3}\pi R^3$ -na bərabərdir, burada R – kürənin radiusudur. Kubun BC_1D müstəvisi ilə kəsiyi, $BC_1 = C_1D$ olan (Şəkil 292), BC_1D üçbucağıdır. ACC_1 müstəvisi BC_1D müstəvisini OC_1 düz xətti üzrə kəsir, burada O nöqtəsi BD parçasının ortasıdır. BC_1D üçbucağında $BC_1 = DC_1$ olduğundan $OC_1 \perp BD$. $CC_1 \perp (ABC)$ olduğundan $CC_1 \perp BD$. Habelə, $AC \perp BD$, deməli, $BD \perp (ACC_1)$ və ona görə $(BC_1D) \perp (ACC_1)$. İndi ACC_1 müstəvisində $O_1K \perp (BC_1D)$. Buradan alınır ki, kürənin O_1 mərkəzindən BC_1D toxunan müstəvisinə qədər məsafə O_1K parçasının uzunluğuna bərabərdir, beləliklə, $R = O_1K$. Kürənin radiusunu hesablayaq.



Şəkil 291

Düzbucaqlı OO_1C_1 üçbucağından $OO_1 = AA_1 = 2$, $O_1C_1 = 0,5A_1C_1 = 0,5 \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, $OC_1 = \sqrt{6}$. OO_1C_1 üçbucağın sahəsini $\frac{1}{2}OO_1 \cdot O_1C_1 = \frac{1}{2}OC_1 \cdot O_1K$ iki üsulla hesablamaqla hipotenuza çəkilmiş O_1K hündürlüyünü $2\sqrt{2} = \sqrt{6} \cdot O_1K$ bərabərliyindən $O_1K = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ tapırıq.



Şəkil 292

Kürənin radiusu kubun tilinin yarısından böyük, lakin onun üzünün diaqonalının yarısından (O_1C_1) kiçik olduğundan, kubun daxilində kürənin yarısı deyil, hündürlüyü $h = R - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$ olan seqmentin yarısının dörd misli qədər az hissəsi yerləşir (Şəkil 292, b). Həmin seqmentin həcmi $4 \cdot \frac{1}{2}V(seq) = \frac{1}{2} \cdot 4\pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right)$ və ya $2V(seq) = 2\pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right) = \frac{2\pi}{3}(R-1)^2(2R+1)$ dir.

Beləliklə, kürənin kubun daxilində qalan hissəsinin həcmi

$$V = \frac{2\pi}{3} R^3 - \frac{2\pi}{3} (R-1)^2 (2R+1) = \frac{2\pi}{3} (3R^2 - R^3 - 1) =$$

$$= \frac{2\pi(27 - 8\sqrt{3})}{27} \text{ olur.}$$

Çoxüzlülərin həcmələrinin müqayisəsinə aid məsələlərə diqqət etmək lazımdır. Adətən belə məsələlərdə çoxüzlülərin kombinasiyasından və ya onların müstəvi ilə kəsilməsi nəticəsində alınmış hissələrin həcmələrinin nisbətindən söhbət gedir.

Onların həllinin əsasında, piramidanın həcmi düsturundan alınan, aşağıdakı mühüm faktlar durur.

1) Ortaq hündürlüklü piramidaların həcmələri onların oturaqları sahəsi ilə mütənasibdir.

2) Oturaqları eyni olan piramidaların həcmələri bu oturağa çəkilmiş hündürlüklərlə mütənasibdir.

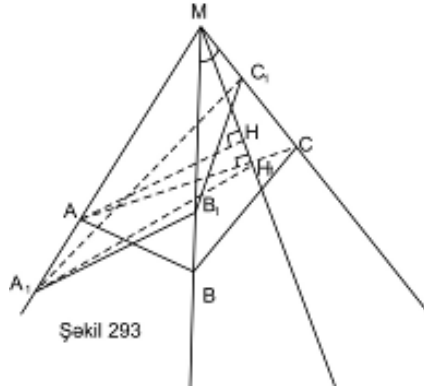
3) $SA_1 \dots A_n$ və $TA_1 \dots A_n$ piramidalarının S, T təpələri $A_1 \dots A_n$ müstəvisindən bir tərəfdə yerləşirsə, onda yalnız və yalnız ST düz xətti $A_1 \dots A_n$ müstəvisinə paralel olduqda, onlar müadildir.

4) $MABC$ və $MA_1B_1C_1$ tetraedrlərinin M təpəsində ortağ üçüzlü bucağı varsa, onda $\frac{V(MA_1B_1C_1)}{V(MABC)} = \frac{MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1}{MA \cdot MB \cdot MC}$

5) İki oxşar çoxüzlülərin həcmələri nisbəti oxşarlıq əmsalının kubuna bərabərdir. Sadaladığımız faktların isbatı o qədər də çətin deyil. Onlardan, ilk üçünü şifahi isbat etmək olar. Dördüncü, hökmü isbat etmək üçün tetraedrlərin AH və A_1H_1 hündürlüklərini çəkib, A_1H_1M və AHM üçbucaqlarının

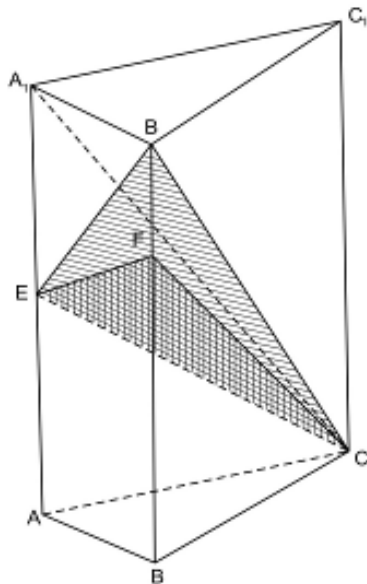
oxşarlığına əsasən $\frac{A_1H_1}{AH} = \frac{MA_1}{MA}$ (Şəkil 293) və MB_1C_1 , MBC üçbucaqlarının ortağ M təpə nöqtəsi olduğundan $\frac{S(MB_1C_1)}{S(MBC)} = \frac{MB_1 \cdot MC_1}{MB \cdot MC}$ münasibətlərinin doğruluğuna diqqət etmək kifayətdir.

Beşinci, hökmün isbatı isə 11-ci sinifin həndəsə kitabında “oxşar çoxüzlülərin həcmələri nisbəti” mövzusu altında [12₃] verilir. Çoxüzlülərin həcmələrinin müqayisəsi ilə əlaqədar məsələlərin həlli zamanı bu fiqurları hissələrinə ayırmaq, onları müxtəlif üzlərdə yerləşdirmək və başqa çoxüzlüyə qədər tamamlamaq lazım gəlir (məsələ 292-293-ə baxmalı).



292. Gösterilən müstəvilər arasında yerləşən çoxüzlü $CEFB_1$ tetraedridir (Şəkil 294), məsələ isə onun həcmnin prizma həcmnin hansı hissəsini təşkil etdiyini müəyyənləşdirməkdən ibarətdir. Onun həcmi ilə əlaqədar aşağıdakılara diqqət etmək lazımdır:

1) $CEFB_1$ tetraedrinə prizmaya, aralıq hissə - piramidadan “keçilir” ki, bunun da həcmi hər iki çoxüzlünün həcmi ilə asanlıqla müqayisə etmək olar. Bunun üçün (verilmiş və ona oxşar məsələlərdə) oturacağı prizmanın oturacaqlarından birinin üzərinə düşən təpəsi isə digər oturacağın müstəvinin üzərində olan (və bir qayda olaraq prizmanın təpəsi üzərində düşən) piramidaya baxılır. Aşkardır ki, bu qayda ilə qurulan ixtiyari piramidanın həcmi prizmanın həcmnin üçdə birinə bərabərdir.



Şəkil 294

2) Baxılan halda $CEFB_1$ tetraedrlərinin üzrlərindən heç biri prizmanın oturacağı üzərinə düşmədiyindən, onun həcmi oturacağı prizmanın yan üzünün müstəvisi üzərinə düşən, piramidanın həcmi ilə müqayisə etmək asandır. Asanlıqla müəyyən etmək olar ki, $CABB_1A_1$ çoxüzlüsü $CEFB_1$ tetraedri ilə C təpəsindən çəkilmiş ortaq hündürlüklü dördbucaqlı piramidadır. Bu çoxüzlülərin həcmi nisbətini tapaq.

$$V(CABB_1A_1) = V(ABCA_1B_1C_1) - V(CA_1B_1C_1) = V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3};$$

$$\frac{V(CEFB_1)}{V(CABB_1A_1)} = \frac{S(EFB_1)}{S(ABB_1A_1)} = \frac{\frac{1}{2}FB_1}{BB_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}. \quad (\text{sahələrin})$$

nisbətini hesablayarkən EFB_1 üçbucağı və ABB_1A_1 paraleloqramının E təpəsindən çəkilmiş hündürlüklərinin eyni olması nəzərə alınmışdır).

$$\text{Beləliklə, } V(CEFB_1) = \frac{1}{10} \cdot V(CABB_1A_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2V}{3} = \frac{V}{15}.$$

293. Prizmanın BCK_1 müstəvisi ilə kəsiyini qurmaq üçün AA_1 və BK_1 düz xətlərinin D kəsişmə nöqtəsini, sonra isə DC və A_1C_1 düz xətlərinin L_1 kəsişmə nöqtəsini qeyd etmək kifayətdir (Şəkil 295). $ABCA_1K_1L_1$ və $K_1B_1BL_1C_1C$ çoxüzvlülərin həcmələrinin müqayisəsi planını göstərk.

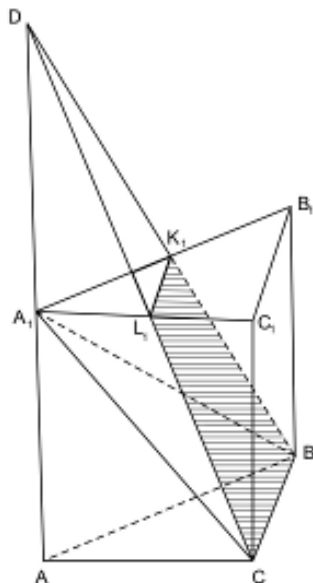
1) $ABCA_1K_1L_1$ - kəsik piramidadır, odur ki, onun həcmi $DABC$ piramidasının həcmi ilə müqayisə etmək məntiqlidir.

2) $DABC$ piramidasından $ABCA_1B_1C_1$ prizmasına A_1ABC tetraedri vasitəsilə “keçmək” daha sadədir. Baxılan halda $DABC$ və A_1ABC çoxüzvlülərinin həcmələri nisbətini axtararkən onların B təpəsindən çəkilmiş ortaq hündürlüyünü görmək olar (ya ortaq ABC oturacağı, yaxud A təpəsindəki ortaq üçüzvlü bucaq).

İndi qeyd edilən planı yerinə yetirək. K_1A_1D və K_1B_1B üçbucaqları, ikinci əlamətə görə, bərabərdir, beləliklə, $DA_1 = BB_1 = AA_1$. Onda $DA_1K_1L_1$ və $DABC$ tetraedrləri oxşar olduğundan

$$\frac{V(DA_1K_1L_1)}{V(DABC)} = \left(\frac{DA_1}{DA} \right)^3 = \frac{1}{8},$$

$$\text{buradan } \frac{V(ABCA_1K_1L_1)}{V(DABC)} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$



Şəkil 295

$DABC$ və A_1ABC tetraedrlərinin, B təpəsindən çəkilməmiş, ortaq hündürlüyü vardır, odur ki, onların həcmələri DAC və A_1AC oturacaqlarının (bilmək lazımdır ki, tetraedrin ixtiyari üzünü oturacaq hesab etmək olar) sahələri ilə mütənasibdir. CA_1 parçası DAC üçbucağının medianı olduğundan A_1AC və DA_1C üçbucaqları müadildir. Beləliklə, $\frac{V(DABC)}{V(A_1ABC)} = \frac{S(DAC)}{S(A_1AC)} = 2$.

$$\frac{V(A_1ABC)}{V(ABCA_1B_1C_1)} = \frac{1}{3} \text{ olduğunu nəzərə alıb}$$

$$\frac{V(DABC)}{V(ABCA_1B_1C_1)} = \frac{V(DABC)}{V(A_1ABC)} \times \frac{V(A_1ABC)}{V(ABCA_1B_1C_1)} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{V(ABCA_1K_1L_1)}{V(ABCA_1B_1C_1)} = \frac{V(ABCA_1K_1L_1)}{V(DABC)} \cdot \frac{V(DABC)}{V(ABCA_1B_1C_1)} = \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{12}.$$

$$\frac{V(K_1B_1BL_1C_1C)}{V(ABCA_1B_1C_1)} = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12} \text{ alırıq, buradan}$$

$$\frac{V(ABCA_1K_1L_1)}{V(K_1B_1BL_1C_1C)} = \frac{7}{12} : \frac{5}{12} = \frac{7}{5}. \text{ Çoxüznlülərin həcmələrinin, yu-}$$

xarıda göstərilən 1)-5) faktlarına əsaslanaraq, müqayisə edilməsinə aid daha çox məsələlər həll etmək olar. Bunlardan ikisini göstərməklə (292-293) kifayətlənirik.

294. Düzbucaqlı kağız vərəqinin bükülməsi ilə silindr düzəldilir. Silindrin yuxarı və aşağı oturacaqlarında iki diametr çəkilir. Diametrlər arasındakı bucaq çox böyük deyildirsə, onda oturacaqları bu diametrlər üzrə “yastılamaqla” tetraedr alırıq. Diametrlər arasındakı bucağı dəyişməklə, müxtəlif tetraedrlər almaq olar.

295. Fərz edək ki, O kubun mərkəzidir. Onda $2\vec{OK} = \vec{C_1D}$, $2\vec{OL} = \vec{DA_1}$ və $2\vec{OM} = \vec{A_1C_1}$ bərabərlikləri doğrudur. C_1DA_1

üçbucağı düzgün olduğundan, KLM -də düzgün üçbucaqdır, O nöqtəsi isə onun mərkəzidir.

296. Fərz edək ki, (x_1, y_1, z_1) və (x_2, y_2, z_2) - verilmiş müstəvinin nöqtələridir. Onda $ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_2 + by_2 + cz_2) = 0$, bu isə o deməkdir ki, $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ və (a, b, c) vektorları perpendikulyardır. Odur ki, verilmiş müstəvinin iki nöqtəsindən keçən ixtiyari düz xətt (a, b, c) vektoruna perpendikulyardır.

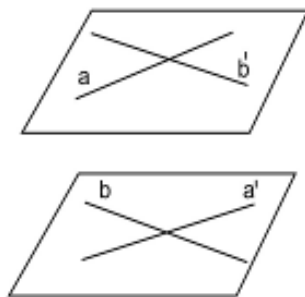
297. İsbatı l düz xəttinin l_1, l_2 düz xətlərinin O kəsişmə nöqtəsindən keçməsi halı üçün aparmaq kifayətdir. Fərz edək ki, A baxılan l düz xəttinin O - dan fərqli hər hansı nöqtəsidir, A nöqtəsinin α üzərindəki proyeksiyası P ; A nöqtəsindən l_1, l_2 düz xətlərinə endirilmiş perpendikulyarların oturacaqları B_1, B_2 - dir. $\angle AOB_1 = \angle AOB_2$ olduğundan düzbucaqlı AOB_1 və AOB_2 üçbucaqları bərabərdir, odur ki, $OB_1 = OB_2$. Üç perpendikulyar haqqında teoremə görə $PB_1 \perp OB_1$ və $PB_2 \perp OB_2$.

298. Fərz edək ki, α -verilmiş kəsişən düz xətləri üzərində saxlayan müstəvisidir. $l \perp \alpha$ olması halı aşkardır. l düz xətti α müstəvisinə perpendikulyar deyildirsə, onda yalnız və yalnız bu düz xəttin α müstəvisi üzərindəki proyeksiyası l_1, l_2 düz xətlərinin arasındakı bucaqlardan birinin tənböləni olduqda onlarla eyni bucaq əmələ gətirir (məsələ 297-yə baxmalı); bu o deməkdir ki, l düz xətti ikinci tənbölənə perpendikulyardır.

299. l düz xəttinə perpendikulyar olan α müstəvisi üzərinə proyeksiyaya baxaq. Bu proyeksiyada A_1, A_2 nöqtələri A_1', A_2' nöqtələrinə, l düz xətti L nöqtəsinə, α_1, α_2 müstəviləri p_1, p_2 düz xətlərinə keçir. Məsələ, 297-in həllində olduğu kimi yalnız və yalnız $A_1' A_2'$ düz xətti p_1, p_2 düz xətlərinə perpendikulyarlarla, başqa sözlə p_1, p_2 düz xətlərinin özləri ilə eyni bucaq əmələ gətirdikdə, α_1, α_2 müstəvilərinə perpendikulyarlarla eyni

bucaq əmələ gətirir. Bu isə öz növbəsində o deməkdir ki, $A_1' L = A_2' L$.

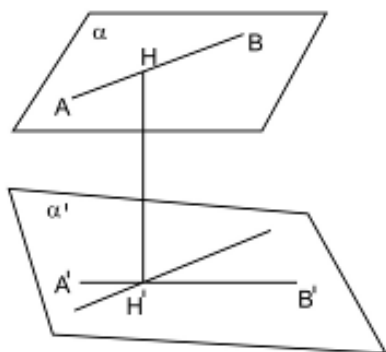
300. Fərz edək ki, a və b verilmiş çarpaz düz xətlərdir (Şəkil 296). a düz xəttinin ixtiyari nöqtəsindən b düz xəttinə paralel b' , b düz xəttinin ixtiyari nöqtəsindən isə a düz xəttinə paralel a' düz xəttini, keçirək. İndi iki müstəvi çəkək: birini a və b' düz xətlərindən, digərini isə b və a' düz xətlərindən. Məlum teoremə görə (bir müstəvinin iki kəsişən düz xətti, uyğun olaraq, o biri müstəvinin iki kəsişən düz xəttinə paraleldirsə, bu müstəvilər paraleldir) bu müstəvilər paraleldir. a düz xətti onlardan birincisinin, b düz xətti isə ikincisinin üzərində yerləşir.



Şəkil 296

301. Məsələni başqa formada da ifadə etmək olar: İki kəsişməyən düz xətt verilmişdirsə, onda hər iki düz xətti düz bucaq altında kəsən yalnız yeganə bir düz xətt vardır.

Bu düz xəttə verilmiş iki düz xəttin ortaq perpendikulyarı deyilir. Bu ortaq perpendikulyarın uzunluğu verilmiş iki düz xətt arasındakı ən qısa məsafə adlanır.



Şəkil 297

Fərz edək ki, AB və $A'B'$ verilmiş paralel olmayan (çarpaz) düz xətlərdir (Şəkil 297). Bu düz xətlərdən, yeganə qayda ilə, iki paralel α, α' müstəviləri keçirmək olar (məsələ 300-ə baxmalı). AB və $A'B'$ düz xətlərinin hər ikisinə perpendikulyar olan ixtiyari düz xətt α müstəvisinə perpendikulyardır (d düz xətti α müstəvisi üzərindəki kəsişən iki düz xəttə

perpendikulyardırsa, onda müstəviyə də perpendikulyardır) və

tərsinə α müstəvisinə perpendikulyar olan düz xətt AB və $A'B'$ düz xətlərinin hər ikisinə perpendikulyardır. AB düz xəttini kəsən α müstəvisinə perpendikulyarların həndəsi yeri isə β' müstəvisidir. Bu müstəvilərin hər ikisi α müstəvisinə perpendikulyardır, lakin paralel deyil və üst-üstə düşməzlər (çünki AB və $A'B'$ düz xətlərinə paralel olmaqla yanaşı α müstəvisinə perpendikulyar müstəvi yoxdur); onlar α müstəvisinə perpendikulyar olan HH' düz xətti üzrə kəsişir; bu da axtarılan yeganə düz xətdir. AB və $A'B'$ düz xətləri arasındakı HH' düz xətti üzrə hesablanan məsafə, AB və $A'B'$ düz xətləri üzərindəki hər hansı uyğun olaraq M və M' nöqtələri arasındakı MM' məsafəsindən kiçikdir, çünki o, α, α' paralel müstəviləri arasındakı axtarılan məsafədir. Verilmiş düz xətlər kəsişirsə, onda ortaq perpendikulyar kəsişmə nöqtəsindən keçir və ən qısa məsafə sıfıra bərabər olur. Nəhayət, iki paralel düz xəttin sonsuz sayda, bir-birinə bərabər, ortaq perpendikulyarı vardır.

Qeyd edək ki, çarpaz düz xətlər tənlikləri ilə verilərsə, onların ortaq perpendikulyarının tənliyini yazmaq və uzunluğunu hesablamaq üçün düstur çıxarmaq olar.

302. Axtarılan paralelepipedə almaq üçün verilmiş düz xətlərin hər birindən iki müstəvi keçirmək lazımdır: düz xətlərin birindən qalan ikisinə, digər düz xəttən qalan ikisinə paralel müstəvilər.

303. Koordinat sistemi daxil edək və onun oxlarını verilmiş üç perpendikulyar düz xətlərə paralel istiqamətlərə yönəldək. l düz xətti üzərində uzunluğu vahid olan $\vec{u}$ vektoru götürək. Bu vektorun koordinatları $(x; y; z)$ -dir, burada $x = \pm \cos \alpha$; $y = \pm \cos \beta$; $z = \pm \cos \gamma$. Odur ki, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = x^2 + y^2 + z^2 = \left| \vec{u} \right|^2 = 1$.

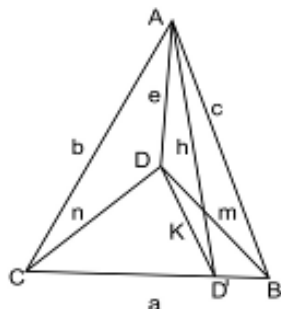
304. Həllin üç üsulunu göstərək.

I. Fərz edək ki, α, β, γ uyğun olaraq ABC müstəvisi ilə DBC, DAC və DAB müstəviləri arasındakı bucaqlardır. $S(ABC) = k$ olarsa, onda $S(DBC) = k \cos \alpha$, $S(DAC) = k \cos \beta$, $S(DAB) = k \cos \gamma$. Son üç bərabərliyin hər birini kvadrata yüksəldib tərəf-tərəfə toplayıb, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ olduğunu (məsələn, 303-ə baxmalı) nəzərə alsaq tələb olunanı alırıq.

II. Fərz edək ki, ABC və DBC müstəviləri arasındakı bucaq α , D' isə D nöqtəsinin ABC müstəvisi üzərindəki proyeksiyasıdır. Onda $S(DBC) = S(ABC) \cos \alpha$ və $S(D'BC) = S(DBC) \cos \alpha$, buradan $S(D'BC) = S(DBC) \cdot \frac{S(DBC)}{S(ABC)} = \frac{S^2(DBC)}{S(ABC)}$; analogi olaraq $D'AB$ və $D'AC$ üçbucaqları üçün $S(D'AB) = \frac{S^2(DAB)}{S(ABC)}$; $S(D'AC) = \frac{S^2(DAC)}{S(ABC)}$ alırıq. Son üç bərabərliyi tərəf-tərəfə toplayıb və $S(D'BC) + S(D'AB) + S(D'AC) = S(ABC)$ olduğunu nəzərə alıb tələb olunanı tapırıq.

III. ABC üçbucağının tərəflərini uyğun olaraq a, b, c ilə işarə edək. Onda həmin üçbucağın perimetrinin yarısı $p = \frac{a+b+c}{2}$, (Şəkil 298) və

sahəsi $S^2(ABC) = p(p-a)(p-b)(p-c)$ olar. a, b, c tərəfləri məlum deyil. Lakin onlar uyğun olaraq ADB, CDA və ADB düzbucaqlı üçbucaqların hipotenuzlarıdır. Həmin üçbucaqların l, m, n katetləri məlum olarsa, a, b, c -



Şəkil 298

ni bunlar vasitəsi ilə ifadə etmək olar (Şəkil 298); $a^2 = m^2 + n^2$, $b^2 = n^2 + l^2$, $c^2 = l^2 + m^2$. Digər tərəfdən l, m, n verilmiş $S(ADC)$, $S(ADB)$, $S(CDA)$ sahələri ilə əlaqədardır:

$\frac{1}{2}mn = S(BDC)$, $\frac{1}{2}nl = S(ADC)$, $\frac{1}{2}lm = S(ADB)$. Beləliklə, yeddi məchulu (S, a, b, c, l, m, n) tapmaq üçün yeddi tənliklər sistemi vardır. Axtarılan üçbucağın sahəsini tapmaq üçün ən sadə düstur $S(ABC) = \frac{1}{2}ah$ -dır. (Şəkil 298), burada a -həmin üçbucağın oturacağı, h isə hündürlüyüdür. a ilə artıq qarşılaşmışıq, h isə yeni kəmiyyətdir. Sahəsi $S(ABC)$ olan üçbucağın h hündürlüyünü hər hansı köməkçi üçbucaqdan istifadə etməklə hesablamaq olar. Bunun üçün tetraedri h hündürlüyündən və düz üçüzlü bucağın təpəsindən keçən müstəvi ilə kəsək. Kəsikdə hipotenuzu h və katetlərindən biri l olan düzbucaqlı üçbucaq alırıq; İkinci katet (onu k ilə işarə edək) sahəsi $S(BDC)$ olan üçbucağın a tərəfinə çəkilmiş hündürlüyü olacaqdır. Beləliklə, $h^2 = k^2 + l^2$ alırıq. İndi k -nı tapmaq lazımdır. $\frac{1}{2}a \cdot k = S(BDC)$.

Yuxarıda deyilənləri nəzərə almaqla

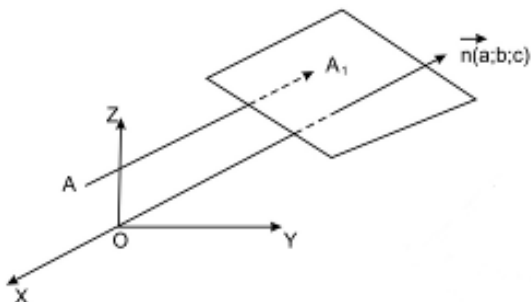
$$4S^2(ABC) = a^2h^2 = a^2(k^2 + l^2) = a^2k^2 + a^2l^2 = \\ = 4S^2(BDC) + (n^2 + m^2)l^2 = 4S^2(BDC) + \\ + 4S^2(ADC) + 4S^2(ADB), \text{ buradan}$$

$S^2(ABC) = S^2(BDC) + S^2(ADC) + S^2(ADB)$. Bunu da isbat etmək tələb olunurdu. Hər üç həll nəticəsində üç ölçülü fəzada Pifaqor teoreminin ifadəsini aldıq.

305. Kubun tilləri ilə verilmiş müstəviyə perpendikulyar olan düz xətt arasındakı bucaqlar uyğun olaraq α, β və γ olsun. Onda kubun tillərinin bu müstəvi üzərində proyeksiyalarının uzunluqları $a \sin \alpha$, $a \sin \beta$ və $a \sin \gamma$ (hər biri 4 dəfə olmaqla), bunların kvadratları $a^2 \sin^2 \alpha$, $a^2 \sin^2 \beta$, $a^2 \sin^2 \gamma$ və cəmi $a^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)$ olar. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ olduğundan (məsələn 303) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$. Onda

$a^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) = 2a^2$. Kubun bütün tillərinin verilmiş müstəvi üzərində proyeksiyalarının kvadrları cəmi isə $4 \cdot 2a^2 = 8a^2$ olar.

306. $ax + by + cz + d = 0$ müstəvisinə verilmiş $A(x_0, y_0, z_0)$



Şəkil 299

nöqtəsindən çəkilmiş perpendikulyarın oturacağı $A_1(x_1, y_1, z_1)$ olsun.

$\vec{AA_1}$ və $\vec{n}(a; b; c)$ vektorları verilmiş müstəviyə perpendikulyar olduğundan kollienardır (Şəkil 299). Ona görə:

$$\vec{AA_1} = k \cdot \vec{n},$$

$(x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0) = (ka; kb; kc)$. Buradan $x_1 = x_0 + ka$,

$y_1 = y_0 + kb$, $z_1 = z_0 + kc$ alırıq. $A_1(x_1, y_1, z_1)$ nöqtəsi

müstəvinin üzərində olduğundan: $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$,

$$a(x_0 + ka) + b(y_0 + kb) + c(z_0 + kc) + d = 0,$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)k + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0. \text{ Buradan}$$

$$k = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \text{ alırıq. } \left| \vec{AA_1} \right| = |k| \cdot \left| \vec{n} \right| \text{ olduğundan}$$

$$\left| \vec{AA_1} \right| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ olar.}$$

307. Fərz edək ki, konusun oxu OZ oxuna paraleldir, onun təpə nöqtəsinin koordinatları $(a; b; c)$, oxu ilə doğurani arasındakı bucaq α -dır. Onda konusun səthinin nöqtələri $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k^2(z - c)^2$ (1) tənliyini ödəyir, burada $k = \operatorname{tg} \alpha$. Oxu bu konusun oxuna paralel və doğurani ilə oxu arasındakı bucağı α -ya bərabər olan digər konusun təpə nöq-

təsinin koordinatları $(a_1; b_1; c_1)$ dir. Onda ikinci konusun səthi nöqtələri $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = k^2(z - c_1)^2$ (2) tənliyini ödəyir. Konus səthlərinin iki tənliyinin fərqi, eyni bir α bucağı, üçün xətti tənlikdir. Baxılan halda (1) və (2) tənliklərin fərqi xətti tənlikdir, konus səthlərinin bütün ortaq nöqtələri bu tənliklə verilən müstəvi üzərindədir.

308. OX, OY, OZ oxlarını AB, AD və AA₁ şüaları üzrə yönəltməklə koordinat sistemi daxil edək. AA₁, CD, B₁C₁ düz xətləri uyğun olaraq $x=0$, $y=0$; $y=a$, $z=0$; $x=a$, $z=a$ tənlikləri ilə verilir. Odur ki, koordinatları (X, Y, Z) olan nöqtələrdən AA₁, CD və B₁C₁ düz xətlərinə qədər məsafələrin kvadratı uyğun olaraq $x^2 + y^2$, $(y - a)^2 + z^2$ və $(x - a)^2 + (z - a)^2$ -dir.

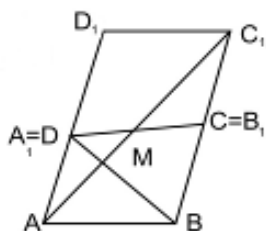
$$x^2 + (x - a)^2 \geq \frac{a^2}{2}, \quad y^2 + (y - a)^2 \geq \frac{a^2}{2} \quad \text{və} \quad z^2 + (z - a)^2 \geq \frac{a^2}{2}$$

olduğundan, bütün bu ədədlər eyni zamanda $\frac{a^2}{2}$ -dən kiçik ola

bilməz. Koordinatları $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ olan nöqtə başqa sözlə koordinat başlanğıcı üçün bu ədədlərdən hər biri $a^2/2$ -yə bərabərdir.

309. Verilmiş paralelepipedin, A₁D düz xəttinə paralel, ABC müstəvisi üzərinə proyeksiyasına baxaq (Şəkil 300₁). Aşkardır ki,

bu şəkildə $AM : MC_1 = AD : BC_1 = 1 : 2$; $\frac{AM}{MC_1} = \frac{1}{2}$, törəmə



Şəkil 300₁

tənasübə əsasən $\frac{AM + MC_1}{MC_1} = \frac{3}{2}$,

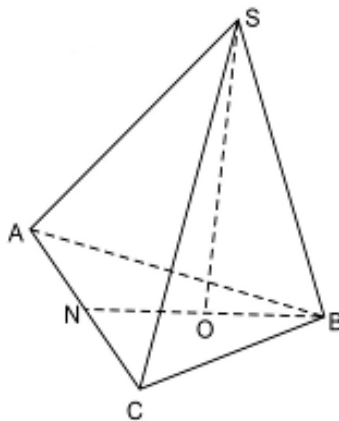
$$\frac{AC_1}{MC_1} = \frac{3}{2}, \quad \frac{AC_1}{AC_1 - AM} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{AC_1 - AM}{AC_1} = \frac{2}{3}, \quad 1 - \frac{AM}{AC_1} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{AM}{AC_1} = \frac{1}{3}, \quad AM = \frac{1}{3} AC_1.$$

310. Fərz edək ki, verilmiş düzgün ABC üçbucağının təpələrinin verilmiş müstəviyə perpendikulyar olan düz xətt üzərindəki proyeksiyaları A_1, B_1, C_1 -dir. Verilmiş müstəvi ilə AB, BC və CA düz xətləri arasındakı bucaqlar γ, α və β dırsa, onda $A_1B_1 = a \sin \gamma$, $B_1C_1 = a \sin \alpha$, $C_1A_1 = a \sin \beta$, burada a düzgün ABC üçbucağının tərəfidir. Onda $A_1B_1 = A_1C_1 + C_1B_1$, başqa sözlə $\sin \gamma = \sin \alpha + \sin \beta$.

311. Fərz edək ki, l düz xətti ilə α müstəvisinin kəsişmə nöqtəsi O –dur (l düz xəttinin α müstəvisinə paralel olması halı aşkardır); A nöqtəsi l düz xəttinin ixtiyari nöqtəsi, A' isə onun α müstəvisi üzərindəki proyeksiyasıdır. AA' düz xətti α müstəvisi üzərindəki ixtiyari düz xəttə perpendikulyardır, odur ki, $AA' \perp l_1$. $l \perp l_1$ isə, onda $AO \perp l_1$; Beləliklə, l_1 düz xətti AOA' müstəvisinə perpendikulyardır, odur ki, $A'O \perp l_1$. $l' \perp l_1$ isə analogi mühakimə aparılır.



Şəkil 300₂

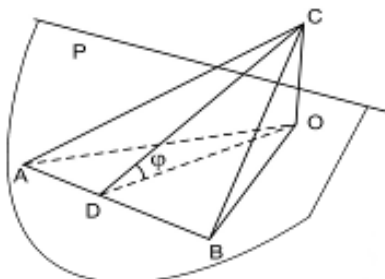
312. a) $SABC$ düzgün piramidasında AC və SB çarpaz tillərinə baxaq (Şəkil 300₂) SA, SB və SC bərabər olduğundan S nöqtəsi ABC üçbucağının mərkəzinə proyeksiyalanır və BO parçası SB -nin ABC müstəvisi üzərindəki proyeksiyasıdır. $BO \perp AC$ (çünki $BN \perp AC$) olduğundan üç perpendikulyar teoreminə görə (məsələn 311) $SB \perp AC$ olar.

b) a) məsələsi bunun xüsusi halıdır. S nöqtəsinin oturacaq müstəvisi üzərindəki proyeksiyası düzgün $A_1...A_{2n-1}$ çoxbucaqlısının O mərkəzidir, SA_1 düz xəttinin bu müstəvi üzərindəki

proyeksiyası isə OA_l parçasıdır. $OA_l \perp A_n A_{n+1}$ olduğundan $SA_l \perp A_n A_{n+1}$ (məsələ 311).

313. Məsələnin hökmü, bir tərəfi P müstəvisi ilə çoxbucaqlı müstəvisinin kəsişmə xəttinə paralel olan, üçbucaq üçün aşkardır. Başqa sözlə üçbucağın bir tərəfi proyeksiya müstəvisi üzərində olan hala baxmaq olar (Şəkil 301).

$AB \subset P$, $CO \perp P$, $\angle CDO = \varphi$,
 $CD \perp AB$. $\triangle COD$ -dən $OD = CD \cos \varphi$.



Şəkil 301

$$S(AOB) = \frac{1}{2} AB \cdot OD = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cos \varphi = S(ACB) \cos \varphi.$$

Göründüyü kimi proyeksiya nəticəsində üçbucağın tərəflərinin proyeksiya müstəvisi üzərindəki uzunluğu dəyişmiş, ona çəkilmiş hündürlüyün uzunluğu isə $\cos \varphi$ dəfə dəyişir. Bu təklif ixtiyari müstəvi fiqur, o cümlədən çoxbucaqlı üçün də doğrudur. İxtiyari çoxbucaqlını göstərilən növ üçbucaqlara ayırmaq olar. Bunun üçün çoxbucaqlının bütün təpələrindən baxılan müstəvilərin kəsişmə xəttinə paralel düz xətlər çəkirik. Bununla çoxbucaqlı üçbucaqlara və trapesiyaya ayrılır. Sonra alınmış hər bir trapesiya onların ixtiyari diaqonalı vasitəsilə üçbucaqlara ayrılır.

Deməli, müstəvi fiqurun ortoqonal proyeksiyasının sahəsi fiqurun sahəsi ilə, bu fiqurun müstəvisi ilə proyeksiya müstəvisi arasındakı bucağın kosinusu hasilinə bərabərdir:

$$S(\text{proyeksiya}) = S(\text{fiqur}) \cdot \cos \varphi.$$

314. Fərz edək ki, $ABCD$ piramidasının D təpə nöqtəsinin oturacaq müstəvi üzərindəki proyeksiyası D' -dir. Onda $S(ABC) = \pm S(BCD') \pm S(ACD') \pm S(ABD') =$
 $= S_a \cos \alpha + S_b \cos \beta + S_c \cos \gamma$. D' və A nöqtələri BC düz xəttindən müxtəlif tərəflərdə olarsa BCD' üçbucağının sahəsi “-” işarəsi ilə götürülür; ACD' və ABD' üçbucaqlarının sahəsi üçün də işarə analogi olaraq seçilir.

315. Həmin dairələrin diametrləri cismin, verilmiş müstəvilərin kəsişdiyi, düz xətt üzərində proyeksiyasının uzunluğuna bərabərdir. Diametrləri bərabər dairələrin radiusları da bərabərdir.

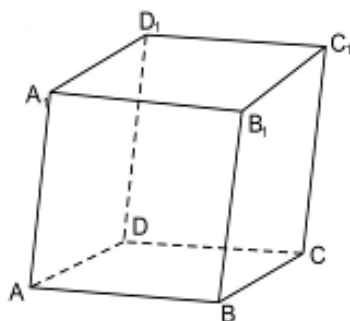
316. Fərz edək ki, B_1 və D nöqtələri baxılan proyeksiyada kubun proyeksiyasının daxili nöqtəsinə keçir (Şəkil 302). Onda kubun proyeksiyasının sahəsi

ACD_1 üçbucağının proyeksiyasının sahəsinin 2 mislinə bərabərdir, yəni bu sahə $2S \cos \varphi$ -dir.

Burada $S(ACD_1) = S$, φ isə proyeksiya müstəvisi ilə ACD_1 müstəvisi arasındakı bucaqdır.

ACD_1 üçbucağının tərəfi $\sqrt{2}$ olduğundan $2S = \sqrt{3}$.

Kubun proyeksiya müstəvisinə perpendikulyar l düz xətti üzərində proyeksiyası B_1D diaqonalının bu düz xətt üzərində proyeksiyasının üzərinə düşür. B_1D düz xətti ACD_1 müstəvisinə perpendikulyar olduğundan l və B_1D düz xətləri arasındakı bucaqda φ -yə bərabərdir. Odur ki, kubun l düz xətti üzərində proyeksiyasının uzunluğu da $B_1D \cos \varphi = \sqrt{3} \cos \varphi$ -dir.



Şəkil 302

317. h və h' uyğun olaraq D və D' nöqtələrindən ABC müstəvilərinə endirilmiş perpendikulyarların uzunluqları, S və S' isə ABC və $AB'C'$ üçbucaqlarının sahələri olsun. Aşkardır ki, $h : h' = AD : AD'$ və $S : S' = (AB \cdot AC) : (AB' \cdot AC')$. Onda

$$\frac{V(ABCD)}{V(AB'C'D')} = \frac{h \cdot S}{h' \cdot S'} = \frac{h}{h'} \cdot \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'} = \frac{AD \cdot AB \cdot AC}{AD' \cdot AB' \cdot AC'}$$

318. $DABC$ tetraedrinə şərtə görə $\angle DAC = \beta$, $\angle DAB = \gamma$, $\angle BMC = \alpha$ -dır (Şəkil 303). Onda ABD üçbucağının B təpəsindən çəkilmiş hündürlüyü $\triangle AMB$ -dən tapırıq: $BM = AB \sin \gamma$. Tetraedrin B təpəsindən ACD müstəvisinə çəkilmiş hündürlüyünü isə BMK düzbucaqlı üçbucağından

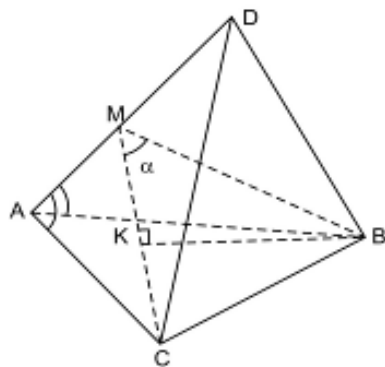
$H = AB \sin \gamma \cdot \sin \alpha$ olduğunu tapırıq. Aşkardır ki, $S(ACD) = \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \beta$.

$$V(DABC) = \frac{1}{3} S(ACD) \cdot H =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \beta \cdot AB \cdot \sin \gamma \sin \alpha$$

. Beləliklə,

$$V(DABC) = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \sin \alpha$$



Şəkil 303

319. $S(AMC) = S_1$, $S(AMB) = S_2$, bu üzlərin hündürlükləri h_1, h_2 , $AM = a$, $\angle CPB = \alpha$, tetraedrin C təpə nöqtəsindən AMB müstəvisinə çəkilmiş hündürlük CK olsun (Şəkil 304)

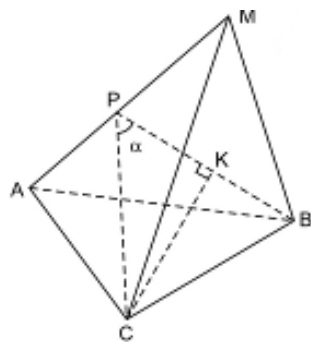
Onda $V = \frac{1}{3} S_2 \cdot CK$. $\triangle CPK$ -dan

$$CK = h_1 \sin \alpha, \quad S_2 = \frac{1}{2} ah_2, \quad \text{onda}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ah_2 \cdot h_1 \sin \alpha = \frac{1}{6} ah_1 h_2 \sin \alpha$$

$$S_1 = \frac{1}{2} ah_1, \quad h_2 = \frac{2S_2}{a}, \quad h_1 = \frac{2S_1}{a}. \text{ Beləliklə}$$

$$V = \frac{1}{6} a \cdot \frac{2S_1}{a} \cdot \frac{2S_2}{a} \cdot \sin \alpha = \frac{2S_1 \cdot S_2 \sin \alpha}{3a}$$



Şəkil 304

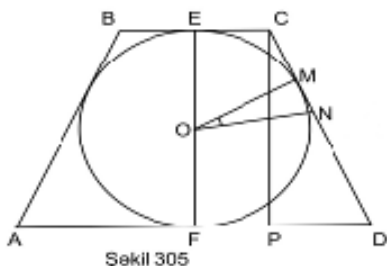
320. Sferanın mərkəzini çoxüzünün təpə nöqtələri ilə birləşdirməklə, onu piramidalara ayırmış oluruq. Bu piramidaların hündürlükləri sferanın radiusuna bərabərdir, onların oturacaqları isə çoxüzünün üzləridir. Oudur ki, bu piramidaların həcmələri cəmi $\frac{SR}{3}$ -ə bərabərdir, burada S – onların oturacaqlarının sahələri cəmidir, başqa sözlə çoxüzünün səthi sahəsidir.

321. Konusa və sferanın özünə sfera xaricinə çəkilmiş çoxüzlünün hər hansı limiti kimi baxmaq olar. Bu çoxüzlülərin hər biri üçün $V = \frac{SR}{3}$ düsturu doğrudur, burada V həcm, S – çoxüzlünün səthi sahəsi, R – verilmiş sferanın radiusudur (məsələ 320). Sferanın və konusun həcmi V_1, V_2 , uyğun tam səthlərinin

$$\text{sahələri } S_1, S_2 \text{ olarsa, onda } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{S_1 R}{3}}{\frac{S_2 R}{3}} = \frac{S_1}{S_2}.$$

322. Kəsik konusun ox kəsiyi bərabəryanlı $ABCD$ trapesiyasıdır. Bu trapesiyanın oturacaqları $AD=2R$, $BC=2r$ uyğun olaraq konusun oturacaqlarının diametrləridir. Konusun doğuranı l olsun. Məsələnin şərtinə görə $\pi l(R+r) = \pi l^2$ və buradan $R+r=l$ və ya $2R+2r=2l$. Bu isə o deməkdir ki, $ABCD$ trapesiyasının qarşı tərəflərinin cəmi bərabərdir. Deməli, trapesiyanın daxilinə çevrə çəkmək olar. Oudur ki, kəsik konusun daxilinə baxılan şərt ödənildikdə, kürə çəkmək mümkündür.

323. Konusun ox kəsiyi $ABCD$ trapesiyasıdır (Şəkil 305); onun oturacaqlarının orta nöqtələri E və F , EF parçasının orta nöqtəsi isə O olsun. $OM \perp CD$, $ON \parallel FD$, $CP \perp AD$,



Şəkil 305

$\angle MON = \angle PCD = \alpha$. Məsələni həll etmək üçün $OM=OE$ olduğunu göstərmək kifayətdir. $EC=r$,

$$DF=R, OM=x, OE=\frac{h}{2} \text{ işarə}$$

$$\text{edək. Onda } x=ON\cos\alpha=\frac{R+r}{2}\cos\alpha.$$

$$\triangle CPD\text{-dən } h=CD\cos\alpha=\sqrt{(R-r)^2+CP^2}\cos\alpha. \text{ Şərtə görə } CP^2=4Rr \text{ olduğundan}$$

$$h = \sqrt{(R-r)^2 + 4Rr \cos \alpha} = (R+r) \cos \alpha = 2x, \quad x = \frac{h}{2}. \quad \text{Beləliklə,}$$

tələb edilən isbat oldu.

324. Fərz edək ki, $SABC$ piramidasının hündürlüyü SD , onun orta nöqtəsi O , uzunluğunu a ilə işarə etdiyimiz BC parçasının orta nöqtəsi E -dir

(Şəkil 306). Onda $DE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

$$SD = \sqrt{SE^2 - DE^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}; \quad OD = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

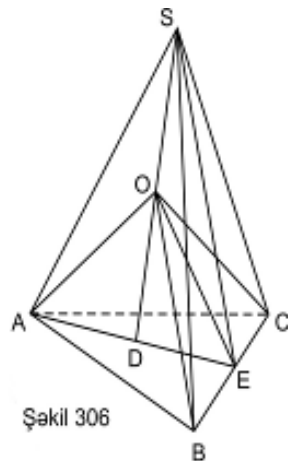
Buradan $OE = \sqrt{OD^2 + DE^2} = \frac{a}{2}$.

Beləliklə, $OE = BE = EC$, deməli $\angle BOC = 90^\circ$. Eyni qayda ilə $\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$ olduğunu alırıq.

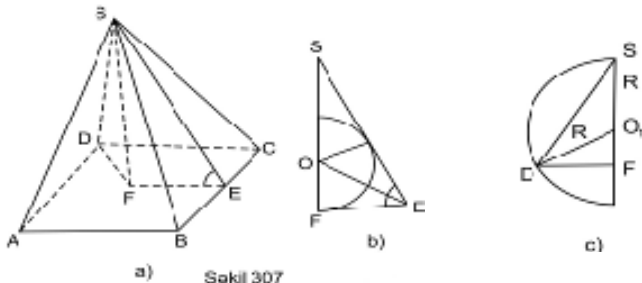
325. fərz edək ki, verilmiş piramidanın oturacağına tərəfi a , yan üzlə oturacaq müstəvisi arasındakı ikiüzlü bucaq α , piramidanın SF hündürlüyü H -dir (Şəkil 307 a). Daxilə və xaricə çəkilmiş sferaların mərkəzləri uyğun olaraq O , O_1 olsun. Onda piramidanın oxundan və yan tilindən keçən kəsiklərdən istifadə etmək olar (Şəkil 307, b, c). $\triangle SFE$ və $\triangle OFE$ -dən (Şəkil 307, b)

$$FE = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}; \quad H = SF = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + r \operatorname{tg} \alpha; \quad EF = \frac{a}{2} \quad \text{olduğundan}$$

$$r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ yazarıq.}$$



Şəkil 306



Şəkil 307

Aşkıdır ki, $DF = EF\sqrt{2} = r\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Digər tərəfdən $\triangle DO_1F$ -dən (Şəkil 307, c) $DO_1^2 = O_1F^2 + DF^2$ və ya $R^2 = (SF - R)^2 + DF^2$,
 $R = \frac{SF^2 + DF^2}{2SF}$, burada $SF = H$, $DF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ olduğunu nəzərə

$$\text{alib } R = \frac{H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2H} = \frac{r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{a^2}{2}}{2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$\frac{r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + 2r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{r(\operatorname{tg}^2\alpha + 2)}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}. \text{ Onda } \frac{R}{r} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 2}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Burada $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = x$ əvəz edib,

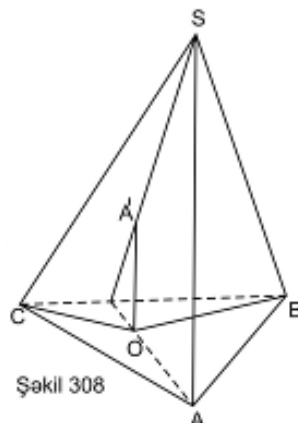
$$\frac{R}{r} = \frac{1 + x^4}{2x^2(1 - x^2)} \text{ alırıq. İndi isə } x^2 = t$$

götürüb məsələni $\frac{1+t^2}{2t(1-t)} \geq 1 + \sqrt{2}$ bə-

rabərsizliyinin isbatına gətirmiş oluruq, $0 < t < 1$. Sadə çevirmələrdən sonra sonuncu bərabərsizlik

$(2\sqrt{2} + 3)t^2 - 2(\sqrt{2} + 1)t + 1 \geq 0$ şəkilə düşür. Sol tərəfdəki kvadrat üçhədlinin diskriminantı sıfıra bərabərdir. Beləliklə, kvadrta üçhədlə t -in ixtiyari qiymətində işarəsini dəyişmir. $t=0$ olduqda bu kvadrat üçhədlə müsbət olduğundan, bərabərsizliyin doğruluğu isbat edildi.

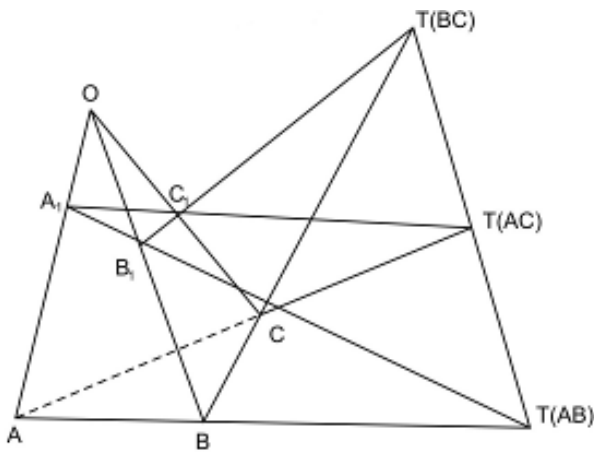
326. ASBC və OSBC piramidalarının ortaq SBC oturacağı vardır (Şəkil 308), odur ki, onların həcmələri nisbəti oturacağı



Şəkil 308

çəkilməmiş hündürlüklərin nisbətində bərabərdir. $OA' \parallel AS$ olduğundan, $ASBC$ və $OSBC$ piramidalarının hündürlükləri nisbəti SA -nın OA' -ə nisbətində bərabərdir. Beləliklə, onların həcmələri nisbəti $\frac{V(OSBC)}{V(ASBC)} = \frac{OA'}{SA}$ -dır. Analoji olaraq $\frac{V(OSCA)}{V(ASBC)} = \frac{OC'}{SC}$, $\frac{V(OSAB)}{V(ASBC)} = \frac{OB'}{SB}$ yazırıq. Alınmış bərabərlikləri tərəfə-tərəfə toplayıb $\frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC} = 1$ alırıq.

327₁. Fərz edək ki, P və P_1 uyğun olaraq ABC və $A_1B_1C_1$ üçbucaqlarının müstəviləri l isə onların kəsişmə xəttidir (Şəkil 309). A , B və O nöqtələrindən keçən müstəvinə $Q(AB)$ ilə işarə



Şəkil 309

edək. A_1B_1 düz xətti $Q(AB)$ üzərindədir və AB -yə paralel olmayıb $T(AB)$ nöqtəsində kəşir. Bu nöqtə P və P_1 müstəviləri üzərindədir, odur ki, l düz xəttinin də üzərindədir. Analoji olaraq isbat edə bilərik ki, BC , B_1C_1 və AC , A_1C_1 düz xətləri, uyğun olaraq l düz xətti

üzərində olan, $T(BC)$, $T(AC)$ nöqtələrində kəşir.

327₂. Fərz edək ki, ASC üzünün ağırlıq mərkəzi O_1 , məsələdə baxılan parçalardan biri BO_1 -dir. Daha başqa bir üz, məsələn BSC -ni götürək. Bu üzün ağırlıq mərkəzini O_2 ilə işarə edək. İsbat edək ki, AO_2 parçası BO_1 parçası ilə kəşir və bu kəsişmə nöqtəsi O isə BO_1 parçasını O_1 nöqtəsindən başlayaraq 1:3 nisbətində bölür. Doğrudan da, M_1 və M_2 nöqtələri AC və BC parçalarının ortalarıdırsa (Şəkil 310) onda aşkardır ki, $AB \parallel M_1M_2$;

O_1 və O_2 nöqtələri uyğun olaraq M_1S və M_2S parçalarını eyni bir nisbətdə böldüyündən, aşkardır ki, $O_1O_2 \parallel M_1M_2$. Odur ki, $AB \parallel O_1O_2$. Deməli ABO_2O_1 dördbucaqlısı trapesiyadır və onun BO_1 və AO_2 diaqonalları O

nöqtəsində kəsişir. Onda $\frac{M_1M_2}{AB} = \frac{1}{2}$;

$\frac{O_1O_2}{M_1M_2} = \frac{2}{3}$ yazarıq. Bu bərabər-

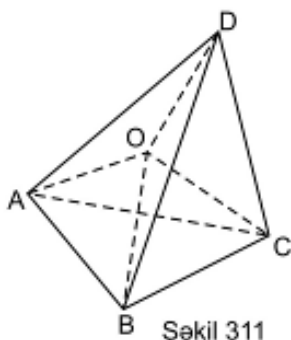
likləri tərəf-tərəfə vurub $\frac{O_1O_2}{AB} = \frac{1}{3}$

alırıq. AOB və O_1OO_2 üçbucaqlarının oxşarlığından

$$\frac{O_1O}{OB} = \frac{O_1O_2}{AB}. \text{ Beləliklə, } \frac{O_1O}{OB} = \frac{1}{3}.$$

Eyni qayda ilə digər üzlərin ağırlıq mərkəzi ilə uyğun təpə nöqtəsini birləşdirən parçanın O nöqtəsi ilə 1:3 nisbətində bölündüyünü isbat edə bilərik.

328. Düzgün $ABCD$ tetraedrinin daxilində O nöqtəsi götürək (Şəkil 311). O nöqtəsini tetraedrin bütün təpələri ilə birləşdirib dörd $ABCO$, $BCDO$, $CADO$, $ABDO$ piramidalarını alırıq. Aşkardır ki, bu piramidaların həcmələri cəmi verilmiş piramidanın



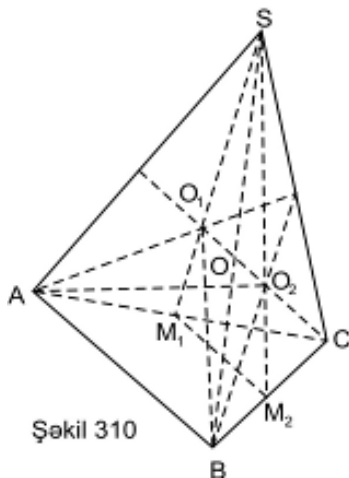
Şəkil 311

həcminə bərabərdir. Tetraedrin üzlərinin sahəsini S , onun hündürlüyünü h , O nöqtəsindən üzlərə qədər məsafələri (bunlar alınmış piramidaların hündürlükləridir). h_1, h_2, h_3, h_4 işarə edib

$$\frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}Sh_1 + \frac{1}{3}Sh_2 + \frac{1}{3}Sh_3 + \frac{1}{3}Sh_4 \text{ və}$$

ya $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$ alırıq.

329. Düz xətlərin hamısı bir nöqtədə kəsişdikdə birinci hal alınır. Verilmiş düz xətlərdən hər hansı biri digər iki düz xəttin kəsişmə nöqtəsindən keçmirsə, onda bu düz xətt kəsişən iki düz xəttin təyin etdiyi müstəvi üzərində yerləşir,



Şəkil 310

270

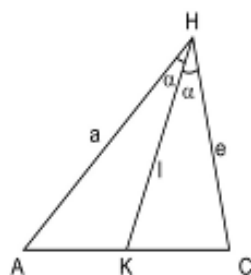
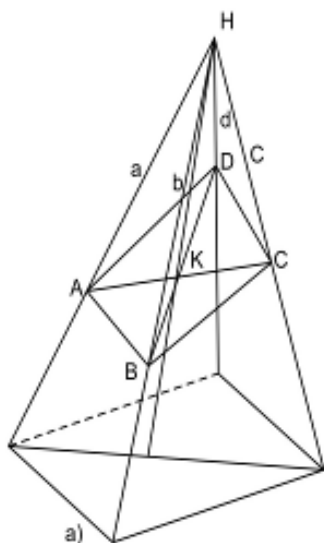
(Şəkil 314). $\triangle SOB$ -dən $\sin \alpha = \frac{r}{R}$. Onda $H = \frac{lr}{R}$ və

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \frac{lr}{R} = \frac{1}{3} \pi R l r. \text{ Məlumdur ki, } S(\text{yan}) = \pi R l. \text{ Nəticədə}$$

$$V = \frac{1}{3} S(\text{yan}) \cdot r \text{ alırıq.}$$

333. Piramidanın hündürlüyünün yan tillərlə əmələ gətirdiyi bucağı α , kəsən müstəvinin yan tillərlə və hündürlüklə kəsişmə nöqtələrini A, B, C, D və K, piramidanın təpə nöqtəsini H ilə işarə edək (Şəkil 315,

a). Aşkardır ki, a, b, c və d uzunluqları arasında müəyyən münasibət tapmalıyıq: üç A, B, C nöqtələrindən yalnız bir müstəvi keçirmək olar. Odur ki, d -ni a, b və c ilə ifadə etmək mümkündür. HK parçası AHC və BHD üçbucaqlarının



b)

Şəkil 315

ortaq

tənbölənidir. Bu tənbölənin uzunluğunu (l) həmin üçbucaqların a, c və b, d tərəfləri və α bucağı vasitəsilə ifadə etmək olar.

AHC üçbucağında $S(AHC) = S(AHK) + S(KHC)$ (Şəkil 315, b). Bu bərabərliyin hər tərəfini 2-yə vurub $a \sin 2\alpha = a l \sin \alpha + c l \sin \alpha$

alırıq, buradan
$$\frac{2 \cos \alpha}{l} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \quad (1) \text{ Analoji olaraq BHC}$$

üçbucağından $\frac{2 \cos \alpha}{l} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$ (2) yazırıq. (1) və (2)

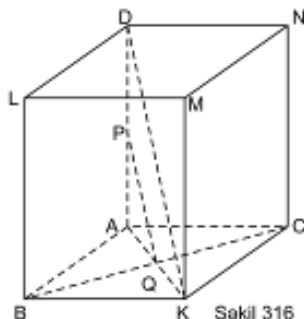
bərabərliklərindən $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$ alırıq.

334. A təpəsindəki müstəvi bucaqları düz olan ABCD tetraedrinə ABKCDLMN düzbucaqlı paralelepipedinə tamamlayaq (Şəkil 316).

Bu paralelepipedin xaricinə çəkilmiş sfera, həm də ABCD tetraedrinin də xaricinə çəkilmişdir. AKD üçbucağından alınır ki,

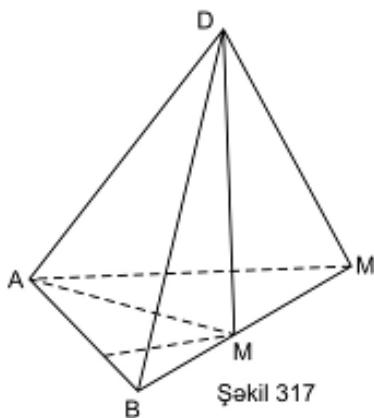
$$|PQ| = \frac{1}{2}|DK|.$$

Paralelepipedin DK diaqonalı onun xaricinə çəkilmiş sferanın diametri olduğundan, PQ parçasının uzunluğu bu sferanın radiusudur.



Şəkil 316

335. Fərz edək ki, ABCD tetraedrinin, tili AD olan ikiüzlü bucağın tən bölən müstəvisi ilə, kəsiyi ADM-dir (Şəkil 317).



Şəkil 317

ACMD və ABMD tetraedrlərinin həcmələrini uyğun olaraq V_1 və V_2 ilə işarə edək. M nöqtəsi ADC və ADB üzlərindən eyni məsafədə oldu-

ğundan $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S(DAC)}{S(ADB)}$. Digər tərəf-

dən, aşkardır ki, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S(DMC)}{S(DMB)} = \frac{MC}{MB}$.

Odur ki, $\frac{S(ADC)}{S(ADB)} = \frac{MC}{MB}$.

336. Tetraedrin tillərindən qarşıdakı tillərə paralel keçirilən müstəvilərin əmələ gətirdiyi paralelepipedə baxaq. Əvvəlki tetraedrin üzlərinin müstəviləri paralelepipeddən, hər birinin

həcmi paralelepipedin həcmnin $\frac{1}{6}$ hissəsinə bərabər olan, 4

tetraedr ayırır. Odur ki, tetraedrin həcmi paralelepipedin

həcmnin $\frac{1}{3}$ -ni təşkil edir. Paralelepipedin həcmi isə məsələdə verilən kəmiyyətlərlə asanlıqla ifadə etmək olar: onun üzləri diaqonalları AB, CD və onlar arasındakı bucaq φ olan paraleloqramdır, bu üzə çəkilmiş hündürlük isə d-yə bərabərdir.

337. Tetraedrin həcmi $\frac{1}{6}abd \sin \varphi$ -yə bərabərdir, burada a, b tillərin uzunluğu, d – çarpaz tillər arasındakı məsafə, φ onlar arasındakı bucaqdır (Məsələ 336).

338. Əvvəlcə isbat edək ki, radiusları R, r olan iki toxunan çevrənin ortaq toxunanının uzunluğu $2\sqrt{Rr}$ -ə bərabərdir. Bunun üçün hipotenuzunun ucları çevrələrin mərkəzində olan, katetlərindən biri isə ortaq toxunana paralel düzbucaqlı üçbucağa baxaq. Pifaqor teoreminə görə bu düzbucaqlı üçbucaqdan $x^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2$ alırıq, burada x – ortaq toxunanın uzunluğudur. Buradan $x = 2\sqrt{Rr}$. İndi, verilmiş kürələrin mərkəzlərindən və A, B nöqtələrindən keçən müstəvi kəsiyinə baxmaqla, bu düsturun qoyulan məsələ üçün doğruluğunu asanlıqla yoxlamaq olar.

339. Fərz edək ki, O_1, O_2 – verilmiş çevrələrin mərkəzləridir; a) məsələsində M nöqtəsi AB parçasının ortasıdır; b) məsələsində isə $M=P$ –dir. MO_1O_2 müstəvisinə baxaq. Axtarılan sferanın mərkəzi bu müstəvidə O_1, O_2 nöqtələrindən MO_1, MO_2 düz xətlərinə çəkilmiş perpendikulyarların kəsişmə nöqtəsidir.

340. İki yan üzün xaricinə çəkilmiş çevrələrin iki ortaq nöqtəsi vardır – bu üzlərin ortaq təpələri. Odur ki, bu çevrələrin hər ikisini üzərində saxlayan sfera vardır (Məsələ 339). Üçüncü üzün xaricinə çəkilmiş çevrə bu sferanın müstəvi ilə kəsiyidir.

341. Təpəsi S nöqtəsində olan verilmiş üçüzlü bucağın daxilində ixtiyari S' nöqtəsi götürək və bu nöqtədən uyğun olaraq SBC, SAC, SAB üzlərinə $S'A', S'B', S'C'$ perpendikulyarı çəkək. Aşkardır ki, $S'A'B'C'$ üçüzlü bucağının müstəvi bucaqları SABC üçüzlü bucağının ikiüzlü bucaqlarını π -yə tamamlayır. Deməli,

$S'A'B'C'$ üçüzlü bucağının müstəvi bucaqları $\pi - A, \pi - B, \pi - C$ - dir. İsbatı tamamlamaq üçün bilmək lazımdır ki, SA, SB, SC tilləri uyğun olaraq $S'B'C', S'A'C', S'A'B'$ üzlərinə perpendikulyardır. Deməli $S'A'B'C'$ üçüzlü bucağının ikiüzlü bucaqları $SABC$ üçüzlü bucağının müstəvi bucaqlarını π -yə tamamlayır. Deməli, $S'A'B'C'$ üçüzlü bucağının ikiüzlü bucaqları $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$ -dir.

Qeyd: $S'A'B'C'$ bucağına $SABC$ bucağının tamamlayıcısı və ya polyarı deyilir.

342. Verilmiş üçüzlü bucağa polyar bucağa baxaq (Məsələ 341). Onun müstəvi bucaqları düz olduğundan ikiüzlü bucaqları da düzdür. Odur ki, verilmiş üçüzlü bucağın müstəvi bucağı da düzdür.

343. Verilmiş üçüzlü bucağa polyar üçüzlü bucağın müstəvi bucaqları bərabərdirlər. Odur ki, bu üçüzlü bucaqlar bərabərdir.

344. Tetraedrin a tilinə perpendikulyar müstəvi üzərindəki

proyeksiyası tərəfləri $x = \frac{2S_1}{a}, y = \frac{2S_2}{a}, \frac{2 \cdot \frac{1}{2}ab \sin \varphi}{a} = b \sin \varphi$

və birinci iki tərəf arasındakı bucaq α olan üçbucaqdır. Kosinuslar teoremini bu üçbucağa tətbiq edib

$$(b \sin \varphi)^2 = \frac{4S_1^2}{a^2} + \frac{4S_2^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{2S_1}{a} \cdot \frac{2S_2}{a} \cdot \cos \alpha \quad \text{və ya}$$

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha = \frac{(ab \sin \varphi)^2}{4} \text{ alırıq.}$$

345. $\vec{A}\vec{A}_1 = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}, \vec{AD} = \vec{c}$ olsun. Onda

$\vec{AC}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Odur ki, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektoru şərtə görə $\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}$ vektorlarına perpendikulyardır. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}) = 0$ olduğunu nəzərə almaqla $0 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2$ alırıq. Analoji olaraq $\vec{b}^2 = \vec{c}^2$ və

$\frac{-2}{c} = \frac{-2}{a}$. Odur ki, verilmiş paralelepipedin bütün tilləri bərabərdir, deməli o – kubdur.

346. a) Fərz edək ki, V – çoxüzlünün həcmi, S – onun üzlərinin sahəsi, çoxüzlünün daxilindəki X nöqtəsindən onun i -ci üzünə qədər məsafə h_i -dir. Çoxüzlünü təpə nöqtəsi X , oturacaqları onun üzləri olan piramidalara ayırıb $V = \frac{Sh_1}{3} + \dots + \frac{Sh_n}{3}$

alırıq. Beləliklə, $h_1 + \dots + h_n = \frac{3V}{S}$.

b) Tetraedrin həcmi V olsun. $h_i = 3V/S_i$ olduğundan, burada S_i - i -ci üzün sahəsidir, $\sum (d_i/h_i) = (\sum d_i S_i)/3V$. Aşkardır ki, $d_i S_i/3 = V_i$, burada V_i -təpəsi seçilmiş nöqtədə olan tetraedrin həcmidir, onun oturacağı i -ci üzdür və $\sum V_i = V$. Odur ki, $\sum (d_i/h_i) = \sum V_i/V = 1$.

347. Müəyyənlik üçün fərz edək ki, daxilə çəkilmiş sferanın O mərkəzi çoxüzlünün həcmi V_1 olan hissəsindədir. Təpəsi O nöqtəsində və oturacağı çoxüzlünün verilmiş müstəvi ilə kəsiyi olan piramidaya baxaq. Bu piramidanın həcmi V olsun. Onda $V_1 - V = rS_1/3$ və $V_2 + V = rS_2/3$, burada r - daxilə çəkilmiş sferanın radiusudur (Məsələn 320-yə baxmalısınız). Onda $\frac{V_1 - V}{V_2 + V} = \frac{S_1}{S_2}$. Buradan, yalnız $V=0$ olduqda, başqa sözlə O

nöqtəsi kəsən müstəvi üzərində olan halda $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}$ almaq mümkündür.

348. O fəzanın ixtiyari nöqtəsi olsun. Onda $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$,

$$\vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) \Rightarrow \vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OD} - \vec{OA}) + \frac{1}{2}(\vec{OC} - \vec{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{OD} - \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB})$$

349.

$$BC^2 = (\vec{OC} - \vec{OB})^2 = OC^2 + OB^2 - 2\vec{OC} \cdot \vec{OB} = OC^2 + OB^2 - 2OC \cdot OB \cdot \cos \angle COB$$

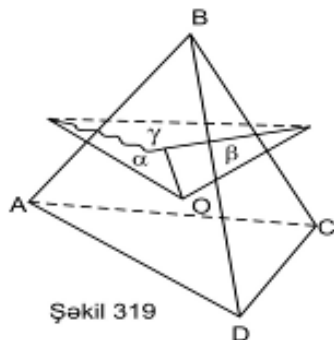
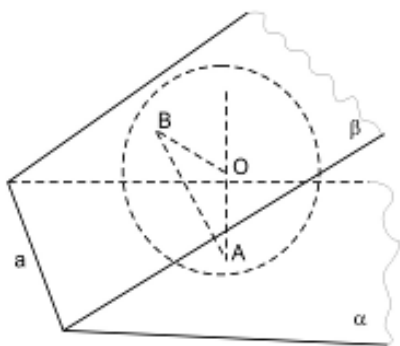
Analoji olaraq $AC^2 = OC^2 + OA^2 - 2OC \cdot OA \cdot \cos \angle COA$ və $AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB \cdot OA \cdot \cos \angle BOA$. Üçbucağın hər bir tərəfinin uzunluğunun kvadratı digər iki tərəfin uzunluqlarının kvadratları cəmindən kiçik olduqda o, itibucalıdır. $(AC^2 + AB^2) - BC^2$ fərqi baxaq:

$$AC^2 + AB^2 - BC^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + OA^2 - OC^2 - OB^2 = 2OA^2 > 0, \text{ deməli } A \text{ bucağı } 90^\circ\text{-dən kiçikdir.}$$

350. Aşkardır ki, $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$, odur ki, $AC \perp BD$.

351. Verilmiş sferanın α və β müstəvilərinə toxunma nöqtələrini (A və B) sferanın O mərkəzi ilə birləşdirək (Şəkil 318). OA və OB -dən γ müstəvisini keçirək. $OA \perp a$ və $OB \perp a$ olduğundan $a \perp \gamma$ və $a \perp (AB)$.

352. 1) A, B, C, D verilmiş nöqtələr olsun (Şəkil 319). Verilmiş nöqtələrdən eyni məsafədə olan O nöqtəsi AB-yə perpendikulyar olan və onun ortasından keçən α müstəvisi üzərində olmalıdır. BD və BC-in ortasından keçən və onlara perpendikulyar β, γ müstəviləri üçün də analoji hökm doğrudur. α və β müstəviləri paralel ola bilməz. Doğrudanda $\alpha \parallel \beta$ olarsa, onda β -ya perpendikulyar BD düz xətti α -ya da perpendikulyar olardı. Onda B nöqtəsindən α müstəvisinə iki müxtəlif BA, BD perpendikulyarları çəkilərdi.



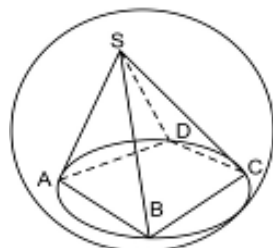
Fərz edək ki, $\alpha \cap \beta = m$, analoji olaraq $\gamma \cap \beta = n$ alırıq; β müstəvisi üzərində yerləşən m və n düz xətləri paralel ola bilməz. Bunu isbat edək. m düz xətti AB və AD düz xətlərinə perpendikulyardır, odur ki, $m \perp (ADB)$. Analoji olaraq $n \perp (BDC)$. Fərz etsək ki, $m \parallel n$, onda $m \perp (BDC)$, bu halda isə $(ADB) \parallel (BDC)$ alınır ki, bu da məsələnin şərtinə ziddir.

Beləliklə, $m \cap n = 0$, bu isə yalnız yeganədir.

2) Verilmiş çevrənin üç müxtəlif nöqtəsi və D, müstəvi üzərində olmayan dörd nöqtədir. 1) halına görə bu dörd nöqtədən sfera keçirmək olar və o yeganədir.

353. 1) Kafilik. Fərz edək ki, SABCD piramidasının ABCD oturacağının xaricinə ω çevrəsi çəkilmişdir (Şəkil 320). S nöqtəsi və ω çevrəsindən yeganə σ sferası keçir (Məsələ 352). Bu sfera verilmiş piramidanın xaricinə çəkilmişdir. 2) Zərurilik. Fərz edək ki, SABCD piramidasının xaricinə çəkilmiş σ sferası vardır. Piramidanın oturmaq müstəvisi sferanı bu oturacağın xaricinə çəkilmiş ω çevrəsi üzrə kəsir.

Şəkil 320



354. Toxunan müstəvi koordinat başlanğıcından keçir və $\vec{OM} = (a; b; c)$ vektoruna perpendikulyardır, burada $M(a; b; c)$ sferanın mərkəzidir. Odur ki, toxunan müstəvinin tənliyi $ax + by + cz = 0$ şəkildədir.

355. Fərz edək ki, $a \cap b = N$, onda MN axtarılandır. $a \parallel b$ isə onda axtarılan düz xətt M nöqtəsindən keçir və a düz xəttinə paraleldir.

356. $M \in ABC$ isə həll yoxdur, $M \notin ABC$ isə axtarılan xətt BM-dir. Çünki B və M hər iki müstəviyə daxildir.

357. 2) BAC bucağının AA_1 tən bölənini çəkib (A_1 nöqtəsi B ilə C arasında ixtiyari götürülür) axtarılan MAA_1 müstəvisini alırıq.

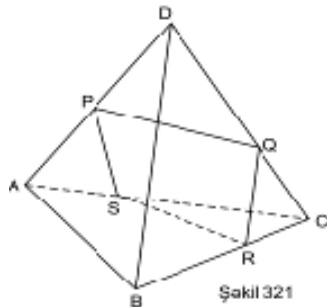
358. $M \notin a$ isə, onda həll yeganədir, $M \in a$ isə, onda həll sonsuz saydadır.

359. BA şüası üzərində BP parçasına konqruent BN parçasını ayırıq. Onda MPN tələb olunan müstəvidir.

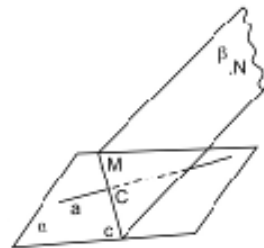
360. PQ və RS parçaları ADC və ABC üçbucaqlarının orta xəttidir (Şəkil 321). $PQ=RS$, $PQ \parallel RS$ və PQRS paraleloqramdır.

361. Məlum aksioma görə (İki müxtəlif müstəvinin ortaq nöqtəsi varsa, onların bu nöqtədən keçən kəsişmə düz xətti vardır) kəsişmə xətti vardır. Nümayiş çertyojunda onu M nöqtəsindən keçən (bu nöqtə müstəvilərin ortaq nöqtəsidir) ixtiyari düz xətt kimi təsvir edirik.

362. Şərtə görə: $M \in \alpha$, $a \subset \alpha$, $N \notin \alpha$ (Şəkil 322). İndi $N \in \beta$, $\alpha \cap \beta = c$, $M \in c$, $c \perp a$ şərtləri ödənilməklə β müstəvisini keçirmək lazımdır. $(MC) \subset \alpha$, $(MC) \perp \alpha$, $(MC) = c$; c düz xəttindən və N nöqtəsindən β müstəvisini keçirmək olar, onda



Şəkil 321



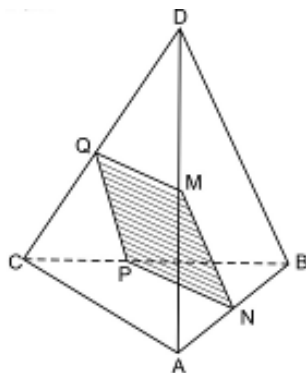
Şəkil 322

α müstəvisinin xaricində B nöqtəsini götürək (verilmiş müstəvi üzərində olmayan nöqtə vardır). AB və a çarpaz düz xətlərdir.

365. 1) A nöqtəsindən $b \parallel a$ düz xəttini keçərək; b düz xəttindən keçən ixtiyari β müstəvisi a düz xəttinə paraleldir (həm də b və a düz xətlərindən keçən müstəvi). 2) Aşkardır.

366. β müstəvisi üzərində B nöqtəsindən c -yə paralel d düz xəttini keçirək. Sonra d və A-dan axtarılan γ müstəvisini keçirə bilərik. Həll yeganədir.

367. Analiz. Fərz edək ki, kəsik qurulmuşdur (Şəkil 324). M və N nöqtələrini birləşdirsək, kəsən müstəvinin ADB üzü ilə kəsişməsini alırıq. Şərtə görə AC düz xətti kəsən müstəviyə paraleldir, odur ki, ACB və ACD üzlərinin kəsən müstəvi ilə kəsişməsi AC düz xəttinə paralel olan NP və MQ parçaları olacaqdır. ("Müstəvi digər müstəviyə paralel olan düz xətdən keçib, həmin müstəvinin kəsirsə, onda müstəvilərin kəsişmə xətti verilən düz xəttə paraleldir" teoreminə görə).



Şəkil 324

Qurma. 1) $NP \parallel AC$, $P \in BC$; 2) $MQ \parallel AC$; $Q \in DC$. NMQP çoxbucaqlısı axtarılan kəsikdir.

İsbatı: $MQ \parallel AC$ olduğundan NMQ müstəvisi AC düz xəttinə paraleldir ("Düz xətt, müstəvi üzərindəki hər hansı düz xəttə paraleldirsə, onda verilmiş düz xətt və müstəvi paraleldir" teoreminə görə).

Araşdırma. Məsələnin yeganə həlli vardır. Doğrudan da, BC tili kəsən müstəvinin yeganə P nöqtəsində kəsir və məlum aksioma görə (bir düz xəttə aid olmayan üç nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçir). M, N, P nöqtələrindən yeganə müstəvi keçir.

Qeyd edək ki, bu məsələdə tətbiq olunan həll sxemi (analiz, qurma, isbat, araşdırma) planimetriyada olduğu kimi stereometriyada da qurma məsələləri həllinin ümumi sxemidir. Fəzada qurma məsələləri həllinin göstərilən mərhələlərinin mahiyyəti

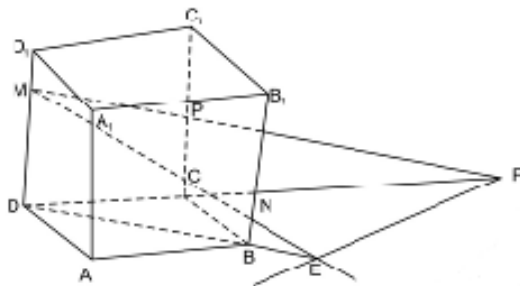
müstəvidəki kimidir. Lakin hər bir məsələnin həllində dörd mərhələnin hamısının göstərilməsi məcburi deyil: bəzən məsələnin həllinə dərhal qurmadan başlamaq mümkün olur, bəzən də isbat qurma ilə birgə aparılır. Çox vaxt məsələnin araşdırılmasına baxılır. Məsələnin həllində araşdırma aparmaq tələb olunursa, bu haqda məsələnin şərtində qeyd olur. Bəzi hallarda araşdırma ilə analiz birləşdirilir. Odur ki, çox vaxt qurma məsələləri həllinin dörd deyil, üç mərhələsi ayrılır.

368. 1) M nöqtəsindən AB-yə paralel düz xətt keçirin.

2) Fərz edək ki, $AD \cap BC = O$, onda MO axtarılan düz xətdir.

369. Analiz. Axtarılan düz xətti tapmaq üçün MNP və ABC müstəvilərinin (Şəkil 325) iki ortaq nöqtəsini qurmaq kifayətdir. Belə nöqtələrin hər birini, iki kəsişən düz xəttin ortaq nöqtəsi kimi tapmaq olar. Bu nöqtələrdən biri (MNP), o biri (ABC) müstəvisi üzərindədir.

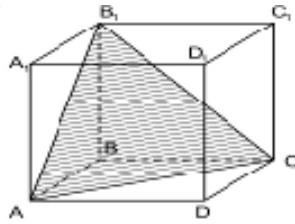
Qurma. CC_1D_1D üzünün müstəvisi üzərində MP və DC düz xətlərinin F kəsişmə nöqtəsini quraq: DD_1 və BB_1 paralel düz xətlərindən keçən müstəvi üzərində MN və DB düz xətlərinin E kəsişmə nöqtəsini quraq. E və F nöqtələri MNP və



Şəkil 325

ABC müstəvilərinin hər ikisinə aiddir. (“Müstəvinin iki müxtəlif nöqtəsindən keçən düz xətt bu müstəvinin üzərindədir” aksiomuna görə), ona görə (FE) – axtarılan düz xətdir.

Araşdırma: Məsələnin yeganə həlli vardır. Çünki M, N və P nöqtələri yeganə müstəvini təyin edir. NMP və ABC müstəvilərinin FE ortaq düz xətti var, çünki F onların ortaq nöqtəsidir. FE düz xətti yeganədir (“İki müxtəlif



Şəkil 326

müstəvinin ortaq nöqtəsi varsa, onların bu nöqtədən keçən kəsişmə düz xətti vardır” aksiomuna görə)

370. Verilmiş kubun B təpəsindən çıxan tillərin uclarından keçən müstəvi ilə kəsiyi (Şəkil 326) AB_1C düzgün üçbucağıdır. Bu üçbucağın tərəfi $a\sqrt{2}$ -dir. Odur ki, $P(AB_1C) = 3a\sqrt{2}$;

$$S(AB_1C) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

371. Axtarılan nöqtələri K və L ilə işarə edək. 1) $K = (AM) \cap (BC)$; $L = (AN) \cap (BB_1)$; 2) $(KL) = (BB_1C_1) \cap (AMN)$.

372. $K = (C_1M) \cap (DC)$ və $F = (KB) \cap [AD]$ qururuq. BC_1MF - dördbucaqlısı axtarılan kəsikdir.

373. Fərz edək ki, $(MDC) = \alpha$, onda α və $A_1B_1C_1D_1$ üzünün kəsişməsi MN parçası olub, (CD)yə paraleldir (“Müstəvi digər müstəviyə paralel olan düz xətdən keçib, həmin müstəvini kəsirsə, onda müstəvilərin kəsişmə xətti verilən düz xəttə paraleldir” teoreminə görə), deməli $[MN] \parallel (C_1D_1)$ (“iki düz xətt üçüncü düz xəttə paraleldirsə, onda həmin düz xətlər bir-birinə paraleldir” teoreminə görə). DCMN paraleloqramı axtarılan kəsikdir.

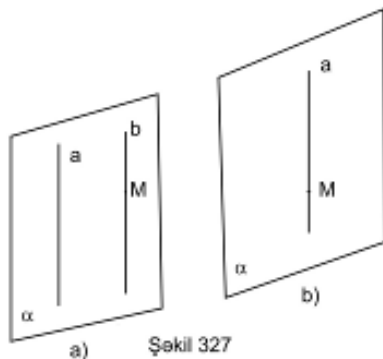
374. Fərz edək ki, M, K, L nöqtələri uyğun olaraq AB, CD, AA_1 tillərinin orta nöqtələridir, onda $MK \parallel AD$; $(MKL) \cap (AA_1D)$ düz xəttinin qurulmasını əsaslandırmaq üçün 373-cü məsələdə istifadə olunan hər iki teoremi tətbiq etmək lazımdır.

375. ABC_1D_1 və ACC_1A_1 paraleloqramlarının kəsişməsini quraq: $ABC_1D_1 \cap ACC_1A_1 = AC_1$ onda $X = A_1C \cap AC_1$.

A_1C_1CA əvəzinə BCA_1D_1 paraleloqarmından istifadə etmək olar.

376. Burada iki hal mümkündür. a) Fərz edək ki, $M \notin a$ (Şəkil 327, a). Paralel düz xətlərin tərifinə əsasən, verilən və axtarılan düz xətlər bir müstəvi üzərində olmalıdır.

1) M nöqtəsindən və a düz xəttindən α müstəvisini keçirək (“düz xətt və ona aid olmayan nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçirmək olar” faktına əsasən).



2) α müstəvisi üzərində M –dən a düz xəttinə paralel b düz xəttini çəkək (bu “hər bir müstəvi üçün planimetriyadan məlum olan tərtib, müstəvinin yerdəyişməsi və paralel düz xətlər aksiomları ödənilir” aksiomuna əsasən yerinə yetirilir). Məsələnin yeganə həlli vardır. Bunu isəbat edək.

Axtarılan b düz xətti a düz xəttindən və M nöqtəsindən keçən yeganə α müstəvisinə aid olmalıdır. α müstəvisi üzərində a düz xəttinə paralel olub, M nöqtəsindən keçən yeganə düz xətt vardır (bu planimetriyadan məlumdur).

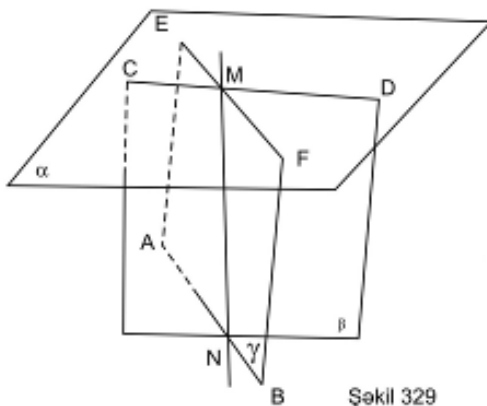
b) Fərz edək ki, $M \in a$ (Şəkil 327, b). Bu halda M-dən keçib a -ya paralel olan yeganə düz xətt verilmiş a düz xəttidir. Beləliklə, fəzada verilmiş nöqtədən verilmiş düz xəttə bir və yalnız bir paralel düz xətt çəkmək olar.

377. Fərz edək ki, α müstəvisi və a düz xətti verilmişdir. a düz xətti α -nı kəsirsə, onda məsələnin həll yoxdur, çünki a -dan keçən ixtiyari müstəvi verilmiş müstəvinə kəsəcək. $a \subset \alpha$ olarsa, onda axtarılan müstəvi α -nın özüdür. Tutaq ki, $a \parallel \alpha$, lakin $a \not\subset \alpha$.

α müstəvisinə aid olan B nöqtəsindən və verilən a düz xəttindən β müstəvisini keçirək. Fərz edək ki, $\alpha \cap \beta = b$, onda $b \parallel a$ (Məsələ 366-da göstərilən teoremə görə). α müstəvisində, b -ni kəsən c düz xəttini çəkək; M nöqtəsindən ($M \in a$) $d \parallel c$

380. Fərz edək ki, M və N uyğun olaraq CC_1 və A_1D_1 parçalarının orta nöqtələridir. Qurma belə ardıcılıqla yerinə yetirilir: 1) BM ; 2) $NP \parallel BM$, $P \in AA_1$; 3) PB ; 4) $ML \parallel BP$, $L \in D_1C_1$; 5) NL . Beləliklə, alınmış $BMLNP$ beşbucaqlısı axtarılan kəsikdir.

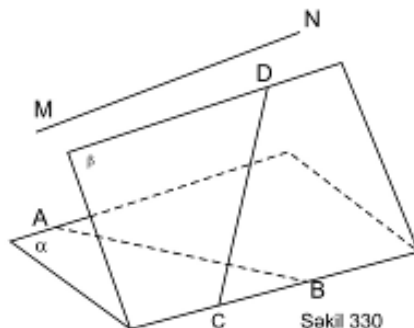
381. Fərz edək ki, AB və CD çarpaz düz xətlərdir (Şəkil 329). CD düz xəttindən AB düz xəttinə paralel α (Məlumdur ki, ixtiyari düz xətdən başqa bir düz xəttə, bu düz xətlər kəşimirsə, paralel müstəvi keçirmək olar) müstəvisini və α müstəvisinə perpendikulyar β müstəvisini keçirək. AB düz xəttindən isə α müstəvisinə perpendikulyar və α -nı hər hansı EF düz xətti üzrə kəsən γ müstəvisini keçirək.



Şəkil 329

α müstəvisi β və γ müstəvilərinə perpendikulyar olduğundan onların MN kəşimə xəttinə də perpendikulyar olacaqdır. Beləliklə, MN düz xətti CD və EF -ə perpendikulyardır. Lakin $EF \parallel AB$ və MN düz xətləri EF və AB düz xətlərinin təyin etdiyi müstəvi üzərindədir, odur ki, $MN \perp AB$. Deməli, MN düz xətti AB və CD düz xətlərinin ortaq perpendikulyarıdır.

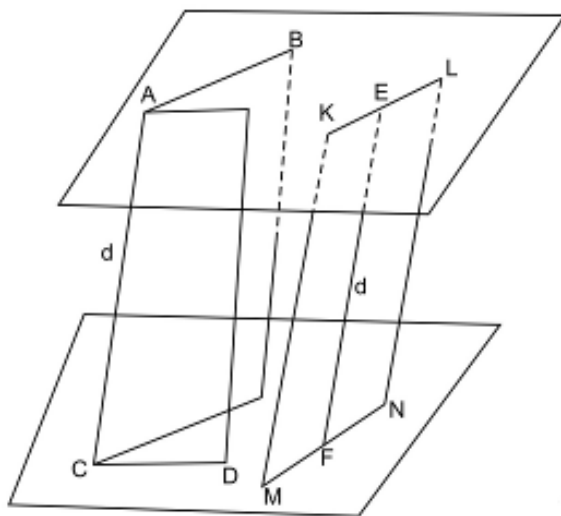
382. Fərz edək ki, AB və CD çarpa düz xətlərdir və onlardan heç biri verilmiş üçüncü MN düz xəttinə paralel deyil (Şəkil 330). AB -dən MN -ə paralel α müstəvisini keçirək (məlumdur ki, bu mümkündür). Belə müstəvi yeganədir. CD -dən MN -ə paralel β müstəvisini keçirək. Bu müstəvi də yeganədir. α və β



Şəkil 330

müstəvilərinin CB kəsişmə xətti axtarılan düz xətt olacaqdır. Lakin α və β müstəviləri paralel ola bilər. Bu AB, CD və MN düz xətləri eyni bir müstəviyə paralel olduqda mümkündür. Bu halda məsələnin həlli yoxdur. AB və ya CD düz xətləri və ya onların hər ikisi MN-ə paralel olduqda da məsələnin həlli yoxdur. AB və CD düz xətləri bir müstəvi üzərində isə, eyni zamanda MN-ə paralel deyildirsə, AB və CD düz xətlərini üzərində saxlayan α müstəvisi MN-ə paraleldirsə həll sonsuzdur. α müstəvisi MN-ə paralel olmadıqda həll yeganədir. (AB və CD düz xətləri kəsişirsə) $AB \parallel CD$ olduqda və ya düz xətlərin üçü də bir nöqtələ kəsişirsə həll yoxdur.

383. Verilmiş müstəvi, düz xətlər və parçanın uzunluğu uyğun olaraq α , AB, CD və d olsun (Şəkil 331₁). AB düz xəttindən CD-yə paralel β müstəvisini, CD düz xəttindən isə AB

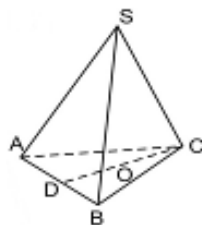


Şəkil 331₁

paralel γ müstəvisini keçirək. Aşkardır ki, β və γ müstəviləri paraleldir və verilmiş α müstəvisi onları öz aralarında paralel hər hansı KL və MN düz xətləri üzrə kəsir. E və F nöqtələri uyğun olaraq KL və MN üzərində olmaqla $EF=d$ parçasını quraq. İndi EF düz xəttinə paralel və AB, CD düz xətlərini kəsmək şərti ilə

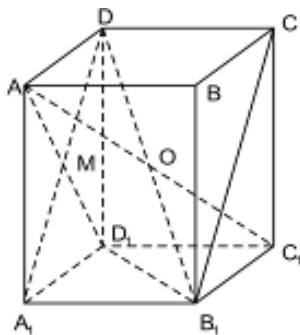
AC düz xəttini çəkək (Məsələ 382-yə baxmalı), onda onun A, C kəsişmə nöqtələri arasında qalan parçası axtarılan parça olacaqdır, Lakin α müstəvisi, AB, CD düz xətləri, d parçası, habelə verilmiş parçanın uzunluğu elə ola bilər ki, məsələnin həlli olmaz və ya iki, yaxud sonsuz sayda həll olar.

384. ABC oturacağında C və O nöqtələrini düz xətlə birləşdirib, onu AB tilini D nöqtəsində kəsənə qədər uzadaq; CD axtarılan düz xətdir (Şəkil 331₂).



Şəkil 331₂

385. a) B_1D diaqonalı, M nöqtəsi və A_1A yan tili, həmin M nöqtəsi ilə təyin edilən müstəvilər A_1D_1DA yan üzünün A_1D diaqonalı üzrə kəşişir; A_1D diaqonalı axtarılan düz xətdir (Şəkil 332).



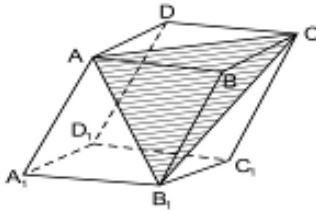
Şəkil 332

b) Belə düz xətt yoxdur. B_1D_1D və A_1D_1A müstəviləri iki paralel D_1D və A_1A düz xətlərindən keçir, odur ki, A_1A -ya paralel D_1D düz xətti üzrə kəşişirlər.

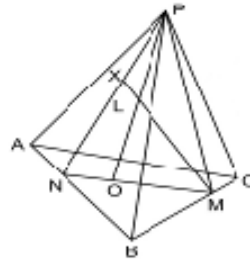
c) Axtarılan düz xətt, B_1D_1DB və A_1B_1CD diaqonal müstəvilərinin kəşişmə xətti olan, B_1D diaqonalıdır.

386. $ABCD$, B_1C_1CB , A_1B_1BA üzlərinin ACB_1 müstəvisi ilə kəşişməsi uyğun olaraq AC , B_1C , B_1A diaqonallarıdır (Şəkil 333). Axtarılan kəsik ACB_1 üçbucağıdır.

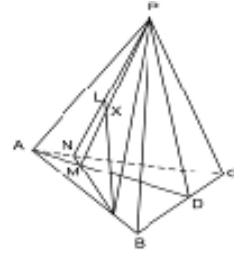
387. Şəkildə ML düz xəttinin təsvirini davam etdirək (Şəkil 334). Bununla əlaqədar bilmək lazımdır ki, stereometriyada şəkildə bütün qurmalar yalnız verilmiş müstəvidə yerinə yetirilir. Deməli, ML düz xəttini üzərində saxlayan müstəvini və tetraedrin veriləni əlaqələndirən nöqtəsini (bu P nöqtəsidir) götürmək lazımdır. P , M və L nöqtələri ilə verilən müstəvi tetraedrin PMN kəsiyi ilə təmsil olunacaqdır. PMN kəsiyində PN və MX parçaları kəşişir, çünki N və P nöqtələri MX -dən müxtəlif tərəflərdə yerləşir. X – axtarılan nöqtədir.



Şəkil 333



Şəkil 334

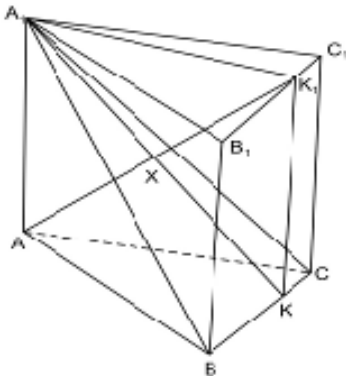


Şəkil 335

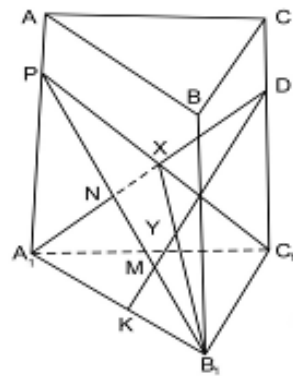
388. Həll 387-yə analogi aparılır (Şəkil 335).

389. Çoxüznlünün, AK_1 parçasını və A_1 nöqtəsini üzərində saxlayan, müstəvi ilə kəsiyini quraq (Şəkil 336); istiqamətli olması üçün onu BB_1 tilinə paralel qururuq. Aşkardır ki, A_1K_1KA -paraleloqramdır, onda A_1BC üçbucağının bu kəsiklə kəsişməsi A_1K parçasıdır. AK_1 və A_1K parçaları isə paraleloqramın diaqonalları olaraq X nöqtəsində kəsişirlər. X nöqtəsi axtarılan həldir.

390. PBC və DAK üçbucaqlarının AA_1C_1C üzündə ortaq X nöqtəsi vardır (Şəkil 337). Bu müstəvilərin ikinci ortaq nöqtəsi B -dir. B, X, K, D nöqtləri ADK müstəvisi üzərində olduğundan BX və KD düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsi Y baxılan PBC və DAK üçbucaqlarının ortaq nöqtəsidir.



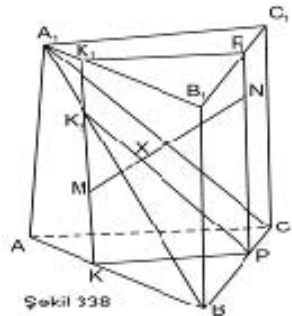
Şəkil 336



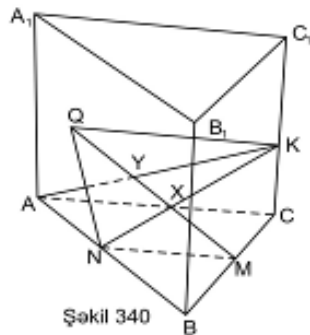
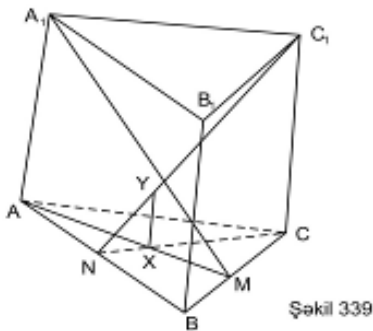
Şəkil 337

Bu məsələ də hər bir fiqurun digər fiqurla örtülən hissələrinin qırıq xətlə çəkilməsi (başqa sözlə şəkilə əyanilik verilməsi) az əhəmiyyətli deyil. Şəkildə üçbucaqların XY kəsişməsi və PBC üçbucağının üstündə D nöqtəsi görünəndir (D nöqtəsi C və C_1 arasında yerləşir), DXY üçbucağı PC tərəfinin bir hissəsini örtür, PB tərəfi DAK üçbucağından yuxarıda olduğundan AN və KM parçaları görünür, XN və YM isə görünmür; AC tili verilmiş üçbucaqlarla örtülmüşdür.

391. Çoxüzlünün, MN parçasından keçən, müstəvi ilə kəsiyi BB_1 tilinə paraleldir (Şəkil 338) və KK_1P_1P paraleloqramıdır. Onda PK_2 parçası A_1BC üçbucağı ilə çoxüzlünün KK_1P_1P kəsiyinin kəsişməsidir. X nöqtəsi A_1BC üçbucağı ilə MN parçasının yeganə ortaq nöqtəsidir. X – axtarılan nöqtədir.

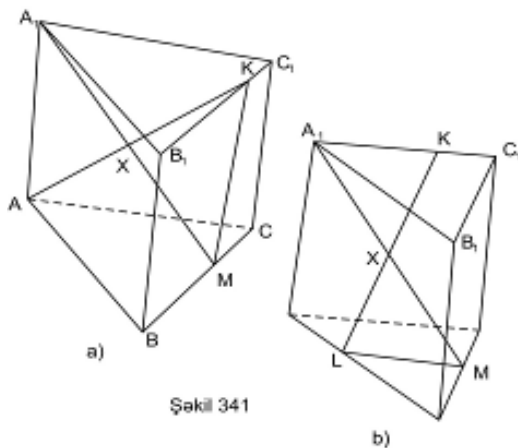


392. Verilmiş üçbucaqların ortaq X nöqtəsi vardır (Şəkil 339); onların kəsişməsinin tapılmasına üzərində paralel düz xətlər olan müstəvilərin kəsişməsi xəttinin xassəsi kömək edir. $AA_1 \parallel CC_1$ - çoxüzlünün yan tillərinin xassəsidir. Odur ki, AA_1 -ə paralel XY -i qururuq. NC_1 parçası Y nöqtəsində AA_1M üçbucağını kəsir, çünki N və C nöqtələri XY parçasından müxtəlif tərəflərdə yerləşir.



393. Şərtədən alınır ki, QK və MN parçaları AC-yə paraleldir (Şəkil 340), deməli $MN \parallel QK$, onda MNQK dördbucaqlısının diaqonalları X nöqtəsində kəsişirlər, N isə bu fiqurların ortaq nöqtəsidir. Buradan alınır ki, XN – onların kəsişməsidir. Üçbucağın AK tərəfi və Q təpəsi AA_1C üzvü üzərində, MN isə ABC oturacağıının üzərində olduğundan AK tərəfinin bir hissəsi QNX üçbucağı ilə örtülmüşdür, odur ki, NX ilə kəsişdikdən sonra NXM üçbucağının da bir hissəsi örtülmüşdür (parçaların XM və NM hissələri). AC-nin bir hissəsi verilmiş fiqurlarla örtülmüşdür.

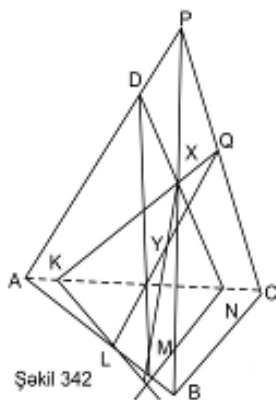
394. a) B_1C_1 tili üzərində ixtiyari K nöqtəsi qeyd edək (Şəkil 341, a). AK və A_1M parçalarının kəsişməsi üçün AA_1KM fiquru qabarıq olmalıdır, başqa sözlə $KM \parallel AA_1$ olmalıdır, bu parçalar həmişə bir müstəvi üzərindədir. Deməli, BB_1 -ə paralel MK parçasını qururuq. AA_1KM fiqurunun diaqonalları X nöqtəsində kəsişir.



Şəkil 341

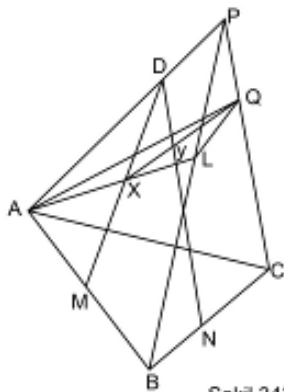
Şəkil 341 b-dən istifadə edərək məsələnin qrafik həllini müstəqil əsaslandırın.

395. Bu üçbucaqların X ortaq nöqtəsini asanlıqla tapmaq olar, ikinci ortaq nöqtəni tapmaq üçün bu fiqurların müstəvilərinin ortaq nöqtəsini tapmaq lazımdır (Şəkil 342). Onda həmin üçbucaqların XY kəsişmə xəttini alırıq. Aşkardır ki, QKL üçbucağının QXY hissəsi DMN üçbucağının üstündə yerləşir, deməli onun özü görünür və DN tərəfinin bir hissəsini örtür; eyni zamanda birinci üçbucağının davamının bir hissəsi ikinci üçbucaqla kəsildikdən sonra görünür, onun qalan hissəsi isə görünür.



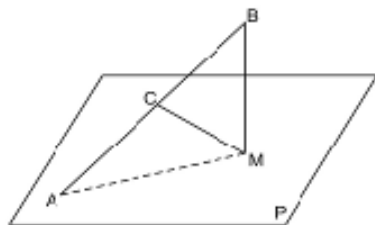
Şəkil 342

396. Aşkardır ki, baxılan üçbucaqların ortaq X nöqtəsi PAB üzünün üzərindədir (Şəkil 343). M və N, D və Q nöqtələri cütünün səciyyəvi xassələrinə diqqət yetirdikdə verilmiş üçbucaqların ikinci ortaq nöqtəsini də tapmaq olar (məsələ 393-ə baxmalı). Bu Y nöqtəsidir. DXY üçbucağı AQL üçbucağının üstündə olduğundan (çünki D nöqtəsi PAC üzündə, MN isə ABC oturacağında yerləşir). AQ tərəfinin bir hissəsi onunla örtülmüşdür, DN-in bir hissəsi isə XY-lə kəsişdikdən sonra AQL üçbucağının altında qalır.



Şəkil 343

397. Fərz edək ki, P verilmiş A nöqtəsindən keçən müstəvilərdən biri, M isə verilmiş B nöqtəsinin P müstəvisi üzərindəki proyeksiyasıdır. Sonra fərz edək ki, C nöqtəsi AB parçasının ortasıdır (Şəkil 344). AMB düzbucaqlı üçbucaq oldu-



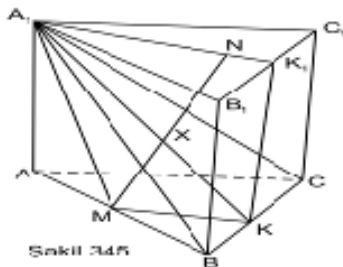
Şəkil 344

ğundan $CM = \frac{1}{2} AB$. Beləliklə bütün M nöqtələri C nöqtəsindən eyni bir $\frac{1}{2} AB$ məsafəsindədir, odur ki, mərkəzi C nöqtəsində və

radiusu $\frac{1}{2} AB$ olan sfera üzərindədir. aşkardır ki, göstərilən sferanın ixtiyari nöqtəsi B nöqtəsinin proyeksiyalarından birinin üzərinə düşür. Beləliklə axtarılan həndəsi yer diametri AB olan sferadır.

398. MN düz xəttini və A_1BC üçbucağının hər hansı nöqtəsini üzərində saxlayan müstəvi ilə çoxüzlünün kəsiyini quraq (kəsikdə kəsişməsini axtardığımız fiqurların elementləri olmalıdır). N nöqtəsindən A_1K_1 , M nöqtəsindən isə A_1K_1 -ə paralel MK parçalarını çəkək (Şəkil 345). MA_1 və KK_1

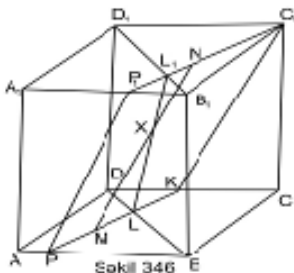
parçalarını çəkib çoxüzlünün A_1K_1KM kəsiyini alırıq. Bu kəsiyin A_1BC üçbucağı ilə kəsişmə xətti A_1K -dir. $A_1K \cap MN = X$ axtarılan nöqtədir. Bu məsələnin həllində çoxüzlünün müstəvi ilə ixtiyari kəsiyindən istifadə olundu.



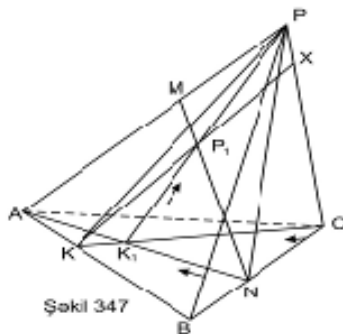
Şəkil 345

399. 346-cı şəkildən istifadə etməklə məsələnin qrafik həllini əsaslandırın.

400. KX parçasını qurmaq üçün tetraedrin PKC müstəvi kəsiyinə baxaq (Şəkil 347). Bu parça MN parçasını da kəsməli olduğundan, MN parçasını üzərində saxlayan ikinci PAN kəsiyini qurub tetraedrin bu kəsiklərinin kəsişməsi olan K_1P parçasını alırıq: MN və K_1P parçaları P_1 nöqtəsində kəşir. Beləliklə, K , P_1 , X nöqtələri bir PKC müstəvisi üzərindədir.



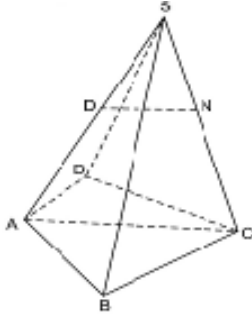
Şəkil 346



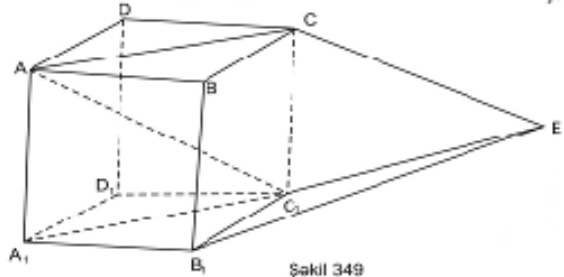
Şəkil 347

401. SAC diaqonal müstəvisində M nöqtəsindən $ABCD$ oturacağının AC diaqonalına paralel MN düz xəttini çəkək (Şəkil 348). MN düz xətti SC yan tilini N nöqtəsində kəşir.

402. $A_1B_1C_1D_1$ aşağı oturacağının A_1C_1 diaqonalını $C_1E=A_1C_1$ qədər uzadaq (Şəkil 349). Sonra CE düz xəttini çəkək. Bu düz xətt paralelepipedin AC_1 diaqonalına paraleldir. CB_1 və CE düz xətlərindən müstəvi keçirək. Bu müstəvi ilə $A_1B_1C_1D_1$ oturacaq müstəvisinin kəsişmə xətti B_1E düz xəttidir.

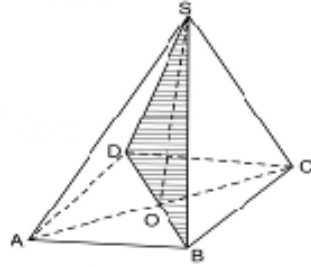


Şəkil 346

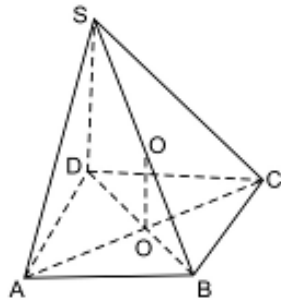


Şəkil 349

403. SBD diaqonal müstəvisini quraq (Şəkil 350); oturacağın AC diaqonalı SBD diaqonal müstəvisinə perpendikulyar olduğundan, oturacağın AB, BC tərəfləri ilə eyni bucaq (45° -yə bərabər) əmələ gətirir.



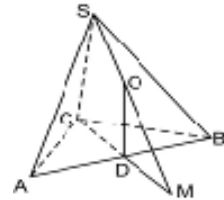
Şəkil 350



Şəkil 351

paralel O_1O düz xəttini çəkək. $O = SB \cap O_1O$ nöqtəsi piramidanın bütün təpələrindən bərabər məsafədədir (qurmaya görə $OS=OB$, proyeksiyaları $O_1B=O_1A=O_1C=O_1D$ bərabər olan maillər kimi isə $OB=OA=OC=OD$). Sferanın axtarılan mərkəzi O nöqtəsidir (Şəkil 351).

405. Bu kəsik silindrin hündürlüyünün ortasından oturacağa paralel keçir.



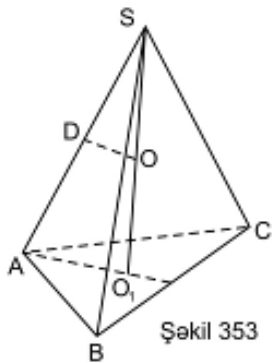
Şəkil 352

406. ABC üçbucağının CD medianını çəkib onu $DM=CD$ qədər uzadaq (Şəkil 352). S və M nöqtələrini birləşdirək. SM parçasının O orta nöqtəsi sferanın axtarılan mərkəzidir. (Məsələ 404-ə baxmalı).

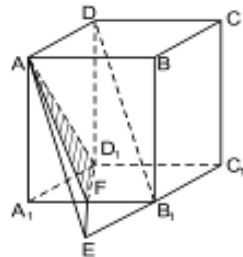
407. Piramidanı, SO_1 hündürlüyündən və deyək SA yan tilindən keçən müstəvi proyeksiya müstəvisinə paralel olmaqla, təsvir edək (Şəkil 353). SO_1 hündürlüyü A , B , C təpələrindən eyni məsafədə olan nöqtələrin həndəsi yeridir. SO_1A müstəvisində, planimetriyada olduğu kimi, SA yan tilinin D ortasından ona DO perpendikulyarını qaldırıq. DO piramidanın A və S təpələrindən eyni məsafədə olan nöqtələrin həndəsi yeridir. SO_1 hündürlüyü ilə DO perpendikulyarının O kəsişmə nöqtəsi piramidanın bütün dörd təpələrindən eyni məsafədədir, odur ki, onun xaricinə çəkilmiş sferanın mərkəzidir.

408. Aşağı oturacağın $A_1B_1C_1D_1$ müstəvisində $B_1E=C_1B_1$ parçasını quraq (Şəkil 354). AD_1 və AE düz xətlərindən α müstəvisini keçirək. Bu müstəvi $A_1B_1C_1D_1$ oturacağının D_1F parçası, A_1B_1BA üzünü isə AF parçası üzrə kəsir. AD_1F üçbucağı axtarılan kəsikdir.

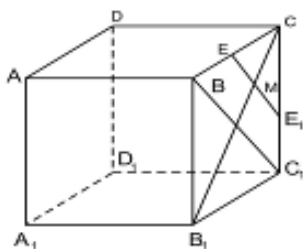
409. B_1D diaqonalının BB_1C_1C üzündəki proyeksiyası, bu üzün BC_1 diaqonalına perpendikulyar olan, B_1C diaqonalıdır (Şəkil 355). Üç perpendikulyar haqqında teoremə görə kubun B_1D diaqonalı BC_1 -ə perpendikulyardır, çünki onun B_1C proyeksiyası BC_1 -ə perpendikulyardır. B_1D -yə perpendikulyar olan düz xətti qurmaq üçün M nöqtəsindən BC_1 -ə paralel EME_1 düz xəttini çəkmək lazımdır. Bu axtarılan düz xətt olacaqdır. Analogi qayda ilə isbat etmək olar ki, həmin B_1D diaqonalı kubun üzlərinin bu diaqonalla çarpaz olan AD_1 , AC , A_1C_1 , A_1B və D_1C diaqonallarına da perpendikulyardır.



Şəkil 353



Şəkil 354

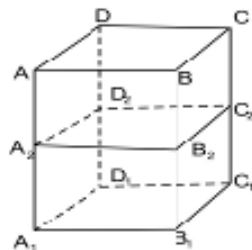


Şəkil 355

Aşkardır ki, kubun qalan üç diaqonalı da onun üzlərinin, kubun bu diaqonallarının uclarından çıxan tillərinin uclarını birləşdirən, diaqonallara perpendikulyardır.

Deyiləni belə ümumiləşdirmək olar: Kubun diaqonalı onun üzlərinin bu diaqonalın uclarınan çıxan tillərinin uclarını birləşdirən, altı diaqonalına perpendikulyardır.

410. Fərz edək ki, prizmanın oturacağı düzbucaqlıdır (Şəkil 356). Yan tillərdən birini, məsələn A_1A tilini A_2 nöqtəsində yarıya bölək. A_1B_1BA üzündə A_2 nöqtəsindən AB -yə paralel A_2B_2 parçasını çəkək; B_1C_1CB üzündə B_2 nöqtəsindən $B_2C_2 \parallel BC$, sonra $C_2D_2 \parallel CD$ çəkib D_2 və A_2 nöqtələrini birləşdirək. Alınmış $A_2B_2C_2D_2$ düzbucaqlısı axtarılan kəsikdir.



Şəkil 356

411. Belə silindri təsvir etmək üçün verilmiş silindrin radiusunu 2 dəfə artırmaq lazımdır.

412. Kəsən müstəvi verilmiş konusun hündürlüyünün ortasından oturacağına paralel keçməli və konusu $r = \frac{R}{2}$ radiuslu dairə üzrə kəsməlidir.

413. Sferanın radiusu silindrin oturacağının radiusuna bərabər olmalıdır.

414. Sferanı, onun mərkəzindən keçən qarşılıqlı perpendikulyar üç müstəvi ilə 8 hissəyə bölməli.

415. 1) M nöqtəsi və a düz xətti yeganə β müstəvisini təyin edir; 2) β müstəvisində M nöqtəsindən a düz xəttinə paralel yeganə b düz xəttini çəkmək olar; 3) b düz xəttindən α müstəvinin keçirək; 4) düz xətt və müstəvinin paralellik əlamətinə görə α müstəvisi a düz xəttinə paraleldir.

b düz xəttindən istənilən qədər müstəvi keçirmək mümkün olduğundan məsələnin sonsuz sayda həlli vardır. Həllə əlaqədar sxematik şəkili asanlıqla göstərmək olar.

Ədəbiyyat

1. Ağayev B.A və b., Riyaziyyat məsələləri (həlli ilə), B., 1967.
2. Quliyev Ə.A., Quliyev Y.A, Riyaziyyat (Abituriyentlər üçün), B., “Təbib”, 2000
3. Quliyev Ə.A.
 - 1) XI sinifdə çoxüzlülər, B.,1991, ADPU-nun mətbəəsi.
 - 2) Həndəsi cisimlərin həcmnin və səthi sahəsinin öyrənilməsi metodikası, B., 1992, ADPU-nun mətbəəsi.
 - 3) XI sinifdə yuvarlaq cisimlər, B., 1993, ADPU-nun mətbəəsi.
 - 4) Planimetriyanın məsələ vasitəsilə təkrarı, B.,2008, “Nurlan” nəşriyyat-poliqrafiya müəssisəsi.
 - 5) Riyaziyyatı tədrisində ümumiləşdirmə, Bakı, “Elm”-2009.
- 4₁. Mərdanov M.C. və b., Həndəsə-7, “Çaşıoğlu”, B., 2003.
- 4₂. İbrahimov Ə., və b., müstəvi üzərində həndəsi qurmalar, B., “Azərnəşr”, 1964.
5. Mirzəyev S.S., Sadıqov Ş.M., Həndəsə - 7, Məsələ və tapşırıqlar həlli ilə, B., “Çaşıoğlu”, 2005.
6. Mirzəyev S.S., Məmmədov Ə.Q., Həndəsə - 7, İş dəftəri, B., “Çaşıoğlu”, 2003.
7. Mərdanov M.C. və b., Həndəsə - 8, “Çaşıoğlu”, B., 2003.
8. Mirzəyev S.S., Sadıqov Ş.M., Həndəsə - 8, Məsələ və tapşırıqlar həlli ilə. “Çaşıoğlu”, B., 2005.
9. Mirzəyev S.S., Məmmədov Ə.Q., Həndəsə - 8, İş dəftəri, “Çaşıoğlu”, B., 2003.
10. Mərdanov M.C və b., Həndəsə - 9 , “Çaşıoğlu”, B., 2003.
11. Mirzəyev S.S., Sadıqov Ş.M., həndəsə - 9, Məsələ və tapşırıqlar həlli ilə, “Çaşıoğlu”, B., 2005.
- 12₁. Mirzəyev S.S., Məmmədov Ə.Q., Həndəsə -9, İş dəftəri, “Çaşıoğlu”, B., 2003.
- 12₂. Mərdanov və b., Həndəsə - 10, “Çaşıoğlu”, B.,2003.
- 12₃. Mərdanov və b., Həndəsə - 11, “Çaşıoğlu”, B.,2003

13. Yaqubov M.H və b., Riyaziyyat, TQDK, “Şərq-Qərb”, B., 2006.

14. Riyaziyyatdan müsabiqə məsələləri (M.H.Yaqubov və İ.Ə.Veysovun redaktorluğu ilə) B.1991

15. Александров А.Д., Невцетаев Н.Ю., Геометрия, М., «Наука», 1990.

16. Антонов Н.П., и др., Сборник задач по элементарной математике, М., «Наука», 1974.

17. Ваховский Е.Б., Рывкин А.А., Задачи по элементарной математике повышенной трудности. М., «Наука», 19869.

18. Говоров В.М., и др., Сборник конкурсных задач по математике. М., «Наука», 1986.

19. Дорофеев Г.В., и др., Пособие по математике для поступающих в вуз. М., «Наука», 1976.

20. Кущенко В.С. Сборник конкурсных задач по математике, Ленинград, «Судостроение», 1967.

21. Кутасов А.Д., и др., «Пособие по математике для поступающих в вузы. М., «Наука», 1985.

22. «Квант», 1970-2000 – ci illər.

23. Лидский В.Б., и др. задачи по элементарной математике, М., «Наука», 1970.

24. Моденов П.С., Экзаменационные задачи по математике с анализом их решения. М., «Просвещение», 1969.

25. «Математике в школе», 1990-2001, 1900-2001 –ci illər.

26. Островский Е.А. и др., Задачи по математике на вступительных экзаменах в вузе. Минск, «Высшая школа», 1983.

27. Сборник задач по математике для постипающих в вузы, под ред.Сканови, М., «Высшая школа», 1988.

28. Шахно К.У., Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности, Минск, «В.Ш», 1969.

29. Прасолов В.В., Задачи по планиметрии, часть I,II, М., «Наука», 1991.

30. Шарыгин И.Ф., Задачи по геометрии (планиметрия), М., «Наука», 1988.

31. Прасолов В.В, Шарыгин И.Ф., Задачи по стереометрии, М., «Наука», 1989.

32. Польский И.Г., проекционный чертеж и построения на нем, ГУПИ, М., 1962.

Mündəricat

Giriş.....	3
------------	---

I. Planimetriya

1. Hesablama məsələləri.....	9
2. İsbat məsələləri.....	15
3. Qurma məsələləri	24

II. Stereometriya

1. Hesablama məsələləri.....	30
2. İsbat məsələləri.....	43
3. Qurma məsələləri	51

Həllər, şərhlər və cavablar.....	57-295
---	---------------

I. Planimetriya

Əsas düsturlar	57
----------------------	----

II. Stereometriya

Əsas düsturlar	173
Ədəbiyyat	296

Quliyev Əsab Aslan

HƏNDƏSƏ MƏSƏLƏLƏRİ

«Elm» Redaksiya-Nəşriyyat və Poliqrafiya Mərkəzi

Direktor: Ş.Alışanlı
Mətbəənin müdiri: Ə.Məmmədov
Kompüter tərtibi: R.Əzizov
Texniki redaktor: T.Ağayev
Mətn yığıcısı: S.Cəbiyeva
Dizayner: A.Həsənov

Formatı 60x84 ¹/₁₆
Həcmi 18,75 ç.v.
Tirajı 300. Sifariş №88
Qiyməti müqavilə ilə.

«Elm» RNPM-nin mətbəəsində çap edilmişdir.
(Bakı, *İstiqlaliyyət*, 8).