

Ə.A.Quliyev

CƏBRİN MƏSƏLƏ VASİTƏSİLƏ YEKUN TƏKRARI

*Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi EMŞ-nin
“Riyaziyyat” bölməsinin 25.09.2012-ci il tarixli iclasının qərarı
(protokol № 01) və Təhsil Nazirliyinin 11.10.2012-ci il tarixli
1583 sayılı əmri ilə dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir.*

BAKİ – 2012

Elmi redaktor: Qurbanov V.M.

Fizika-riyaziyyat elmlər doktoru, professor

Rəy verənlər: Quliyev H.F.

Fizika-riyaziyyat elmlər doktoru, professor

Adıgözəlov A.S.

Pedaqoji elmlər doktoru, professor

Mərdanov İ.C.

Fizika-riyaziyyat elmlər doktoru, professor

Ə.A.Quliyev. Cəbrin məsələ vasitəsilə yekun təkrarı. Bakı: “Elm”, 2012. 236 s.

ISBN 978-9952-453-19-5

Vəsaitdə VII-IX siniflərin cəbr kursunun təlimi ilə əlaqədar şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətinin inkişaf etdirilməsinə konkret nümunələr göstərilir və bu fənnin yekunlaşdırılması, öyrənilənlərin möhkəmləndirilməsi habelə sistemləşdirilməsində istifadə etmək üçün 300-ə yaxın məqsəduyğun, düşündürücü məsələlər, misallar araşdırılır.

Vəsait orta məktəb şagirdləri və müəllimləri, abituriyentlər, ali məktəbin bakalavr və magistr pillələrinin tələbələri, orta siniflərdə cəbrin tədrisini və şagirdlərin əqli fəaliyyətini inkişaf etdirməklə maraqlanan tədqiqatçı metodistlər üçün maraqlı və münasibdir.

655 (07)- 2012

© “Elm” nəşriyyatı, 2012

GİRİŞ

Elm və texnikanın müasir inkişaf səviyyəsinə uyğun olaraq riyaziyyatın o, cümlədən cəbrin məktəbdə öyrənilməsinin metodik sisteminin qarşılıqlı əlaqədar problemlərinin həllində ümumiləşdirmə adlanan təfəkkür əməliyyatı xüsusi yer tutur. İnformasiya cəmiyyətinin müasir inkişaf mərhələsində onun qarşısına qoyulan əsas vəzifələrdən biri məktəb təlimini XXI əsrin elmi-texniki nailiyyətlərinə uyğunlaşdırmaqdan ibarətdir. Bu məsələni müvəffəqiyyətlə həll etməyin əsas bir yolu da riyazi fənlərin tədrisi prosesində şagirdlərin ümumiləşdirmə, xüsusişdirmə və ümumiyyətlə elmi-məntiqi qabiliyyətlərini didaktik prinsiplərə əsaslanaraq inkişaf etdirməkdir.

VII-IX sniflərin cəbr kursu bütövlükdə məktəb riyaziyyatının üzvü hissəsidir. Odur ki, onun qurulmasına verilən əsas tələb bir tərəfdən I-VI siniflərdə riyaziyyatın öyrənilməsi zamanı həyata keçirilən ideyaların davamı və inkişaf etdirilməsi, digər tərəfdən isə orta siniflərdə planimetriyanın, yuxarı siniflərdə isə cəbr və analizlərin başlanğıcı, habelə stereometriyanın nəzəri – praktik məsələlərinin həllində analitik-sintetik hesablamaların tətbiqlərini göstərməkdən ibarət vahid ideya əsasında məzmunu və dərk etmə metodunu müəyyənləşdirməkdir.

Məktəb cəbr kursunun öyrənilməsi ilə əlaqədar şagirdlərin ümumiləşdirmə və xüsusişdirmə qabiliyyətlərinin yekunlaşdırıcı təkrar zamanı inkişaf etdirilməsinə həsr edilmiş bu vəsait iki hissədən ibarətdir. I hissədə cəbr kursunun məzmununun əsas xətlərinin öyrənilməsi xüsusiyyətləri, ədəd, əməl, qrup, funksiya və onun dövrülüyü, təqribi ədədin mütləq və nisbi xətası, rekurent ardıcılıqlar və düsturlar, iki məchullu bir dərəcəli qeyri-müəyyən tənliklər, qoşma vuruqlar, tənliklər və bərabərsizliklər xəttinin əsas anlayışları, dərəcəsi ikidən yüksək olmayan parametrlı tənliklərin və bərabərsizliklərin həlli, bərabərsizliklərin isbatı, staxostika, kalkulyatordan istifadə etmədən hesablama, sabit və dəyişən kəmiyyətlər, həndəsi silsilə, bərabərsizliklərin intervallar metodu ilə həlli nümunələri əsasında şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətinin inkişaf etdirilməsi xüsusiyyətləri şərh olunur.

II hissədə VII-IX siniflərin cəbr kurslarında (habelə 7-ci sinifdə bəzi irrasional, üstlü loqarifmik tənliklər və onların sistemlərlə əlaqədar) öyrənilənləri möhkəmlətmək, sistemləşdirmək və ümumiləşdirmək məqsədilə 300-ə yaxın məsələ, misal təhlil olunur. Buraya o qədər də standart olmayan, şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətinin inkişafına

kömək edən cəbr məsələləri və misalları daxil edilmişdir. Kitabda həlləri ilə verilən belə məsələ və misallardan ali məktəblərə qəbul imtahanlarına hazırlaşanlar istifadə edə bilirlər. Bunu özünü yoxlamada, habelə unudulanları bərpa etməkdə mühüm vasitə hesab edirik. Lakin oxucular özünü sınamaq məqsədilə təqdim olunan məsələ və misalların müstəqil həllinə cəhd göstərməli, yalnız bundan sonra həll və cavablara müraciət etmək yaxşı olardı.

Beləliklə, gənclər cəbrdən məsələ və misalları burada göstərilənlərdən fərqli, özlərinə məxsus, bəzən də daha səmərəli üsullarla həll edə bilirlər. Bu vəsaitlə yanaşı, onun sonunda göstərilmiş ədəbiyyatdan da istifadə etməklə cəbrdən məsələ və misalların həllində müəyyən vərdiş habelə bacarığa nail olmaq mümkündür.

Məzunlar bu vəsaitdən istifadə etməklə buraxılış, həmçinin test üsulu ilə orta ixtisas və ali məktəblərə qəbul imtahanlarına hazırlıq prosesində cəbri yenidən öyrənmə, habelə bu barədə özünü yoxlaya bilirlər. Son illərdə bəzi xarici ölkələrin ali məktəblərində qəbul imtahanı zamanı cəbrdən təklif edilmiş bir sıra məsələ və misallar da bu vəsaitə daxil edilmişdir. Çalışmalar orta məktəbin cəbr kursunun proqramını demək olar ki, əhatə edir.

Kitabdakı nəzəri və praktik materialı şüurlu mənimsədiyiniz və təqdim etdiyimiz məsələləri müstəqil həll edə bildiyiniz halda hər hansı şəraitdə cəbrlə əlaqədar məsələlər və misallar həllində müvəffəqiyyət qazanacağınıza əvvəlcədən təminat vermək olar.

Təlim prosesində ümumiləşdirmə şagirdlərin riyazi qabiliyyətinin yüksəldilməsində sistemləşdirici məntiqi əməliyyatdır, habelə tədris metodudur. Vəsaitdə verilən nəzəri və məsələ materialı həmin idrak əməliyyatından düzgün istifadə etmək və bununla da cəbri daha dərinləndirən öyrənmək üçün olduqca faydalıdır.

Şagirdlərin yaradıcı fəaliyyətinin inkişafında məsələlərin mühüm rolu vardır. Bu fikir mövcud metodik ədəbiyyatda və məqalələrdə kifayət qədər geniş təhlil olunur və müəllimin şagirdlərlə məsələnin şərti üzərində (şərtin qısa yazılışı, bununla əlaqədar şəkillərdən və ya sxemlərdən istifadə) necə işləməsinə dair tövsiyələr verilir. Lakin yenə də şagirdlərin təqdim olunan məsələni, kənardan azacıq göstərişlə, müstəqil həlli bacarmalarını təmin etmək üzərində düşünməyə ehtiyac vardır.

Öz faydalı qeydləri və təklifləri ilə bu kitabın daha da təkmilləşdirilməsinə kömək edəcək, xeyirxah oxuculara qabaqcadan minnətdarlığımızı bildiririk.

“Mən deyirəm ... ki, cəbr və əlmüqabil təyin etmək mümkün olan hər hansı məlum şeylərə nisbətən, predmeti məchul mütləq ədədlər və ölçülən kəmiyyətlərdən ibarət elmdir. Bu şeylər başqaları ilə heç nə ilə əlaqəsi olmayan ya kəmiyyət və ya münasibətdir. Siz bunu dərindən dərk etməlisiniz”

Xəyyam Ö.

I. VII-IX siniflərdə cəbrin tədrisilə əlaqədar şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətinin inkişaf etdirilməsi

I.1. Hazırkı proqram və dərsliklərdə cəbr kursu ənənəvi məzmunlu – metodik xətlərlə qurulur: Ədədi, funksional, alqoritmik, xətti tənliklər və bərabərsizliklər, xətti cəbri çevirmələr. Cəbr kursunun aparıcı xətti ədədlərdir. Bütün qalan xətlər ona əsaslanaraq onun ətrafında qurulur. Yalnız ədədi elementar funksiyalara baxılır. Tənliklər və bərabərsizliklər tapılması lazım gələn məchul ədəd daxil olan ədədi münasibətlərin müəyyən növü kimi şərh olunur. Alqoritmlər və cəbri çevirmələr hesab əməllərinin məlum qanunları və xassələrinə əsaslanır.

Bir qayda olaraq izahatlar deduksiyanın rolunu müntəzəm olaraq artırmaqla konkret – induktiv metodla, daxil edilən anlayışları motivləşdirən və ümumiləşdirici riyazi mücərrədləşdirmənin real əsaslarını nümayiş etdirən praktik məsələlərə söykənməklə aparılır.

Cəbr kursu üzrə biliklər tədrisən mənimsənilməlidir. Habelə bütün üç tədris ili müddətində uyğun bacarıq və vərdislərdə tədrisən formalaşdırılır.

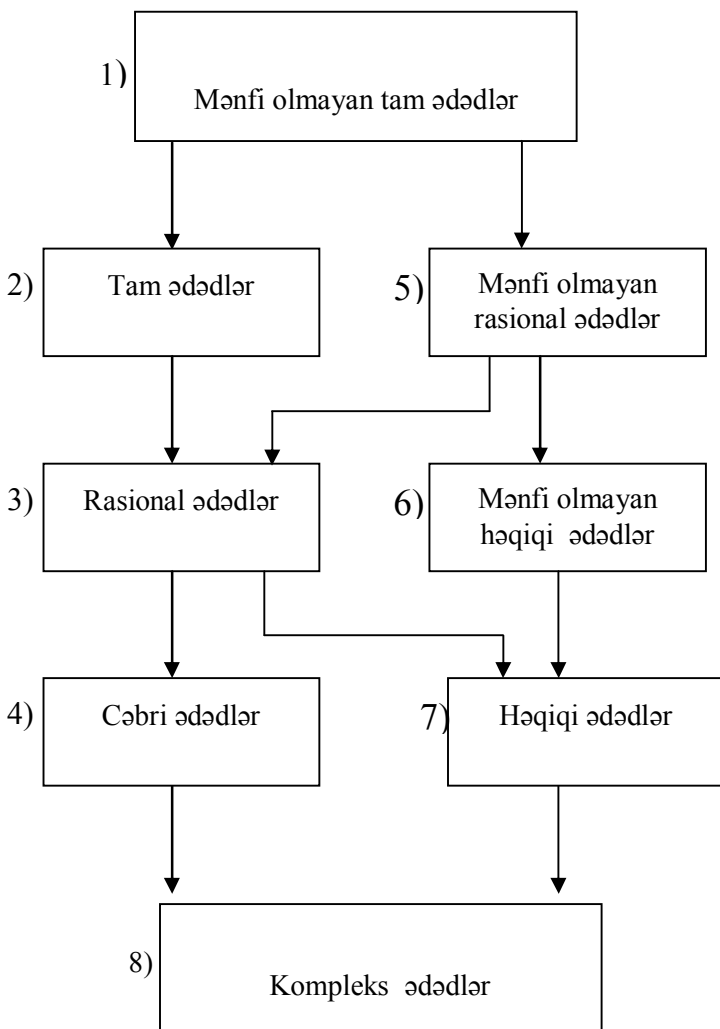
Cəbr kursunun öyrənilməsilə əlaqədar şagirdlər: cəbri ifadələrin ədədi qiymətlərini tapmağı, çoxhədlilər üzərində hesab əməllərini yerinə yetirməyi və çoxhədlili standart şəkildə gətirməyi, çevirmələrə müxtəsər vurma və bölmə düsturlarını tətbiq etməyi, cəbri kəsrlər və qüvvət daxil olan cəbri ifadələr üzərində hesab əməlləri aparmağı, bir məchullu xətti və kvadrat tənlik və bərabərsizlikləri, iki məchullu bir və iki dərəcəli iki tənlik və bərabərsizliklər sistemini, onların tətbiqilə məsələləri, ən sadə irrasional tənlikləri, ədədi və həndəsi silsilənin ümumi həddi və hədlər cəmi düsturlarının tətbiqi ilə məsələləri həll etməyi, xətti, kvadratik, qüvvət funksiyalarının qrafiklərini qurmağı və xassələrini müəyyənləşdirməyi, mikrokalkulyatorla işləməyi, bütün bu mövzularla əlaqədar ümumiləşdirici mücərrədləşməni bacarmalıdırlar.

Bu tələblərin təcrübədə reallaşması bütün kursun alqoritmik istiqamətlərinə, istilah və işarələrin sadəliyinə, müxtəlif çətinlikdə və ümumiləşmə səviyyəsində olan çalışmalara əsaslanır. Nəzərdə tuturuq ki, VII-IX siniflərlə iş zamanı müəllim aşağıdakı metodik tövsiyələrə əsaslanacaqdır. Hər şeydən əvvəl bir çox müəlliflər tərəfindən hazırlanmış dərsliklərin demək olar ki, hər bir paraqrafında edildiyi kimi, cəbr dərslərində daxil edilən yeni anlayışları praktik məsələlər üzərində nümayiş etdirmək məqsəduyğundur.

Şifahi və yazılı sorğular zamanı tərif və teoremlərin ifadələrini onların təcrübi tətbiqləri ilə əlaqələndirilməsini şagirdlərdən tələb etmək lazımdır. Bu zaman onların nə dərəcədə şüurlu və riyazi cəhətdən savadlı ifadə edilməsinə diqqət vermək mühümdür. Məsələlərin həlli mümkün qədər sadə və ümumi, qeydlər qısa və aydın olmalıdır. Şagirdlərin müstəqil işinə, təfəkkür əməliyyatları və formalarından necə istifadə etmələrinə xüsusi diqqət verməli. Teoremlər isbatı və məsələlər həlli gedişinin şərh, onların düzgünlüyünün əsaslandırılması məktəblilərə riyazi dildə danışmağı öyrədir.

1.2. Ədəd anlayışı (I-X). Mənfi olmayan tam $0, 1, 2, 3, \dots$ ədədlərindən başlayaq. Bu çoxluğu N_0 –la işarə edək. N_0 -da toplama və vurma əməlləri və $x < y$ münasibəti vardır. Şagirdlər ilk dəfə kəsir və mənfi ədədlərlə qarşılaşdıqda bunu hiss edirlər.

Şagirdlər “nə qədərdir” sualına “sıfır” və ya “boş çoxluqdur” (evdə neçə fil var?) cavabını verə bilirlər. Deməli, “boş” çoxluq adlanan sıfır natural ədədlərlə birlikdə N_0 -a daxildir. 0-ı natural ədədlər çoxluğuna da daxil etmək olar. Sonlu çoxluqların, yəni “hesabi” çoxluqların elementləri sayını işarə etmək üçün N_0 -dan götürülmüş ədədlər kifayətdir. Mövcud ədəbiyyata N_0 -dan olan ədədlər “natural ədədlər və sıfır” və ya “mənfi olmayan tam ədədlər” adlanır. Ədəd anlayışının ümumiləşdirilməsinin mərhələləri ardıcılığı ilə şagirdləri tanış etmək zəruridir. Müəllim şagirdlərə təlimin müvafiq mərhələsində ədəd anlayışının inkişafı və genişlənməsi ilə əlaqədar lazımı məlumatı verə bilməsi üçün aşağıdakı sxemi yaxşı bilməlidir.



Pedaqoji universitetin cəbr kursunda tələbələrə bu barədə məlumat verilir. Təmiz cəbri nöqteyi nəzərdən ümumiləşdirmənin təbii sırası 1) → 2) → 3) → 4) yolu ilə gedir. Bu ümumiləşdirmə cəbri ədədlərdə qurtarır. Məktəbdə isə ümumiləşdirmə 1) → 5) → 3) → 7) → 8) yolu ilə gedir. Məktəb təcrübəsində ədədlərin təlimi haqqında yaranmış metodikanın ümumiləşdirmə nöqteyi nəzərdən müəyyən nöqsanları

vardır. Şagirdlərə ədədi siniflər (N, Z, Q, R, K) arasındakı münasibətlər öyrədilmir. Ədəd anlayışının inkişafı ideyasını şagirdlər başa düşmür, çünki bu ideyanın aydınlaşdırılmasına kifayət qədər fikir verilmir. Ənənəvi öyrənmənin obyektı ədədi çoxluqların tərtib münasibəti deyil ədədlərin özüdür.

İnsan fəaliyyətinin ən sadə tələblərinin inikası kimi natural ədədlər anlayışı mədəniyyətin başlanğıcında yaranmışdır. Təbii olaraq ədəd haqqında müasir təlim də natural ədədlər hesabına əsaslanır. Bu təlimin sonrakı şaxələnməsi natural ədədlər çoxluğunun $N \subset Z \subset Q \subset R$ (1) sxemi üzrə genişlənməsindən ibarətdir. Uzun illər məktəbdə (1) sxemindən fərqli olaraq ədədlərin inkişaf tarixinin ardıcılığı saxlanılmışdır. Belə ki, kəsrlər mənfi ədədlərdən bir qədər əvvəl meydana gəldiyindən çox vaxt məktəbdə bu tarixi ardıcılıq əsas götürülmüşdür. Son vaxtlar $N_0 \subset Q_1 \subset Q \subset R$ (Q_1 - müsbət rəasional ədədlər) “tarixi sxem” öz yerini “məntiqi” adlanan (1) sxeminə vermişdir. Lakin ədəd anlayışının məktəbdə öyrənilməsində tarixiliyə yoxsa məntiqiliyə üstünlük verilməsi məsələsində müxtəlif fikirlər yenə də mövcuddur. Biz məntiqi sxemə üstünlük veririk.

Ədədi çoxluqların genişləndirilməsinin qurulması dörd şərti ödəməlidir. Fərz edək ki, A çoxluğu B çoxluğuna qədər genişlənməlidir. Onda həmin dörd şərti belə ifadə etmək olar.

- 1) A çoxluğu B -nin alt çoxluğudur ($A \subset B$);
- 2) A çoxluğunda ödənilən bütün əməllər B –də təyin olunur;
- 3) B -də ödənilən əməl A -da ödənilməyə bilər;
- 4) A çoxluğunun 1)-3) şərtlərini ödəyən bütün mümkün genişlənmələri içərisində B genişlənməsi “minimal” olmalıdır. Bu şərtlər başqa anlayışların ümumiləşdirilməsində də ödənilməlidir.

Əvvəlcə mənfi tam ədədlərə, sonra isə 1) $\rightarrow$ 2) $\rightarrow$ 3) $\rightarrow$ 4) yolunda qırıqlıq əmələ gətirən kəsr ədədlərə keçmək ədəd anlayışının ümumiləşdirilməsinin təmiz cəbri konsepsiyasıdır.

Ədədlərin ilk yazılışında, konkret misallar üzərində, çıxmanın və sıfırdan fərqli ədədə bölmənin mümkünlüyü üçün, genişlənmənin zəruriliyini şagirdlərə başa salmaq mümkündür. Toplama və vurmanın əsas xassələrinin dəyişmədiyi belə genişlənmənin qurulması da aşkardır. Lakin bu fikir, şagirdlər minimal genişlənmənin mahiyyətini, varlığını və yeganəliyini anladıqda əhəmiyyətli olur. Aşağı siniflərdə “kiçik ədəddən böyük ədədi çıxmaq olarmı?”. Sualı şagirdləri maraq-

landırır və müəllimin ustalığı sayəsində mənfi ədədlər üzərində əməllərin mənimsənilməsinin əsası qoyulur. “3-ü yarıya bölmək olarmı?” sualı daha təbii görünür. Normal 6 yaşlı uşaq “üç almanı iki nəfərə bölmək” kimi konkret misallardan istifadə etməklə müəllimin köməyi olmadan bu məsələni həll edə bilər. Odur ki, çox vaxt ədədlərin $1) \rightarrow 5) \rightarrow 3) \rightarrow 7)$ ardıcılığında öyrənilməsi müvafiq sayılır. Ədəd anlayışının ümumiləşdirilməsinin birinci $1) \rightarrow 5)$ addımı mənfi olmayan tam ədədlərin $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ yazılışını müsbət kəsr ədədlərlə tamamlamaqdır. Nəticədə bütün mənfi olmayan Q_0 rəşional

ədədlər alınır. İxtiyari $x \in Q_0$ ədədini $x = \frac{m}{n}$, $m \in Z_0$, $n \in N$ kəsri şəklində yazmaq olar. Lakin eyni bir ədədi sonsuz sayda kəsri şəklində yazmaq olar; məsələn $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{22}{33} = \dots$. Bəzən də ədədlər onluq kəsri şəklində yazılır: $0,25 = 0,250 = \frac{1}{4}$. Ədədləri faizlə də ifadə etmək

olur: $25\% = 0,25 = \frac{1}{4}$. Şagirdlər ümumiyyətlə “ədəd” və “kəsri ədəd”

arasındakı fərqi yaxşı bilməlidirlər. Onlar

$0,40; \frac{0}{100}; 0,4; \frac{6}{3}; 0; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; 0,33$ yazılışını gördükdə aşağıdakı suallara

cavab verə bilməlidirlər: 1) burada neçə müxtəlif ədəd yazılmışdır? (beş), 2) onlardan neçəsi kəsri ədəddir? (üçü); 3) neçəsi tamdır? (ikisi). Ədədlə əlaqədar ümumiləşdirmənin dilini düzgün tətbiq etmək üçün ədədlə onun yazılışı üsulları arasındakı fərqi aydın başa düşmək lazımdır. Məsələn, məxrəci 2 olan adi kəsrlər çoxluğu ilə, məxrəci 3 olan adi kəsrlər çoxluğunun ortaq ünsürləri yoxdur. Lakin $a \in Q$ ədədlərinin 2 məxrəcilə kəsri şəklində yazılmış A ədədlər çoxluğu və $b \in Q_0$ ədədlərinin 3 məxrəcilə kəsri şəklində yazılmış B ədədlər çoxluğunun mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğu N_0 -dan ibarət kəsişməsi vardır.

Konkret misalları ümumiləşdirərək şagirdlərə deyilir ki, vahiddən kiçik ədədlər düzgün kəsrlə $\left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}\right)$, vahiddən böyük və ya vahidə

bərabər ədədlər isə düzgün olmayan kəsrlə $\left(\frac{23}{8}, \frac{8}{8} = 1\right)$ yazılır. Burada

hər hansı nəzəriyyədən deyil, uyğun dildən istifadə adəti yaratmaqdan söhbət gedir. Budur məktəbdə kök salmış “qarışıq ədəd” və ya “qarışıq kəsir” istilahının işlədilməsilə əlaqədar çətinlik yaranır. Belə ki, düzgün və düzgün olmayan kəsrlər kəsirin xüsusi növləridir. Lakin qarışıq kəsir

$k\frac{m}{n}$, $k \in N, m \in N, n \in N, m < n$ şəkildə ifadədir, deməli 0, kəsir deyildir.

Təlimin müvafiq mərhələlərində yeni ədədlərin daxil edilməsinin ümumi metodik sxemini vermək üçün hər şeydən əvvəl baxılan anda bütün ədədlər çoxluğunun kifayət olmadığını, beləliklə isə onu genişləndirməyin zəruriliyini göstərmək lazımdır. Bu məqsədlə adətən xüsusi olaraq seçilmiş məsələyə baxılır. Məsələn, Q^+ çoxluğunun kifayət olmadığını, mənfi ədədlərin daxil edilməsinin zəruriliyini göstərmək lazımdırsa “qayıq çay ilə bir məntəqədən a km aşağı getdi, sonra isə qayıdıb b km yuxarı gəldi. Hazırda qayıq haradadır?” kimi məsələyə baxmaq olar. Bu məsələnin həlli qayığın məntəqədən müəyyən istiqamətdə (çay üzrə aşağı) məsafəsini göstərən (km-lə) $x = a - b$ fərqlərinin hesablanmasına gətirilir.

Q rəşional ədədlər çoxluğunun kifayət olmaması və yeni irrasional ədədlərin daxil edilməsinin zəruriliyi adətən ölçmə (ölçülən kəmiyyətin vahid parça ilə ortaqlı ölçüsü olmadığı halda) və kvadrat kök alma (tam kvadrat olmayan müsbət rəşional ədəddən) ilə əsaslandırılır. Bu məsələlərdən birincisi praktik, ikincisi riyazidir. Asanlıqla göstərmək olar ki, birinci ikinciyə gətirilir. Vahid kvadrata baxılır. Onun diaqonallının ölçülməsi tam kvadrat olmayan ədəddən kvadrat kök alma ilə bərgüclüdür (rəşional olmayan $\sqrt{2}$). Burada da həll edilə bilməmək halı Q çoxluğunun genişləndirilməsi yolunu bizə göstərir. Nəticədə dövrü olmayan sonsuz onluqlı kəsri irrasional adlanan yeni ədəd qəbul etməklə rəşional Q ədədlər çoxluğunu I irrasional ədədlər çoxluğu ilə tamamlayıb həqiqi R ədədlər çoxluğunu alırıq ($R = Q \cup J$). Beləliklə,

sonsuz onluq kəsr şəklində göstərilə bilən həqiqi ədəd anlayışına gəlirik. Bu kəsr dövrüdürsə, onda həqiqi ədəd rasionaldır, o dövrü deyilsə, onda həqiqi ədəd irrasionaldır.

Ən qədim dövrlərdə əşyaların sayılmasından, həqiqi, kompleks ədədlərin və kvaternionların yaranmasına qədər ədəd anlayışının inkişafından danışarkən, ədədlərin, vektorların və çoxhədlilərin elementar xassələri əsasında alman riyaziyyatçısı F.Q.Frobeniusun nəticələrinə görə demək olar ki, bu anlayışı daha ümumiləşdirmək mümkün deyil. Deməli ədəd anlayışının son ümumiləşdirilməsi kvaternionlardır. Bu haqda ətraflı məlumatı [16] dan götürmək olar. Beləliklə, praktikanın tələbi və riyazi nəzəriyyələrin inkişafı nəticəsində ədəd anlayışı inkişaf etmiş və yeni ədədlər yaranmışdır. Ədədlərin ilk praktik tətbiqi əşyaların sayılması olmuşdur. Bunun üçün müsbət tam ədədlərdən istifadə olunmuşdur. Uzunluqların ölçülməsi və ticarət hesablamalarında müsbət tam ədədləri bir birinə bölmək lazım gəlmişdir. Bu zaman bölmənin nəticəsi həmişə tam ədəd olmamışdır. Odur ki, kəsr ədədlərə tələbat yaranmışdır. Bir müsbət rasiona ədəddən digərini çıxmağın həmişə mümkün olması üçün mənfi rasiona ədədləri daxil etmək lazım gəlmişdir. Bütün rasiona ədədlər ehtiyatı belə əmələ gəlmişdir. Mənfi ədədlərin yaranmasından xeyli əvvəl müəyyən edilmişdir ki, kvadratın diaqonalının onun tərəfinə nisbəti rasiona ədəd deyil. İrrasiona adlanan yeni ədədin daxil edilməsi zəruri olmuşdur. Bütün həqiqi ədədlər çoxluğu belə yaranmışdır. Mənfi ədədin cüt dərəcədən kökünün həqiqi ədəd olmaması və başqa praktik tələblər kompleks ədədlərin yaranmasına səbəb olmuşdur. Ədəd anlayışının inkişafının son mərhələsi olan kvaternionlar riyaziyyatın daxili inkişafının nəticəsidir. Ədəd anlayışının inkişafı ilə əlaqədar ümumiləşdirmələri şagirdlərə izah etdikdən sonra qeyd etmək olar ki, ayrı-ayrı ədədlərin maraqlı xassələri vardır: bəzi ədədlərin rəqəmlərinin yerini dəyişdikdə alınan ədədin kvadratı əvvəlki ədədin kvadratının rəqəmlərinin yerini dəyişməklə alınan ədəddir. Budur: $12^2=144$, $21^2=441$; $13^2=169$, $31^2=961$; $102^2=10404$, $201^2=40401$; $112^2=12544$, $211^2=44521$; $122^2=14884$, $221^2=48841$; $113^2=12769$, $311^2=96721$ və s. Deməli, belə ədədlər sonsuz saydadır. Odur ki, lazımi ümumiləşdirmə aparmaq olar.

$1 \underbrace{0 \dots 0}_n 2$ (n natural ədəddir) ədədinə baxaq.

$$1 \underbrace{0\dots 0}_n 2^2 = (10^{n+1} + 2)^2 = 10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4 = 1 \underbrace{0\dots 0}_n 4 \underbrace{0\dots 0}_n 4$$

Rəqəmlərin yerini dəyişməklə alınan

$$2 \underbrace{0\dots 0}_n 1 \text{ ədədinin kvadratı isə}$$

$$2 \underbrace{0\dots 0}_n 1^2 = (2 \cdot 10^{n+1} + 1)^2 = 4 \cdot 10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 1 = 4 \underbrace{0\dots 0}_n 4 \underbrace{0\dots 0}_n 1$$

-dir.

Analoji olaraq

$$1 \underbrace{0\dots 0}_n 3^2 = (10^{n+1} + 3)^2 = 1 \underbrace{0\dots 0}_n 6 \underbrace{0\dots 0}_n 9 \quad \text{və}$$

$$3 \underbrace{0\dots 0}_n 1^2 = (3 \cdot 10^{n+1} + 1)^2 = 9 \underbrace{0\dots 0}_n 6 \underbrace{0\dots 0}_n 1$$

Daha bir ümumiləşdirmə

$$11 \underbrace{0\dots 0}_n 2^2 = (11 \cdot 10^{n+1} + 2)^2 = 121 \cdot 10^{2n+2} + 44 \cdot 10^{n+1} + 4 = 121 \underbrace{0\dots 0}_n 44 \underbrace{0\dots 0}_n 4$$

;

$$2 \underbrace{0\dots 0}_n 11^2 = (2 \cdot 10^{n+2} + 11)^2 = 4 \cdot 10^{2n+4} + 44 \cdot 10^{n+2} + 121 = 4 \underbrace{0\dots 0}_n 44 \underbrace{0\dots 0}_n 121$$

Başqa ümumi nəticələri də analoji qayda ilə almaq mümkündür.

1.3. Cəbr kursunda əməl anlayışının formalaşdırılması. Şagirdlərin məntiqi düşünmə qabiliyyətlərini inkişaf etdirmək məqsədilə əməl və qrup anlayışları ilə əlaqədar ümumiləşdirmə və xüsusişdirmə aparmağı öyrətmək zəruridir. Bununla əlaqədar çoxluqlar nəzəriyyəsi elementlərindən də istifadə olunması təbiiidir. Əməl və qrup anlayışlarının bu məqsədlə seçilməsi onların müvəffəqiyyətlə formalaşdırılması prosesində ümumiləşdirmə və xüsusişdirmənin müxtəlif səviyyədə ardıcıl istifadə edilməsi imkanı ilə əlaqədardır: 1) bu anlayışların propedevtikası; 2) xüsusi hal – kommutativ əməl üçün və 3) ümumi şəkildə həmin anlayışların formalaşdırılması.

Əvvəl ümumi əməl anlayışının propedevtikası üzrə işin xarakteri və məzmununa baxaq. Verilmiş M çoxluğunun hər bir nizamlı cütünə bu çoxluğun yeganə üçüncü elementini qarşı qoyan qaydaya həmin çoxluqda əməl deyilir. Müxtəlif ədədi çoxluqlarda dörd hesab əməli, qüvvətə yüksəltmə, ƏBOB və ƏKOB, ədədi orta, çoxhədlilər və kəsrlər

çoxluğunda toplama və vurma, funksiya və s. cəbr kursunda öyrənilən əməllərdir. Əməl anlayışının propedevtikası üzrə işimiz verilmiş çoxluğun iki elementini həmin çoxluğun üçüncü elementinə qarşı qoyan qaydanı, verilmiş çoxluğun bütün elementləri üçün genişləndirilə bildiyini müəyyən etməkdir. Əməl və onun verilmə üsullarına məktəb riyaziyyatının öyrənilməsinin bütün mərhələlərində qeyri-əşkar şəkildə baxılır. 9-illik məktəbdə əldə olunan faktik ümumiləşdirilməsinə və əməl anlayışının tərifı, habelə verilmə üsullarını nəzərdən keçirməyə tam imkan vardır. Bu zaman şagirdlərdə yaranmış bütün əməllərin mütləq kommutativ olması haqqındakı səhv fikir nəzərə alınır. Odur ki, əməllər anlayışı iki mərhələdə öyrənilir. Şagirdlərin öyrəndikləri konkret kommutativ əməl haqqındakı ehtiyatlarından istifadə etməklə, belə əməllərə aid misallara baxmaqla bu anlayışın mühüm xassələrini müəyyən etmək və onun tərifini qurmaq olar. Bu zaman hər hansı çoxluqdan götürülmüş elementlərin ardıcılığının mühüm olduğu əvvəlcədən qeyd edilmir. Şagirdlərlə əməlin verilməsinin müxtəlif üsullarına baxmaq, təqdim edilən çalışmaların müxtəlifliyinə, müstəqil işlərin təşkilinə, materialın şüurlu mənimsənilməsinin yoxlanmasına imkan yaradır. Kommutativ olmayan əmələ aid misallara baxdıqdan sonra ümumi əməl anlayışının tərifı ifadə edilir. Hər hansı çoxluqda üç xassə 1) iki elementə müəyyən qayda üzrə üçüncü element qarşı qoyulur, 2) bu element yeganədir, 3) o, həmin çoxluğa daxildir. Eyni zamanda ödənilərsə, onda həmin çoxluqda əməl verilmişdir. Verilmiş çoxluğun iki elementi üçün baxılan qayda üzrə həmin çoxluğun heç bir elementi ilə eyni olmayan element müəyyən edilirsə və ya belə element birdən çox olarsa, onda bu üsulla yeni elementin alınması qaydası əməl hesab edilmir. Eyni bir qayda bir çoxluqda əməl olduğu halda başqa çoxluqda əməl olmaya bilər. Natural ədədlər çoxluğunda çıxma, tam ədədlər çoxluğunda bölmə ümumiyyətlə əməl deyil və s. Bu səbəbə görə sadəcə əməl haqqında deyil, verilmiş çoxluqda əməldən danışılır. Verilmiş çoxluqda əməllə əlaqədar “Çoxhədlilər çoxluğunda bölmə əməldirmi?” kimi çalışmalara baxmaq lazımdır. Sonra verilmiş çoxluqda əməlin verilmə üsullarına (mətnli ifadə və cədvəl), xassələrinə (kommutativlik, assosiativlik, neytral element, simmetrik elementlər, tərsi olan əməl) şagirdlərin diqqəti cəlb edilir.

Əməl anlayışının formalaşdırılması müasir cəbrin mərkəzi anlayışlarından biri olan qrup anlayışı ilə sıx əlaqədardır. Ümumiləşdirmə və xüsusişdirmənin öyrənilməsi, bu anlayışın mənimsənilməsi

üzrə aparılan işin mühüm hissəsidir. Əməl anlayışında olduğu kimi qrup anlayışının da müvəffəqiyyətlə öyrənilməsi onun propedevtikası üzrə iş aparmağı tələb edir. Çoxluqda verilmiş əməl aşağıdakı xassələri ödəyirsə, bu çoxluq qrup adlanır: 1) bu əməl assosiativdir, 2) bu əmələ nəzərən neytral element vardır, 3) verilmiş çoxluğun hər bir elementi üçün simmetrik (əks və ya tərs) element vardır. Verilmiş çoxluqda əməl həm də 4) kommutativdirsə, onda qrup kommutativ və ya Abel qrupu adlanır. Qrup anlayışının tərifinə daxil olan 1)-3) xassələri başqa xassələrin, xüsusi halda 5) qrupda yalnız bir neytral element vardır, 6) qrupun hər bir elementi üçün yeganə simmetrik element vardır, 7) qrupdakı əməllərin tərsi vardır – xassələrini isbat etməyə imkan verir. Qrupun tərfi 1) və 7) xassələri vasitəsilə də verilə bilər. Onda qalan 2), 3), 5) və 6) xassələrini isbat etmək olar. Qrup anlayışının propedevtikası üzrə iş aparmaq üçün məktəbdə böyük imkanlar vardır. Məsələn, sıfırdan fərqli rəşional və həqiqi ədədlər çoxluğu vurmaya, çoxhədlilər və kəsrlər (cəbri) toplamaya, cəbri kəsrlər vurmaya görə Abel qrupu əmələ gətirir. Abel qrupuna aid misalları nəzərdən keçirməklə qrup anlayışı üçün mühüm olmayan 4) xassəsini də müəyyən etmək olar. Qrup anlayışının propedevtikası üzrə aparılan işi şərti olaraq üç mərhələyə ayırmaq olar: 1) əmək anlayışının (binar), ona aid misallar üzərində, mühüm xassələrini müəyyən etmək; 2) öyrənilən obyektlər çoxluğunda əməlin 1)-7) qrup xassələrini göstərmək; 3) müxtəlif obyektlər çoxluğunda müəyyən edilmiş 1)-7) xassələrinin ümumiliyini göstərmək. Əməlin 1)-7) xassələrinin müəyyən edilməsi daha tam şəkildə artıq V sinifdə ədədi çoxluqların öyrənilməsi zamanı aparılır. Xüsusi halda V sinifdə rəşional ədədlər çoxluğunda toplama və vurmanın öyrənilməsi zamanı induktiv üsulla ixtiyari a, b, c ədədləri üçün bu əməllərin (1) assosiativliyi, (2) toplamada sıfırın, vurmada vahidin udulması; (3) əks ədədlər cəminin sıfır, tərs ədədlər hasilinin vahid olması; həmin əməllərin (4) kommutativliyi xassəsini göstərən bərabərliyin doğruluğu müəyyən edilir. V-VI siniflərdə proqram materialının öyrənilməsi zamanı qrupun xassələrinin müəyyən edilməsi ədədi sistemlərdə toplama və çıxmanın nəzərdən keçirilməsilə yerinə yetirilir və məktəb üçün artıq adət almış işlərə gətirilir: ədəd anlayışının bütün genişlənmələrində dəyişməyən hesab qanunlarının, toplamada sıfırın, vurmada vahidin xüsusi rolunun, qarşılıqlı əks və tərs ədədlərin, ədədi çoxluqlarda toplama və vurmanın çevrilənlinin müəyyən edilməsi. Bu siniflərdə müəllifin hazırladığı materiallar üzrə əməl və

qrupla aparılan iş sonrakı siniflərdə təkrar edilir. VII-IX siniflərdə proqram materialının öyrənilməsini də qrupla əlaqələndirmək mümkündür. Nümunə olaraq qeyd edək ki, çoxhədlilər çoxluğunda toplama, cəbri kəsrlər çoxluğunda toplama və ya vurma, vektorlar çoxluğunda toplama, ortaq mərkəzli dönmələr və oxşarlıqlar çoxluğunda onların kompozisiyası 1)-5) şərtlərini ödəyir. Məsələn, VII sinifdə şagirdlər öyrənirlər ki: 1) çoxhədlilərin cəmi assosiativdir; 2) yeganə sıfır çoxhədlisi vardır; 3) verilmiş çoxhədli üçün onun əksi olan yeganə çoxhədli vardır; 4) kommutativdir; 5) ixtiyari iki çoxhədlinin fərqi də çoxhədlidir, yəni, çoxhədlilərin cəmi çevriləndir.

Beləliklə, ədədi təbiətli olmayan obyektlər çoxluğunda əməllərin öyrənilməsi zamanı da qrupun 1)-7) xassələrini şagirdlərə öyrətmək olar. Bilmək lazımdır ki, çoxhədlilərin və vektorların cəminin: “İxtiyari A çoxhədlisi üçün $A+0=A$ olan yeganə 0 çoxhədlisi vardır” və “İxtiyari a vektoru üçün $a+0=a$ olan yeganə 0 vektoru vardır” xassələri qrupun 2), 5) xassələrini, “İxtiyari A çoxhədlisi $A+(-A)=0$ şərtini

ödəyən, onun əksi olan $-A$ çoxhədlisi vardır” və “İxtiyari a vektoru üçün $a+(-a)=0$ şərtini ödəyən yeganə $-a$ vektoru vardır” xassələri isə qrupun 3), 6) xassələrini özündə birləşdirir.

Məktəb riyaziyyatının, xüsusi halda, cəbrin öyrənilməsi zamanı qrup anlayışının propedevtikası üzrə iş apararkən baxılan hər bir çoxluqda onun elementləri arasındakı münasibət müəyyən edilir, onların 1)-7) xassələri aydınlaşdırılır və başqa obyektlər çoxluğundakı yeni münasibətdə eyni bir xassənin ümumiliyi müəyyən olunur. Nəticədə öyrənilən çoxluğun quruluşu açılır. Dərsdə bu və ya digər xassənin ümumiliyinin müəyyən edilməsi konkret əməllərin xassələri daxil olan cədvəllərin müqayisəsi ilə aparıla bilər. Məktəbdə ədədi sistemlərin, həndəsi çevirmələrin, funksiyaların, çoxhədlilərin və s. öyrənilməsi zamanı qruplar nəzəriyyəsi elementlərinin mənimsənilməsi, habelə tətbiqlərinə diqqət vermək şagirdlərin riyazi mədəniyyətinin yüksəldilməsində mühüm vasitədir.

1.4. Funksiya. Riyaziyyatın inkişafı prosesində funksiyaya ədədi və ya ixtiyari təbiətli çoxluqlarda dəyişən kəmiyyət, qayda və ya qanun, düstur, analitik ifadə, inikas, münasibət, uyğunluq, cəbri ifadə, binar əməliyyat anlayışları vasitəsilə təriflər verilmiş, bəzən də ilk anlayış

hesab edilmişdir. Bütün bunlar müvafiq dövrlərdə orta və ali məktəb dərslərlərində də öz əksini tapmışdır. Ümumilik və pedaqoji baxımdan müvafiqlik üçün ixtiyari təbiiyyətli çoxluqların ünsürləri arasındakı dörd növ uyğunluqdan ikisinə (qarşılıqlı bir qiymətli və çox birqiymətli) funksiya deməyi lazım bilir.

Məktəb proqramına funksiya anlayışı riyaziyyatın inkişafının dəyişən kəmiyyətlər adlanan mərhələsinə (XVII-XIX əsrlər) uyğun olaraq nisbətən gec daxil olmuşdur. Bununla əlaqədar olaraq riyazi təlimin təkmilləşdirilməsində görkəmli alman riyaziyyatçı-pedaqoqu F.Kleyenin (1849-1925) böyük xidməti vardır. N. Burbakinin tədqiqatlarının əsasını təşkil edən riyazi elementlərin vahidliyi ideyasının mahiyyətini Kleyin göstərmiş və funksiyanı bütün riyaziyyatın mərkəzi anlayışı hesab etmişdir. Onun fikrincə bütövlükdə ali riyaziyyatın mövzusu əsasən funksiyanı öyrənməkdir. Görkəmli riyaziyyatçılar funksiya verilən bu və ya digər tərifi məhdudluğunu göstərmişlər.

Məktəbdə öyrənilən anlayışların əksəriyyətinə funksiya kimi baxmaq olar: həndəsi kəmiyyətlər və çevirmələr, ifadələr, tənliklər, bərabərsizliklər, törəmə, inteqral və s.

Funksiyanın öyrənilməsi ilə əlaqədar şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətini inkişaf etdirmək üçün onu uyğunluğun yuxarıda göstərdiyimiz növləri kimi daxil etmək məsləhətdir. Həm də şagirdlər “verilmiş E çoxluğunun M çoxluğuna ixtiyari f inikasına təyin oblastı E və qiymətlər çoxluğu M olan funksiya deyilir” nəticəsinə gələ bilməlidirlər. Yadda saxlamaq lazımdır ki, E çoxluğunun M -in üzərinə f inikası dedikdə nəzərdə tutulur ki, $y = f(x)$ E -dən götürülmüş ixtiyari x üçün və yalnız bu çoxluğun x -i üçün, təyin edilmişdir. f funksiyanın y qiyməti isə həmişə M çoxluğuna daxildir və bu M -dən götürülmüş hər bir y heç olması x argumentinin bir qiymətində f funksiyanın qiymətidir. f funksiyanın qiymətinin yalnız həmişə M çoxluğuna daxil olduğu məlumdursa, bununla hökm etmək olar ki, bu çoxluğun ixtiyari ünsürü f funksiyanın qiymətidir. Bu halda deyilir ki, funksiya özünün E təyin oblastını M çoxluğunun daxilinə inikas edir və ya f funksiyası E -nin M çoxluğunun daxilinə inikasıdır. Beləliklə, ümumilik üçün aşağıdakı ifadələrin mənasını ciddi fərqləndirmək lazımdır. “ M çoxluğunun üzərinə inikas” və “ M çoxluğunun daxilinə inikas”. Bilmək lazımdır ki, hər bir üzərinə inikas eyni zamanda daxilinə inikasdır, lakin

tərsi doğru deyil. F funksiyasının qrafikinin ən ümumi tərifini isə $Q_f = \{(x, y) / y = f(x)\}$ düsturu şəklində yazmaq olar.

Məktəbdə yalnız təyin oblastı və qiymətləri ədədlərdən ibarət olan ədədi funksiyaları öyrənməyə adət etmişik. Şagirdlərin ümumiləşdirici təfəkkürünü inkişaf etdirmək məqsədilə demək lazımdır ki, funksiyanın qiymətləri təkcə ədəd deyil, həftənin günləri, adamlar, ixtiyari əşya və obyektlər ola bilər. Lakin bunların hamısını ədədlə ifadə etmək mümkündür. “Ədədi arqumentin ədədi funksiyası” ifadəsinin mənası isə müəyyən deyil. Axı ədəd anlayışının özü məktəbdə tədricən ümumiləşdirilir. Bu mənada şagirdlərin VIII sinifdə tanış olduqları həqiqi ədədlər sistemi diqqəti xüsusi cəlb etməlidir.

Funksiyanın araşdırılmasının mühüm nəzəri və praktik əhəmiyyəti vardır. Məktəbdə bu iş iki səviyyədə (elementar üsullarla və törəmənin tətbiqi ilə) aparılır. Funksiyanın araşdırılmasının ikinci səviyyəsi birinci səviyyədə aparılmış araşdırmanın sonrakı genişləndirilməsi və dərinləşdirilməsidir. Ümumiləşdirmə zamanı həmin səviyyələr müqayisə etmək zəruridir. “Qüvvət anlayışının ümumiləşdirilməsi və üstlü funksiya” hazırkı dərslikdə lazımı səviyyədə şərh edilmişdir. Mövzunun adından göründüyü kimi burada müvafiq ümumiləşdirmələr aparmaq lazım gəlir. Bu isə hazırkı dərslik və metodik vəsaitdə tədqiqatımız baxımından yaxşı işlənmişdir. Xüsusən üstlü funksiyanın qüvvət anlayışının ümumiləşdirilməsi kimi şərhini hazırkı dərslik və keçmiş müəllimə kömək kitabının müvəffəqiyyəti hesab edirik. Burada üstlü funksiya tam, rəşional, həqiqi üstlü qüvvətlərin ümumiləşdirilməsi kimi daxil edilir və möhkəmləndirilir. Mənasibət və onun qrafiki ilə əlaqədar ümumiləşdirmə də maraqlıdır.

Ağdam sözünün sonuncu hərfi Mərdəkan sözünün birinci hərfidir.

$M = \{Zabrat, Tovuz, Astara, Ağdam, Sabirabad, Deveci, İmisli\}$

çoxluğunda belə xassəli şəhərlər cütlərinin adını göstərək. Əyanilik məqsədilə belə edək: bu sözləri yazaq, sonra “Ağdam” sözündən “Mərdəkan” sözünə doğru ox çəkib və həmin qaydanı davam etdirək. Baxılan R mənasibətində olan sözləri müəyyən edək. Onda görürük ki: 1) bu mənasibətdə olan sözlər mütləq oxlarla əlaqədardır; əks halda verilmiş mənasibətin hansı istiqamətdə hərəkətini göstərə bilmərik; 2) Zabrat Tovuzla, Tovuz isə Zabratla baxılan mənasibətdədir, beləliklə həmin çoxluğun bəzi ünsürləri əks istiqamətli iki oxla əlaqələnə bilər; 3) Astara baxılan R mənasibətində özü-özü ilə əlaqədardır, bu sxemdə

həmin sözdən çıxıb bu sözə “daxil olan” bir oxla göstərilə bilər. Burada İmişli sözündə olduğu kimi, iki ox birilə əvəz edilir. Sözləri nöqtə ilə işarə etsək bu sxemə daha sıx forma vermək olar. Belə nöqtlər çoxluğuna və onları birləşdirən xətlərə **qraflar**, nöqtlərə isə qrafın **təpələri** deyilir. Çoxluğun ünsürlərinin baxılan münasibətdə olan bütün nizamlı cütləri çoxluğunun siyahısını tərtib etsək, onda alınmış çoxluq $M \times M = M^2$ dekart kvadratının alt çoxluğu olacaqdır. Beləliklə, M sonlu çoxluqdursa, onda bu çoxluqda təyin edilmiş R münasibətini istiqamətli qraflarla vermək olar. Bu zaman aRb olarsa, onda təsvir a ünsürünə uyğun nöqtədən b ünsürünə uyğun nöqtəyə gedən oxla göstərilir, aRa olarsa, onda təsvir a ünsürünə uyğun nöqtədən çıxıb həmin nöqtəyə daxil olan ilgəklə verilir. Deməli, qraf münasibətin həndəsi şərhidir.

R münasibətinin bütün $(a, b) \in R$ cütləri çoxluğuna bu münasibətin Q_R qrafiki deyilir. Bu tərif funksiyanın qrafikinə mənəvi mənada funksiyanın qrafiki R cütlər çoxluğunun həndəsi obrazından başqa bir şey deyildir. Deməli, funksiya münasibətin xüsusi halıdır. Artıq qeyd etdik ki, funksiyanın tərifinə müxtəlif yanaşmalar vardır. Funksiya xəttinin məktəbdə mühüm yer tutmasının əsaslandırılması müasir riyaziyyatın ən böyük nailiyyətlərindən biridir. Lakin bu müddəə müxtəlif yollarla gerçəkləndirilir; yolların müxtəlifliyi funksiya anlayışının bünövrə olmasına səbəb olmuşdur. Bu anlayışın bir-birindən kəskin fərqlənən iki metodik şərh vardır. Onlardan birisi genetik, digəri isə məntiqi adlanan şərhdir.

Genetik şərh XIX əsrə qədər məlum olan dəyişən kəmiyyətlər, bunların funksional asılılığı, düsturlar, müstəvi üzərində dekart koordinat sistemində əsaslanır. Məntiqi şərh isə cəbri sistemlər anlayışı daxilində, iki çoxluq arasında xüsusi münasibət kimi, metodik təhlil üzrə qurulmalıdır. Düsturlar və cədvəllərlə yanaşı burada funksiyanın oxlarla, cütlərin sadalanması ilə, təkcə ədədi deyil həndəsi materialdan, həndəsi çevirmələrdən istifadə etməklə verilməsinin mənası vardır. Yaranan anlayışın ümumiliyi və buna əsaslanaraq riyaziyyatın təlimində müxtəlif əlaqələrin müəyyənləşdirilməsi – belə yanaşmanın əsas üstünlüyüdür. Lakin bu yolla hazırlanmış ümumi anlayışlar əsasən bir argumentli funksiyalarla əlaqədardır. Birdəyişənli ədədi funksiyalar isə genetik əsasda daha sadə ifadə edilir. Beləliklə, genetik yanaşma

ümumi anlayış kimi funksiyanı ifadə etmək üçün kifayət deyildir. Məntiqi yanaşma ilə funksiyanın tədrisilə əlaqədar bəzi çatışmazlıqlar müəyyən edilir. Funksiyanın şərhindəki əsas kəskin fərqlər bu anlayışın daxil edilməsi zamanı görünür. Funksiya xəttinin sonrakı öyrənilməsində fərqlər tədricən azalır, çünki, daha onun müxtəlif növlərinə baxılır.

Məktəb riyaziyyatının öyrənilməsinə verilən saatların azaldılması, proqramda bəzi uyğunsuz dəyişikliklər təlimdə yüklənməyə gətirir ki, bu da şagirdlərin bilikləri səthi və fraqmentlərlə mənimsəmələrinin səbəblərindən biridir. Zənnimcə, həmin ziddiyyəti riyazi məzmunun açılmasına daha ümumi yanaşmaqla, məsələ həllinin daha ümumi metodlarını öyrətməklə aradan qaldırmaq olar. Bu baxımdan təlimdə diferensiallaşdırma və inteqrasiyanın aparılmasında, kompyuterdən səmərəli istifadənin öyrənilməsində funksiya anlayışına ümumi yanaşmanın böyük əhəmiyyəti vardır. Bu iş 9 illik məktəbdə cəbrin öyrənilməsinin səmərəliliyinin də yüksəlməsinə səbəb olur. Belə ki: 1) həddindən artıq yüklənmənin qarşısı alınır, fraqmentlik və səthilik aradan götürülür, cəbrin tam, sistematik xarakteri haqqında fikir formalaşır; şagirdlər “funksional asılılıq” anlayışının kursun digər əsas anlayışları ilə fəndaxili əlaqəsini müəyyən edə bilirlər; 2) kursun mövzuları kompleks şəkildə öyrənildikdən sonra şagirdlər tənliklər, bərabərsizliklər və onların sistemlərinin həlli zamanı funksiyanın xassələrindən daha fəal istifadə edirlər; 3) kursun tədrisi prosesində riyazi obyektlərə funksional “baxmaq” hesabına yüksək ümumiliyə malik idrak fəaliyyəti formalaşır və bunun əsasında şagirdlər riyazi məsələlər həllinin kifayət qədər əhatəli metodlarını mənimsəyirlər; 4) cəbr məsələlərinin həlli gedində geniş istiqamətli əsasda formalaşmış vərdişlər möhkəm olur (şagird aldığı bilikləri müəyyən vaxtdan sonra tətbiq edə bilir) və irəliləmə (verdişləri köçürmə) qabiliyyəti inkişaf edir; 5) ümumi funksional yanaşma şəraitində hesablama texnikasından optimal istifadə olunur ki, bu da öyrəninin riyazi təlim və elmi qabiliyyətinin struktur komponentlərinin inkişafına müsbət təsir edir; biliklərin təcrübədə tətbiqi prinsipinin reallaşması nəticəsində fənnə idrak marağı yüksəlir.

Funksiya anlayışı ilə əlaqədar ümumiləşdirmələrin şagirdlərə öyrədilməsinin əsas vəzifələri: yoxlayıcı eksperimentlər və nəzəri mənbələrin təhlili əsasında bu problem üzrə məktəb təcrübəsinin vəziyyətini müəyyənləşdirmək, belə yanaşmanın şagirdlərin idrak fəaliyyəti

yətinin inkişafında rolunu göstərmək, bu işin öyrənilməsinin optimal yollarını müəyyənləşdirmək; 9 illik məktəbin cəbr kursunun mənimsənilməsi prosesində baxılan yanaşmanı alqoritmik mədəniyyətin formalaşdırılması sistemində kompüterdən səmərəli istifadə vərdişlərinin inkişafında yerini əsaslandırmaqdır. Ümumi funksional yanaşmada riyazi obyektlərin funksional göstərilməsi əsasında təfəkkürün ümumi və xüsusi priyomlarının formalaşdırılmasına yönəlmiş tədris fəaliyyətinin təşkili nəzərdə tutulur. Bu yanaşmanın yerinə yetirilməsi formalaşan bacarıqlara (funksiyanın qiymətlər cədvəlini tərtib etmək, qrafikini qurmaq, qrafikə əsasən qanunauyğunluqlar müəyyən etmək, funksiyaları araşdırmaq, onun xassələrini, tənlik, bərabərsizlik və onların sistemlərinin araşdırılmasına tətbiq etmək) xüsusi diqqət vermək lazım gəlir. Riyazi fənlərin inteqrasiyası hər şeydən əvvəl öyrənilən materialın məzmununa həndəsi kəmiyyətlərə aid çalışmaların daxil edilməsi, optimallaşdırma, cəbri kateqoriyaların və anlayışların həndəsi şərhinin qurulması, habelə cəbri məsələlərin həllinin ədədi metodlarına sahib olmağın nəzərdə tutulduğu tənlik, bərabərsizlik və onların sistemlərinin həllinin ümumiləşdirilməsi priyomlarından istifadə hesabına yerinə yetirilir. Ümumi funksional yanaşma şəraitində parametrlər daxil olan tənliklər və bərabərsizliklər üzərində işləmək metodikası dəyişir. Məsələlər həllində çoxlu xüsusi hallardan istifadə edilməsi, bunların müvafiq səviyyədə ümumiləşdirilməməsi, nəzəriyyənin ümumiləşdirici rolunun zəiflədilməsi, çalışmalar həllində məqsəduyğunluğun olmaması, təlim prosesinin psixoloji-didaktik cəhətlərinə lazımı qədər əhəmiyyət verilməməsi də şagirdlərin riyazi qabiliyyətlərinin aşağı səviyyədə olmasının səbəblərindəndir.

Ümumi funksional yanaşma şəraitində məktəb riyaziyyatının bir sıra mövzularının mənimsənilməsi zamanı anlayışların ayrı-ayrı xassələri arasında (anlayışların daxilində sintez), tabeli anlayışlar sistemi arasında (anlayışların münasibətinin sintezi) əlaqədar müəyyən edilir, şagirdlər materialı yeni, daha yüksək səviyyəli ümumiləşdirmələr əsasında sintez edirlər. Ümumi funksional yanaşma daha geniş meyllər əsasında idrak fəaliyyətinin formalaşdırılmasına kömək edir, problemlivristik təlim metodundan fəal istifadə üçün şərait yaranır.

Məktəb riyaziyyatını məntiqi, sistematik və tam şəkildə, şagirdlərin idrak fəaliyyətinin inkişafı ilə ümumi funksional yanaşma əsasında öyrətmək olar. Belə yanaşma yaxın fənlərin inteqrasiyası üçün elmi maraq kəsb edir. Xüsusən bu yanaşma hesablama texnikasından geniş

istifadəni nəzərdə tutmaqla riyaziyyatı mənimsəməkdə şagirdlərin fəaliyyətini artırır, eyni zamanda onlarda alqoritmik mədəniyyəti və kompüterdən səmərəli istifadə etmək vərdişlərini formalaşdırır. Bu zaman EHM-dən istifadə etməklə müxtəlif riyazi məsələləri ümumiləşdirərək həll etmək imkanı artır. Ümumi funksional yanaşmanın reallaşdırılması ilə funksiyanın elementar vasitələrlə araşdırılmasının kifayət olmadığı müəyyənləşir, cəbr və analizin başlanğıcının əsas anlayışlarının dərinlən mənimsənilməsinin bünövrəsi qoyulur. Törəmənin məktəb riyaziyyatında tətbiqləri funksiyanın elementar üsullarla araşdırılmasının xüsusi çəkisini azaldır. Şagirdlərdə onlara məlum olmayan daha geniş funksiyalar sinfini öyrənmək imkanı olur. Bu şəraitdə ümumiləşmiş yanaşma keyfiyyətcə yeniləşir. İndi şagirdlər yeni keyfiyyətdən istifadə edərək funksiya ümumi yanaşırlar.

Məlumdur ki, mülahizə forması anlayışı (dəyişənli ifadə) məntiqi funksiya anlayışı ilə sıx əlaqədardır.

Verilmiş X çoxluğunda təyin olunmuş mülahizə formasını $U(x)$ -lə işarə edək. Hər bir $x = a \in X$ qiymətinə $U(a)$ mülahizəsinin doğruluq qiymətini uyğun qoysaq, onda bununla təyin oblastı X və qiymətlər oblastı $\{d, y\}$ olan funksiya alınır və buna məntiqi funksiya deyilir. Məntiqi funksiya anlayışından istifadə etməklə tənlik və bərabərsizliyə tərif verə bilərik: $f(x, y, \dots, z)$ funksiyanın qiymətlərini $g(x, y, \dots, z)$ funksiyanın qiymətlərinə bərabər edən məntiqi funksiya tənlik deyilir. Analoji olaraq dəyişənli bərabərsizliyə məntiqi funksiya kimi tərif verilir. Nəhayət, əvvəl deyilənlərlə yanaşı sonuncu fikir də (məntiq funksiya anlayışı) onu deməyə əsas verir ki, məktəb riyaziyyatının müxtəlif bölmələrinin (planimetriya, stereometriya, tənliklər, bərabərsizliklər və s.) öyrənilməsində ümumi funksional yanaşma xüsusi tədqiqat obyektləri ola bilər.

1.5. Funksiyanın dövrü (VIII-X s.) $y = f(x)$ funksiyası argumentinin (x) onun təyin oblastından götürülmüş, bütün qiymətlərində

$$f(x \pm m) = f(x) \quad (1)$$

şərtini ödəyən müsbət m ədədi varsa, onda $f(x)$ funksiyasına ən sadə dövrü funksiya deyilir. Bu halda m ədədi verilmiş funksiyanın dövrü adlanır. m ədədi verilmiş funksiyanın dövrüdirsə, onda a ixtiyari

tam ədəd olduqda ma da həmin funksiyanın dövrüdür. Dövrülüyn bu növü additiv dövrülük adlanır. Məktəbdə yalnız (1) mənada dövrü funksiyalar öyrənilir. Bu da əsasən triqonometrik funksiyaları əhatə edir. Lakin funksiyanın dövrülüynü daha geniş mənada nəzərdən keçirmək olar. Belə ki,

$$f[\varphi(x)] = f(x) \quad (2)$$

şərtini ödəyən $f(x)$ funksiyasına da dövrü funksiya deyilir. Burada x ədədi $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyalarının təyin oblastına daxil olan ixtiyari həqiqi ədəddir. Bundan əlavə $\varphi(x)$ funksiyası $f(x)$ -in təyin oblastına daxildir. Bu mənada $f(x) = x$ trivial halını nəzərə alsaq hər bir funksiyanı dövrü funksiya hesab etmək olar. Beləliklə də verilmiş funksiyanın dövrü olub-olmaması məsələsini funksiyanın $\varphi(x) = x$ dən başqa dövrü varmı məsələsilə əvəz etmək olar. Deməli şagirdlərin öyrəndikləri dövrülük (2) mənada dövrülüyn xüsusi halıdır. Doğrudan da $\varphi(x) = x \pm m$ isə $f(x \pm m) = f(x)$ yazırıq. Apardığımız eksperiment göstərdi ki, (2) mənada dövrülükdən funksiyaların, elementar funksiyaların araşdırılması, ekstremum məsələlərinin, tam rəşional funksiyaların, xüsusi halda kvadrat üçhəddlinin öyrənilməsi prosesində istifadə etmək çox faydalıdır və pedaqoji baxımdan maraqlıdır. Bütün bu məsələlər isə triqonometrik funksiyalardan əvvəl öyrənilir. Odur ki, (2) mənada dövrülük məktəbə gətirildikdə kvadrat üçhəddlinin öyrənilməsi zamanı onun dövrülüynə də baxmaq olar. Bundan sonra isə triqonometrik funksiyaların dövrülüynün mənimsənilməsi asanlaşır. Nümunə olaraq

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (3)$$

funksiyanı bu cəhətdən nəzərdən keçirək. Bu funksiya dan (2) şərtini ödəməyi tələb etsək, onun dövrünü təyin etmək üçün

$$a\varphi^2(x) + b\varphi(x) + c = ax^2 + bx + c \quad \text{tənliyini} \quad \text{və} \quad \text{buradan}$$

$$\varphi(x) = -\frac{ax+b}{a} \quad \text{alırıq. (} \varphi(x) = x \text{ trivial halını atırıq, başqa sözlə}$$

$$\varphi(x) \neq x \text{ hesab edirik). Beləliklə, (3) funksiyası } f\left(-\frac{ax+b}{a}\right) = f(x)$$

şərtini ödəyir, yəni (2) mənada dövrü funksiyadır. Buradan bir sıra maraqlı nəticələr alınır.

1) $x = x_1$ ədədi $ax^2 + bx + c = 0$ tənliyinin köklərindən biridirsə, onda $x = -\frac{a_1x_1 + b}{a}$ həmin tənliyin ikinci köküdür.

2) $x = x_0$ nöqtəsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ funksiyasının ekstremum nöqtəsidirsə, onda $f(x)$ -in dövrülük xassəsinə görə $x = -\frac{ax + b}{a}$ da onun ekstremum nöqtəsidir.

3) Viyet teoremini asanlıqla isbat etmək olar.

4) Kvadrat üçhədlini vuruqlarına ayırmaq işi sadələşir.

5) $\varphi(x) = -\frac{ax + b}{a}$ funksiyasının $f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadrat üçhədlisinin dövrü olmasını belə ifadə etmək mümkündür: arqumentin iki müxtəlif x və y qiymətlərində $f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadrat üçhədlisinin bərabər, yəni $f(x) = f(y)$ olması üçün $x + y = -\frac{b}{a}$ və ya $y = -\frac{ax + b}{a}$ bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

$f(x) = f(y) = 0$ olduqda x və y qiymətlərinin $f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadrat üçhədlisinin kökü olması üçün zəruri və kafi şərti verən Viyet ($x + y = -b/a$, $xy = c/a$) teoremi yuxarıdakı hökmün xüsusi halıdır.

6) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ funksiyasının da (2) mənada dövrü vardır və 1)-5) xassələri analoji qaydada ona da aiddir. Göstərilən nəticələr şagirdlərə əsaslandırılaraq öyrədilir.

7) Kvadrat üçhədlinin öyrənilməsi zamanı onun (2) mənada dövrülüynə də baxmaq, sonra xüsusi hal kimi triqonometrik funksiyaların həmin xassəsinə öyrənməyi faydalı hesab edirik. Bu riyaziyyatın tədrisi metodikası üçün yenilikdir.

I. 6. Təqribi ədədin mütləq və nisbi xətası (VII-IX s). Dəqiq A ədədindən azacıq fərqlənən və hesablamalarda onu əvəz edən a ədədinə

təqribi ədəd deyilir. $a < A$ isə ona da a ədədinə A -nın əksiyyəti, $a > A$ olduqda isə artığı ilə təqribi qiyməti deyilir. a -nın A ədədinin təqribi qiyməti olması $a \approx A$ kimi yazılır. Təqribi a ədədinin Δa xətası dedikdə adətən uyğun A dəqiq ədədlə verilmiş təqribi ədədin fərqi başa düşülür, yəni $\Delta a = A - a$; $A > a$ isə xəta müsbət: $\Delta a > 0$, $A < a$ isə xəta mənfi: $\Delta a < 0$. Deməli A ədədini almaq üçün təqribi a ədədinə onun Δa xətasını əlavə etmək lazımdır, yəni $A = a + \Delta a$. Beləliklə dəqiq ədədə xətası sifirə bərabər olan təqribi ədəd kimi baxmaq olar. Deməli, dəqiq ədəd təqribinin bu mənada xüsusi halıdır. Belə ümumiləşdirmə üçün təqribi ədədlərə aid əsas anlayışları bilmək lazımdır. Əksər hallarda xətanın işarəsi məlum olmur. Onda təqribi ədədin mütləq xətası $\Delta = |\Delta a|$ anlayışından istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Uyğun ümumiləşdirmə ilə əlqədar xüsusən aşağıdakı tərifləri şagirdlər bilməlidir. 1) Təqribi a ədədinin Δ mütləq xətası uyğun dəqiq A ədədlə a ədədinin fərqi olan mütləq qiymətinə deyilir, yəni $\Delta = |A - a|$ (1). Burada iki halı ayırmaq lazımdır.

a) A ədədi məlum olduqda mütləq Δ xətasını (1) düsturu ilə asanlıqla təyin etmək olar;

b) Praktiki olaraq A ədədi çox vaxt məlum olmur, onda (1) düsturu ilə mütləq xətanı da təyin etmək mümkün olmur. Bu halda məchul nəzəri mütləq xəta (Δ) əvəzində onun, mütləq sərhəd xətası adlanan, yuxarı qiymətini daxil etmək faydalıdır. 2) Təqribi ədədin mütləq sərhəd xətası dedikdə, bu ədədin mütləq xətasından kiçik olmayan ixtiyari ədəd başa düşülür. Beləliklə, dəqiq A ədədini əvəz edən təqribi a ədədinin mütləq sərhəd xətası Δ_a isə onda $\Delta = |A - a| \leq \Delta_a$ (2).

Buradan alınır ki, dəqiq A ədədi $a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a$ (3) aralığında yerləşir. Beləliklə, A ədədinin əksiyyəti ilə təqribi qiyməti $a - \Delta_a$, artığı ilə təqribi qiyməti isə $a + \Delta_a$ -dır. Bu halda sadəlik üçün $A = a \pm \Delta_a$ yazılışından istifadə olunur. Məsələn, π ədədini əvəz edən $a = 3,14$ ədədinin mütləq sərhəd xətasını belə müəyyən etmək olar: $3,14 < \pi < 3,15$ bərabərsizliyi ödənilmədiyindən $|a - \pi| < 0,01$ və beləliklə $\Delta_a = 0,01$ qəbul edilir. $3,14 < \pi < 3,142$ olduğunu nəzərə

alsaq daha yaxşı qiymət alırıq: $\Delta_a = 0,02$. Təqribi ədədin mütləq xəta sərhəddi olduqca geniş anlayışdır: təqribi a ədədinin mütləq xəta sərhəddi dedikdə (2) bərabərsizliyini ödəyən mənfi olmayan Δ_a ədədlər çoxluğunun ixtiyari nümayəndəsi başa düşülür. Buradan məntiqi olaraq alınır ki, verilmiş təqribi ədədin mütləq xəta sərhəddindən böyük olan hər bir ədəd də həmin ədədin mütləq xəta sərhəddi ola bilər. Təcrübi olaraq baxılan vəziyyətdə Δ_a olaraq (2) bərabərsizliyini ödəyən mümkün qədər daha kiçik ədəd götürmək münasibdir. Ölçmə nəticəsində alınan təqribi ədədin yazılışında adətən onun mütləq xəta sərhəddi göstərilir. Məsələn, parçanın uzunluğu $0,5$ sm dəqiqliklə $l = 214\text{ sm}$ isə onda $l = 214\text{ sm} \pm 0,5\text{ sm}$ yazılır. Burada mütləq xəta sərhəddi $\Delta_e = 0,5\text{ sm}$, parçanın l uzunluğunun dəqiq qiyməti $213,5\text{ sm} \leq l \leq 214,5\text{ sm}$ aralığında yerləşir. Mütləq xəta (və ya mütləq xəta sərhəddi) ölçmənin və ya hesablamının dəqiqliyinin xarakteristikası üçün kifayət deyil. Məsələn, iki məftilin uzunluğunun ölçülməsindən $l_1 = 100,8\text{ sm} \pm 0,1\text{ sm}$ və $l_2 = 5,2\text{ sm} \pm 0,1\text{ sm}$ nəticələri alınmışdırsa, mütləq xəta sərhəddinin eyni olmasına baxmayaraq, birinci ölçmənin keyfiyyəti ikincidən yüksəkdir. Verilmiş ölçmənin dəqiqliyi üçün, vahid ölçüyə düşən, nisbi xəta adlanan, mütləq xəta mühümdür.

3) Təqribi a ədədinin δ nisbi xətası bu ədədin Δ mütləq xətasının uyğun $A \neq 0$ dəqiq ədədinin moduluna nisbətində deyilir, yəni $\delta = \frac{\Delta}{|A|}$

(4). Buradan $\Delta = |A|\delta$. Mütləq xəta üçün olduğu kimi nisbi xəta sərhəddi anlayışını daxil edək.

4) Verilmiş a təqribi ədədinin nisbi xəta sərhəddi δ_a bu ədədin nisbi xətasından kiçik olmayan hər bir ədədə deyilir: $\delta \leq \delta_a$ (5), yəni

$\frac{\Delta}{|A|} \leq \delta_a$, buradan $\Delta \leq |A|\delta_a$. Beləliklə, a ədədinin nisbi xəta sərhəddi

olaraq $\Delta_a = |A|\delta_a$ (6) götürmək olar. Təcrübədə, $A \approx a$ olduğundan,

çox vaxt $\Delta_a = |a|\delta_a$ (6')-dan istifadə edilir. Buradan, δ_a nisbi xəta

sərhəddini bilərək, dəqiq ədəd üçün sərhədlər alınır. Dəqiq ədədin $a(1 - \delta_a)$ və $a(1 + \delta_a)$ arasında yerləşməsi, şərti olaraq belə yazılır: $A = a(1 \pm \delta_a)$; Fərz edək ki, dəqiq A ədədini əvəz edən təqribi ədəd a , a ədədinin mütləq xəta sərhəddi Δa dır. Müəyyənlik üçün fərz edək ki, $A > 0, a > 0$ və $\Delta a < a$. Onda, $\delta = \frac{\Delta}{A} \leq \frac{\Delta a}{a - \Delta a}$. Beləliklə, a

ədədinin nisbi xəta sərhəddi olaraq $\delta_a = \frac{\Delta a}{a - \Delta a}$ ədədini götürmək

olar. Analoji olaraq $\Delta = A\delta \leq (a + \Delta)\delta_a$ alırıq, buradan $\Delta_a = \frac{a\delta_a}{1 + \delta_a}$;

adətən olduğu kimi $\Delta_a \ll a$ və $\delta_a \ll 1$ ($\ll$ ilə “kifayət qədər kiçik” işarə edilir), onda təqribən $\delta_a \approx \frac{\Delta a}{a}$ və $\Delta_a \approx a\delta_a$ yazırıq.

Məsələn, 0^0S -də 1 dm^3 suyun çəkisi $p = 999,847q \pm 0,001q$ isə ölçmənin nisbi xəta sərhəddi $\Delta_p = 0,001q$ və $p \leq 999,846q$

olduğundan, $\delta_p = \frac{0,001}{999,846} \approx 10^{-4}\%$ olar.

Təqribi ədədin mütləq və nisbi xəta anlayışları riyaziyyat təliminin müxtəlif mərhələlərində lazım olmaqla yanaşı pedaqoji eksperiment nəticələrinin təhlili üçün də zəruridir. Lakin bunun üçün ədədlərin yuvarlaqlaşdırılması qaydalarını və xəta üçün ümumi düsturları da bilmək vacibdir. Yuvarlaqlaşdırma qaydalarını VII-IX siniflərdə şagirdlərə demək olar, lakin çoxdəyişənli funksiyalar üçün ümumi düsturlar xüsusi törəmələrin tapılması ilə əlaqədar olduğundan məktəb şagirdləri üçün münasib deyil.

Onluq nömrələmədə yazılan hər hansı təqribi və ya dəqiq a ədədinə baxaq. Çox vaxt bu ədədi yuvarlaqlaşdırmaq və ya onu qiymətli rəqəmlərinin sayı az olan a_1 ədəd ilə əvəz etmək lazım gəlir. a_1 ədədi elə seçilir ki, yuvarlaqlaşdırmanın $|a_1 - a|$ xətası minimal olsun. Ədədi n qiymətli rəqəmə qədər yuvarlaqlaşdırmaq üçün onun n -ci qiymətli rəqəminə dək yerləşən bütün rəqəmləri atılır və ya bu mərtəbələri saxlamaq üçün, lazımdırsa onlar sıfırla əvəz edilir. Bunun üçün: 1)

atılan rəqəmlərdən birincisi 5-dən kiçikdirsə, onda qalan sonuncu onluq işarə dəyişdirilmədən saxlanılır: 2) atılan birinci rəqəm 5-dən böyükdürsə, onda qalan sonuncu rəqəmə vahid əlavə edilir; 3) atılan birinci rəqəm 5-ə bərabərdirsə və qalan atılan rəqəmlər içərisində sıfıra bərabər olmayanlar varsa, onda qalan sonuncu rəqəmə vahid əlavə edilir, 3a) atılan birinci rəqəm 5-ə bərabərdirsə və qalan atılan rəqəmlərin hamısı sıfırdırsa, onda qalan sonuncu rəqəmi cütdürsə,

dəyişdirilmədən saxlanılır, təkdirsə, bir vahid artırılır (cüt rəqəm qaydası).

Bu qaydaları birləşdirərək, başqa sözlə, demək olarki, ədədləri yuvarlaqlaşdırarkən saxlanılan sonuncu onluq mərtəbə vahidinin yarısından azı atılarsa, onda bütün saxlanılan mərtəbələrin rəqəmləri dəyişməz qalır; ədədin atılan hissəsi saxlanılan sonuncu onluq mərtəbə vahidinin yarısından çoxdursa, onda bu mərtəbənin rəqəmi bir vahid artırılır. Müstəsna hallarda atılan hissə saxlanılan sonuncu onluq mərtəbə vahidinin dəqiq olaraq yarısına bərabər olduqda yuvarlaqlaşdırma xətası işarəsinin kompensasiyası üçün cüt rəqəm qaydasından istifadə olunur. Aşkardır ki, yuvarlaqlaşdırma qaydaları tətbiq edildikdə yuvarlaqlaşdırma xətası saxlanılan sonuncu qiymətli rəqəmlə müəyyən

edilən onluq mərtəbə vahidinin $\frac{1}{2}$ - ni aşmır. Məsələn, $\pi = 3,1415926535\dots$ ədədinin beş, dörd və üç qiymətli rəqəmə qədər yuvarlaqlaşdırmaqla mütləq xətalrı $\frac{1}{2} 10^{-4}$, $\frac{1}{2} 10^{-3}$, $\frac{1}{2} 10^{-2}$ -dən kiçik olan 3,1416; 3,142; 3,14 tədrbi ədədlərini alırıq.

Məktəb riyaziyyatının tədrisinin müvafiq mərhələlərində təqribi ədədin nisbi xətasının bu ədədin etibarlı işarələri sayı ilə əlaqəsi cəmin, fərqlin xətası, hasilin, qismətin xətası etibarlı işarəsinin sayı, etibarlı işarələrin sayına əsasən nisbi xəta sərhədlərinin və tərsinə təyini, qüvvətin, kökün nisbi xətalrı, xətanı ciddi nəzərə almadan hesablamaqlarla əlaqədar şagirdlərə lazımı ümumiləşdirilmiş məlumatların verilməsi olduqca zəruridir. Bunun üçün təbii olaraq əvvəlcədən təqribi ədəd xətasının əsas mənbələri, onluq yazılışı, qiymətli rəqəmləri, etibarlı onluq işarələr və onların sayı anlayışları məlum olmalıdır.

1.7. Rekurent ardıcılıqlar və düsturlar (VIII-IX). a_n ardıcılığının ($n = 1, 2, \dots$) hər bir n ədədini əvvəlki a_{n-1} ədədi ilə ifadə

edən $a_n = f(n, a_{n-1}, \dots, a_{n-p})$, $n \geq p+1$ (1) şəkildə düstura rekurent düstur deyilir. Bu düsturun köməyi ilə ardıcılığın ilk p həddini bilərək, bütövlüklə ardıcılığı, yəni onun ixtiyari həddini tapmaq olar. Bu priyomdan bir çox məsələlər ilə həllində istifadə etmək faydalıdır. Riyazi elmlərdə, o cümlədən məktəb riyaziyyatında belə düsturlardan çox istifadə olunur. Məsələn, daxilə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlının

tərəfləri sayının ikiqat artırılması $a_n = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{n-1}^2}{4}}}$,

$n \geq 2$ düsturu buna misal ola bilər. Düzgün daxilə çəkilmiş əsas çoxbucaqlının tərəfi a_1 –dirsə onda a_n onun tərəfləri sayının $(n-1)$ dəfə iki qat artırılması nəticəsində alınmış çoxbucaqlının tərəfidir.

Riyaziyyatda sonlu fərqlər nəzəriyyəsində rekurent düsturlardan çox istifadə olunur. Məktəbdə ardıcılıqlar mövzusunun öyrənilməsi zamanı onun verilməsinin müxtəlif usulları nəzərdən keçirilməlidir. Ardıcılıq natural argumentli funksiya olduğundan funksiyanın verilməsi üçün tətbiq olunan üsullar ardıcılığı verilməsində də istifadə olunur. Məsələn, ardıcılığın ümumi həddi ilə verilə bilər:

1) $a_n = (-1)^n (2n-1)$ isə onda ardıcılıq belə $-1, 3, -5, \dots$ olar; 2) $a_n = n(n+1)$ isə onda verilmiş ardıcılıq $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$ -dir.

Ümumi həddi məlum olmayan ardıcılıqlarda baxmaq lazım gəlir. Məsələn,

sadə ədədlərin $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ ardıcılığının ümumi həddi məlum deyil. Bu halda ardıcılıq “sözlərlə” verilir. Ardıcılığın verilmə üsullarından biri də onun ümumi həddinin əvvəlki və bir neçə başlanğıc həddi vasitəsilə hesablanmasına imkan verən rekurent induktiv üsuldur. Rekurent münasibətə :

1) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, 2) $a_n = 4a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + 5a_{n-k}$ -də nümunədir.

Şagirdlərin diqqətini belə bir cəhətə yönəltmək lazımdır ki, ardıcılıq rekurent münasibətin verilməsilə tam müəyyən edilmir. İş ondadır ki, ardıcılığın birinci həddini rekurent düsturla hesablamaq olmur. Doğrudan da $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ bərabərliyində $n=1, 2, 3$ olduqda uyğun olaraq $a_1 = 2a_0 - a_{-1}$; $a_2 = 2a_1 - a_0$; $a_3 = 2a_2 - a_1$

alırıq. Göründüyü kimi a_0 və a_{-1} , yəni 0 və -1 nömrəli hədlər ardıcılığa daxil olmur, odur ki, a_1 və a_2 -in qiymətləri əlavə verilməlidir. a_1 və a_2 -in belə qiymətləri verilmiş ardıcılıq üçün başlanğıc qiymətlər adlanır. Sonra a_3 -dən başlayaraq rekurent münasibət və başlanğıc a_1 və a_2 həddlərinə əsasən baxılan ardıcılığın axırmıncı həddi hesablanır. Ardıcılığın verilməsinin müxtəlif üsulların təhlili nəticəsində şagirdlər öyrənməlidirlər ki, onun ixtiyari həddini tapmağa imkan verən qayda (qanun) məlumdursa, həmin həddinin nömrəsinin göstərilməsi şərtlə ardıcılıq verilmiş hesab olunur. Lakin nəzərə almaq lazımdır ki, ardıcılığın sonlu sayda hədlərini bilməklə onun ümumi həddinin formasını birqiymətli müəyyən etmək olmaz. Budur ardıcılığın beş həddi məlumdur: $2 \cdot 3, 4 \cdot 3^2, 6 \cdot 3^3, 8 \cdot 3^4, 10 \cdot 3^5, \dots$ Asanlıqla yoxlamaq olar ki, ümumi həddi $a_n = 2n \cdot 3^n$ və $b_n = 2n \cdot 3^n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ olan ardıcılıqlarında hər birinin ilk beş həddi verilmiş ardıcılığın hədlərilə üst-üstə düşür.

Silsilələr (ədədi və həndəsi) rekurent üsulla verilən ardıcılıqlara ən sadə misaldır. Bu cəhətə şagirdlərin diqqətini cəlb etmək və silsilərin tərifinin ifadəsində rekurent anlayışından istifadə etmək lazımdır. Ardıcılıq rekurent üsulla daxil edilsə, onda yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, onun tam verilməsi üçün ilk hədlər məlum olmalıdır; ədədi silsilə üçün onun birinci həddi verilməlidir. Beləliklə, ədədi silsilənin birinci həddi və hədlər fərqi verilmişsə o, tam müəyyəndir. Birinci həddi $a_1 = a$ və hədlər fərqi d olan ədədi silsilə $a_1 = a$ və $a_{n+1} = a_n + d$ induktiv şərtlə təyin edilir. Həndəsi silsilə isə $a_1 = a$ və $a_{n+1} = a_n q$ rekurent münasibətilə verilir.

Rekurent düsturu (1) ödəyən ardıcılığa rekurent ardıcılıq deyilir. Xüsusi halda $U_{n+k} = a_1 U_{n+k-1} + a_2 U_{n+k-2} + \dots + a_k U_n \quad (n \geq 1) \quad (2)$ bərabərliyini ödəyən $U_n \quad (n = 1, 2, \dots)$ ardıcılığı rekurent ardıcılıq adlanır. Ədədi ($k=2$) və həndəsi ($k=1$) silsilələr, habelə natural ədədlərin n -ci qüvvətləri ardıcılıqları ($k=n+1$) rekurent ardıcılığın xüsusi hallarıdır. Rekurent ardıcılığa ilk dəfə A.Muavr və D.Bernullinin işlərində

təsadüf olunmuşdur, lakin onun quruluş nəzəriyyəsi Eyler tərəfindən verilmişdir.

Məktəbdə öyrənilən ardıcılıqlar, silsilələr, natural ədədlərin qüvvətləri və s. ilə əlaqədar rekurent düsturlar və ardıcılıqlar haqqında məlumat vermək, bunların əsasında isə şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətinin inkişaf etdirilməsi faydalıdır.

Ədədi və həndəsi silsilənin ümumi hədləri və hədlər cəmi düsturların öyrəndikdən sonra həmin ardıcılıqlarla əlaqədar daha bir ümumiləşdirmə aparmaq məqsədilə $a_n' = [a_1 + d(n-1)]q$ və

$b_n' = b_1 q^{n-1} + d$ münasibətləri ilə müəyyən edilən ardıcılıqlara baxaq. Bu ardıcılıqları uyğun olaraq ədədi –həndəsi və həndəsi – ədədi silsilələr adlandırmaq. Aşkardır ki,

$a_1' = a_1 q$, $a_2' = a_1 q + dq$, $a_3' = a_1 q + 2dq, \dots, a_n' = [a_1 + d(n-1)]q$

dir. Deməli, birinci həddi $a_1 q$, hədlər fərqi dq olan ədədi silsilə aldıq.

Bu silsilənin ümumi həddini göstərdik, onun hədlər cəmi isə

$S_n' = \frac{[2a_1 + d(n-1)]qn}{2}$ olar. İndi ümumi həddi $b_n' = b_1 q^{n-1} + d$

olan ardıcılığın xüsusiyyətinə baxaq: $b_1' = b_1 + d$, $b_2' = b_1 q + d$,

$b_3' = b_1 q^2 + d$, ..., $b_n' = b_1 q^{n-1} + d$. Hər sonrakı hədlə əvvəlkinin

fərqi $b_2' - b_1' = b_1(q-1)$,

$b_3' - b_2' = b_1 q(q-1), \dots, b_n' - b_{n-1}' = b_1 q^{n-1}(q-1)$ olar. Alınmış yeni

ardıcılıq birinci həddi $b_1(q-1)$ və ortaq vuruğu q olan həndəsi

silsilədir. Bu silsilənin ümumi həddini yazdıq, onun hədlər cəmi isə

$S_n' = \frac{b_1(q-1)(1-q^n)}{1-q}$ olar. Bu ümumiləşdirməni aparmağı ədədi və

həndəsi silsilələrin öyrənilməsindən sonra müstəqil iş kimi, şagirdlərin özlərinə tapşırmaq olar.

1.8. İki məchullu bir dərəcəli qeyri-müəyyən tənliklər (VII-IX).

Söhbət $ax + by = c$ (1) şəkildə tənlikdən gedir, burada a, b, c tam

ədədlərdir. Bu tənliyin tam həllərini tapmağın ümumi metodunu şagirdlərə öyrətmək olar. Deməli, x, y də tam ədəddir.

Teorem. 1) a, b, c qarşılıqlı sadədirsə yalnız və yalnız a, b qarşılıqlı sadə olduqda (1) tənliyinin tam həlli vardır. 2) a, b qarşılıqlı sadədirsə, onda (1)-in sonsuz sayda həlli vardır.

İsbatı: a və b qarşılıqlı sadə deyildirsə, onda onların ortaq trivial olmayan böləni vardır: $a = a_1 d, b = b_1 d$, burada $d > 1$. Bu halda ixtiyari tam x, y üçün (1)-in sol tərəfi d -yə bölünür, sağ tərəfi isə, yəni c ədədi d -yə bölünmür (a, b, c qarşılıqlı sadə olduğundan). Bu halda tənliyin tam həlləri yoxdur.

Fərz edək ki, a, b qarşılıqlı sadədir. (1)-in ümumi həllinə baxaq:

$$x = \frac{c - by}{a} \quad (2), \text{ burada } a > 0. \text{ Ardıcıl olaraq } y = 0, 1, 2, \dots, a - 1$$

götürməklə $c - by$ üçün uyğun qiymətlər alırıq. Bu qiymətləri a -ya böldükdə müxtəlif qalıqlar tapılır. Doğrudan da $0 \leq y_1 \leq a - 1$, $0 \leq y_2 \leq a - 1$ və $y_1 \neq y_2$ olduqda $c - by_1$ və $c - by_2$ ədədləri eyni qalıqlıdırlarsa, onda onların fərqi a ədədinə bölünür: $(c - by_1) - (c - by_2) = b(y_2 - y_1) = da$ alınır ki, bu da mümkün deyil, çünki a və b qarşılıqlı sadədir və $|y_2 - y_1| < a$. Beləliklə $(c - by)$ -in a -ya bölünməsindən alınan a müxtəlif mənfi olmayan qalıqlar içərisində $0, 1, 2, \dots, a - 1$ ədədlərindən hər biri vardır. Lakin $y = y_1$ olduqda qalıq sifıra bərabərdirsə onda (2)-in sol tərəfi x_1 tam ədəddir və x_1, y_1 ədədlər cütü (1) tənliyinin tam həllidir. Göstərək ki, bu halda (1) tənliyinin sonsuz sayda tam həlləri vardır. Doğrudan da, fərz edək ki, $ax + by = c$, burada x, y tam ədədlərdir. Onda $ax_1 + by_1 = c$ alırıq, buradan $a(x - x_1) = -b(y - y_1)$ (3) b ədədi a -ya bölünmədiyindən $y - y_1$ fərqi a -ya bölünür, yəni $y = y_1 + at$, burada t tam ədəddir. (3)-dən $x = x_1 - bt$ alırıq. Yoxlanma ilə müəyyən edirik ki, $x = x_1 - bt, y = y_1 + at$ (4) ixtiyari t üçün (1) tənliyinin həllidir, odur ki, (4) düsturu (1)-in ümumi tam həllidir. Beləliklə qeyri-müəyyən tənliyi həll etmək üçün ardıcıl olaraq $y = 0, 1, 2, \dots, a - 1$ götürməklə a -dan çox olmamaqla sınaq yolu ilə tənliyin bir həllini tapmaq və (4) ümumi həllini qurmaq kifayətdir. Deyilənləri $8x + 13y = 159$ tənliyinin tam həllini tapmaq

nümunəsi üzərində də izah edək: $x = \frac{159-13y}{8} = 19-y + \frac{7-5y}{8}$; Ardıcılı olaraq $y=0,1,2,\dots,7$ götürməklə $y=3$ olduqda $x=15$ tam ədədini alırıq. Onda ümumi həll $x=15-13t$, $y=3+8t$ olur, burada t ixtiyari tam ədəddir.

Göründüyü kimi iki məchullu bir dərəcəli qeyri-müəyyən tənliyi həll etməyin ümumi yolu vardır. Lakin yüksək dərəcəli iki məchullu qeyri-müəyyən tənliklərin hamısı üçün belə ümumi metod göstərmək olmaz. Uyğun mövzularla əlaqədar şagirdlərə bu haqda məlumat vermək məsləhətdir. Müstəqil iş kimi $3x+7y=23$ və $11x+8y=104$ tənliklərini ödəyən tam ədədlər cütünü tapmağı şagirdlərə tapşırmaq olar.

1.9. Qoşma vuruq (IX s). Məktəbdə bir çox kök daxil olan ifadələrin çevrilməsində bu anlayışdan istifadə etmək lazım gəlir. Xatırladaq ki, S radikal daxil olan verilmiş ifadədirsə, buna nəzərən qoşma vuruq sıfırdan fərqli hər hansı M ifadəsinə, SM hasilinə radikal daxil olmadıqda, deyilir. S ifadəsinə də M üçün qoşma vuruq kimi baxmaq olar. Ümumi şəkildə qoşma vuruğun axtarılması məsələsinə “Ali cəbrdə” simmetrik funksiyalar nəzəriyyəsinə baxılır. Elementar cəbrdə o cümlədən məktəbdə radikal daxil olan ifadənin yalnız xüsusi növləri üçün qoşma vuruğun müəyyən edilməsinə şagirdlərin diqqəti

cəlb olunur. 1) $S = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ ifadəsi üçün qoşma vuruq $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$ eyniliyi əsasında müəyyən edilir. $x = \sqrt[n]{x}$, $y = \sqrt[n]{y}$ və $M = \sqrt{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}y + \sqrt[n]{x^{n-3}}y^2 + \dots + \sqrt[n]{y^{n-1}}$ götürüb $(\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}) M = xy$ alırıq. Xüsusi halda ($n=2$) $S = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ ifadəsi üçün $M = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ götürmək kifayətdir. $S = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ ifadəsi üçün isə qoşma vuruq $M = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$ -dir. 2)

$S = \sqrt[n]{x^p y^q \dots z^r}$ ifadəsi üçün, burada p, q, r ədədləri n -dən kiçik natural ədədlərdir, $M = \sqrt[n]{x^{n-p} y^{n-q} \dots z^{n-r}}$ götürmək lazımdır.

Doğrudan da $SM = xy \dots z$. 3) $S = \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$ üçün qoşma vuruq $x^n \pm y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots \pm y^{n-1})$ (n -tək olduqda $+$, cüt olduqda $-$)

eyniliyi əsasında tapılır. Məsələn, $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$ üçün $M = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$ götürülməlidir. 4) Kvadrat kök daxil olan ifadələrin qoşma vuruğunu tapmaqla şagirdlər daha çox qarşılaşırlar. $\sqrt{x}$ kvadrat kökdən asılı hər bir çoxhədli $P(\sqrt{x}) = P_1(x) + P_2(x)\sqrt{x}$ şəklində yazmaq olar, burada P_1 və P_2 x -dən asılı çoxhədli. (Çoxhədlinin əmsalları X ifadəsinə daxil olan rəasional arqumentli funksiyalar ola bilər). $P(\sqrt{x})M = P_1^2(x) - P_2^2(x)x$ olduğundan qoşma vuruq olaraq $M = P_1(x) - P_2(x)\sqrt{x}$ götürmək olar.

S ifadəsinin bir neçə kvadrat kökdən asılı olduğu ümumi halə baxaq: $S = P(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \dots, \sqrt{z})$, burada $P(x, y, \dots, z)$ baxılan $x, y, \dots, z$ arqumentlərindən asılı çoxhədli. Qoşma vuruğun tapılmasını, izah edilən priyomu ardıcıl tətbiq etməklə yerinə yetirmək olar. $P(x, y, \dots, z)$ -ə x -dən asılı çoxhədli kimi baxıb, buna uyğun olaraq S -i $S = P_1 + P_2\sqrt{x}$ şəkildə göstərmək olar, burada P_1, P_2 çoxhədliləri X -dən və başqa radikallardan asılıdır. $M_x = P_1 - P_2\sqrt{x}$ götürüb $\sqrt{x}$ radikalı daxil olmayan və başqa radikalı çoxhədli olan $SM_x = P_1^2 - P_2^2X$ ifadəsini alırıq. Alınmış ifadə üçün izah edilənə əsasən elə M_y vuruğu tapmaq olar ki, $SM_xM_y - \sqrt{x} \text{ və } \sqrt{y}$ radikalları daxil olmaz və başqa radikaldan asılı çoxhədli alınar. Bu mühakiməni ardıcıl olaraq başqa radikallara tətbiq edib nəticədə radikal daxil olmayan $SM_xM_y \dots M_z$ ifadəsini alırıq. 5) Radikal daxil olan kəsir ifadələrin çevrilməsi məktəbdə öyrənilir. $S = \frac{S_1}{S_2}$ ifadəsində S_1, S_2 ifadələrindən heç olmazsa birinə kök daxildirsə ona kök daxil olan kəsir ifadə deyilir. Qoşma vuruğu bilməklə S ifadəsinin sürətini və məxrəcini kökdən azad etmək olar. M_2 məxrəcin qoşma vuruğudursa onda $S = \frac{S_1M_2}{S_2M_2}$ bərabərliyi doğrudur. $M_2 \neq 0$ Bu bərabərliyin sağ tərəfi məxrəcə kök daxil olmayan ifadədir. Anoloji olaraq

M_1 sürətin qoşma vuruğudursa $S = \frac{S_1 M_1}{S_2 M_1}$ sürətə radikal daxil olmayan

ifadədir.

Müvafiq çalışmalar həlli ilə deyilənləri möhkəmləndirməklə baxılan əməliyyatlarla əlaqədar ümumiləşdirmələri daha aydın başa düşmək olar.

1.10. Tənliklər və bərabərsizliklər xəttinin əsas anlayışları.

Koordinatlar metodunun kəşfi və onun ardınca analitik həndəsənin inkişafı cəbrin təkcə ədədi sistemlərlə əlaqədar məsələlərə deyil, habelə müxtəlif həndəsi fiqurların öyrənilməsinə tətbiq etmək üçün imkan yaratdı. Tənlik və bərabərsizliklər mətnli məsələlərin həlli vasitəsi, cəbrin öyrənmə obyektı olan düsturlar, onun həllindən ibarət ədədin və ya müstəvinin nöqtələri koordinatlarını müəyyən etmək üçün münasibətdir. Deməli, tənlik (bərabərsizlik) ümumi riyazi anlayış olaraq çox-cəhətlidir. Məktəbdə tənlik və bərabərsizlik anlayışlarının formalaşmasına, onların həllinin ümumi və xüsusi metodlarına, funksiya və digər mövzularla qarşılıqlı əlaqəsinə daima diqqət etmək lazımdır. Tənlik və bərabərsizlik anlayışlarının formalaşdırılması onların müxtəlif sinifləri həllinin ümumi və xüsusi metodlarının, tətbiqi – nəzəri istiqamətlərinin və digər mövzularla (ədədi sistemlər, funksiyalar və s.) qarşılıqlı əlaqəsinin, ümumiləşdirilmiş anlayış və metodlarının öyrənilməsi, məchul, bərabərlik, məntiqi alınma, eyni güclülüyə əsaslanma prosesində baş verir. Bütün ədədi sistemlər hər hansı tənlik və bərabərsizliklərin, onların sisteminin həlli ilə əlaqədar meydana gəlir. Tərsinə hər bir yeni daxil olan ədədi sistem müxtəlif tənlik və bərabərsizliklərin tərtibi və həlli imkanlarını genişləndirməklə yaranır. Tənliklər və bərabərsizliklər xətti habelə funksiyalar və alqoritmik xətilə də qarşılıqlı əlaqədardır. Tənlik və bərabərsizliklərin qrafik həlli analitik həndəsə metodlarının mənasını açmağa imkan verir, habelə şagirdlərin fəza təsəvvürlərinin inkişafında rolu az deyildir. Riyaziyyatın müxtəlif sahələrində tənlik və bərabərsizliklərin tətbiqi vahid riyaziyyat haqqında təsəvvür yaranmasına kömək edir.

Tənlik özü ən ümumi riyazi anlayış olmaqla onun ciddi və cəbri öyrənməyə başlayan şagirdlər üçün müvafiq tərifin vermək çətinidir. Əvvəlcə tənliyin məntiqi – riyazi tərifinə diqqət edək: M çoxluğunda cəbri əməllərin məcmusu qeyd edilmişdirsə x isə M -də dəyişəndirsə

onda bu çoxluqda $a(x) = b(x)$ şəklində predikata x -ə nəzərən tənlik deyilir. Burada, $a(x)$ və $b(x)$ x -dən asılı termlərdir.

Məktəbdə “term” və “predikat” istilahları “ifadə” və “dəyişənli təklif” ilə əvəz olunmaqla göstərilən formal tərif: “Dəyişənli iki ifadənin bərabərliyindən ibarət həmin dəyişənli təklifə tənlik deyilir” ilə əvəz edilir. Lakin bilmək lazımdır ki, təkcə term deyil tənlik özü də ifadədir.

Baxılan tərifdə iki komponenti ayırmaq olar: 1) tənlik – bu predikatın xüsusi növüdür; 2) məhz hansı növüdür: bu iki termi birləşdirən bərabərlikdir, habelə termində xüsusi növləri vardır.

Birinci – məna komponenti tənliyin kökü anlayışını izah etməkdə və onun bu və ya digər çevrilməsinin düzgünlüyünün əsaslandırılmasında istifadə olunur.

İkincisi, tənliyi təsvir edən yazılışın formal xüsusiyyətinə aid olub işarə komponenti adlanır. Bu tənliyin yazılışında müxtəlif çevirmələr aparıldıqda lazım olur. Lakin məktəbdə “dəyişənli təklif”, “doğru” və “yalan” istilahları olmadan göstərilən tərfi vermək mümkün deyil. Bu halda məna komponenti onunla sıx əlaqədar olan tənliyin kökü anlayışının tərəfinə keçir.

İşarə komponentinin əlaməti saxlanılmaqla “tənliyin kökü” istilahında isə məna komponenti nəzərdə tutulmaqla iki istilahdan ibarət sistem alınır. Belə tərif verilir: “Dəyişənli bərabərliyə tənlik deyilir”. Dəyişənin dəyişənli bərabərliyi doğru ədədi bərabərliyə çevirən qiymətinə tənliyin kökü deyilir. Bəzən tənlik və onun kökü anlayışı mətinli məsələ materialı əsasında daxil edilir: “Həriflə işarə edilmiş məchul ədəd daxil olan bərabərliyə tənlik deyilir. Məchulun bu tənliyi doğru bərabərliyə çevirən qiymətinə tənliyin kökü deyilir.” Bu üsul isə tənlik anlayışının təcrübi adlanan komponentinə uyğundur.

Tənlik anlayışının göstərilən komponentləri ilə (məna, işarə, təcrübi) yanaşı onun iki funksiyanın bərabərliyi kimi şərh olunan komponenti də maraqlıdır. Bu tənliklərin qrafik metoddla həllini öyrənərkən meydana çıxır. Tənliyin təyin oblastını köklər çoxluğu ilə müqayisə edərkən onun tərifinə daha bir yanaşma alınır. Adətən tənliyin kökləri çoxluğu onun təyin oblastının məxsusi alt çoxluğudur. Digər tərəfdən tənlikləri həll edərkən eyniliklərə əsaslanan çevirmələr aparmaq lazım gəlir. Tənlik və eyniliyin müqayisəsi tənliyin tərifinin əsasında qoyulur:

“həriflərin bütün mümkün qiymətlərində doğru ədədi bərabərliyə çevrilməsi məcbur olmayan hərifi bərabərliyə tənlik deyilir.”

Tənlik anlayışının formalaşmasında “tənliyi həll etmək” istilahı da mühüm yer tutur.

Göründüyü kimi tənliyin müxtəlif tərifləri bir-birindən yalnız onda “çoxluq” istilahının olub-olmaması ilə fərqlənir. Tərifin mətninə daxil olan tənlik komponenti ilə yanaşı, mümkün qədər baxılan xəttin genişlənməsi ölçüsündə onun bütün başqa komponentləri də verilməlidir. Tənliyin tərifində “dəyişən” və ya “məchul” istilahlarının birindən istifadə edilir. Bunların fərqi ondan ibarətdir ki, dəyişən müxtəlif qiymətlər alır, məchul isə konkret ədədin hərfi işarəsidir. Odur ki, mətinli məsələyə aid tənlik qurarkən “məchul” istilahından istifadə etmək məqsədəuyğundur. Bu həm də “dəyişənə” nisbətən tənlik və bərabərsizliklər xəttinin təcrübi istiqamətinə daha yaxındır.

Tənlik və bərabərsizliklə əladədar eynigüclülük və məntiqi alınmadan istifadəyə görə bu xəttin materialının öyrənilməsində üç əsas mərhələni göstərmək olar.

Birinci mərhələ ümumiyyətlə, məktəb riyaziyyatının və xüsusi halda cəbrin başlanğıcını əhatə edir. Burada şagirdlər ən sadə tənliklər sinifinin müxtəlif üsullarla həlli ilə tanış olurlar. Bu zaman aparılan çevirmələr konkret misallar üzərində induktiv əsaslandırılır.

İkinci mərhələdə eynigüclülük anlayışının ayrılması və onun nəzəri məzmununun bunun əsasında daxil edilən eyni çevirmə qaydası ilə müqayisəsi baş verir.

Üçüncü mərhələdə eynigüclülüyn ümumi anlayışları əsasında nəzəri hissənin və ayrı-ayrı tənliklər sinifinin budaqlanması olur.

Tənlik, bərabərsizlik və onların sistemlərinin çevrilməsinin təsnifatı məsələsi də tədqiqatımız baxımından maraqlıdır. Bu çevirmənin üç əsas növü vardır.

Tənlik və ya bərabərsizliyin: 1) tərəflərindən birinin, 2) hər iki tərəfinin, 3) məntiqi quruluşunun çevrilməsi.

Hər bir tapşırıqda elementar predikatları ayrı-ayrı tənlikləri və ya bərabərsizlikləri ayırmaq olar. Tapşırığın məntiqi quruluşu dedikdə bu elementar predikatların məntiqi konyuksiya və ya dizyunksiya bağlayıcıları vasitəsilə əlaqə üsullarını başa düşmək lazımdır. Çevirmələrdə istifadə olunan vasitələrdən asılı olaraq bu növ çevirmələrin də iki növü vardır: hesabi və məntiqi əməllərin köməyi ilə aparılan çevirmələr.

Tənlik və bərabərsizliklər xəttinin materiallarının öyrənilməsi nəticəsində şagirdlər təkcə məsələlər həllinə alqoritmik yazılışların tətbiqini mənimsəmək deyil, lazım gəldikdə həlli əsaslandırmaq, məntiqi vasitələrdən (o cümlədən ümumiləşdirmədən) istifadə etməyi öyrənməlidirlər. Cəbrin başlanğıc mərhələsinin və əvvəlki siniflərin riyaziyyat kursunun öyrənilməsində bu əsaslandırma empirik, induktiv xarakterdə olur. Tənliklər, bərabərsizliklər və onların sistemlərinin müxtəlif siniflərinin həllinə dair təcrübə topladıqca çevirmələrin ümumi xassələri böyük rol oynayır. Cəbr üzrə hazırkı tədris vəsaitlərinin əsaslandırmanın şərh edilmə üsullarına görə fərqləri vardır. Əksər hallarda tənliyin və bərabərsizliyin həllini əsaslandırmaq məsələsi ikinci, möhkəm çevirmə vərdişlərinin formalaşdırması isə birinci planda durur. Buradan belə nəticə çıxarmaq olar: həll prosesinin empirik əsaslandırılması mərhələsində tapılmış köklərin yoxlanılması həllinin doğruluğunun əsaslandırılması zəruri hissəsidir.

Eyniüclülük anlayışından aşkar istifadə etmədən tənlik və bərabərsizliyin həlli prosesini deduktiv əsaslandırmaq olar. Tənlik və bərabərsizlik xətti materialların bu və ya digər üsulla öyrənilməsinə deduktiv əsaslandırmanın müxtəlif priyomlarını cəlb etmək və bu zaman müntəzəm olaraq ədədi sistemlərin xassələrinə və tənliklər nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarına əsaslanmaq lazımdır. Tənlik və bərabərliklər xətti materialların öyrənilməsinin ümumi ardıcılığına (öyrənmənin ümumi mərhələləri, tənlik və bərabərsizliklərin əsas növlərinin, siniflərinin müəyyənləşdirilməsi, bu xəttin sintezi, təsnifatı) yekun məşğələlərində şagirdlərin diqqətini bir daha cəlb etmək, onların riyazi qabiliyyətini inkişaf etdirmək üçün faydalıdır.

Tənliklər (bərabərsizliklər) onların sağ və sol tərəflərinə daxil olan funksiyaların növlərinə görə təsnif edilir. Tənlik və bərabərsizliklərin öyrənilməsi ilə əlaqədar iki əks istiqamətə yönəlmiş prosesləri nəzərə almaq lazımdır. Birinci proses – tənliklər (bərabərsizliklər) siniflərinin və onların həlli priyomlarının, həll zamanı müxtəlif çevirmələr sayının tədricən artması. Materialın həcmnin artması ilə sanki şaxələnmə baş verir, onun yeni bölmələrinin mənimsənilməsi artıq öyrənilmişlərin olması ilə çətinləşir. İkinci proses – tənliklər (bərabərsizliklər) sinifləri arasında cürbəcür əlaqələrin müəyyənləşdirilməsi, daha ümumi siniflərin və çevirmələrin aşkar edilməsi, şərhlərin qısaldılması və həllərin əsaslandırılması.

Tənlik və bərabərsizliklər sistemləri uyğun olaraq tənlik və bərabərsizliklərin təbii ümumiləşdirilməsidir.

1.11. Dərəcəsi ikidən yüksək olmayan parametrli tənlik və bərabərsizliklərin ümumi həlli. Tənliklərin və bərabərsizliklərin bu növündən məktəbdə sinifdən kənar məşğələlərdə istifadə etmək yaxşı olar. Onların ümumi növü $F(a, x) = f(a)x^2 + g(a)x + h(a)$ və $F(a, b, x) = f(a, b)x^2 + g(a, b)x + h(a, b)$ çoxhədliləri ilə müəyyən edilir. Göründüyü kimi birinci çoxhədli a parametrli, ikinci isə a, b parametrlidir. Bunlarla əlaqədar olaraq, təcrübədə ən çox aşağıdakı məsələlərə təsadüf olunur.

-parametrli tənliklərin (bərabərsizliklərin) həlli,

-parametrlərin, tənliyin (bərabərsizliyin) ümumi həllinin hər hansı xassələri ödəyən, qiymətlərin tapılması.

Dərəcəsi ikidən yüksək olmayan parametrli tənliklər (VIII). x dəyişənli a parametrli dərəcəsi ikidən yüksək olmayan $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0$ tənliyinin xüsusi hallarda həlləri aşağıdakılardan biri ola bilər.

$$1) \frac{\{a/f(a) = g(a) = h(a) = 0\}}{\infty}, \quad 2) \frac{\{a/f(a) = g(a) = 0, h(a) \neq 0\}}{\emptyset},$$

$$3) \frac{\{a/f(a) = 0, g(a) \neq 0\}}{\left\{x/x = -\frac{h(a)}{g(a)}\right\}}; \quad 4) \frac{\{a/f(a) \neq 0, D = g^2(a) - 4f(a)h(a) = 0\}}{\left\{x/x = -\frac{g(a)}{2f(a)}\right\}};$$

$$5) \frac{\{a/f(a) \neq 0, D < 0\}}{\text{hell yoxdur}}; \quad 6) \frac{\{a/f(a) \neq 0, D < 0\}}{\left\{x/x = \frac{-g(a) \pm \sqrt{D}}{2f(a)}\right\}}.$$

Əvvəlcə, buradakı məntiqi yazılış formasının mahiyyətini şagirdlərə izah etmək lazımdır. Parametrlərin nəzarət qiymətləri $f(a)=0$ və $D=0$ tənliklərindən tapılır. Parametrin mümkün qiymətləri aralığında alınmış nəzarət qiymətlərində D diskriminantının müəyyən işarəsinə xüsusi tənliklərin son iki həllindən - 5), 6) biri uyğun olur. Beləliklə, dərəcəsi ikidən yüksək olmayan parametrli tənliyin həlli aşağıdakı mərhələlərlə aparılır.

1) Ədəd oxu üzərində parametrin, uyğun xüsusi tənliyin təyin olunmadığı, bütün nəzarət qiymətləri qeyd edilir; 2) parametrin mümkün qiymətləri oblastında verilmiş tənlik eynigüclü çevirmələr vasitəsilə $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0$ şəklinə gətirilir; 3) parametrlərin, $f(a)=0$ tənliyindən nəzarət qiymətləri çoxluğu tapılır; $f(a)=0$ tənliyindən nəzarət qiymətləri çoxluğu tapılır; $f(a)=0$ tənliyinin sonlu sayda həlləri varsa, ondan parametrin tapılmış hər bir qiyməti üçün uyğun xüsusi tənlik ayrılıqda həll edilir. Birinci üç növ üzrə xüsusi tənliklər təsnifata ayrılır. $f(a)=0$ tənliyinin sonsuz həlləri çoxluğunda $g(h)=0$ tənliyi həll edilib xüsusi tənliklərin ∞ və $\emptyset$ növləri ayrılır. $\{a/f(a)=0, g(a) \neq 0\}$ çoxluğuna həlli 3) olan tənlik növü uyğundur; 4) parametrik $D = g^2(a) - 4f(a)h(a)$ -in sıfır olduğu nəzarət qiyməti ayrılır. uyğun

xüsusi tənliyin $x = -\frac{g(a)}{2f(a)}$ iki qat kökü tapılır; 5) parametrin tapılan

nəzarət qiymətləri onun mümkün qiymətləri oblastını aralıqlara ayırır. Hər bir aralıqda D diskriminantının işarəsi müəyyən edilir. $\{a/f(a) \neq 0, D < 0\}$ çoxluğuna həlli olmayan xüsusi tənlik növü uyğundur, parametrin $\{a/f(a) \neq 0, D < 0\}$ qiymətləri üçün xüsusi tənliyin iki müxtəlif həqiqi kökləri vardır. Bu ümumi nəzəri məlumatı verdikdən sonra müvafiq çalışmalar həll etdirmək lazımdır. Deyilənləri

$x^2 - x + 1 = \frac{3x - 6x^2 - 1 + a}{a}$ tənliyinin həlli üzərində izah edək. Bu

tənlikdə $a=0$ nəzarət qiymətidir, bunun üçün uyğun xüsusi tənlik təyin olunmamışdır. $\{a/a \neq 0\}$ çoxluğunda verilmiş tənlik

$(a+6)x^2 - (a+3)x + 1 = 0$ ilə birgüclüdür. $a=-6$ olduqda $f(a)=a+6$

sıfıra çevrilir, uyğun $3x+1=0$ xüsusi tənliyin $x = -\frac{1}{3}$ yeganə həlli

vardır. $\{a/a \neq -6; 0\}$ çoxluğunda xüsusi tənlik diskrimantı

$D = a^2 + 2a - 15$ olan kvadrat tənlikdir. $a=-5$ və $a=3$ olduqda $D=0$.

Fərz edək ki, $a=-5$, onda alınan $x^2 + 2x + 1 = 0$ xüsusi tənliyin $x=-1$ ikiqat kökü vardır. $a=3$ üçün uyğun $9x^2 + 6x + 1 = 0$ xüsusi tənliyi

$x = \frac{1}{3}$ ikiqat kökü olur. Ədəd oxu üzərində parametrin tapılan qiymətlərini və alınmış aralıqların hər birində diskriminantın işarəsini təyin edək: $a \in (-5; 0) \cup (0; 3)$ isə onda uyğun xüsusi tənliyin həlli yoxdur. Parametrin $\{a \mid a \in (-\infty; -6) \cup (-6; 5) \cup (3; \infty)\}$ -dən olan qiymətləri üçün xüsusi tənliyin iki müxtəlif $x = \frac{a+3 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 15}}{2(a+6)}$ ümumi həlli vardır. Cavabı şagirdlərin ayrıca qeyd etmələri lazımdır:

$$\frac{\{a \mid a = 0\}}{\text{teyin olunmayıb}}, \frac{\{a \mid a = -6\}}{\left\{x \mid x = -\frac{1}{3}\right\}}, \frac{\{a \mid a = -5\}}{\{x \mid x = -1\}}, \frac{\{a \mid a = 3\}}{\left\{x \mid x = \frac{1}{3}\right\}},$$

$$\frac{\{a \mid a \in (5; 0) \cup (0; 3)\}}{\text{hell yoxdur}}, \frac{\{a \mid a \in (-\infty; -6) \cup (-6; -5) \cup (3; +\infty)\}}{\left\{x \mid x = \frac{a+3 \pm \sqrt{a^2 + 2a - 15}}{2(a+6)}\right\}},$$

İndi dərəcəsi ikidən yüksək olmayan parametrlı bərabərsizliyə baxaq. Parametri a və dəyişəni x olan $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) < 0$ bərabərsizliyində parametrin mümkün qiymətlərini tapmağa aid bütün xüsusi bərabərsizliklər aşağıdakı növlərə ayrılır:

$$1) \frac{\{a \mid f(a) = g(a) = 0, h(a) < 0\}}{\infty}; \quad 2) \frac{\{a \mid f(a) = g(a) = 0, h(a) \geq 0\}}{\emptyset};$$

$$3) \frac{\{a \mid f(a) = 0, g(a) > 0\}}{\left\{x \mid x \in \left(-\infty; -\frac{h(a)}{g(a)}\right)\right\}};$$

$$4) \frac{\{a \mid f(a) = 0, g(a) < 0\}}{\left\{x \mid x \in \left(-\frac{h(a)}{g(a)}; +\infty\right)\right\}};$$

$$5) \frac{\{a \mid f(a) > 0, D \leq 0\}}{\text{helli yoxdur}};$$

$$6) \frac{a \mid f(a) < 0, D < 0}{\{x \mid x \in R\}};$$

$$7) \frac{\{a | f(a) > 0, D > 0\}}{\left\{x \left| x \in \left(\frac{-g(a) - \sqrt{D}}{2f(a)}; \frac{-g(a) + \sqrt{D}}{2f(a)} \right) \right. \right\}};$$

$$8) \frac{\{a | f(a) < 0, D \geq 0\}}{\left\{x \left| x \in \left(-\infty; \frac{-g(a) + \sqrt{D}}{2f(a)} \right) \cup \frac{-g(a) - \sqrt{D}}{2f(a)}; +\infty \right. \right\}}$$

Xüsusi bərabərsizliklərin aparılan təsnifatı dərəcəsi ikidən yüksək olmayan parametrlı bərabərsizliyin həllinin ümumi sxemini təyin edir.

1) Ədəd düz xətti üzərində parametrlı, uyğun xüsusi bərabərsizliyin təyin olmadığı, bütün nəzarət qiymətləri qeyd edilir. Hər birində parametrlı, uyğun xüsusi bərabərsizliyin həlli ayrılıqda aparılan, mümkün qiymətləri aralığı ayrılır.

2) Parametrlı ayrılış qiymətləri aralığında birgüclü çevirmələr vasitəsilə verilmiş bərabərsizlik $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) < 0$ şəklinə gətirilir. $\{a | f(a) = 0\}$ çoxluğu parametrlı ayrılış mümkün qiymətlərinin yeni ayrılışını təyin edir. Bərabərsizliyin sonrakı həlli $\{a | f(a) = 0\}$ qiymətləri həm də parametrlı mümkün qiymətlərinin yeni ayrılışı üçün ayrılıqda yerinə yetirilir. 3) $\{a | f(a) = 0\}$ çoxluğu $g(a)$ və $h(a)$ -nın qiymətlərindən asılı olaraq 1)-4) xüsusi bərabərsizliklər növü ilə dörd alt çoxluğa ayrılır.

4) Parametrlı hər bir ayrılan nəzarət qiymətləri aralığında $f(a)$ əmsalı işarəsini sabit saxlayır. Parametrlı $D = g^2(a) - 4f(a)h(a)$ -nin sıfıra bərabər olan qiymətləri parametrlı mümkün qiymətlərində yeni ayrılmanı təyin edir.

5) Parametrlı mümkün qiymətlərində alınmış ayırmada $f(a)$ və D -nin işarəsi müəyyən edilir. Mənfi olmayan diskriminant üçün

$$f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0 \text{ tənliyinin } f_1(a) = \frac{-g(a) - \sqrt{D}}{2f(a)} \quad \text{və}$$

$$f_2(a) = \frac{-g(a) + \sqrt{D}}{2f(a)} \quad \text{ümumi həlləri tapılır. } f(a) \text{ -nin işarəsindən}$$

asılı olan $A_{21}(a) = f_2(a) - f_1(a) = \frac{\sqrt{D}}{f(a)}$ fərqlini nəzərə almaqla

onların aralıqda qarşılıqlı yerləşmə vəziyyətləri təyin edilir. Parametrin $\{a/f(a) > 0; D \leq 0\}$, $\{a/f(a) > 0, D > 0\}$, $\{a/f(a) < 0, D < 0\}$, $\{a/f(a) < 0, D \geq 0\}$ çoxluqlarından hər birindəki qiymətləri məxsusi olmayan bərabərsizliklərin uyğun ümumi həllə birlikdə 5)-8)

tiplərindən birini müəyyən edir. Deyilənləri $\frac{2x^2 + 1}{a + 2} > \frac{2x - x^2}{2}$

bərabərsizliyin həlli üzərində göstərək. $a = -2$ nəzarət qiymətidir, bunun üçün uyğun xüsusi bərabərsizlik təyin olunmamışdır. Parametrin $\{a/a \in (-\infty; -2)\}$ qiymətləri üçün xüsusi bərabərsizliklər məcmusuna baxaq. Onda $a + 2 < 0$ və verilmiş bərabərsizlik

$2(2x^2 + 1) < (a + 2)(2x - 2)$ və ya $(a + 6)x^2 - 2(a + 2)x + 2 < 0$ (1) ilə birgüclüdür. (1) bərabərsizliyində parametri $a + 6 = 0$ və

$D = 4(a^2 + 2a - 8) = 0$ münasibətlərini ödəyən qiymətləri nəzarət qiymətləridir. Bunlardan $a = -6 \in (-\infty; -2)$ və $a = -4 \in (-\infty; -2)$ parametrin bütün nəzarət qiymətləri $(-\infty; -2)$ çoxluğundadır. Ədəd oxu üzərində parametrin tapılmış nəzarət qiymətlərini qeyd edək $a = -6$

üçün uyğun xüsusi $8x + 2 < 0$ bərabərsizliyi $(-\infty; -\frac{1}{4})$ həllər

çoxluğunda xəttidir. $a = -4$ isə, onda uyğun $2x^2 + 4x + 2 < 0$ xüsusi bərabərsizliyinin həlli yoxdur. Fərz edək ki, $a \in (-8; -6)$, onda $a + 6 < 0$, $D = 4(a + 4)(a - 2) > 0$. (1) bərabərsizliyi ümumi həlləri

$$f_1(a) = \frac{a + 2 - \sqrt{(a + 4)(a - 2)}}{a + 6}, \quad f_2(a) = \frac{a + 2 + \sqrt{(a + 4)(a - 2)}}{a + 6}$$

olan $(a + 6)x^2 - 2(a + 2)x + 2 = 0$ tənliyinə uyğundur. $a + 6 < 0$

olduğundan $f_2(a) - f_1(a) = \frac{2\sqrt{(a + 4)(a - 2)}}{a + 6} < 0$ yəni $f_2(a) < f_1(a)$.

Buradan $a \in (-\infty; -6)$ üçün (1) bərabərsizliyinin ümumi həlli $(-\infty; f_2(a)) \cup (f_2(a); +\infty)$ aralığıdır. $\{a/a \in (-6; -4)\}$ çoxluğunda

uyğun xüsusi bərabərsizlik üçün $a + 6 > 0, D > 0$, həm də $f_2(a) - f_1(a) \geq 0$ və $f_2(a) > f_1(a)$. Onda (1) bərabərsizliyinin həlli parametrin verilmiş aralıqdan götürülmüş qiyməti üçün $(f_1(a), f_2(a))$ şəkilindədir. Fərz edək ki, $a \in (-4; -2)$, onda $a + 6 > 0$, $D < 0$ və uyğun xüsusi bərabərsizliyin həlli yoxdur. Parametrin $\{a/a \in (-2; +\infty)\}$ qiymətləri üçün xüsusi bərabərsizliklərin məcmusuna baxaq. Verilmiş bərabərsizlik $(a + 6)x^2 - 2(a + 2)x + 2 > 0$ (2) ilə birgüclüdür. Bununla $a + 6 > 0$, $D = 4(a + 4)(a - 2)$ diskriminantı, parametrin nəzarət qiyməti olan $a = 2 \in (-2; +\infty)$ nöqtəsində sıfır bərabərdir. $a = 2$ isə, onda uyğun $8x^2 - 8x + 2 > 0$ xüsusi bərabərsizliyi bütün $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$ üçün doğrudur. $a = 2$ qiyməti $(-2; +\infty)$ aralığını iki $(-2; 2)$ və $(2; +\infty)$ aralıqlarına ayırır. Əmsalın $a \in (-2; 2)$ qiymətləri üçün $a + 6 > 0$, $D < 0$ və uyğun xüsusi bərabərsizliyin həllər çoxluğu R ilə üst-üstə düşür. Fərz edək ki, $a \in (2; +\infty)$ onda $a + 6 > 0$, $D > 0$ həm də $f_2(a) > f_1(a)$. Verilmiş aralıqda bərabərsizliyin ümumi həlli $(-\infty; f_1(a)) \cup (f_2(a); +\infty)$ dir. Beləliklə, cavab belə olur:

$$\begin{aligned} & \frac{\{a/a = -2\}}{\text{teyin olunmayıb}}; \left\{ \frac{\{a/a = -6\}}{\{x/x \in (-\infty; -\frac{1}{4})\}} \right\}; \frac{\{a/a \in (-4; -2)\}}{\text{həlli yoxdur}}; \\ & \frac{\{a/a \in (-2; 2)\}}{\{x/x \in R\}}; \frac{\{a/a \in (-\infty; -6) \cup \{2\}\}}{\{x/x \in (-\infty; f_1(a)) \cup (f_2(a); +\infty)\}}; \\ & \frac{\{a/a \in (-6; -4)\}}{\{x/x \in (f_1(a); f_2(a))\}}; \frac{\{a/a \in (2; +\infty)\}}{\{x/x \in (-\infty; f_1(a)) \cup (f_2(a); +\infty)\}}; \\ & \text{burada } f_1(a) = \frac{a + 2 - \sqrt{(a + 4)(a - 2)}}{a + 6}, \quad f_2(a) = \frac{a + 2 + \sqrt{(a + 4)(a - 2)}}{a + 6} \end{aligned}$$

a və b parametrləri və x dəyişənli dərəcəsi ikidən yüksək olmayan $f(a; b)x^2 + g(a; b)x + h(a; b) < 0$ bərabərsizliyi xüsusi bərabərsizliklərə bir parametrlı bərabərsizliklərdəki 1)-8) növləri kimi təsnifata

ayrılır. Parametrin nəzarət qiymətləri analogi $f(a;b) = 0$ və $D = 0$ tənlikləri ilə müəyyən edilir. Onda dərəcəsi ikidən yüksək olmayan iki parametrlı bərabərsizliklərin həlli mərhələləri sxemi dəyişmir. Parametrlı tənlik və bərabərsizliklər ümumiyyətlə parametrlı məsələlər həlli şagirdlərin riyazi, o cümlədən qabiliyyətinin ümumiləşdirmə inkişafında güclü vasitəsidir. Bu da ayrıca tədqiqat tələb edir.

1.12. Bərabərsizliklərin isbatı (VIII-IX). Ədədi bərabərsizliklərin xassələri və bunlara aid sadə çalışmalar yerinə yetirdikdən sonra bərabərsizliklərin isbatı ilə əlaqədar təlimin sonrakı mərhələlərində maraqlı ümumiləşdirmələr aparmaq olar.

1) VIII sinifdə şagirdlər analitik-sintetik mühakimə ilə isbat edirlər ki: ixtiyari iki mənfi olmayan a və b ədədlərinin ədədi ortası, onların

həndəsi ortasından kiçik deyil, yəni $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (1), bərabərlik yalnız

və yalnız $a=b$ olduqda ödənilir. (1) bərabərsizliyinin mənfi olmayan n sayda ədədlər üçün ümumiləşdirməsi belədir: n sayda müsbət ədədlərin ədədi ortası həmin ədədlərin həndəsi ortasından kiçik deyil, yəni

$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ (2). Bərabərlik yalnız və yalnız

$a_1 = a_2 = \dots = a_n$ olduqda ödənilir. Bu bərabərsizliyi müxtəlif üsullarla isbat etmək olar. Aşağıdakı iki üsulu məktəb üçün münasib hesab edirik.

a) əvvəlcə riyazi induksiya yolu ilə isbat edilir ki: n sayda müsbət $a_1, a_2, \dots, a_n \geq n$ ədədlərin hasili 1-ə bərabərdirsə, onların cəmi n -dən kiçik deyil, yəni $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ (3). Bərabərlik yalnız və yalnız

$a_1 = a_2 = \dots = a_n$ olduqda mümkündür. İndi $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = k$ qəbul

edək. Onda $\frac{a_1}{k}, \frac{a_2}{k}, \dots, \frac{a_n}{k} \geq n$ müsbət ədədlərin hasili 1-ə bərabər

olar. (3) hökmünə görə $\frac{a_1}{k} + \frac{a_2}{k} + \dots + \frac{a_n}{k} \geq n$, bərabərlik yalnız və

yalnız $\frac{a_1}{k} = \frac{a_2}{k} = \dots = \frac{a_n}{k}$ və ya $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ olduqda

mümkündür. Buradan tələb olunanı alırıq.

b) $n=1,2$ olduqda teoremin doğruluğu tamamı ilə aydındır. İsbat edək ki, (2) bərabərsizliyi n üçün doğru isə, onda $2n$ üçün də ödənilir. Doğrudan da

$$\frac{\sum_{i=1}^{2n} a_i}{2n} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \dots + \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{n} \geq \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \dots \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2}} \quad (4)$$

(2) bərabərsizliyinin “ n ” üçün doğru olmasını fərz etdiyimizdən (4)-ün sağ tərəfində kökün altındakı kəsrləri uyğun olaraq $\sqrt{a_1 a_2}$, $\sqrt{a_3 a_4}$, ..., $\sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}$ ilə əvəz etsək həmin bərabərsizlik daha da

güclənər, yəni
$$\frac{\sum_{i=1}^{2n} a_i}{2n} \geq \sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4} \dots \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{2n}}$$

alırıq. Bununla da teorem n -in cüt qiymətləri üçün isbat edildi. Deməli (2) bərabərsizliyi $n=2$ üçün doğru isə, $n=4,8,16,\dots$ qiymətləri, yəni $n=2^k$ ($k > 1$ natural ədəddir) üçün də ödənilir. n ədədi 2-in qüvvəti deyildirsə, həmişə elə m ədədi tapmaq olar ki, $n + m = 2^k$ alınar. Onda

$$\frac{\sum_{i=1}^{n+m} a_i}{n+m} \geq \sqrt[n+m]{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots a_{n+m}} \quad (5).$$

Fərz edək ki, $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_{n+m} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$. Onda (5)

bərabərsizliyini:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot m}{n+m} \geq \sqrt[n+m]{a_1 a_2 \dots a_n \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^m}$$

və ya soldakı kəsrin surətini ortaq məxrəcə gətirib qruplaşdırsaq

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n+m]{a_1 a_2 \dots a_n \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^m} \quad (6) \text{ kimi}$$

yazırıq. Sonuncu bərabərsizlikdə əvvəl hər tərəfi “ $n+m$ ” dərəcədən qüvvətə yüksəldib, sonra alınmış bərabərsizliyin hər tərəfini

$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \right)^m$ -ə bölsək tələb olunanı (2) alırıq. İndi isbat edək ki,

bərabərlik yalnız $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ olduqda mümkündür. Fərz edək ki, ədədlərin yalnız ikisi bərabər deyil, məsələn $a_1 \neq a_2$ olsun, onda (2)-yə əsasən

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 a_3 \dots a_n}$$

yaza bilərik. Bu bərabərsizlikdə $\frac{a_1 + a_2}{2}$ -ni $\sqrt{a_1 a_2}$ ilə əvəz etsək onun sağ tərəfi daha da kiçilər və bərabərlik olmaz. Beləliklə,

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} > \sqrt[n]{\left(\sqrt{a_1 a_2} \right)^2 a_3 a_4 \dots a_n} \quad \text{və ya} \quad \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \text{alırıq.}$$

n sayda müsbət ədədlərin ədədi ortası ilə həndəsi ortası arasındakı münasibətdən bir çox bərabərsizliklərin isbatında, habelə elementar üsulla ekstremumun tapılmasında, istifadə olunur. Ona görə də bu ümumiləşdirmə olduqda zəruridir.

2) İndi n sayda müsbət ədədin ədədi və həndəsi ortası haqqındakı teoremin özünün ümumiləşdirməsinə diqqət edək. Burada göstəririk ki, ədədi və həndəsi orta haqqında yuxarıda baxdığımız əsas teoremin ümumiləşdirilməsi kimi görünən bir çox nəticələr, əslində onun xüsusi

hallarıdır. İlk növbədə göstərək ki, $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$

bərabərsizliyində x_i -dəki ilk m ədəd hər hansı mənfi olmayan x ədədinə, qalan n-m ədəd isə mənfi olmayan y ədədinə bərabərdir, yəni: $x_1 = x_2 = \dots = x_m = x$, $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = y$. Bu halda $x_1, x_2, \dots, x_n$ ədədləri üçün ədədi və həndəsi orta haqqında teorem

$$\frac{mx + (n-m)y}{n} \geq (x^m y^{n-m})^{\frac{1}{n}} \text{ və ya } \frac{mx}{n} + (1 - \frac{m}{n})y \geq x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{n-m}{n}} \text{ şəkilə}$$

düşər. Burada n ixtiyari tam ədəd, m isə qiymətləri $1 \leq m \leq n-1$ arasında yerləşən tam ədəddir. Buradan alınır ki, $\frac{m}{n}$ ədədi $0 < r < 1$

intervalına daxil olan ixtiyari rəsional r kəsri ola bilər. İndi sonuncu bərabərsizliyi belə yazırıq: $rx + (1-r)y \geq x^r y^{1-r}$ (7). Bu bərabərsizlik ixtiyari mənfi olmayan x, y ədədləri və qiymətləri 0 ilə 1 arasında yerləşən ixtiyari r kəsri üçün ödənilir. Burada bərabərlik yalnız və yalnız $x=y$ olduqda mümkündür. r ədədini $\frac{1}{p}$ işarə edək; $0 < r < 1$

olduğundan $p > 1$ dir. Aşkardır ki, $1-r = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$. Fərz edək

ki, $\frac{p}{p-1} = q$, onda $\frac{1}{q} = 1-r$ və $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Bu əvəzləmələrlə (7)

bərabərsizliyi $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}}$ (8) şəkilə düşür. Kəsir üstlü qüvvəti

kənar etmək məqsədi ilə $x = a^p$, $y = b^q$ (9) götürək. Onda (9)

bərabərsizliyi $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$ (10) şəklinə düşər, burada a, b mənfi

olmayan ədədlər, p, q isə $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şərtini ödəyən rəsional ədədlərdir.

Burada bərabərlik yalnız və yalnız $a^p = b^q$ (11) olduqda mümkündür.

İrrəsional ədəd anlayışını x^r qüvvət funksiyasını, burada qüvvətin üstü r irrəsional ədəddir, məlum hesab etsək, onda bilavasitə və ya (17) bərabərsizliyində limitə keçmə ilə, göstərmək olar ki, bu bərabərsizlik r -in 0 ilə 1 arasında yerləşən ixtiyari qiymətlərində (rəsional və

irrəsional) doğrudur. Odur ki, (10) bərabərsizliyi də $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şərtini

ödəyən ixtiyari $p > 1$, $q > 1$ üçün ödənilir.

(2) bərabərsizliyini qısa işarə ilə belə də yazmaq olar:
 $\partial(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq H(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (2a)

İndi bu bərabərsizliyin ümumiləşməsinə baxaq. Klassik bərabərsizlikləri şagirdlər əsasən ona görə lazımı səviyyədə öyrənmə bilmirlər ki, hər bir bərabərsizliyin isbatında ağıla gəlməyən bir çevirmədən istifadə edilir.

Göstərilən ümumiləşdirmə nəticəsində əsas klassik bərabərsizliklərin isbatını asanlıqla vermək və yenisini tərtib etmək, əyani şəkildə gətirmək və çətinlik çəkmədən həll etmək mümkün olur. Onu da bilmək lazımdır ki, ədədi və həndəsi orta haqqında əsas teoremin ümumiləşməsi hesab edilən bir çox nəticələr əslində onun xüsusi hallarıdır.

İndi (2a) teoremini ümumiləşdirək. Mənfi olmayan həqiqi ədədlərlə doldurulmuş n sətirlə və k sütunlu düzbucaqlı cədvələ baxaq: birinci, ikinci, ... nəhayət sonuncu (n -ci) sətirlərdə uyğun olaraq $a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_k; \dots, c_1, c_2, \dots, c_k$ ədədləri yazılır (Cədvəl 1).

Hər sətirdə həndəsi ortanı hesablayıb onları uyğun olaraq $H_1, H_2, \dots, H_n$ ilə, hər sütundakı ədədlərin ədədi ortasını hesablayıb, onları da uyğun olaraq $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_k$ ilə işarə edək. Onda

Cədvəl 1

a_1	a_2	...	a_k	H_1
b_1	b_2	...	b_k	H_2
...	...	...	...	
c_1	c_2	...	c_k	H_n
∂_1	∂_2	...	∂_k	

$H(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_k) > \partial(H_1, H_2, \dots, H_n)$ (2b). Ümumiləşdirilmiş əsas teoremini alırıq. İsbatı a) $\partial_1 = 0$ isə, onda $a_1 = b_1 = \dots = c_1 = 0$ və sonra $H(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_k) = 0 = H_1 = H_2 = \dots = H_n$, bununla teorem isbat edilir. $\partial_2 = 0$ və ya $\partial_3 = 0$ və ya $\partial_k = 0$ olduqda da teorem analogi isbat olunur.

b) Fərz edək ki, $\partial_1 > 0, \partial_2 > 0, \dots, \partial_k > 0$ (2a) bərabərsizliyini

$\frac{a_1}{\partial_1}, \frac{a_2}{\partial_2}, \dots, \frac{a_k}{\partial_k}$ ədədlərinə tətbiq edək və alınmış bərabərsizliyin hər

tərəfini k ədədinə vuraq: $\frac{a_1}{\partial_1} + \frac{a_2}{\partial_2} + \dots + \frac{a_k}{\partial_k} \geq \frac{KH_1}{H(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_k)}$;

Analoji olaraq

$$\frac{b_1}{\partial_1} + \frac{b_2}{\partial_2} + \dots + \frac{b_k}{\partial_k} \geq \frac{KH_2}{H(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_k)}, \dots,$$

$$\frac{c_1}{\partial_1} + \frac{c_2}{\partial_2} + \dots + \frac{c_k}{\partial_k} \geq \frac{KH_n}{H(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_k)}$$

yazarıq. Alınan bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə toplayıb tələb edilən (2b) bərabərsizliyini alarıq. (2a) əsas bərabərsizliyindən bir çox bərabərsizliklərin isbatında istifadə olunur. Ədədi və həndəsi orta arasındakı münasibəti (2a) və onun ümumiləşməsini (2b) göstərdik. Fərz edək ki, hər hansı mənfi olmayan $a_1, a_2, \dots, a_n$ ədədləri verilir. Bu ədədlərin artma ardıcılığında nömrələndiyini, yəni $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ münasibətinin ödənildiyini qeyd etməklə ümumiyyətlə orta qiymət anlayışını vermək olar. Belə ki, bu ədədlər üçün $a_1 \leq a \leq \dots \leq a_n$ bərabərsizliyini ödəyən hər hansı a ədədinə $a_1, a_2, \dots, a_n$ ədədlərinin orta qiyməti deyilir. Ümumiyyətlə orta qiymətlər çoxdur. Riyaziyyatda ən çox dörd orta qiymət (ədədi ($-M_1$), həndəsi ($-M_2$), harmonik ($-M_3$), kvadratik ($-M_4$)) işlənir. Bunlarla əlaqədar iki hökmü şagirdlərə öyrətmək olar: 1) M_1, M_2, M_3, M_4 ədədləri $a_1, a_2, \dots, a_n$ ədədləri üçün orta qiymətlərdir və 2) bu orta qiymətlər arasında $M_3 \leq M_2 \leq M_1 < M_4$ münasibətləri ödənilir.

Hər iki faktı asanlıqla isbat etmək olar. Bununla da orta qiymətlərlə əlaqədar şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətlərini inkişaf etdirmiş olarıq. Orta qiymətlər nəzəriyyəsinin müşahidələrin nəticələrinin riyazi hesablanması ilə əlaqədar stoxastikada geniş tətbiqləri vardır.

1.13 Stoxastika. Məktəbdə stoxastika riyaziyyatın yaranma mərhələsinin xüsusiyyətlərini şagirdlərə anlatmaq üçün mühüm vasitə olub riyazi və ümumi təhsildə yenilikdir. Bu sahədə bir sıra tədqiqatlar

aparılmasına və qabaqcıl ölkələrdə ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın şagirdlərə öyrədilməsində müvəffəqiyyətlər qazanmalarına baxmayaraq bizim məktəblərdə həmin məsələnin yalnız XI sinifdə tədrisi nəzərdə tutulur.

Biz stoxastikanın məktəbdə tədris edilməsini şagirdlərin riyazi mədəniyyətinin, o cümlədən ümumiləşdirmə qabiliyyətinin inkişafında mühüm vasitə hesab edirik. M.Kas müasir aləmdə riyaziyyatın əhəmiyyətindən danışaraq yazır: “Bu gün ehtimal nəzəriyyəsi bütün təbiət elmlərinin təməl daşı, statistika isə insan fəaliyyətinin bütün sahələrinin ayrılmaz hissəsidir” [17, səh.83]. Görkəmli Amerika aliminin bu sözləri stoxastikanın hazırkı dövrdə oynadığı rolu çox gözəl ifadə edir. Bu fikrə onu da əlavə edək ki, riyaziyyatın mühüm sahəsi olan stoxastika hazırda təkcə təbiət elmlərinə deyil, bütün elmlərə xidmət edir. Amerika riyaziyyatçısı Ç.Dub Moskva riyaziyyatçılar cəmiyyətindəki məruzəsini “azacıq artırmaqla” “Ehtimal nəzəriyyəsi üzrə bütün mütəxəssislərə yaxşı məlumdur ki, riyaziyyat ehtimal nəzəriyyəsinin bir hissəsidir” [18, səh4] sözləri ilə başlamışdır. Həmin meyl əsaslı surətdə onunla izah olunur ki, son on illərdə yaranmış yeni riyazi fənlərin əksəriyyətini əhatə edən “kibernetika” stoxastik nəzəriyyə ilə sıx əlaqədardır. Bununla da stoxastika praktik əhəmiyyətinə görə riyazi elmlər arasında diqqəti daha çox cəlb etməyə başladı. Məsələn, “oyunlar nəzəriyyəsi” və ya “informasiyalar nəzəriyyəsi” və bunlara oxşar digər sahələrin yaranması ehtimal nəzəriyyəsinə çoxlu sayda müxtəlif və kifayət qədər dərin inkişaf etmiş riyazi fənlərin birləşməsi kimi baxmağa gətirilir. Bu deyilənlərə ehtimal nəzəriyyəsinin şübhəsiz metodoloji əhəmiyyətini “təsadüf” və “zərurət”, “dinamiklik” və “statistik” arasındakı əlaqələrin qanunauyğunluqlarını başa düşməyin əhəmiyyətini əlavə etsək, onda aydın olar ki, hazırkı dövrdə stoxastikanın əsasları hər bir təhsilli adamın elmi məlumatına daxil olmalıdır. Bir çox təbiətşünaslar və filosoflar, məsələn görkəmli fizik B.R.Fok və Kvant mexanikasının yaradıcılarından biri alman alimi Verner Qeyzenberq, belə hesab edirlər ki, müstəsnasız olaraq bütün təbiət qanunları “statistik” (başqa sözlə ehtimallıq) xarakterdədir. Məktəbdə təlimin təkmilləşdirilməsi müvafiq elmlərin qarşısında duran mühüm və daimi problemdir. Psixoloji-didaktik, metodik qanunauyğunluqların tam sisteminə əsaslanmaqla stoxastika elementlərinin məktəb riyaziyyatına daxil edilməsini belə təkmilləşdirmənin əsas yolu hesab edirik.

Şəxsiyyətin formalaşması, çətin, hər an dəyişən dünyamızda yaşamaq və işləmək üçün böyüməkdə olan nəsildə ehtimal-statistik düşüncə tərzini yaratmaq vacibdir. Bu məsələ məktəb riyaziyyat kursunda stoxastik elementləri lazımi səviyyədə verilməklə həll oluna bilər. Ehtimal qanunları universaldır. Müasir fizika, kimya, biologiya, sosiologiya, fəlsəfə, sosial-iqtisadi elmlər kompleksi ehtimal-statistik baza üzərində qurulur və inkişaf edir. Digər tərəfdən, şagirdlər yaşadığı dünyadan heç nə ilə təcrid olunmur, əksinə onlar öz həyatında hər gün ehtimalı vəziyyətlərlə qarşılaşırlar. Oyunlar və onlara olan həvəs yeniyetmə həyatının ayrılmaz hissəsidir. Bir neçə variantın içərisindən ən yaxşı olanı seçmək problemi, riskin dərəcəsini və müvəffəqiyyət şansını düzgün qiymətləndirmək, oyunda ədalətlik və ədalətsizlik barədə düşünmək – bütün bunlar yeniyetmələrin real marağına aiddir. Odur ki, şagirdlərə ehtimallıq vəziyyətlərində yaşamağı öyrətməliyik. İlk növbədə müasir tələblərə əsaslanaraq hər bir şagirdi ayrıca bir fərd kimi qəbul edərək, onun maraq və həvəsini nəzərə almaq lazımdır. Bunun üçün isə şagirdlərin riyazi hazırlığına qoyulan tələblərin dəyişilməsi, yeni interaktiv və ümumiləşdirmə metodlarının işlənilməsi, hazırlanması meyarlarının müəyyən edilməsi tələb olunur. Stoxastika elementlərinin məktəbdə verilməsi üçün tədris dövrünün seçilməsinə də diqqət yetirilməlidir. Dünya təcrübəsində psixoloqların apardıqları eksperimentlər göstərdi ki, stoxastik təsəvvürünün formalaşması üçün 10-13 yaş dövrü daha məqsədəuyğundur. Bu ərafə şagirdlərin ehtimal intuisiyalarını, onların statistik təsəvvürlərini daha yaxşı inkişaf etdirir. Təsadüfi hadisə və onunla əlaqədar bir çox anlayışlar isə tədrisin daha yüksək pillələrində verilə bilər. Riyaziyyatın yeni, özünəməxsus bir sahəsilə tanışlıq şagirdləri “bu fənnin həyatla heç bir əlaqəsi yoxdur” fikrindən döndərəcək. Onlar öyrənəcəklər ki, ağ və qara rənglər içərisində xeyli rəngli spektrlər, “hə” və “yox” arasında “ola bilər” sözü də mövcuddur. Ehtimal-statistik xətt şagirdlərin real həyat təcrübəsinə söykənərək, onlarda riyaziyyata marağı artıracaqdır. Açıq cəmiyyət konsepsiyası, inteqrasiya, ümumiləşdirmə ölkə və xalqların yaxınlaşmasını, o cümlədən təhsil sahəsində də yaxınlaşmanı obyektiv bir şərt kimi tələb edir. Stoxastikanın əsasları, verilənlərin analizi bu və ya başqa şəkildə dünyanın bütün inkişaf etmiş ölkələrinin orta məktəb kurslarında tədris edilir.

Son illərdə riyaziyyatın tədrisi metodikasına aid aparılan tədqiqatlarda sistematiklik və tamliq ideyası mühüm yer tutur. Bu planda

riyaziyyatın öyrənilməsi prosesinin təkmilləşdirilməsi aşağıdakı müddəalara əsaslanır: 1) Riyaziyyat tədrisinin səmərəliliyinin yüksəldilməsinin əsasını təlim prosesinin bütün komponentləri arasındakı qanunauyğun əlaqələr sistemi təşkil edir; 2) şagirdlərin təlim fəaliyyətinin xarici şəraiti ilə onların şüurunda yaranan daxili proseslər arasındakı qanunauyğun əlaqələri bilmək tədris materialının mənimsənilməsi prosesində müvafiq rəhbərliyi yerinə yetirməyə imkan verir. Son illərdə didaktikada irəli sürülmüş fundamentallıq, humanistləşdirmə, integrasiya, demokratikləşdirmə, diferensiaslaşdırma, praktik peşə yönümü, yaradıcılıq və navatorluq, əməkdaşlıq, tərbiyə ehtiyatları, intensivlik, xüsusiləşdirmə, generalaşdırma, ümumiləşdirmə, interaktiv metod və s. zənnimizcə riyaziyyatın tədrisinin təkmilləşdirilməsində aparıcı ideyalarlardır. Xüsusən təlimdə humanistləşdirmə, hər şeydən əvvəl, burada diferensiaslaşdırmanı və “onun limiti” kimi fərdiləşdirməni zəruri təlim metodu olaraq həyata keçirməkdir. Humanistləşdirmə ideyasının yerinə yetirilməsinin konkret formalarından biri təlimin məzmununun diferensiaslaşdırılması sistemidir və təqdim edilən məzmunun mənimsənilməsi üzrə şagirdlərə verilən tələblərdir. Riyaziyyatın təlimində diferensiaslaşdırmanın mühüm bir cəhəti ümumi riyazi təhsil vəzifəsinin dəqiq bölüşdürülməsidir – “hamı üçün riyaziyyat” və fəaliyyəti riyaziyyatın dərk edilməsinə əsaslanan, cəmiyyətin elmi-texniki tərəqqisi üçün lazım olan, mütəxəssislər hazırlamaq məsələsidir. Bu cəhətdən metodik ədəbiyyatda və məktəb təcrübəsində diferensiaslaşdırmanın iki növünə (səviyyə və və profil) təsadüf edirik ki, bunlar da ayrıca tədqiq edilməlidir.

Deməli, mahiyyətə vahid prosesdə yerinə yetirilən, riyazi təlimin iki istiqamətindən: “riyazi təhsildən” və “riyaziyyatın köməyi ilə təhsildən” söhbət gedir. Bunun üçün bütün elmlərin ümumi dili olan riyaziyyat dərinədən öyrənilməlidir, şagirdlər müvafiq təfəkkür əməliyyatları (analiz, sintez, ümumiləşdirmə, xüsusiləşdirmə, mücərrədləşdirmə və s.) aparmağı bacarmalıdırlar. Məktəb riyaziyyatının məzmunundan “hamı üçün riyaziyyat” – riyaziyyatın köməyi ilə təhsil nöqtəyi nəzərdən xüsusi əhəmiyyəti olmayan tədris materialları çıxarılmalı, bunların yerini fəal düşünən şəxsiyyəti formalaşdıran, xüsusi didaktik əhəmiyyəti olan, təmiz riyaziyyatın yaranması mərhələsini göstərən və mahiyyətini anlamaq bilən faktlar və münasibətlər tutmalıdır.

Həyatın orta məktəb məzunları qarşısında qoyduğu vəzifələr əsasən təsadüfi faktların təsirinin təhlili ilə, ehtimal olunan situasiya-

larda müəyyən qərara gəlməklə əlaqədardır. Məktəbdə ayrı-ayrı fənlərdə öyrənilən qanunauyğunluqlar stoxastika ideyaları ilə olduqca əlaqədardır. Lakin keçən əsrin əvvəllərində olduğu kimi bu gün də məktəb dərsləkləri ətraf aləmin yalnız ciddi determinist modelini şagirdlərə təqdim edir. Riyaziyyatın tədrisilə əlaqədar stoxastikanın öyrənilməsinin metodik sistemini yaratmaq üçün hər şeydən əvvəl bu yeni xəttin məktəbə daxil edilməsinin məqsədini (stoxastika elementləri məktəb riyaziyyatına nə üçün və nəyə görə daxil edilir) müəyyən-ləşdirmək, obyektini dəqiqləşdirmək (stoxastikanı kimə və nə vaxt öyrətmək lazımdır), onun məzmununu hazırlamaq (müasir insanlara gündəlik həyatda və peşə fəaliyyətində hansı stoxastik hazırlıq lazımdır) və metodlarını işləmək (həmin ideyaları bütün şagirdlər üçün necə münasib etməli, riyazi hazırlıqları müxtəlif səviyyədə olan şagirdlərə bunu necə öyrətməli), bu sahədə gələcək riyaziyyat müəllimlərinin hazırlanması istiqamətini müəyyən-ləşdirmək lazımdır.

Riyaziyyatın tədrisi metodikasının məktəb üçün yeni olan yuxarıda göstərilən məsələləri didaktikanın müvafiq fəlsəfi baxımdan təlimin müxtəlif mərhələlərində və həmin fəlsəfi prinsiplərdən alınan müəllim hazırlığı konsepsiyası daxil olmaqla həll edilməlidir. Bu mənada pedaqogika fəlsəfəsinə riyaziyyatın hazır biliklər yığımı deyil spesifik əqli fəaliyyət kimi başa düşmək, riyaziyyata konkret problemlərin həlli vasitəsi kimi baxmaq, problemləli vəziyyətlərin yaranmasına stoxastik ideyaların və riyaziyyatın tətbiqinə aid əsl məsələlərin mənbəi, habelə fəallaşdırmada stimula kimi yanaşmaq təlimin müəyyən edilmiş vasitə və üsulların riyazi fəaliyyətin o cümlədən kəşflərin vasitə və üsulları kimi qiymətləndirmək, fəallaşdırmada həqiqi aləmdən riyazi abstraksiyalar aləminə (riyaziləşdirmə, riyazi modelləşdirmə) və tərsinə keçməyin əhəmiyyəti daxildir. Xüsusən, riyaziyyatın tədrisini elə təşkil etmək lazımdır ki, səmərəli üsulları və müəyyən məsələləri şagirdlərin özləri ifadə etsinlər, həqiqi aləm hadisələrini tədricən riyazi dilə çevirsinlər, sonra isə onların məlum həll açarını özləri seçsinlər və ya yenisini qursunlar, məsələ həllinin növbəti addımının doğruluğunu yoxlamaq vasitəsini tapsınlar, anlayışlardan yerli yerində istifadə etsinlər, riyazi fəaliyyəti səmərələşdirmə vasitəsi kimi stoxastik əqli nəticələr üçün simmetriya və izomorfizmin xüsusiyyətlərini dərk etsinlər, riyaziləşdirmə və dəlilləşdirmənin münasib vasitələri kimi çertyoj və şəkillərdən istifadə edə bilsinlər.

Riyazi təlimin fəlsəfəsini, demək olar ki, ixtiyari təlim materialı əsasında yerinə yetirmək olar. Lakin necə və nə üçün riyaziləşdirməni, habelə ümumiləşdirməyi nümayiş etdirməyə stoxastikada daha geniş imkanlar vardır. Məsələn, kəsrlə anlaşıq və onlar üzərində əməllərlə əlaqədar hadisənin ehtimalı anlaşıq və onlar üzərində əməlləri, müstəvi fiqurların sahəsini öyrənərkən ehtimalın həndəsi tərifini vermək mümkündür və s.

Stoxastika elementlərinin öyrənilməsində çox vaxt birləşmələr nəzəriyyəsiindən istifadə etmək lazım gəlir. Odur ki, yuxarı siniflərdə də bu işi davam etdirmək üçün əvvəlcə kombinatorika elementlərinin öyrənilməsi zərurəti yaranır. Həm də belə olduqda şagirdlərdə ümumiləşdirmə qabiliyyətinin inkişaf etdirilməsi üçün imkan genişlənir. Stoxastikada hər bir hadisə elementar hadisələr fəzasının alt çoxluğuudur. Daxil olma münasibətindən burada geniş istifadə olunur. A hadisəsinin hər bir nəticəsi həm də B hadisəsinin nəticəsidirsə, deyilir ki, A hadisəsi B hadisəsinə düşür və ya B hadisəsi A hadisəsinin nəticəsidir və bu fakt $A \subset B$ kimi yazılır. Bu kimi fikirlər ümumiləşmə üçün lazımdır.

1.14. Kalkulyatordan istifadə etmədən hesablama (VIII s.).

$\sqrt{99^2 + 99^2 \cdot 100^2 + 100^2}$ yaxud da $\sqrt{1999^2 + 1999^2 \cdot 2000^2 + 2000^2}$ kimi ifadələri kalkulyatorun köməyi ilə hesablamaq olar. Bütün belə ifadələrin ədədi qiymətini tapmaq üçün qayda müəyyən etmək lazımdır. Belə olan halda kalkulyatordan istifadə etməyə ehtiyac qalmır. İxtiyari x üçün

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x^2(x+1)^2 + (x+1)^2 = x^2(x+1)^2 + 2x^2 + 2x + 1 = \\ &= x^2(x+1)^2 + 2x(x+1) + 1 = [(x+1)x + 1]^2 \end{aligned}$$

Odur ki, baxılan ifadələrin qiymətləri

$\sqrt{f(99)} = 99 \cdot 100 + 1 = 9901$ və $\sqrt{f(1999)} = 1999 \cdot 2000 + 1 = 3998001$ olar.

1.15. Sabit və dəyişən kəmiyyətlər (VII-IX). Funksiya anlayışı ilə əlaqədar belə kəmiyyətlər haqqında müvafiq məlumatlar vermək lazım gəlir. Adətən sabit kəmiyyət dəyişən kəmiyyətin xüsusi halı hesab edilir. Başqa sözlə belə hesab olunur ki, sabit kəmiyyət bütün ədədi qiymətləri bərabər olan dəyişən kəmiyyətdir. Məsələn, A və C təpələri qeyd olunmuş, B təpəsi isə hər hansı l xətti üzrə sürüşən ABC üçbucağının sahəsi dəyişən kəmiyyətdir. l xətti olaraq AC-yə paralel

düz xətti götürsək onda üçbucağın sahəsi sabit olar:
 $S(AB_1C)=S(AB_2C)=\dots$

Bu misal üzrə də şagirdlərə başa salmaq olar ki, sabit kəmiyyət dəyişən kəmiyyətin xüsusi halıdır.

1.16. Bərabərsizliyin intervallar metodu ilə həlli (VIII-IX s.).

$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0$ (1) şəkildə bərabərsizlik bu metoddla səmərəli həll edilir, burada $x_1, x_2, \dots, x_n$ müxtəlif həqiqi ədədlərdir; $x_1, x_2, \dots, x_n$ ədədlərinin ən böyüyündən böyük olan ixtiyari x üçün sol tərəfdəki vuruqların hamısı müsbət olduğundan (1) bərabərsizliyi ödənilir. Sonra isə x sağdan sola hərəkət etdikdə $x - x_i$ vuruqlarından biri x_i köklərindən hər birindən keçdikdə sol tərəfin işarəsi dəyişir. Baxılan metodun nəzəri əsası da birdir.

Bu metodun praktikada tətbiqi üçün ədəd oxu üzərində $x_1, x_2, \dots, x_n$ ədədləri ardıcıl qeyd olunur (onlar cüt-cüt müxtəlifdir). Sonra həmin oxun yuxarı hissəsindən başlayaraq hər bir qeyd olunmuş nöqtələrdən ardıcıl olaraq keçməklə, sağdan sola dalğalı xətt çəkərək rəşional ifadənin işarəsinin necə dəyişdiyini həndəsi olaraq müşahidə edirik: Əvvəl işarə “+” sonra “-”, daha sonra isə bu dəyişmə həmin qayda ilə davam edir. Baxılan bərabərsizliyin həlli olaraq x -in “+” işarəsi olan intervallardakı qiymətləri götürülür. $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) < 0$ (2) bərabərsizliyinin həlli isə x -in “-” işarəsi olan intervallardakı qiymətləridir. 42-ci şəkildə $(x - 1)(x + 2)(x - 4)(x - 5) > 0$ bərabərsizliyinin həlli göstərilir və cavab $x < -2, 1 < x < 4, x > 5$ aralıqlarının birləşməsidir. Bu metod $\leq, \geq$ işarəli bərabərsizliklərə də tətbiq olunur.

Vuruqların işarələrinin paylanması bütün məntiqi mümkün-lüyünün seçilməsinə nisbətən intervallar metodunun əsas üstünlüyü hesablamalarda mühüm qənaətə nail olmaqdır ki, bunsuz çox vaxt həlli axıra çatdırmaq mümkün olmur. Eyni zamanda bu metodun nisbətən məhdud tətbiq sahəsi vardır: Seçmə yolu ilə prinsip etibarı ilə sol tərəfi vuruqlarına ayrılan ixtiyari bərabərsizliyi həll etmək olar, intervallar metodunun tətbiqi üçün isə həmin vuruqlar xətti iki hədlilər, başqa sözlə sol tərəfi xətti vuruqlara ayrılı bilən tam cəbri funksiya (çoxhədlili) olması lazımdır. Bu zaman, tərsi göstərilməyibsə, bərabərsizliyin sağ

tərəfinin sıfır olduğu nəzərdə tutulur. Doğrudur, intervallar metodu aşkar olaraq asanlıqla rasiional funksiyalar (iki çoxhədlinin nisbəti) üçün də ümumiləşdirilir, lakin bu ümumiləşdirməni onun IX sinifdə tətbiqləri çərçivəsində o qədər də geniş açmaq mümkün olmur. Bu sinifdə ən sadə hallarda rasiional funksiyalar üçün baxılan metodu tətbiq etmək məqsədəuyğundur.

İntervallar metodunun istənilən qədər ümumi şəkildə funksiyaların hasilinə tətbiqinin bəzi şərtlərini də ifadə etmək olar, lakin bu şərtlərə funksiyanın kəsilməzliyi, təkrarlanan köklər kimi anlayışlar daxildir ki, bunların da əsaslandırılması üçün diferensial hesabının IX sinifə daxil olmayan teoremlərindən xüsusən Teylor düsturundan istifadə etmək lazım gəlir. Bəndin axırında bu metodun müvafiq ümumiləşdirilməsini göstəririk.

Təbii olaraq mürəkkəb, transendent bərabərsizliyi onunla eynigüclü tam cəbri bərabərsizliklə əvəz etməyi də şagirdlərə öyrətmək lazımdır. Yəni rasiional olmayan hər bir funksiya üçün ixtiyari x -ə görə işarəsi əvvəl verilən funksiya ilə eyni olan rasiional funksiya seçməyə çalışmaq lazımdır. Beləliklə də bərabərsizliyi “rasiionalaşdırmağı” şagirdlərə öyrədirik ki, bundan sonra intervallar metodunu tətbiq etmək mümkün olsun. Məsələn, $b > 0$ olduqda $a^x - b$ və $(a-1)(x - \log_a b)$ funksiyalarının işarəsi eynidir. Odur ki, ixtiyari bərabərsizlikdə $a^x - b$ transendent vuruğunu $(a-1)(x - \log_a b)$ rasiional ifadəsilə əvəz etmək olar, bununla da əvvəlkinə eynigüclü bərabərsizlik alınar. Lakin belə “eynigüclü” rasiionalaşdırma həmişə mümkün olmur. Məsələn, $\log_a x$ funksiyası üçün, lazımı xassələri ödəyən, rasiional funksiya seçmək olmaz: bu ən azı oradan alınır ki, rasiional funksiyanın yalnız sonlu sayda nöqtələrdə – məxrəcin köklərində mənası olmaya bilər, $\log_a x$ isə bütün $x \leq 0$ da təyin edilməmişdir. Deməli $\log_a x$ -ni ixtiyari rasiional funksiya ilə əvəz etdikdə bərabərsizliyin mümkün qiymətləri oblastı (MQO) genişlənməyə bilməz. MQO genişlənməsinə yol verilərsə onda $\log_a x$ vuruğunun əvəzində $(a-1)(x-1)$ yazmaq olar. MQO genişlənməsi ilə razılaşmaqla kifayət qədər çoxlu funksiyalar yığımı üçün rasiionalaşdırma aparmaq mümkündür. Daha çox işlədilən əvəzləmələri göstərək. Çox vaxt bunlar standart əvəzləmələr adlanır. 1) $a^x - b$, 2)

$\log_a b - \alpha$, 3) $\sqrt[2k]{a} - b$, 4) $|a| - b$ ifadələrinin əvəzində uyğun olaraq 1') $(a-1)(\alpha - \log_a b)$, 2') $(a-1)(b - a^\alpha)$, 3') $a - b^{2k}$, 4') $a^2 - b^2$ yazmaq olar və s. (Bu düsturlarda həmişə $b > 0$ hesab edilir, son ikisində isə əlavə olaraq $b=0$ mümkündür). Bu siyahını davat etdirmək olar, lakin burada məktəbdə istifadə edilə bilənləri göstəririk. Bu əvəzləmələrin praktik tətbiqi ilə əlaqədar yadda saxlamaq lazımdır ki: 1) Bir qayda olaraq misallarda a, b, α funksiyalar olur, ona görə göstərilən əvəzləmələrin hər biri MQO dəyişir. Həm də bu olduqca zəruridir. Yeni bərabərsizliyin MQO əvvəlkinə nisbətən geniş olur, deməli, həllərin itməsi baş vermir. Odur ki, həllin sonunda əsas bərabərsizliyin MQO daxil olma yoxlanılmalıdır. Alınmış həllərdən əsas bərabərsizliyin MQO daxil olanlar onun həllidir. Bu halda deyirik ki, yeni bərabərsizlik əvvəlki ilə onun MQO eynigüclüdür. Bunu nəzərə almaqla əsas bərabərsizliyin MQO hesablamaqla həllə başlamaq lazımdır. 2) a, b, α x-dən asılı olduqda əvəzləmədən sonra alınan bərabərsizliyin ümumiyyətlə rasionallıq məcburi deyil.

Bərabərsizliklərin həlli zamanı təkcə sol tərəfin vuruqlara ayrılması halında deyil, habelə bərabərsizliyi belə şəkildə gətirmək üçün də rasionallaşdırma məqsədə tez çatmağa kömək edir. Bundan əlavə təklif olunan həllərdə təkcə yuxarıda göstərilən standart əvəzləmələrdən deyil, habelə rasionallaşdırmanın bəzi başqa xüsusi priyomlarından istifadə edirik.

$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}} \left(\frac{x}{3} \right) > 0$	bərabərsizliyinin	MQO
$x > 0, 2x^2 - 7x + 6 > 0$	,	$2x^2 - 7x + 6 \neq 0$ və ya
$0 < x < \frac{3}{2}, x > 2, x \neq 1, x \neq \frac{5}{2}$ şərtləri ilə təyin edilir. 2-2' və 3-3'		
əvəzləmələrini əsas bərabərsizliyin MQO-da onunla eynigüclü olan		
bərabərsizliklər zəncirini alırıq: $\left(\sqrt{2x^2 - 7x + 6} - 1 \right) \left(\frac{x}{3} - 1 \right) > 0$,		
$(2x^2 - 7x + 5)(x - 3) > 0$, $(x - 1) \left(x - \frac{5}{2} \right) (x - 3) > 0$ sonuncu		

bərabərsizliyi intervallar metodu ilə həll edərək¹, onun həllinə əsas bərabərsizliyin MQO ilə birgə baxıb $1 < x < \frac{3}{2}$, $2 < x < \frac{5}{2}$, $x > 3$ cavabını alır.

Kök və modul daxil olan bərabərsizlikləri rasionallaşdırmaq üçün adətən standart əvəzləmədən istifadə etməyib fərdi priyomlar tətbiq etmək olar. Hətta belə əvəzləmə mümkün olduqda belə, məhz hansı a və b üçün standart əvəzləmədən istifadə etməyi düşünməyə nisbətən xüsusi priyomlar tətbiq etmək sadədir. Məsələn, $|x^2 + 3x - 3| \leq |x^2 - 2x - 2|$ bərabərsizliyini həll etmək üçün, hər şeydən əvvəl qeyd etmək lazımdır ki, onun hər iki tərəfi mənfi deyil, ona görə kvadrata yüksəltdikdən sonra, onunla birgüclü $|x^2 + 3x - 3|^2 \leq |x^2 - 2x - 2|^2$ və ya $(x^2 + 3x - 3)^2 \leq (x^2 - 2x - 2)^2$ bərabərsizliyini alır. Bütün hədləri sol tərəfə keçirib və kvadratlar fərqi vurğuların hasilini şəklində yazdıqdan sonra $(2x^2 + x - 5)(5x - 1) \leq 0$ alır. Intervallar metodu ilə sonuncu bərabərsizliyin $x \leq -\frac{1 + \sqrt{41}}{4}$, $\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{\sqrt{41} - 1}{4}$ həllini alır. Əlbəttə, burada istifadə etdiyimiz kvadrata yüksəltmə, mahiyyətcə $a = |x^2 + 3x - 3|$, $b = |x^2 - 2x - 2|$ olduqda 4-4') standart əvəzləməsidir, lakin göründüyü kimi bunu xatırlamağa ehtiyac yoxdur.

Bir çox misallarda rasionallaşdırma üçün həm standart əvəzləmədən, həm də xüsusi priyomlardan istifadə edilir.

Bərabərsizliyin burada şərh edilən həll priyomları, əlbəttə, universal deyildir, bu priyomlar həmişə tətbiq edilmir, həlli həmişə sadələşmir və müxtəərləşdirmir. Digər tərəfdən, aşkardır ki, həll metodlarının heç birində bu xüsusiyyətlər yoxdur. Eyni zamanda rasionallaşdırmanın tətbiqi sahəsi kifayət qədər genişdir.

İntervallar metodunun mahiyyətini nəzəri əsasını və tətbiqlərini transendent bərabərsizliklərin ona gətirilməsini göstərdik. İndi onun ümumiləşdirilməsinə diqqət edək. Dərəcəsi ikidən az olmayan bəzi cəbri bərabərsizliklər ardıcıl birgüclü çevirmələrdən sonra

¹ Belə hallarda ədədi düz xəttindən istifadə edilir.

$(x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_{n-1})^{k_{n-1}} (x - \alpha_n)^{\alpha_n} > 0$ (3) şəklə düşür, burada $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n$ natural ədədlər, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ müxtəlif və $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$ olan həqiqi ədədlərdir. k_i ədədlərindən heç olmasa biri 2-dən kiçik deyilsə ($k \geq 2$ isə) onda (3) bərabərsizliyinin həllində yuxarıda izah etdiyimiz intervallar metodu deyil ümumiləşdirilmiş adlanan intervallar metodu tətbiq edilir.

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_{n-1})^{k_{n-1}} (x - \alpha_n)^n \quad (4)$$

çoxhədlisinə baxaq. Aşkardır ki, $x_0 > \alpha_n$ bərabərsizliyini ödəyən ixtiyari x_0 ədədi üçün (4) hasilində ixtiyari vuruq müsbətdir, odur ki, $P(x)$ çoxhədlisinin $P(x_0)$ ədədi qiyməti də müsbətdir.

(α_{n-1}, α_n) aralığından götürülmüş ixtiyari x_1 ədədi üçün, sonuncudan başqa, ixtiyari vuruğun ədədi qiyməti müsbətdir; sonuncu vuruğun uyğun ədədi k_n cüt ədəd olduqda müsbət, tək olduqda isə mənfidir. Odur ki, $p(x_1)$ ədədi k_n cüt olduqda müsbət, tək olduqda isə mənfidir. Bu halda adətən deyilir ki, $p(x)$ çoxhədlisi α_n nöqtəsindən keçdikdə k_n tək ədəd olduqda işarəsini dəyişir, k_n cüt olduqda isə işarəsini dəyişmir. Analoji olaraq göstərilir ki, $p(x)$ çoxhədlisinin (α_i, α_{i+1}) aralığında işarəsi məlumdursa, onda (α_{i-1}, α_i) aralığındakı işarə bu qayda ilə müəyyən edilir: $p(x)$ çoxhədlisi α_i nöqtəsindən keçdikdə k_i tək ədəd olduqda işarəsini dəyişir, k_i cüt olduqda isə işarəsini dəyişmir. Ümumiləşdirilmiş intervallar metodu da bu mühakiməyə əsaslanır: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ ədədləri ədəd oxu üzərində göstərilir; bu ədədlərdən ən böyüyündən yəni α_n -dən sağdakı aralıqda k_n cüt ədəd isə “+”, k_n tək ədəd olduqda isə “-” işarəsi yazılır. Bundan sonrakı sağda və soldakı aralıqlarda bu qaydadan istifadə etməklə işarələr qoyulur: $P(x)$ çoxhədlisi α_{n-1} nöqtəsindən keçdikdə k_{n-1} tək ədəd olduqda işarəsini dəyişir, k_{n-1} cüt olduqda isə işarəsini dəyişmir. Eləcə də sonrakı sağdakı və soldakı aralıqlara baxılır, həmin qaydadan istifadə etməklə işarələr qoyulur. Beləliklə, bütün aralıqlara

baxmaqla “+” işarəsi yazılan bütün aralıqlar müəyyən edilir və bunların birləşməsi (3) bərabərsizliyinin həlli olur.

$$(x+5)(2x-3)^5(-x+7)^3(3x+8) < 0 \quad (5)$$

bərabərsizliyinin ümumiləşdirilmiş intervallar metodu ilə həllinə baxaq.

Əvvəlcə bu bərabərsizliyi $\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^5 \left\| \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right\| \right]$ -yə vurub onunla

$$\text{eynigüclü} \quad \left[x - (-5) \right] \left[x - \left(-\frac{8}{3} \right) \right]^2 \left(x - \frac{3}{2} \right)^5 (x-7)^3 > 0 \quad (6)$$

bərabərsizliyini alırıq. Sonuncu bərabərsizliyi həll etmək üçün ümumiləşdirilmiş intervallar metodundan istifadə edək. Ədəd oxu üzərində $-5, -\frac{8}{3}, \frac{3}{2}, 7$ ədədlərini göstərək. Ən böyük 7 ədədindən sonra “+” işarəsini yazaq. (7) nöqtəsindən keçərkən

$P(x) = \left[x - (-5) \right] \left[x - \left(-\frac{8}{3} \right) \right]^2 \left(x - \frac{3}{2} \right)^5 (x-7)^3$ (7) çoxhədlisi işarəsini dəyişir, çünki $(x-7)$ ikihədlisi (7) hasilinə tək dərəcədə daxilidir, odur ki, $\left(\frac{3}{2}, 7 \right)$ aralığında “-” işarəsini yazırıq. $\left(\frac{3}{2} \right)$ nöqtəsindən

keçərkən $P(x)$ çoxhədlisi işarəsini dəyişir, çünki $\left(x - \frac{3}{2} \right)$ ikihədlisi (7)

hasilinə tək dərəcədə daxilidir, odur ki, $\left(-\frac{8}{3}, \frac{3}{2} \right)$ aralığında “+”

işarəsini yazırıq. $\left(-\frac{8}{3} \right)$ nöqtəsindən keçərkən $P(x)$ işarəsini dəyişmir,

çünki $\left[x - \left(-\frac{8}{3} \right) \right]$ ikihədlisi (7) hasilinə cüt dərəcədə daxilidir, odur

ki, $\left(-5, -\frac{8}{3} \right)$ aralığında “+” işarəsi qoyuruq. Nəhayət (-5) nöqtəsindən

keçərkən $P(x)$ çoxhədlisi işarəsini dəyişir, çünki $\left[x - (-5) \right]$ ikihədlisi

(7) hasilinə bir dərəcədən daxildir, odur ki, $(-\infty, -5)$ aralığında “-” yazırıq. Deməli, (6) və onunla eynigüclü (5) bərabərsizliyin həlli “+” işarəsi yazılan bütün aralıqların birləşməsidir, yəni (5) – in bütün həlləri $\left(-5, -\frac{8}{3}\right) \cup \left(-\frac{8}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup (7, \infty)$ çoxluğudur.

Beləliklə, sol tərəfi xətti ikihədlilərin hasilindən ibarət bərabərsizliklərin həllində istifadə olunan ən sadə intervallar metodunu, buradakı ikihədlilərdən heç olmasa biri 2-dən az olmayan dərəcə ilə daxil olan bərabərsizliklərə və bəzi transendent bərabərsizliklərə tətbiq etməklə, ümumiləşdirməyi şagirdlərə öyrətmək mümkündür.

Məktəbdə baxılan bərabərsizlikləri əsasən göstərilən formalara gətirmək olar. Belə olmadıqda hər hansı xüsusi priyomlardan istifadə etməklə verilmiş bərabərsizlik həll edilir.

1.17. Həndəsi silsilə (IX s). Bəzən bu və ya başqa məsələni ümumi üsulla həll etmək xüsusi yolla həll etməkdən münasib olur. Məsələn, $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 50 \cdot 2^{49}$ cəmini tapmaq üçün əvvəl $a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + na^n$ ifadəsinin cəminin $S_n = \frac{na^n}{a-1} - \frac{a^n - 1}{(a-1)^2}$ olduğunu müəyyən etdikdən sonra burada $a = 2$, $n = 50$ götürüb baxılan cəmi $S_{50} = 49 \cdot 2^{50} + 1$ tapırıq.

“Dünyada, hər hansı maksimum və ya minimumun mahiyyəti mənada nəyisə görmədən, heç nə baş verməz”

Leonard Eyler

II. Cəbrin yekun təkrarı və ayrı-ayrı anlayışları daxil etmək üçün çalışmalar sistemi

1. İki velosipedçi aralarındakı məsafə 28 km olan A və B məntəqələrindən eyni zamanda qarşı-qarşıya hərəkətə başlayır və bir saatdan sonra görüşürlər. Onlar dayanmadan hərəkətlərini davam etdirirlər və birincisi B məntəqəsinə ikincinin A məntəqəsində olmasından 35 dəqiqə tez çatır. Velosipedçilərin hər birinin sürətini tapın.

2. Aralarındakı məsafə 350 km olan A məntəqəsindən B-yə 20 km/saat, 8 saatdan sonra isə B-dən A-ya 30 km/saat sürətlə hərəkət edən qatarlar çıxır. A-dan hansı məsafədə qatarlar görüşər?

3. 220 V gərginlikli dövrəyə qoşulmuş 375W gücündə elektrik ütüsündən həmin gücdə lakin 127 V gərginlikli dövrəyə qoşulmuş ütdən 1,25A az cərəyan şiddəti keçir. Ütülərin hər birindən keçən cərəyan şiddətini tapın.

4. 120 dn qüvvənin təsiri ilə çuqun kürə dəmir kürədən 1sm/san^2 çox təcil alır. Çuqun kürənin kütləsi dəmir kürənikindən 4q az olduğunu bilərək onların kütlələrini tapın.

5. İsbat edin ki, $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ifadəsi $x = 19$ və $x = 62$ olduqda uyğun olaraq 1-ə və 2-yə bərabədirsə, a, b, c, d tam ədədlər deyil.

6. Tənliyi həll edin: $4x + 3y - 2x \cdot E\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) = 0$, burada

$E(\lambda)$ ilə λ -nı aşmayan ən böyük tam ədəd işarə edilmişdir.

7. $x^2 + 6x + 10 = 0$ (1) kvadrat tənliyi verilir. Onun köklərini tapmadan kökləri verilmiş tənliyin köklərinin kvadratına bərabər olan yeni kvadrat tənlik qurun.

8. Kökləri 7 məsələsindəki tənliyin köklərinin kubuna bərabər olan $z^2 + mz + n = 0$ tənliyini müəyyən edin.

9. Tənliyi həll edin: $|x + 1| - |3 - x| = x + 1 - |3 - 6x|$

10. Bərabərsizliyi həll edin: $|2x + 1| - |2 - x| > 5x - 1$

11. $y = |x| + x + 1$ funksiyasının qrafikini qurun.

12. 1) Ədədi silsilənin hədlərinin kübləri cəmini hesablamaq üçün düstur çıxarın. 2) Cəmi hesablayın: $S = 1^3 + 6^3 + 11^3 + \dots + 96^3$

13. Beş nəfər hər hansı işi yerinə yetirməlidirlər. Onlardan birinci, ikinci, üçüncü birlikdə bütün işi 7,5 saata; birinci, üçüncü və beşinci 5 saata, birinci, üçüncü və dördüncü 6 saata; ikinci, dördüncü və beşinci 4 saata yerinə yetirə bilər. Beş nəfərin hamısı birlikdə həmin işi nə vaxta qurtara bilər?

14. Paraxod suyun axma istiqamətində A məntəqəsindən B məntəqəsinə a saata, əksinə isə b saata gedir ($a < b$). Paraxod durğun suda AB məsafəsini nə qədər vaxta qət edir? Mühərriki işə saldıqda suyun axma istiqamətində paraxodun AB məsafəsini qət etməsinə nə qədər vaxt lazımdır?

15. Qolları bərabər olmayan lingli tərəzidə cismin həqiqi çəkisini necə müəyyən etmək olar?

16. Funksiyanın qrafikini qurun: $y = ||x - 1| - x|$.

17. x, y -in hansı qiymətlərində $x^2 - 2xy + 6y^2 - 14x - 6y + 72$ ifadəsi ən kiçik qiymət alır?

18. $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$ tənliyinin tam müsbət həllərini tapın.

19. $y = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x \leq -3 \\ 4 - 3x - x^2, & -3 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 3x - 4, & x > 1 \end{cases}$ funksiyası verilir.

Mütləq qiymət işarəsindən istifadə edərək y -i, bir düsturla, x -in funksiyası kimi ifadə edin.

20. Tənliyi həll edin: $\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = x$ ($p > 0$).

21. Bərabərsizliyi həll edin: $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-3} < 10$.

22. Bərabərsizliyi həll edin: $\sqrt{2x+15} - \frac{10}{\sqrt{2x-1}} - \sqrt{2x-1}$.

23. İsbat edin ki, x -in ixtiyari tam qiymətində $9x^5 - 5x^3 - 4x$ ifadəsi 120-yə bölünür.

24. İsbat edin ki, cəmi və hasili tam ədəd olan iki kəsr yoxdur.

25. Tənliyi həll edin: $\left[\frac{5+6x}{8} \right] = \frac{15x-7}{5}$, burada $[a]$ ilə a -nı

aşmayan ən böyük tam ədəd işarə edilmişdir.

26. $af(x-1) + bf(1-x) = cx$ tənliyindən $f(x)$ -i tapın.

27. Üçrəqəmli ədədin rəqəmləri cəminə nisbətinin ən kiçik qiymətini tapın.

28. $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ tənliyinin tam həllərini tapın, burada a, b, c tam ədədlərdir.

29. Çay kənarında yerləşən iki A və B məntəqələrindən məxsusi sürətləri eyni olan iki motorlu qayıq qarşı-qarşıya hərəkətə başlayır. Birinci qayıq məxsusi sürətini x km/saat artırsa, ikincisi isə o qədər azaltsa, onda birinci qayıq A –da tez olduğu qədər ikinci qayıq B-də o qədər vaxta gec çatır. x -i tapın.

30. O məntəqəsindən çayın axını istiqamətində eyni zamanda qayıq və sal yollanır. Qayıq $13\frac{1}{3}$ km gedəndən sonra geriye dönür və daha $9\frac{1}{3}$ km üzərək salla qarşılaşır. Çayın axma sürəti 4 km/saat olarsa qayığın məxsusi sürətini tapın.

31. A məntəqəsindən B məntəqəsinə çayın axma istiqamətində sal üzməyə başlayır. 2,4 saatdan sonra onun arxasınca məxsusi sürəti 20 km/saat olan motorlu qayıq yollanır. Qayıq sala çatan kimi geriye A məntəqəsinə doğru üzür. Sal hərəkətə başlayandan 3,6 saat sonra qayıq A məntəqəsinə, sal isə B məntəqəsinə çatır. Çayın axma sürətini tapın.

32. Turistlər dəstəsi 4 km/saat sürətlə 3 saat gəzintidə olmuşdur. 1,5 saatdan sonra yarım saat düşərgə salmışlar. S yolunun uzunluğunu t zamanının funksiyası kimi ifadə edin. Bu funksiyanın qrafikini qurun. Zamanın hesablamasını sıfırdan başlayın. Alınmış funksiyanın təyin və dəyişmə oblastını göstərin.

33. Təyyarədən tullanma zamanı paraşütün açılmasına qədər ilk t_1 saniyədə paraşütçü cazibə qüvvəsinin təsiri ilə enir. Paraşüt açıldıqdan sonra isə paraşütçü v m/san sürətlə t_2 saniyədə enir. Hesablamaları sıfırdan başlayaraq paraşütçinin yolunu zamanın funksiyası kimi ifadə edin. Bu funksiyanın təyin və dəyişmə oblastını göstərin.

34. Funksiyaların artma və azalma intervallarını təyin edin: 1)

$$y = x^3; 2) y = |x^2 + 2x - 3|; 3) y = \frac{x+2}{2x}; 4) y = |x^3|.$$

35. Kvadrat bərabərsizlikləri qrafik həll edin: 1) $x^2 - 14x + 24 > 0$;

$$2) \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 6x + 5} < 0.$$

36. Bərabərsizliklər sistemini qrafik həll edin:
$$\begin{cases} x^2 + 5x + 4 > 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}.$$

37. İsbat edin ki, a, b, c, d həqiqi ədədlədirsə $6x^2 - 3(a + b + c + d)x + (ab + bc + ca + ad + bd + cd) = 0$ tənliyinin kökləri həqiqidir.

38. Bərabərsizliyi isbat edin: $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$).

39. $(x^{1001} - 1)$ -in $(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1)$ -ə bölünməsindən alınan qalığı tapın.

40. $af(x^n) + f(-x^n) = bx$ olarsa $f(x)$ -i tapın, burada $a^2 \neq 1$, n -tək ədəddir.

41. $(5c + 1)^2$ -na bərabər olan dörd rəqəmli $\overline{abca}$ ədədini tapın.

42. İsbat edin ki, $x = 1, 2, 3, \dots, 1000$ olduqda $999x$ şəklində ədədlərin hər birinin rəqəmləri cəmi 27-dir.

43. $y = \frac{3x^2}{ax^4 + bx^2 + c}$ ($a > 0, b > 0, c > 0$) funksiyasının ən böyük qiymətini tapın.

44. Funksiyaların qrafiklərini qurun: 1) $y = |x|$; 2) $y = \frac{1}{2}(x - |x|)$;

3) $y = \frac{x}{|x|}$; 4) $y = ||x| - 1|$; 5) $y = |x| + |x + 1|$; 6) $|y| + |x| = 1$; 7)

$y = x|x|$; 8) $|y| = x^2 - 2x - 3$; 9) $y = (1 + |x|)(2 - |x|)$; 10)

$$y = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|} ; \quad 11) \quad y = x^3 - 3x^2 + 2 ; \quad 12) \quad y = \frac{3x+4}{x-1} ; \quad 13)$$

$$y = \frac{x}{x^2 - 3x + 2} ; \quad 14) \quad y = \frac{x^2 + 1}{x-1} ; \quad 15) \quad y = \sqrt{2(x + |x-2|)}.$$

45. Özü və dördüncü dərəcədən qüvvəti iki ardıcıl ədədlərin kvadratları cəminə bərabər olan ədədləri tapın.

46. Tənlikləri həll edin:

$$1) \quad [-x^2 + 3x] = \left[x^2 + \frac{1}{2} \right] ; \quad 2) \quad [x] = \left[\frac{x^2 - 2}{3} \right] \quad [a] \text{ -ilə } a \text{ -nı}$$

aşmayan ən böyük tam ədəd işarə edilir.

47. Funksiyanın ən böyük qiymətini tapın:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 3)} : (3x^2 + 4)$$

$$48. \text{ Bərabərsizliyi isbat edin: } \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{3}{2}.$$

$$49. \text{ Tənliyin həqiqi köklərini tapın: } x^4 + 4x^3 + 8x + a = 0.$$

$$50. \text{ Tənliyi həll edin: } |x-2||x+3||x+6| = |x+1||x+4||x+9|.$$

$$51. \text{ Hər hansı say sistemində } 10.\underbrace{111..11}_{n}101 \text{ şəklində ədəd verilir.}$$

Bu ədədi, ixtiyari natural n üçün onluq say sistemində yazdıqda 61-ə bölünür. Hansı ən kiçik say sistemində bu mümkündür?

52. $ax^2 + bx + c$ tənliyini həll etmədən kökləri onun köklərinin 4-cü dərəcədən qüvvəti olan iki dərəcəli tənliyi qurun.

$$53. \text{ Kəsrin məxrəcini irrasionallıqdan azad edin: } \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}.$$

$$54. \text{ İsbat edin ki, } \underbrace{11..1}_m \cdot \underbrace{1.00..05}_{m+1} + 1 \text{ cəmi natural ədədin}$$

kvadratıdır.

$$55. \text{ Tənliyi həll edin: } \frac{\sqrt[n]{a+x}}{x} + \frac{\sqrt[n]{a+x}}{a} = \frac{\sqrt[n]{x}}{b}.$$

56. $a^3x^3 + b^3x^2 + c^3x + d^3 = 0$ tənliyin kökləri $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tənliyin köklərinin kubudur. İkinci tənliyin əmsalları arasındakı asılılığı tapın.

57. $a^2 + a + 1 = 0$ isə $a^{2013} + \frac{1}{a^{2013}}$ cəmini hesablayın.

58. $ax^2 + bx + c = 0$, $a'x^2 + b'x + c' = 0$ tənliklərinin kökləri uyğun olaraq x_1, x_2 və x_1', x_2' -dir. Verilmiş tənlikləri həll etmədən kökləri uyğun olaraq $x_1 + x_1'$, $x_2 + x_2'$ və $x_1 + x_2' > x_2 + x_1'$ olan iki kvadrat tənlik qurun.

59. İfadəni sadələşdirin: $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$.

60. Tənliyi həll edin: $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3x} - \sqrt{6}}{\sqrt{2x + 6}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{x}}{\sqrt{x + 4}}$.

61. Bərabərsizliklərin həndəsi təsvirini verin:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad a > 0, b > 0$$

62. Eyniliyi isbat edin:

$$\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{4}{x^2 - 4} + \frac{6}{x^2 - 9} + \dots + \frac{20}{x^2 - 10} = 11 \left[\frac{1}{(x-10)(x+1)} + \frac{1}{(x-9)(x+2)} + \dots + \frac{1}{(x-1)(x+10)} \right].$$

63. $f(x) = \begin{cases} 3 + x, & x \leq 0 \\ 3 - x, & x \geq 0 \end{cases}$ funksiyası verilir. $f[f(x)]$ funksiyasını

tapın və onun qrafikini qurun.

64. Bərabərsizliyi isbat edin: $\left(2 - \frac{1}{n}\right)^n \geq n$.

65. Funksiyanın ən böyük qiymətini tapın:

$$y = \frac{5\sqrt{x^2 + 6x + 8} + 12}{x + 3}.$$

66. Müsbət $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ədədləri $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$, $a_2^2 + b_2^2 = c_2^2$ şərtini ödəyir. İsbat edin ki, $a_1 a_2 + b_1 b_2 \leq c_1 c_2$.

67. İfadənin ən kiçik qiymətini tapın: $(x-5)(x-1)(x-6)(x-2)+9$.

68. Tənliyi həll edin: $\overline{xyztzy} + \overline{zyxyzt} = \overline{yxyztz}$.

69. Kəsrin məxrəcini irrasionallıqdan azad edin: $\frac{2}{1+2\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}$

70. İsbat edin ki, $a > c, b > d$ olduqda $(a+b+c+d)^2 > 8(ad+bc)$.

71. 5-lik və 7-lik say sistemlərində iki üçrəqəmli ədəd eyni rəqəmlərlə, lakin əks ardıcılıqda təsvir edilmişdir. Bu ədədləri tapın:

72. Tənliyi həll edin: $(x^2 + a^2)(x - 3a)^2 = 8a^4, a \neq 0$.

73. Kəsrin məxrəcini irrasionallıqdan azad edin:

$$\frac{295 - 413\sqrt[3]{2} + 177\sqrt[3]{4}}{5 + 3\sqrt[3]{4} - 7\sqrt[3]{2}}$$

74. Son iki rəqəminin əmələ gətirdiyi ədədin kvadratına bərabər olan dörd rəqəmli ədədi tapın.

75. Cəmi hesablayın: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2$.

76. A məntəqəsinə doğru hərəkətə başlayan velosipedçi əvvəlcə sərnişin avtobusla, 4 dəq. sonra isə yük maşını ilə qarşılaşır. Velosipedçi A məntəqəsinə çatanda məlum olur ki, avtobus və yük maşını A-dan eyni zamanda bir saat əvvəl çıxmışlar. Velosipedçinin sürətinin avtobusun və yük maşının sürətlərindən uyğun olaraq 20 km/s və 10 km/s az olduğunu, lakin mənzilə tez çatdığını bilərək, onun sürətini tapın.

77. İki A və B damaçılar komandası görüşürlər. Yarışın şərtinə görə bir komandanın hər bir üzvi digərinin hər bir üzvlə bir oyun keçirməlidir. Keçirilən oyunların sayı oyunçuların sayından 4 dəfə çox olmuşdur. Üzrlü səbəbdən iki oyunçu (hər komandadan 1 nəfər) yarışda iştirak edə bilmədiyindən oyunların ümumi sayı nəzərdə tutulandan 17 az olmuşdur. A komandasında B-dəkindən az oyunçu vardır. A komandasında neçə nəfər iştirak etmişdir?

78. A və B stansiyaları arasındakı məsafə 360 km-dir. Bu stansiyalardan eyni zamanda qarşı-qarşıya iki qatar çıxır. A-dan çıxan qatar 5 saatdan tez olmayaraq B-ə çatır. Onun sürəti həqiqətdə olduğundan 1,5

dəfə çox olsa idi, A-dan çıxandan 2 saatdan tez B ilə görüşərdi. Hansı qatarın sürəti çoxdur?

79. Üç fəhlə birlikdə hər hansı işi 12 saata yerinə yetirir. Birinci və ikinci fəhlə birlikdə bu işi birinci və üçüncünün birlikdə yerinə yetirmələrindən 2 saat tez qurtarar. İkinci fəhlə 3-cü dən $\frac{4}{3}$ dəfə yavaş işləyirsə o, bir saata işin hansı hissəsini yerinə yetirər?

$$80. \text{ Müsbət } x, y \text{ ədədlərinin } \left| \frac{(3-x)a}{x-2} + 1 \right| + \left| 2y - |2a-1| + \frac{1}{2} \right| = 0$$

tənliyini ödəməsi üçün a parametrinin bütün qiymətlərini tapın.

$$81. \text{ Bərabərsizliyi isbat edin: } \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{120}{121} > \frac{1}{11}$$

$$82. \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{25}{6}, \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} = \frac{23}{6} \text{ isə } (x : y : z)\text{-i tapın.}$$

$$83. \text{ Tənliyi həll edin: } (x+1)^2 + (x+2)^3 + (x+3)^4 = 2$$

$$84. 2a^2 + 2b^2 = 5ab, b > a > 0 \text{ isə } \frac{a+b}{a-b} \text{ kəsrinin qiymətini}$$

tapın.

$$85. f(x) + f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x \quad (1) \text{ eyniliyini ödəyən } f(x)$$

funksiyasını təyin edin.

86. Tənliyin müsbət tam həllərini tapın:

$$17(xyz + xy + xt + zt + 1) = 54(yzt + y + t) = 0$$

$$87. \text{ Tənlikləri həll edin: 1) } \frac{x-4}{\sqrt{x+2}} = x-8 \text{ (həqiqi kökləri tapın)}$$

$$2) \quad 6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[3]{(x-2)(x-3)} \quad ; \quad 3)$$

$$(5x+2)\sqrt{1-x} + (5x-7)\sqrt{x} = 0 \quad ; \quad 4)$$

$$4x^3 + x^2 - 4x - 1 + (4x^2 - x - 5)\sqrt{x^2 + x + 1} = 0 \quad ; \quad 5)$$

$$(x+2)\left(1 + \sqrt{3-2x-x^2}\right) = 3; 6) 1+x^3 = (x^2+3x-1)\sqrt{1-x^2}.$$

88. Ağacəşənlər arteli plana görə gündə 100m^3 ağac toplamalı idilər. Onlar planı artıqlaması ilə yerinə yetirərək gündə plandan əlavə

10m^3 ağac tədarük edərək bu işi 5 gün vaxtından əvvəl qurtardılar. Ağacəşənlər neçə kubmetr ağac tədarük etdilər?

89. Sıfıra bərabər olmayan üç müxtəlif rəqəm verilir. Onlardan bütün mümkün olan üçrəqəmli ədədlər düzəldilmişdir (heç bir rəqəm təkrar olmadan). İsbat edin ki, bu ədədlərin cəmi 6-ya və 37-yə bölünür.

90. Tənliklər sistemini həll edin: $x_1 = \sqrt{x_2^2 - x_1}$,
 $x_2 = \sqrt{x_3^2 - x_2}$, $x_3 = \sqrt{x_4^2 - x_3}$, ..., $x_7 = \sqrt{x_8^2 - x_7}$,
 $x_8 = \sqrt{x_1^2 - x_8}$.

91. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x + 3}$.

92. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2 + x + 1)y^2z^2, \\ y^2(x+z)^2 = (4y^2 + y + 1)x^2z^2, \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2 + z + 1)x^2y^2. \end{cases}$$

93. İsbat edin ki, $5x + 2y$ ifadəsi 17-yə bölünərsə, onda $9x + 7y$ -də 17-yə bölünür.

94. İsbat edin ki, $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$ funksiyasının qrafikinin simmetriya mərkəzi vardır və bu mərkəzi tapın.

95. $x^2 + x + 1 = 0$ tənliyinin köklərinin 11-ci dərəcədən qüvvətləri cəmini tapın.

96. İsbat edin ki, tam əmsallı $x^3 + px + q = 0$ tənliyinin köklərinin kubları cəmi tam ədəddir və 3-ə bölünür.

97. $f\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ tənliyini ödəyən bütün f funksiyalarını tapın.

98. Ahıl bir nəfər topladığı pulu birinci oğluna 1000m və qalanın $\frac{1}{10}$ -ni, ikinciyə 2000m və qalanın $\frac{1}{10}$ -ni üçüncüyə 3000 m və qalanın

$\frac{1}{10}$ -ni və s. ümumi məbləğ qurtarana qədər, miras qoymağı vəsiyyətdir. Qocanın neçə oğlu olmuşdur və onların hər biri nə qədər pul almışdır?²

99. Bərabərsizliyi isbat edin: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (b + c + d + l)a$.

100. Rəqəmləri eyni olan beşrəqəmli ədədi eyni rəqəmli dörd rəqəmli ədədə böldükdə qismətdə 16 qalıqda isə hər hansı ədəd alınır. Bölünən və bölənin hərəsindən bir rəqəm atdıqda qismət dəyişmir, qalıq isə 2000 azalır. Bu ədədləri tapın.

101. $x^2 - 3x + 1 = 0$ tənliyinin köklərinin dörd dərəcədə hesabı köklərinin cəmini tapın.

102. İsbat edin ki, x -in ixtiyari tam qiymətində $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$

funksiyası tam qiymət alır. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ funksiyasının x -in bütün tam qiymətlərində tam qiymətlər alması üçün zəruri və kafi şərti tapın.

103. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 + 13z^2 = 12xy + 4xz + 6yz, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 288 \end{cases}.$$

104. Çoxhədlini dörd vuruğun hasili şəklində göstərin:

$$a(b+c)(b^2+c^2-a^2)(a+b-c) - c(a+b)(a^2+b^2-c^2)(b+c-a).$$

105. İsbat edin ki, a, b, c müsbət ədədlər və $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$ isə

onda $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$.

106. Tənliyi həll edin: $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$.

² Buna çox vaxt Eyler məsələsi deyilir.

107. $5ab + 10a^2 - 3b^2 = 0$ və $9a^2 - b^2 \neq 0$ olduğu məlumdursa, $\frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.

108. $\frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$ ifadəsi x və y -in hansı qiymətlərində ən böyük

və ən kiçik qiymət alır?

109. İfadəni sadələşdirin: $70(71^9 + 71^8 + 71^7 + \dots + 71^2 + 72) + 1$.

110. İsbat edin ki, $x + y + z + t = 0$ isə, onda $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 3(xy - zt)(z + t)$.

111. Tənliyin tam həllərini tapın: $(x + y)^2 + x + 4y = 0$.

112. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} x^2y + 2xy^2 + y^3 = 9, \\ x^3y - y^4 = 7 \end{cases}$$
.

113. Fərz edək ki, α ədədi $x^3 - x - 1 = 0$ tənliyinin köküdür. Kökü $\beta = 2\alpha^2 - \alpha$ olan tam əmsallı tənliyi qurun.

114. 1, 2, 3, 4 rəqəmlərindən müxtəlif rəqəmli, 2 və 4 rəqəmləri yanaşı olmayan neçə dörd rəqəmli ədəd düzəltmək olar?

115. f funksiyası $f(x) = x^3 + x$, $x \in R$ düsturu ilə verilir, g funksiyası f -in tərsidir. $f(x) = g(x)$ tənliyini həll edin.

116. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} \frac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a, \\ \frac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b, \end{cases}$$

burada a və b verilmiş ədədlərdir.

117. $\overline{3xxxxx} = \overline{yxxxxx} - y$ bərabərliyini ödəyən x, y rəqəmlərini tapın.

118. Sıfırdan fərqli altı müxtəlif rəqəmlə yazılmış altı rəqəmli ədəd 37-yə bölünür. İsbat edin ki, bu ədədin rəqəmlərinin yerini dəyişməklə 37-yə bölünən ən azı daha 23 müxtəlif ədəd almaq olar.

119. Koordinatlar müstəvisində koordinatları $x^2 + (3y + 1)x^2 + (4y + y^2)x + 5y^2 - 5y^3 = 0$ tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğunu təsvir edin.

120. İxtiyari $x \neq 0$ üçün $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ bərabərliyi ödənilərsə, $f(2)$ -ni tapın.

121. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$$

122. a və b -in hansı qiymətlərində $a^2 + ab + b^2 > 3(a + b - 1)$ bərabərsizliyi doğrudur?

123. İsbat edin ki: $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

124. $49\overline{xyz} = 16\overline{zyx}$ bərabərliyini ödəyən x, y, z rəqəmlərini tapın.

125. İki qabın birində 48 l, digərində 56 l su vardır. II qabdan birinciyə, birincidən isə II-yə dolana qədər su tökdükdə II-də və I-də tutumların uyğun olaraq $\frac{1}{2}$ və $\frac{1}{3}$ -i qədər su olar. Qabların hər birinin tutumunu tapın.

126. $\sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{22}} + \sqrt[3]{26}$ ifadəsinin tam ədəd olduğunu isbat edin və onu tapın.

127. Tənliklər sisteminin tam həllini tapın.

$$\begin{cases} 2x^2 + 30y^2 + 3z^2 + 12xy + 12yz = 308, \\ 2x^2 + 6y^2 - 3z^2 + 12xy - 12yz = 92 \end{cases}$$

128. Musiqi dərnəyində iştirak edənlrin orta yaşı 11-dir; dərnək rəhbərinin 17 yaşı var. Dərnək üzvlərinin qalanlarının orta yaşı isə 10-dur. Bu dərnəkdə neçə nəfər iştirak edir?

129. Futbol komandasının 11 üzvünün orta yaşı, kapitansız 10 futbolçunun orta yaşından 1 il çoxdur. Kapitanın yaşı komandanın orta yaşından neçə il çoxdur?

130. $\frac{x}{x^2 + x + 1} = a$ olarsa, $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ ifadəsinin qiymətini tapın.

131. Tənliyi həll edin: $\sqrt[3]{x-9} = (x-3)^3 + 6$.

132. 25 almaya verilən manatlar, onlardan 1 manata alınan alma qədərdir. 3 manata neçə alma almaq olar?

133. İlk iki rəqəminin əmələ gətirdiyi ədədlə, sonrakı üç rəqəminin əmələ gətirdiyi (eyni ardıcılıqda) ədədə hasilindən 2 dəfə çox olan beşrəqəmli ədədi tapın.

134. Öz rəqəmlərinin cəmindən 59 dəfə böyük olan bütün natural ədədləri tapın.

135. Tənliyi həlli edin: $(x+2)^2 + (x+3)^3 + (x+4)^4 = 2$

136. İsbat edin ki, a, b, c ədədləri müsbətdirsə, onda $(a+b+c)^2 - 8ac$, $(a+b+c)^2 - 8bc$, $(a+b+c)^2 - 8ab$ ədədlərdən heç olmasa biri müsbətdir.

137. Tənliyin qrafikini qurun: $\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} = \frac{2}{xy + 1}$.

138. İsbat edin ki, $x + y = z + t$ ($x, y, z, t \in \mathbb{Z}$) isə onda $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ üç tam ədədin kvadratları cəminə bərabərdir.

139. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x^3 + 24} = 3x + 8 + \sqrt{x^3 + 12}$.

140. $x^3 + y^3 = 468^4$ bərabərliyini ödəyən natural ədəd varmı?

141. İfadəni sadələşdirin: $\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}} - 2\sqrt{3 - \sqrt{5}}$.

142. İsbat edin ki, a, b, c vahiddən kiçik müsbət ədədlədirsə, onda $a + b + c + 2abc > ab + bc + ca + 2\sqrt{abc}$.

143. Tənliyi həll edin: $x^2 - x + 1 = \frac{3x - 6x^2 - 1 + a}{a}$.

144. Tənliyi həll edin: $\frac{2-ab}{a-b}x^2 - 2x + \frac{2}{a-b} = 0$.

145. Bərabərsizliyi həll edin: $\frac{2x^2 + 1}{a + 2} > \frac{2x - x^2}{2}$.

146. Bərabərsizliyi həll edin: $\frac{1+b}{a}x^2 + 2ax + a < 0$.

147. Skalyar hasilin tətbiqilə tənliyi həll edin: $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2$.

148. İsbat edin ki, a, b, c, d mənfi olmayan ədədlədirsə, onda $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ bərabərsizliyi doğrudur.

149. Tənliyi həll edin: $\sqrt{2x^2 + 2y^2} = x + y - 1$.

150. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x^3 + x^2 + 4x + 4} = x\sqrt{x} + 2$.

151. Tənliyi həll edin: $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$.

152. Funksiyanın ən böyük qiymətini tapın:
 $y = \sqrt{x+15} + \sqrt{17-x}$.

153. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \sqrt{15}$ və $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-7\sqrt{8}}$ ədədləri irrasiionaldırmı?

154. a, b, c, d elə ədədlərdir ki, $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. İsbat edin ki, $|ac - bd| \leq 1$.

155. A məntəqəsindən B məntəqəsinə doğru 80 km/s sürətlə birinci maşın, bir qədər vaxtdan sonra isə sabit sürətlə ikinci maşın çıxır. İkinci maşın B-də 20 dəqiqə dayandıqdan sonra geriyyə qayıdır. 48 km gedəndən sonra o birinci maşınla qarşılaşır və birinci maşın B-yə çatanda ikinci maşın B-dən 120 km məsafədə olur. AB=480 km olarsa, A-dan maşınların birinci görüş yerinə qədər olan məsafəni tapın.

156. İki cisim çevrə üzrə eyni istiqamətdə hərəkət edərək hər 56 dəqiqədən bir görüşürlər. Onlar həmin sürətlə əks istiqamətdə hərəkət etsələr, onda hər 8 dəqiqədən bir görüşürlər. Əks istiqamətdə hərəkətdə müəyyən zaman anında cisimlər arasındakı çevrə üzrə məsafə 40 m olarsa, onda 24 saniyədən sonra bu 26 m olar (24 san. Ərzində cisimlər görüşürlər). Cisimlərin sürətlərini və çevrənin uzunluğunu tapın.

157. İki qaçıçı stadionun həlqəvi yolunun bir nöqtəsindən üçüncüsü isə onlarla eyni vaxta diametral əks nöqtədən həmin istiqamətdə yarışa başlayırlar. Üçüncü qaçıçı üç dövrə etdikdən sonra ilk dəfə ikinciyyə çatır. 2,5 dəqiqə bundan sonra birinci qaçıçı ilk dəfə üçüncüyə

çatır. Birinci qaçıçı hər 6 dəqiqədən bir ikincini ötürsə, ikinci qaçıçı bir dövrə nə qədər vaxt sərf edir? (Qaçıcıların hamısının sürəti sabitdir).

158. Bir qrup bakalavr qiyməti 170-dən 195 manata qədər olan maqnitafon almaq qərarına gəlirlər. Son anda iki nəfər bu alverdə iştirak etmək istəmir, odur ki, qalanların hər biri 1 manat artıq pul verməli olur. Maqnitafon neçəyədir?

159. Qabdakı təmiz qliserindən 1/ götürüb yerinə 1/ su tökülür. Sonra 1/ qarışıq götürüb yerinə 1/ su tökülür. Üçüncü dəfə də belə etdikdən sonra qabda qliserindən 7 dəfə çox su qalır. Göstərilən əməliyyatlar nəticəsində qabda nə qədər qliserin və su qaldı?

160. İki sənişin sabit sürətlə eyni istiqamətdə hərəkət edən eskalatorla³ aşağı düşərkən pilləkənləri sayırlar. Aşağı çatana qədər birinci ikincidən 1,5 dəfə az pilləkən sayır. Aşağı düşmüş ikinci özünün əvvəlki sürətlə həmin eskalatorla yuxarı qalxır. Bu zaman o, birinci dəfə aşağı düşərkən saydığından çox, dayanmış eskalatorla hərəkət edərkən saya bildiyi qədər, pilləkən saymışdır. İkinci sənişinin yuxarıya qalxması aşağı düşməsindən neçə dəfə çox olmuşdur?

161. Hovuza 4 boru çəkilməmişdir. Birinci, ikinci və üçüncü boru ilə o 12 dəqiqəyə, ikinci və dördüncü ilə 15 dəqiqəyə, birinci, üçüncü və dördüncü 20 dəqiqəyə dolur. Boruların dördü birlikdə hovuzu neçə dəqiqəyə doldurur?

162. Mağazaya ümumi qiyməti 4,5 milyon manat olan I və II növ mal daxil olmuşdur. Bütün mal II növün qiymətinə satılarsa, onda 0,5 milyon manat zərər, birinci növün qiymətinə satıldıqda isə 0,3 milyon manat mənfəət olar. I və II növ malın hər biri neçəyə alınmışdır?

163. İxtiyari tarixin yazılışında səkkiz rəqəmdən istifadə olunur (məsələn, 01.05.2012). Yaxın gələcəkdə yazılışında bütün rəqəmləri müxtəlif olan tarixi müəyyən edin.

164. Tənliyi həll edin: $x^2 + \frac{9x^2}{(3+x)^2} = 7$.

165. Tənliyi həll edin: $x^2 + 2x \sin xy + 1 = 0$.

166. Dördhəddlini vuruqlara ayırın: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

³ Durmadan hərəkət edən pilləkənlə

167. Bərabərsizliyi həll edin: $\frac{|x-4| - |x-1|}{|x-3| - |x-2|} < \frac{|x-3| + |x-2|}{|x-4|}$.

168. Bir qədər suda duz məhlulu vardır. Bu məhsuldan 1 l su buxarlandıqdan sonra onun qatılığı 0,05 artdı, alınan yeni məhlula 39 l su qarışdırdıqda isə qatılıq əvvəlkindən 3 dəfə az oldu. 1 l suyu 1 kq hesab etməklə əvvəlki məhluldakı duzun miqdarını tapın.

169. Tənliyi həll edin: $\log_2 \frac{x+3}{5} + \log_2 \frac{5}{x+1} = 1$.

170. Tənliyi həll edin: $\cos 0,2x - \cos 0,8x + \cos 0,6x = 1$.

171. Tənliyi həll edin: $|x| = 2 - x$.

172. Tənliyi həll edin: $\cos 3x + \sin x \cdot \sin 2x = 0$.

173. İki fəhlə briqadası yolun iki sahəsinə daş döşəyir. (Birinci briqada birinci sahəyə, ikincisi isə ikinciyyə) İkinci sahədəki işin həcmi birincidəkindən iki dəfə çoxdur və birinci briqadada ikincidəkindən 10 fəhlə azdır. Bütün fəhlələrin əmək məhsuldarlığı eynidir. Briqadalar isə eyni zamanda başlayırlar və birinci briqada işi qurtaranda, ikinci hələ işləyirdi: Birinci briqada da fəhlələrin sayı ən azı neçə ola bilər?

174. Tənliyi həll edin:

$$(26 + 15\sqrt{3})^x - 5(7 + 4\sqrt{3})^x + 6(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 5.$$

175. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$$

176. Bərabərsizliyi həll edin: $\sqrt{2 - \frac{2}{x+1}} < \sqrt{2 + \frac{2}{x}} + 1$.

177. Tərkibinə A, B, C metalları daxil olan üç xəlitə vardır. Birinci xəlitəyə A, B, C metalları uyğun olaraq 20%, 30%, 50%, ikinci xəlitəyə 50%, 20%, 30%, üçüncü xəlitəyə isə 30%, 40%, 30% daxildir. Hər xəlitədən nə qədər götürmək lazımdır ki, 10 kq yeni xəlitə alınsın, B metalının daxil olma faizi isə mümkün qədər minimal olsun?

178. Ədədi silsilənin birinci, ikinci və dördüncü hədləri, uyğun olaraq, eyni zamanda həndəsi silsilənin birinci, ikinci və üçüncü

hədləridir. Həndəsi silsilənin ortaq vuruğunun ala biləcəyi bütün qiymətlərini tapın.

179. Bərabərsizliyi həll edin: $\log_x^2 < \log_{6-x}^2$.

180. b parametrinin ixtiyari qiymətlərində $|x-2| + b(2x+1) = a$ tənliyinin heç olmasa bir kökü olması üçün a parametrinin bütün qiymətlərini tapın.

181. Bərabərsizliyi həll edin: $x \leq \frac{8x-2}{x+5}$.

182. a parametrinin, hər bir qiymətində $\log_{a-6,5}^{(x^2+1)} = \log_{a-6,5}^{(a-5)x}$ tənliyinin iki müxtəlif kökü olduğu, bütün qiymətlərini tapın.

183. Bərabərsürətli hərəkət edən qasırğanın episentri⁴ birinci ölçmə zamanı meteoroloji stansiyadan 24 km şimalda və 5 km qərbdə, ikinci ölçmədə isə meteoroloji stansiyadan 20 km şimalda və $3\frac{1}{3}$ km qərbdə olmuşdur. Qasırğanın episentrinin meteoroloji stansiya yaxınlaşmasının ən kiçik məsafəsini tapın.

184. Tənliyi həll edin: $|2x+8| - |x-5| = 12$.

185. $f(x, y) = |y| + 2|x| - 2$ və $g(y, x, a) = x^2 + (y-a)(y+a)$ funksiyaları verilir. a) a parametrinin hansı ən kiçik müsbət qiymətində $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y, a) = 0 \end{cases}$ tənliklər sisteminin dörd müxtəlif kökü

vardır? b) a parametrinin bu qiymətində bütün nöqtələrinin $(x; y)$ koordinatları $\frac{f(x, y)}{g(x, y, a)} \leq 0$ bərabərsizliyini ödəyən fiqurun sahəsini tapın.

186. Tənliyi həll edin: $4x \sin 3x = 3x + |x|$

⁴ Zəlzələ mərkəzi, yer səthinin bilavasitə zəlzələ mənbəyi üzərində olan sahəsi

187. İki eyni sahəni üç traktorla şumlamaq tələb olunur. Ayrılıqda birinci traktor bir sahəni üçüncüdən üç dəfə tez şumlaya bilər, üçüncü traktor isə həmin işə ikinciyə nisbətən 2 saat çox vaxt sərf edir. Traktorların hamısı birlikdə bir sahəni 7 saat 12 dəqiqəyə şumlayırlar. Traktorların üçü də eyni vaxtda işə başlarsa, bir sahədən digər sahəyə keçmək üçün onların ixtiyarı birinə 40 dəqiqə vaxt lazım olarsa, hər iki sahəni şumlamaq üçün lazım olan ən az vaxtı tapın.

188. Bərabərsizliyi həll edin: $2 + \log_{\sqrt{x^2-2x-3}} \frac{x+4}{x+1} \geq \log_{x^2-2x-3} (x^2-2x-2)^2$.

189. Tənliyi həll edin: $|x^2 - 3x| = 2x - 4$.

190. N şəhərində iki ildə əhalinin sayında artım müşahidə olunmuşdur. Bu şəhərdə ikinci ildəki artım birinci ildəki artımdan 1 faiz çox olmuşdur. Birinci ildə əhalinin artımı iki ildəki artımdan 5,2 faiz az olduğunu bilərək birinci ildə əhalinin neçə faiz artdığını tapın.

191. Bərabərsizliyi həll edin: $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2} > \frac{1}{2x+3}$.

192. Tənliyi həll edin: $\sqrt{11-8\cos^4 x - 4\sin x \cos x} = 3\sin x + \cos x$.

193. 40 l və 50 l uyğun olaraq 0,5%-li və 2%-li sirkə turşusu məhlulu vardır. Bu məhlulların hər birindən nə qədər götürüb qarışdırmaq lazımdır ki, 30 l 1,5%-li sirkə turşusu məhlulu alınsın?

194. Bərabərsizliyi həll edin: $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{2 - \log_2 x} \leq 1$.

195. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$

196. a -nın hansı qiymətlərində $(2a-1)x^2 + 6ax + 1 = 0$ və $ax^2 - x + 1 = 0$ tənliklərinin ortaq kökü vardır?

197. İki ərintinin hər biri 1:2 və 4:5 nisbətində iki metaldan ibarətdir. Hər iki ərintinin hansı hissəsindən həmin metalların 2:3 nisbətində daxil olduğu yeni ərinti almaq olar? İkinci ərintinin yeni ərintidəki faiz miqdarını tapın.

198. Bərabərsizliyi həll edin və tam həllini tapın: $\log_{\frac{x+1}{|x|}} \frac{5-x}{4} < 0$.

199. İfadəni sadələşdirin: $16^{\log_{\sqrt{2}} \frac{4}{7}}$.

200. Tənliyi həll edin: $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4,5^{x-6}$

201. Tənliklər sistemini həll edin: $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3}, \end{cases}$ köklərin hasilini

tapın.

202. Köklərin hasilini tapın: $\alpha = \arccos \frac{3}{5}$ verilir. $3 \operatorname{ctg} 2\alpha$ -nı

tapın.

203. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x^2 - 3x + \frac{9}{4}} - \sqrt{x^2 - 8x + 16} = 1,5$.

204. Hesablayın: $\frac{9}{\pi} \arccos(200^0)$.

205. Tənliyi həll edin: $-\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \cos 5x$ və ən kiçik müsbət kökü dərəcə ilə tapın.

206. İki piyada eyni zamanda qarşı-qarşıya hərəkətə başlayır və 3 saatdan sonra görüşürlər. Birinci ikincinin çıxdığı yerə, ikincinin birincinin çıxdığı yerə gələndən 2,5 saat sonra çatmışdırsa, birinci bütün yola nə qədər vaxt sərf etmişdir?

207. Tənliyin ən böyük kökünü tapın: $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81$.

208. Tənliyi həll edin: $\log_3 \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} = \log_9 \left(\log_9^{\frac{x}{3}} \right)$.

209. İfadəni sadələşdirin və $x = \sqrt[4]{2}$, $y = \sqrt[3]{3}$ olduqda onun qiymətini hesablayın:

$$11 \left[\frac{\frac{x}{8y^3} + \frac{1}{4y^2}}{x^2 + 2xy + 2y^2} - \frac{\frac{x}{8y^3} - \frac{1}{4y^2}}{x^2 - 2xy + 2y^2} - \frac{1}{4y^2(x^2 + 2y^2)} + \frac{1}{4y^2(x^2 - 2y^2)} \right]$$

210. Tənliyi həll edin: $\sqrt[3]{x+80} - 6 = -\sqrt[4]{x^3+80}$.

211. Tənliyin ən böyük kökünü tapın: $4 \cdot 25^x + 5 \cdot 4^x = 12 \cdot 10^x$.

212. Tənliyin ən böyük kökünü tapın: $\log_2^{(9-2^x)} = 3 - x$.

213. $\sin 3x = \cos x - \sin x$ tənliyinin ən kiçik müsbət kökünü tapın. Bucağın qiymətini dərəcə ölçüsü ilə göstərin.

214. Bir neçə il əvvəl meşədə 10000 ağac olmuşdur, hazırda isə burada 14641 ağac vardır. Hər il ağacların sayı 10% artmışdırsa, bu artım neçə il davam etmişdir?

215. Ədədi silsilə əmələ gətirən üç ədədin cəmi 87-dir. Üçüncü ədəd əvvəlki iki ədədin cəmindən 5 vahid azdır. Birinci ədədi tapın.

216. $\frac{x+y}{x-2y} = \frac{2}{3}$ olarsa, $\frac{xy-y^2}{2x^2+2xy+5y^2}$ ifadəsini hesablayın.

217. Tənliyin bütün köklərini tapın: $7^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} - 3 \cdot 7^{\frac{2}{\sqrt{x}}} = 28$.

218. a parametrinin hansı qiymətlərində $y = 2ax + 1$ və $y = (a-6)x^2 - 2$ funksiyalarının qrafikləri kəsişmir?

219. Müxtəlif gücdə olan iki kombayn birlikdə işləyərək müəyyən sahədəki qarğıdalını 6 saata yığır. Birinci kombayn təklikdə 4,5 saat, sonra isə ikinci təklikdə 2 saat işləyərsə, onda onlar qarğıdalı sahəsinin 50%-ni yığarlar. Ayrılıqda hər bir kombayn sahədəki qarğıdalını neçə saata yığa bilər?

220. Tənliyi həll edin: $16^{-x} - 2,25 \cdot 4^{-x} + 0,5 = 0$.

221. $\cos(\pi + 2\alpha) = \frac{2}{3}$ olarsa $18 \sin^4 \alpha$ -ni hesablayın.

222. Qənnadi kombinatına birinci quşçuluq fabrikindən sayca ikinciye nisbətən 12% az yumurta göndərilmişdir, lakin birinci fabrikin bir yumurtasının orta kütləsi ikincinin bir yumurtasının kütləsindən

7,5% çoxdur. Kombinat hansı quşçuluq fabrikindən neçə faiz çox yumurta kütləsi almışdır?

223. $y = \log_{0,5}^{\sqrt{x-1}} - \log_{0,25}^{(x^2-5x+4)}$ funksiyasının qrafikinin ordinatı 0,5-dən böyük olmayan nöqtəsinin absisini tapın.

224. Bərabərsizliyi həll edin: $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2} - \frac{(\sqrt{n}-1)^2}{2}, n \in N$

225. Tənliyi həll edin: $\sqrt[8]{\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2} - 2x\right)} = 0$

226. Qarışıq sistemi həll edin:
$$\begin{cases} 2^{x+2} = \frac{49}{4}x^2 + 4, \\ 2^{x+2} - 4 \leq x^2(14 - 2^{x+2}) \cdot 2^x. \end{cases}$$

227. Məlumdur ki, hər hansı $x, y, z (x \neq y)$ ədədlər üçlüyü üçün $\log_{x^5y^2z}^{\left(\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{z}\right)}$ və $\log_{x^2y^5z}^{\left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right)}$ ifadələri eyni bir ədədə bərabərdir. Bu ədədi tapın.

228. Birinci həddi 1-ə bərabər, ortaq vuruğu müsbət olan sonlu həndəsi silsilənin hədləri cəmi $\frac{40}{27}$ -a, dəyişən işarəli həmin hədlərin (birincinin işarəsi “müsbət”, ikincinin işarəsi isə “mənfi” və s.) cəmi isə $\frac{20}{27}$ -yə bərabərdir. Bu silsilənin ortaq vuruğunu tapın.

229. Tənliyi həll edin: $\sin 14x = \cos 4x - \sin 6x$.

230. Tənliyi həll edin: $2^{2x-5} - 4^{x-2} = 32^{\frac{2x}{5}} - 66$.

231. Bərabərsizliyi həll edin: $2 \log_4^{(x+1)} - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{(x-5)} < 3$.

232. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - |3y - 1| = 0 \\ 4\sqrt{9y^2 - 6y + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0. \end{cases}$$

233. Tənliyi həll edin: $\sin x - \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$.

234. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{2x+1} = x+4$.

235. Bərabərsizliyi həll edin: $\frac{2}{\log_3^{(x+1)}} \leq \frac{1}{\log_9^{(x+5)}}$.

236. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} 2^{\left(\frac{y+3x}{x-y}\right)} = 16 \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \end{cases}$$

237. a -nın hansı qiymətində $\cos 2x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$ tənliyinin $0 \leq x < 2\pi$ aralığında yalnız bir həlli vardır?

238. Tənliyi həll edin: $\cos 7x + \cos 3x + 2 \sin^2 x = 1$.

239. Bərabərsizliyi həll edin: $\left| 2 - \frac{1}{x-4} \right| < 3$.

240. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} 2^{\frac{6}{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \frac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$$

241. Tənliyi həll edin: $\sqrt{\frac{4}{x-2}} + 1 = \frac{1}{x-2}$.

242. İsbat edin ki, $y = \sqrt{x-3}$ və $y = x+2$ funksiyalarının qrafikləri kəsişmir.

243. Tənliyi həll edin: $(x-2)\sin x = 2x \sin x$.

244. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\log_3^{(4-x)}}$ funksiyasının təyin oblastını tapın.

245. b parametrinin hansı qiymətlərində $9^x - 2(3b-2) \cdot 3^x + 5b^2 - 4b = 0$ tənliyinin iki müxtəlif kökü vardır?

246. $y = \log_2^{(9-2^x)}$ və $y = 10^{\lg(3-x)}$ funksiyaların qrafiklərinin neçə kəsişmə nöqtəsi vardır? Bu nöqtələrin koordinatlarını tapın.

247. Bərabərsizliyi həll edin: $|x^2 - 8x + 15| < x - 3$.

248. Surətini 85%, məxrəcini isə 25% azaltdıqda kəsir neçə faiz kiçilər?

249. Ədədi silsilə əmələ gətirən üç ədədin cəmi 189-dur. Birinci ədəd üçüncüdən 3 dəfə çox olarsa, bu ədədləri tapın.

250. $\sqrt{2} \sin 2x = \sqrt{3}(\sin x \cdot \cos x) - 2\sqrt{2}$ tənliyinin ən kiçik müsbət həllini tapın.

251. $|5x - 8| < 4$ bərabərsizliyinin bütün tam həllərini tapın.

252. Tənliyi həll edin: $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 = 0$

253. p parametrinin bütün həqiqi qiymətlərində tənliyi həll edin:
 $\sin^4 x + \cos^4 x = p^2 - 1$.

254. Tənliklər sistemi hansı prinsipə görə iki qrupa bölünmüşdür?

$$1. \begin{cases} 3x + y = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 0 \end{cases}, \begin{cases} 3x - y = 11 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \frac{x}{9} + \frac{y}{3} = \frac{2}{3} \\ x - 3y = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2y + 7x = 4 \\ 3x - 5y = 31, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 4 \\ 6 - 5y = x. \end{cases}$$

255. İfadənin qiymətini hesablayın: $\frac{2 \sin 10^\circ + \sin 50^\circ}{2 \sin 80^\circ - \sqrt{3} \sin 50^\circ}$.

256. Bərabərsizliyi həll edin: $2x^2 + \sqrt{2x^3} \geq x$.

257. Tənliyi həll edin: $x \log_2^{(\log_2 x)} = \log_2^{(7-6 \log_2 x)}$.

258. Bərabərsizliyi həll edin: $||2x^2 - 7x| - 3| \leq 2x^2 + 7x + 4$.

259. İki a_n və b_n ədədi silsilələri verilir. Məlumdur ki, $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$, $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$ cəmləri isə həndəsi silsilə əmələ gətirir. İsbat edin ki, $a_1 = b_3$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_1$.

260. c və d parametrlərinin hansı qiymətlərində $c \leq 7^{\frac{3x-1}{9x^2-6x+5}} < d$ bərabərsizliyi x -in bütün həqiqi qiymətlərində ödənilir?

261. A məntəqəsindən B məntəqəsinə doğru eyni zamanda “Cip”, “Mercedes” və “Volqa” maşınları çıxır. “Cip” maşını B məntəqəsinə çatan kimi dərhal geriyyə dönür və “Mercedes”-lə B-dən 18 km, “Volqa” ilə isə 25 km məsafələrdə görüşür. “Mercedes” də B-yə çatanda dərhal geriyyə gönür və “Volqa” ilə B-dən 8 km məsafədə görüşür. A-dan B-yə qədər məsafəni tapın (Maşınların sürətləri sabitdir).

262. Tənliyi həll edin: $3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2|\sqrt{3x + 18} - 2|$.

263. a -nın hansı qiymətlərində
$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

bərabərsizliklər sisteminin yeganə həlli vardır?

264. Bərabərsizliyi həll edin: $26^x + 27 \geq 9(6 - \sqrt{10})^x + 3(6 + \sqrt{10})^x$.

265. x -in hansı qiymətində $\log_2^{(2x^2+4x)}$, $\log_2^{(8-x^2-19x)}$ və $\log_2^{(x^2-15x+7\frac{1}{2})}$ ədədləri hər hansı bərabəryanlı üçbucağın tərəflərinin uzunluqlarıdır?

266. Hər biri rəqəmlərinin kvadratları cəmindən 517 çox olan bütün üçrəqəmli ədədləri tapın.

267. Ədədi silsilənin ilk üç həddinin cəmi 27, ilk beş həddinin cəmi isə 80-dir. Ədədi silsilənin neçə ilk həddinin cəmi 486-ya bərabərdir?

268. Tənliklər sisteminin bütün həllərini tapın:
$$\begin{cases} 3 \sin x + \cos y = 0 \\ 6 \cos x - 2 \sin y = 7 \end{cases}$$
.

269. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} 2 \cdot 5^{1-y} = \log_3^{(x^2)} \\ 5^y + \log_3 x = 4 \end{cases}$$
.

270. Ədədi silsilənin ilk dörd həddinin cəmi 56-ya bərabərdir. Bu silsilənin bütün hədləri natural ədəddir, on ikinci həddi 67-dən böyük, 74-dən kiçikdir. Bu silsilənin 20-ci həddini tapın.

271. Bərabərsizliyi həll edin: $|x^2 - 8x + 15| \leq |15 - x^2|$.

272. Firma iki səhm paketi alıb, sonra onları 7 mil.680 min manata sataraq 28% gəlir əldə etmişdir. Satışda birinci paketin gəliri 40%, ikincininki isə 20% olmuşdursa, firma hər paketi neçəyə almışdır?

273. Tənliyi həll edin: $\sqrt{7} \sin x - 6 \sin 2x + \sqrt{7} \sin 3x = 0$.

274. Bərabərsizliyi həll edin: $|x^2 - 13x + 36| \geq |36 - x^2|$.

275. Əlverişsiz hava şəraiti nəticəsində birinci sahədən çuğundur yığımı planı 20%, ikincidən isə 15% yerinə yetirilmişdir. Bununla iki sahədən 328 ton çuğundur yığılmışdır ki, bu da ümumi planın 82%-ni təşkil edir. Hər sahədən çuğundur yığımı planını müəyyən edin.

276. Tənliyi həll edin: $\cos x + \cos 3x = \sqrt{3} \cos 2x$.

277. Tənliyi həll edin: $|x^2 - 8x + 15| = |15 - x^2|$.

278. Maqazin iki əşya alıb, sonra onları birlikdə 39900 manata sataraq 40% gəlir əldə etmişdir. Birinci əşya 30%, ikinci isə 55% gəlirlə satılmışdırsa, maqazin bunların hər birini neçəyə almışdır?

279. Tənliyin bütün həllərini tapın: $5 \sin^2 2x + 8 \cos^3 x = 8 \cos x$.

280. Tənliyi həll edin: $\arcsin\left(\frac{6x-7}{2x-1}\right) = 2\pi - \pi x$.

281. Tənliyin tam həllərini tapın: $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7$.

282. Tənliyi həll edin: $2 + \cos 2x = 4 \cos^2 x$.

283. A məntəqəsindən B məntəqəsinə eyni zamanda 25 km/saat sürətlə velosipedçi və motosikletçi çıxır. Motosikletçi B-yə çatan kimi dərhal geriye dönüb A-ya doğru yollanır və müəyyən vaxtdan sonra velosipedçi ilə görüşür. Motosikletçinin sürəti 37,5% az olsa idi görüş yerindən B məntəqəsinə qədər məsafə 3 dəfə az olardı. Motosikletçinin sürətini tapın.

284. k parametrinin hansı qiymətlərində $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{(x-2k)}$ və

$y = \log_2^{(x-2k^3-3k^2)}$ funksiyalarının qrafikləri koordinatları tam ədədlər olan nöqtələrdə kəsişər?

285. Bərabərsizliyi həll edin: $\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}^{(x^2-9)} \geq 0$.

286. Tənliyi həll edin: $|\cos x| - \sqrt{3} \sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1$.

287. a, b, c ədədləri göstərilən ardıcılıqda ədədi silsilə əmələ gətirir, $a - c, c - b, 2a$ ədədləri isə bu ardıcılıqda həndəsi silsilə əmələ gətirir. $2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a$ ifadəsi hansı minimal qiymət ala bilər?

288. Tənliyi həll edin: $4\arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}$.

289. Tənliyi həll edin: $\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x} = \sqrt{15}$.

290. Bərabərsizliyi həll edin: $\log_2 \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{3x+4}{4x-8}} \leq 0$.

291. Tənliyi həll edin: $3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$.

292. Tənliyi həll edin: $\log_{\sin x}^{(3\sin x - \cos 2x)} = 0$.

293. Son illərdə N şəhərində əhalinin sayı 4% azalmışdır, işsizlərin sayı isə 5% artmışdır. Bir il əvvəl işsizlər 8% olmuşdursa əhalinin neçə faizi onlardan ibarətdir?

294. Bərabərsizliyi həll edin: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{|x|} \geq 2$.

295. a parametrimin hansı qiymətlərində $ax^2 + (2a+2)x + (a+3) = 0$ tənliyinin kökləri arasındakı məsafə 1-dən böyük olar?

296. Tənliyi həll edin: $\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} = 0$.

297. Tənliyi həll edin: $\frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}^{(2x^2-1)}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}}^x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}^x}$.

298. Təcrübə zamanı müəyyən həcmidə turşunun suda əridilməsilə A məhlulu, A məhluluna müəyyən həcmidə su əlavə etməklə qatılığı (konsentrasiyası – turşunun həcmnin məhlulun ümumi həcminə nisbəti) 40% az olan B məhlulu, B məhluluna, onu almaq üçün A-ya əlavə edilən sudan iki dəfə çox yeni miqdarda su əlavə etməklə, C məhlulu alınmışdır. B məhlulunun qatılığı C-nin qatılığından neçə dəfə çoxdur?

299. Tənliyi həll edin: $\left(\frac{5}{7}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \frac{125}{343}$

300. Tənliklər sistemini həll edin:
$$\begin{cases} \frac{xy}{2} + \frac{5}{2x+y-xy} = 5, \\ 2x+y + \frac{10}{xy} = 4+xy. \end{cases}$$

“Cəbr qısaldımları (ixtisarları), sadələşdirmələri və xüsusən adədlərə aid müxtəlif məsələlər həllinin ümumiləşdirilməsini öyrənir”
Bertran İ.

III. II fəslə aid həllər, şərhlər və cavablar

1.

$S=28 \text{ km};$ $t_2 - t_1 = 35 \text{ dəq}$ $g_1 = x \text{ km/saat}$ $g_2 = (28 - x) \text{ km/saat}$	$S = g t; \quad t = \frac{S}{g};$ $t_1 = \frac{S}{g_1} = \frac{28}{x} \quad \text{saat};$ $t_2 = \frac{S}{g_2} = \frac{28}{28 - x} \text{ saat};$ $t_2 - t_1 = (35 \text{ dəq}) = \frac{7}{12} \text{ (saat)}$
--	--

Şərtə görə tənlik quraq:

$$\frac{28}{28 - x} - \frac{28}{x} = \frac{7}{12} \Rightarrow g_1 = x = 16 \text{ km/saat};$$

$$g_2 = 28 - x = 12 \text{ km/saat.}$$

Həlli yoxlamaq lazımdır:

$$t_1 = \frac{S}{g_1} = \frac{7}{4} \text{ saat}; \quad t_2 = \frac{S}{g_2} = \frac{7}{3} \text{ saat}; \quad t_2 - t_1 = \frac{7}{3} - \frac{7}{4} = \frac{7}{12} \text{ (saat.)}$$

2.

$g_1 = 20 \text{ km/saat};$ $g_2 = 32 \text{ km/saat}$ $t_1 - t_2 = 8 \text{ saat}$ $S = 350 \text{ km}$ $S_1 = x \text{ km?}$ $S_2 = (350 - x) \text{ km?}$	$S = g t; \quad t = \frac{S}{g};$ Şərtə göstərilən asılılıqdan ($t_1 - t_2 = 8$ saat) istifadə edərək tənlik qura bilərik: $t_1 = \frac{S_1}{g_1} = \frac{x}{20} \quad \text{(saat);}$ $t_2 = \frac{S_2}{g_2} = \frac{350 - x}{30} \text{ saat}$
--	--

Onda şərtə görə $\frac{x}{20} - \frac{350-x}{30} = 8$, buradan $x = 236$ km.

Məsələnin həllini yoxlamaq da lazımdır:

$$t_1 = \frac{S_1}{g_1} = \frac{236 \text{ km}}{20 \text{ km / saat}} = 11 \frac{4}{5} \text{ saat};$$

$$t_2 = \frac{S_2}{g_2} = \frac{(350-236) \text{ km}}{30 \text{ km / saat}} = 3 \frac{4}{5} \text{ saat};$$

$$t_1 - t_2 = 11 \frac{4}{5} - 3 \frac{4}{5} = 8 \text{ (saat)}.$$

3.

$N_1 = N_2 = 375 \text{ W};$ $U_1 = 220 \text{ V};$ $U_2 = 127 \text{ V}.$ $J_1 = x \text{ A} ?$ $J_2 = (x + 1,25) \text{ A} ?$	$N = JU, \quad U = \frac{N}{J};$ $U_1 - U_2 = 93 \text{ V};$ $U_1 = \frac{N_1}{J_1} = \frac{375}{x} \text{ V};$ $U_2 = \frac{N_2}{J_2} = \frac{375}{x + 1,25} \text{ V}.$
--	--

Şərtə görə $\frac{375}{x} - \frac{375}{x + 1,25} = 93$ tənliyini alırıq, buradan

$$375(x + 1,25 - x) = 93(x^2 + 1,25x) \quad \text{və ya} \quad x^2 + 1,25x - 5 \approx 0;$$

$$x \approx \frac{-1,25 \pm \sqrt{1,25^2 + 20}}{2} \approx \frac{-1,25 \pm 4,64}{2}; \quad x_1 \approx -2,25 \quad (\text{mənfi}$$

olduğundan bu kök yaramır); $x_2 \approx 1,7$; $J_1 \approx 1,7 \text{ A}$; $J_2 \approx 2,95 \text{ A}$.

Yoxlanması:

$$N_1 = J_1 U_1 \approx 1,7 \text{ A} \cdot 220 \text{ V} \approx 374 \text{ W};$$

$$N_2 = J_2 U_2 \approx 2,95 \text{ A} \cdot 127 \text{ V} \approx 375 \text{ W};$$

$$N_1 \approx N_2$$

Göründüyü kimi nəticə təqribi alındı. Şagirdlərə başa salmaq lazımdır ki, təcrübədə adətən tənliklərin təqribi köklərini tapmaq lazım gəlir.

4.

$$F = 120 \text{ dn} ;$$

$$a_1 - a_2 = 1 \text{ sm} / \text{san}^2$$

$$F = ma ; a = \frac{F}{m} ;$$

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{120}{x} \text{ sm} / \text{san}^2 ;$$

$$a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{120}{x+4} \text{ sm} / \text{san}^2 .$$

$$m_1 = xq ?$$

$$m_2 = (x+4)q ?$$

Şərtə görə $\frac{120}{x} - \frac{120}{x+4} = 1$ tənliyini və buradan $m_1 = 20q$,

$$m_2 = 24 \text{ alırıq.}$$

Yoxlanması:

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{120 \text{ dn}}{20q} = 6 \text{ sm} / \text{san}^2 ;$$

$$a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{120 \text{ dn}}{24q} = 5 \text{ sm} / \text{san}^2 ;$$

$$a_1 - a_2 = 6 - 5 = 1 (\text{sm} / \text{san}^2)$$

1-4 məsələlərindən fizika ilə riyaziyyatın əlaqəsinin göstərilməsi, kvadrat tənlik anlayışının daxil edilməsi və təkrarı məqsədilə istifadə etmək məqsəduyğundur.

5. $x = 19$, $x = 62$ olduqda $a \cdot 19^3 + b \cdot 19^2 + c \cdot 19 = 1$ (1)
 $a \cdot 62^3 + b \cdot 62^2 + c \cdot 62 = 2$ (2) alınır. (2)-dən (1)- i çıxıb
 $a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19) = 1$ və ya
 $a(62 - 19)(62^2 + 62 \cdot 19 + 19^2) + b(62 - 19)(62 + 19) + c(62 - 19) = 1$
 alırıq. Sonuncu bərabərliyin sol tərəfi $62 - 19 = 43$ -ə bölünür, sağ tərəf isə 43-ə bölünmür. Deməli, a, b, c, d tam ədədlər deyil.

6. Şərtə görə $x \neq 0$, odur ki, verilmiş tənliyi $\frac{4x+3y}{2x} = E\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)$ və ya $2 + \frac{3y}{2x} = E\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$ şəkildə yazmaq

olar. $\frac{3y}{2x} = k$ işarə edək və bilmək lazımdır ki, k tam ədəddir. Sonra

$$E\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = 1 + E\left(\frac{y^2}{x^2}\right) \text{ olduğunu nəzərə alsaq, } 1 + k = E\left(\frac{4k^2}{9}\right) \text{ və}$$

ya $1 + k \leq \frac{4k^2}{9} \leq k + 2$ alırıq:

$$\text{Buradan } \begin{cases} 4k^2 - 9k - 9 \geq 0 \\ 4k^2 - 9k - 18 < 0 \end{cases} \text{ bərabərsizliklər sistemini yazırıq.}$$

Birinci bərabərsizlikdən $k \geq 3$ və ya $k \leq -\frac{3}{4}$, ikinci bərabərsizlikdən

isə (0,1 dəqiqliklə) $-1,2 \leq k \leq 3,6$ alırıq. Beləliklə, $-1,2 < k \leq -0,75$ və ya $3 \leq k < 3,6$. k -tam ədəd olduğundan alırıq: $k = -1$ və $k = 3$.

Odur ki, $\frac{3y}{2x} = -1$, $\frac{3y}{2x} = 3$ və nəticədə $y = \frac{2}{3}x$, $y = 2x$, burada x -sıfırdan fərqli ixtiyari tam ədəddir.

7. Verilmiş tənliyin köklərini x_1 və x_2 , axtarılan tənliyin köklərini y_1, y_2 , əmsallarını isə p, q ilə işarə edək.

Viyet teoreminə görə $x_1 + x_2 = -6$, $x_1 \cdot x_2 = 10$; $y_1 + y_2 = -p$, $y_1 \cdot y_2 = q$. Məsələnin şərtinə görə $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, odur ki, $p = -(y_1 + y_2) = -(x_1^2 + x_2^2)$; $q = y_1 y_2 = x_1^2 x_2^2$.

İndi $x_1^2 + x_2^2$ və $x_1^2 \cdot x_2^2$ uyğun olaraq $x_1 + x_2$ və $x_1 x_2$ ilə ifadə etməliyik. Aşkardır ki, $x_1^2 x_2^2 = (x_1 \cdot x_2)^2 = 10^2 = 100$. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-6)^2 - 2 \cdot 10 = 16$, Beləliklə, $p = -16$, $q = 100$. Odur ki axtarılan tənlik $y^2 - 16y + 100 = 0$ dir.

8. 7 məsələsinə analogi olaraq həll edilir. Burada $m = -(x_1^3 + x_2^3)$ və $n = x_1^3 \cdot x_2^3$ -ni hesablamaq lazımdır. Aşkardır ki, $n = x_1^3 \cdot x_2^3 = (x_1 x_2)^3 = 10^3 = 1000$. Sonra $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = (-6)^3 - 3 \cdot 10 \cdot (-6) = -36$, Odur ki, $m = -36$. Deməli axtarılan tənlik $z^2 + 36z + 1000 = 0$ dir.

7 və 8 çalışmalarından kvadrat tənlik anlayışının, Viyet teoreminin təkrarı ilə yanaşı yuxarı siniflərdə öyrənilən simmetrik çoxhədlini əsas simmetrik çoxhədlilərlə ifadə etməyə hazırlıq məqsədilə istifadə etmək olar.

9. Yazılışı sadələşdirmək üçün modul işarəsi altındakı ifadələrin köklərini $R_1, R_2, \dots$, ilə işarə etmək və onları artma ardıcılığında yerləşdirmək məqsədəuyğundur. Odur ki, baxılan tənliyi $|x+1| - |x-3| + |6x-3| - x - 1 = 0$ şəkildə yazaq. Onda

$$R_1 = -1; R_2 = \frac{1}{2}; R_3 = 3.$$

$$a) x \leq -1; -x-1+x-3-6x+3-x-1=0; x = -\frac{2}{7};$$

$$b) -1 \leq x \leq \frac{1}{2}; x+1+x-3-6x+3-x-1=0; x=0;$$

$$c) \frac{1}{2} \leq x \leq 3; x+1+x-3+6x-3-x-1=0; x = \frac{6}{7}$$

$$c) x \geq 3; x+1-x+3+6x-3-x-1=0; x=0; \text{ Beləliklə, } x_1 = 0; x_2 = \frac{6}{7}.$$

10. Məchulu modul işarəsi altında olan tənlikdə olduğu kimi (Məsələ 9) modul işarəsi altında olan ifadələrin köklərini $R_1, R_2, \dots$ ilə işarə edək və onları artma ardıcılığında yazaq:

$$|2x+1| - |x-2| - 5x + 1 > 0; R_1 = -\frac{1}{2}; R_2 = 2;$$

$$a) x \leq -\frac{1}{2}; -2x - 1 + x - 2 - 5x + 1 > 0; x < -\frac{1}{3}; x \leq -\frac{1}{2};$$

$$b) -\frac{1}{2} \leq x \leq 2; 2x + 1 + x - 2 - 5x + 1 > 0; -\frac{1}{2} \leq x < 0;$$

$$c) x \geq 2; 2x + 1 - x + 2 - 5x + 1 > 0; x < 1$$

11. Aşkıdır ki, $R=0$ (məsələ 9 və 10-a baxmalı)

$$a) x \leq 0; y = 1; b) x \geq 0; y = 2x + 1 \text{ (Şəkil 1.)}$$

9-11 dən məchulu modul
işarəsi altında olan tənliklərin,
bərabərsizliklərin həlli və məchulu
modul işarəsi altında ifadə daxil
olan funksiyanın qrafikinin
qurulması qaydalarını təkrar etmək
məqsədilə istifadə etmək lazımdır.

12. 1) Fərz edək ki,

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ hədlər fərqi
d olan ədədi silsilədir. Aşkıdır ki,
aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$(a_n^2 + da_n)^2 - (a_n^2 - da_n)^2 = 4da_n^2;$$

$$(a_{n-1}^2 + da_{n-1})^2 - (a_{n-1}^2 - da_{n-1})^2 = 4da_{n-1}^2;$$

$$(a_{n-2}^2 + da_{n-2})^2 - (a_{n-2}^2 - da_{n-2})^2 = 4da_{n-2}^2;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(a_3^2 + da_3)^2 - (a_3^2 - da_3)^2 = 4da_3^2;$$

$$(a_2^2 + da_2)^2 - (a_2^2 - da_2)^2 = 4da_2^2;$$

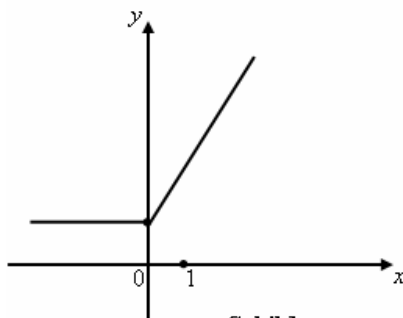
$$(a_1^2 + da_1)^2 - (a_1^2 - da_1)^2 = 4da_1^2$$

$$a_k^2 - da_k = a_{k-1}^2 + da_{k-1} = (a_k a_{k-1}) \quad \text{olduğundan,} \quad \text{burada}$$

$k = 2, 3, 4, 5, \dots, n$ bütün n bərabərliyi tərəf-tərəfə toplayıb

$$(a_n^2 + da_n)^2 - (a_1^2 - da_1)^2 = 4d(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3) \quad \text{və} \quad \text{buradan}$$

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = \frac{(a_n a_{n+1})^2 - (a_1 a_0)^2}{4d} \quad \text{tələb edilən düsturu alırıq.}$$



Şəkil 1.

Göründüyü kimi 1,6,11,...,96 ədədi silsilədir. 2) Burada $a_0 = -4$;

$a_{n+1} = a_{21} = 101$; $d = 5$. 12(1) –dəki düstura görə

$$S = \frac{(96 \cdot 101)^2 - 4^2}{20} = \frac{(9696 - 4)(9696 + 4)}{20} =$$

$= 48460 \cdot 97 = 4700620$. Bu məsələnin həlli ilə əlaqədar ədədi silsilə anlayışının təkrarı zamanı şagirdlərə ümumi haldan xüsusiyyə keçməyin əhəmiyyətini bir nümunə üzərində izah etməyi lazım bilirik.

13. Məsələnin şərtinə əsasən

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{15}, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} = \frac{1}{5}, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{6}, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} = \frac{1}{4} \end{array} \right. \quad (4)$$

beş məchullu dörd tənliklər sistemini alırıq, burada x, y, z, t, u hər bir nəfərin uyğun olaraq iş vaxtıdır (saatla). Göstərilən tənliklər sisteminə 4 tənlik və beş məchul daxil olduğundan məchulları bu vəziyyətdə tapmaq mümkün deyil. Lakin, həll zamanı şagirdləri başa salmaq lazımdır ki, məsələdə hər bir nəfərin işləmə müddətini deyil, onların birlikdə işi neçə saatda yerinə yetirmələri tələb olunur. Başqa

sözlə, $T = 1 : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} \right)$ (A) kəmiyyətini tapmaq lazımdır.

Alınmış sistemin bütün tənliklərini tərəf-tərəfə toplayıb

$$3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) + 2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} \right) = \frac{3}{4} \quad \text{və} \quad \text{ya} \quad 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12} \quad (5) \quad \text{alırıq.} \quad (4) \quad \text{və} \quad (5) \quad (\text{A})\text{-da nəzərə alıb}$$

$T = 1 : \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = 3$ (saat) tapırıq. Deməli, bütün işi 5 nəfər 3 saata qurtarır.

Bəzən bu və ya digər məsələnin həlli ilə əlaqədar qeyri-müəyyən tənlik və ya tənliklər sistemi alınır. Burada məchulların sayı tənliklərin sayından çox olduğundan ilk baxışda həllin mümkün olmadığı fikri yaranır. Lakin tənlik və ya tənliklər sistemi üçün bu belədir. Məsələnin şərtinə diqqətlə yanaşdıqda, bu işin asanlıqla yerinə yetirilməsinin mümkünlüyü aydın olur.

14. Fərz edək ki, paraxodun durğun sudakı sürəti x km/saat, suyun axma sürəti y km/saat, A və B məntəqələri arasındakı məsafə z km-dir.

Onda şərtə görə $\begin{cases} x + y = \frac{z}{a} \\ x - y = \frac{z}{b} \end{cases}$ tənliklər sistemini qurmaq olar.

Paraxodun durğun suda AB məsafəsini qət etmək üçün sərf etdiyi $\frac{z}{x}$

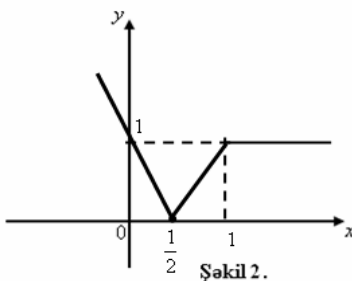
saat və mühərrik işə salındıqda sərf edilən $\frac{z}{y}$ saat müddətlərini tapmaq

lazımdır. Alınmış tənliklər sistemini həll edib $\frac{z}{x} = \frac{2ab}{a+b}$ və

$\frac{z}{y} = \frac{2ab}{b-a}$ alırıq.

15. Tərəzinin sağ və sol qollarının uzunluğu uyğun olaraq x , y , cismin həqiqi çəkisi isə z kq olsun. Baxılan cismi tərəzinin sol gözünə qoyub p_1 çəki daşı ilə tarazlaşdıraq: $x = yp_1$ (1), sonra isə onu tərəzinin sağ gözünə qoyub p_2 çəki daşı ilə tarazlaşdıraq: $yz = xp_2$ (2). (1) və (2) bərabərliklərini tərəf-tərəfə vurub $xyz^2 = xyp_1p_2$ və ya $z = \sqrt{p_1p_2}$ alırıq.

16. 1) $x - 1 > 0$ olduqda
 $|x - 1| = x - 1$ və
 $y = |x - 1 - x| = 1$; 2) $x - 1 < 0$
 olduqda $|x - 1| = 1 - x$ və
 $y = |1 - x - x| = |1 - 2x|$. İndi
 iki hala baxaq: $1 - 2x \geq 0$ və
 ya $x \leq \frac{1}{2}$ olduqda $y = 1 - 2x$;



$1 - 2x < 0$ və ya $x \geq \frac{1}{2}$
 olduqda $y = 2x - 1$. Beləliklə, nəticədə $x \geq 1$ olduqda $y = 1$,
 $\frac{1}{2} < x < 1$ olduqda $y = 2x - 1$, $-\infty < x < \frac{1}{2}$ olduqda $y = 1 - 2x$
 alırıq (Şəkil 2).

17. Şərtə verilən ifadəni $(x - y - 7)^2 + 5(y - 2)^2 + 3$ şəkildə
 yazmaq olar. $x - y - 7 = 0$, $y - 2 = 0$ və ya $x = 9, y = 2$ olduqda ən
 kiçik 3 qiyməti alınır.

18. Verilmiş tənliyi $(x - 2y)^2 + y^2 = 169$ şəkildə yazı bilərik.
 169 ədədini iki üsulla tam müsbət ədədlərin kvadratlarının cəmi şəkildə
 göstərmək olar: $169 = 5^2 + 12^2 = 13^2 + 0^2$. Odur ki,

1) $x - 2y = 12, y = 5$;

2) $2y - x = 12, y = 5$;

3) $x - 2y = 5, y = 12$;

4) $2y - x = 5, y = 12$;

5) $x - 2y = 0, y = 13$

Nəticədə dörd həll alırıq: $x_1 = 22, y_1 = 5$; $x_2 = 29, y_2 = 12$;
 $x_3 = 19, y_3 = 12$; $x_4 = 26, y_4 = 13$.

19. Aşkardır ki, verilmiş funksiyanı belə də

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 + (1 - x), & x \leq -3; \\ 3 - 2x - x^2 + (1 - x), & -3 \leq x \leq 1; \\ x^2 + 2x - 3 + (x - 1), & x > 1 \end{cases} \text{ yazmaq olar.}$$

Göründüyü kimi $y = x^2 + 2x - 3$ funksiyası $-3 \leq x < 1$ olduqda mənfi qiymətlər alır, x -in qalan qiymətlərində mənfi deyil; $y = x - 1$ funksiyası $x \geq 1$ olduqda mənfi olmayan qiymətlər alır və $x < 1$ olduqda isə mənfidir. Odur ki, $y = |x^2 + 2x - 3| + |x - 1|$ alırıq.

20. Verilmiş tənliyi $2(\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x}) = p+x - (p-x)$ (1) şəkildə yazaq. $p > 0$ olduğundan $x = 0$ ola bilməz. Odur ki, (1) tənliyinin hər tərəfini $\sqrt{p+x} - \sqrt{p-x}$ ifadəsinə bölmək olar. Onda $\sqrt{p+x} - \sqrt{p-x} = 2$ alırıq. Sonuncu tənliyin hər tərəfini kvadrata yüksəldib sadə çevirmələr apardıqdan sonra $p \geq 1$ olduqda $x = 2\sqrt{p-1}$ alırıq; $p < 1$ olduqda tənliyin həlli yoxdur. Yerinə yetirilən çevirmə birgüclülük olmadığından alınan nəticəni yoxlamaq lazımdır. Alınmış qiyməti verilmiş tənliyin sol tərəfində yerinə yazıb alırıq:

$$\sqrt{p+2\sqrt{p-1}} + \sqrt{p-2\sqrt{p-1}} = |\sqrt{p-1}+1| + |\sqrt{p-1}-1| = \begin{cases} 2, & p \leq 2, \\ 2\sqrt{p-1}, & p \geq 2. \end{cases}$$

Beləliklə $p \geq 2$ olduqda $x = 2\sqrt{p-1}$, $p < 2$ olduqda tənliyin həlli yoxdur.

21. $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{3x-3} - 10$ funksiyasına baxaq. Onun təyin oblastı $x \geq 1$ -dir. Məlumdur ki, hər bir elementar funksiya təyin olduğu oblasta və kökü olmadığı aralıqda işarəsini dəyişmir.⁵

⁵ Əlbəttə bu teoremi ciddi isbat etmək lazım gəlir, şagirdlərin isə əyani – həndəsi olaraq bu haqda kifayət qədər aydın təsəvvürləri vardır, bəzi dərsliklərdə olduğu kimi onu isbatsız qəbul etmək olar

Funksiyanın təyin olduğu və kökü olmadığı oblastda onun işarəsini müəyyən etmək üçün bu aralıqdan götürülmüş ixtiyari ədədi argumentin yerində yazıb alınan ədədin işarəsini təyin etmək kifayətdir. İndi göstərilən xassədən istifadə edək. Bunun üçün $f(x)$ -in kökünü tapaq. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-3} - 10 = 0$. Bu tənliyi həll edib $x_1 = 13$ ($x_2 = 193$ kənar kökdür). Beləliklə baxılan funksiyanın kökü $x = 13$ dür. İndi $y = f(x)$ funksiyanın işarəsini iki aralıqda araşdırmaq qalır: $[1; 13)$ və $(13; \infty)$. Verilmiş bərabərsizlik $f(x) < 0$ bərabərsizliylə birgüclü olduğundan $f(x) < 0$ olduğu aralığı müəyyən etmək kifayətdir:

a) $1 \leq x < 13$. $f(1) = \sqrt{4} + 0 - 10 = -8 < 0$, yəni $1 \leq x < 13$ olduqda $f(x) < 0$; b) $x > 13$. $f(20) = \sqrt{23} + \sqrt{57} - 10 > 0$. Yəni $x > 13$ olduqda $f(x) > 0$. Beləliklə, alırıq ki, $1 \leq x < 13$ verilmiş bərabərsizliyin ümumi həllidir.

$$22. f(x) = \sqrt{2x+15} - \frac{10}{\sqrt{2x-1}} - \sqrt{2x-1} \text{ funksiyanına baxaq.}$$

Onun təyin oblastı $x > \frac{1}{2}$ şərtini ödəyən həqiqi ədədlər çoxluğudur. Bu

funksiyanın köklərini tapmaq üçün $\sqrt{2x+15} = \frac{10}{\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x-1}$

tənliyini həll edib $x = -12$ alırıq. Lakin verilmiş funksiyanın kökləri $x > \frac{1}{2}$ şərtini ödəməli olduğundan belə nəticəyə gəlirik ki, baxılan

funksiyanın kökü yoxdur. Beləliklə, $f(x)$ funksiyanın işarəsini $\left(\frac{1}{2}; -\infty\right)$ aralığında araşdırmaq qalır. $f(1) = \sqrt{17} - 10 - 1 < 0$,

deməli $\frac{1}{2} < x < \infty$ olduqda $f(x) < 0$. Beləliklə, $\frac{1}{2} < x < \infty$.

Funksional asılılıq ideyasının möhkəm və şüurlu mənimsənilməsində “bərabərsizlik” mövzusu xüsusi yer tutur. IX sinifin cəbr kursunda bu mövzuya baxmaq olduqca, yerindədir. İrrasional ifadələrin daxil olduğu bərabərsizliklərə şagirdlərin diqqətini cəlb etməklə, təkcə “bərabərsizlik” mövzusunun deyil, cəbr kursunun bir çox başqa məsələlərini müvəffəqiyyətlə təkrarına nail olmaq mümkündür.

23. İsbat etmək lazımdır ki, x -in ixtiyari tam qiymətlərində $9x^5 - 5x^3 - 4x$ ifadəsi hasili 120-yə bərabər olan qarşılıqlı sadə 3,5 və 8 ədədlərinə bölünür. Doğrudan da: 1) $9x^5 - 5x^3 - 4x = 9x^5 - 6x^3 - 3x + (x^3 - x) = 3(3x^5 - 2x^3 - x) + (x-1)x(x+1)$, buradan alınır ki, verilmiş ifadə 3-ə bölünür. 2) $9x^5 - 5x^3 - 4x = 10x^5 - 5x^3 - (x^5 - x) = 5(2x^5 - x^3 - x) - x(x-1) \cdot (x+1)(x^2 + 5x - 4) = 5(2x^5 - x^3 - x) - 5x(x-1)(x+1) - (x-2)(x-1) \cdot x(x+1)(x+2)$. Beş ardıcıl ədədin hasili 5-ə bölündüyündən verilmiş ifadə də 5-ə bölünür. 3) $9x^5 - 5x^3 - 4x = x[8x^4 - 8 + (x^4 - 5x^2 + 4)] = x[8(x^4 - 1) + (x^2 - 4) \cdot (x+1)(x-1)]$. x tək ədəddirsə, onda kvadrat mötərizəsindəki ifadə 8-ə bölünür. Çünki, iki ardıcıl $x-1$ və $x+1$ cüt ədədlərin hasili 8-ə bölünür, x cüt ədəddirsə onda aşkardır ki, $9x^5 - 5x^3 - 4x$ ifadəsi 8-ə bölünür.

24. Əksini fərz edək: Fərz edək ki, $\frac{m_1}{n_1}$ və $\frac{m_2}{n_2}$ elə ixtisar olunmaz

iki kəsrdir ki, $\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = p$; $\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = q$, burada p və q tam ədədlərdir. Onda

$\frac{m_1}{n_1}$ və $\frac{m_2}{n_2}$ ədədləri $x^2 - px + q = 0$ kvadrat tənliyinin

kökləridir. Lakin bu tənliyin kökləri kəsr ədəd ola bilməz. Doğrudan da

$\frac{m^2}{n^2} - p \frac{m}{n} + q = 0$ -dan $\frac{m^2}{n^2} = \frac{pm - qn}{n}$ və ya $\frac{m^2}{n} = pm - qn$

alınardı ki, bu da mümkün deyil. Çünki bərabərliyin sol tərəfi kəsr sağ tərəfi isə tam ədəddir. Beləliklə, fərziyyə doğru deyil və məsələnin hökmü doğrudur.

25. $\frac{15x-7}{5} = t$ götürüb və bu əvəzləmə vasitəsilə verilmiş

tənlikdən x -i kənar edib $\left[\frac{30t+117}{120} \right] = t$ (1) alırıq. $[a]$ işarəsinin

tərifinə görə sonuncu tənlikdən $0 \leq \frac{30t+117}{120} - t < 1$ alırıq. Bu ikiqat

bərabərsizliyi həll edib $-\frac{1}{30} \leq t < \frac{117}{90}$ tapırıq. t – tam ədəd

olduğundan (1) tənliyini yalnız $t_1 = 0$ və $t_2 = 1$ ödəyir. Onda

$\frac{15x-7}{5} = 0$ və $\frac{15x-7}{5} = 1$ tənliklərindən $x_1 = \frac{7}{15}$; $x_2 = \frac{4}{5}$ tapırıq.

26. Verilmiş tənlikdə əvvəl $x-1$ yerində x , sonra $1-x$ yerində $-x$ yazıb $f(x)$ və $f(-x)$ məchullarına nəzərən

$$\begin{cases} af(x) + bf(-x) = c(1+x) \\ bf(x) + af(-x) = c(1-x) \end{cases} \quad \text{tənliklər sistemindən:} \quad 1) \quad a^2 \pm b^2$$

olduqda $f(x) = \frac{c}{a-b}x + \frac{c}{a+b}$; 2) $a^2 = b^2, c \neq 0$ olduqda $f(x)$

yoxdur; 3) $a = b, c \neq 0$ olduqda, $f(x)$ ixtiyari tək funksiyaadır alırıq.

27. Məsələnin şərtinə görə $k = \frac{100x+10y+z}{x+y+z}$ nisbətinin ən kiçik

qiymətini tapmaq tələb olunur, burada x, y, z rəqəmlərdir. Odur ki, $1 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$, $0 \leq z \leq 9$ şərtlərini ödəyirlər.

$k = 1 + 9 \frac{11x+y}{x+y+z}$ olduğundan $z=9$ olmalıdır. Sonra

$k = 1 + \frac{11x+y}{9+x+y} = 1 + 9 \left(+ \frac{10x-9}{9+x+y} \right)$ olduğundan axtarılan üçrə-

qəmli ədəd üçün $y=9$. Nəhayət, $k = 10 + 9 \frac{10x-9}{x+18} = 100 - \frac{1701}{x+18}$ və

k ən kiçik qiymətini $x=1$ olduqda alır. Deməli, 199 ədədi üçün

$$k_{\min} = 10 \frac{9}{19}.$$

28. Verilmiş tənliyi $\frac{z}{x} = \frac{bz + cy}{ay}$ şəkildə yazmaq və $\frac{z}{y} = \frac{m}{n}$ yazmaq,

burada m, n tam ədədlərdir. Onda $\frac{z}{x} = \frac{bm + cn}{an}$ alırıq. Beləliklə,

$x : y : z = amn : n(bm + c) : m(bm + c)$. Deməli, x, y, z tam ədədlərdir.

29. AB məsafəsini S , motorlu qayıqların məxsusi sürətlərini $\mathcal{G}$, çayın axma sürətini a ilə işarə edək. Onda məsələnin şərtinə görə

$\frac{S}{\mathcal{G} + a} - \frac{S}{\mathcal{G} + a + x} = \frac{S}{\mathcal{G} - a - x} - \frac{S}{\mathcal{G} - a}$ tənliyini alırıq. Buradan

$$\frac{1}{\mathcal{G} + a} - \frac{1}{\mathcal{G} + a + x} = \frac{1}{\mathcal{G} - a - x} - \frac{1}{\mathcal{G} - a} \text{ və ya } \frac{1}{\mathcal{G} + a} + \frac{1}{\mathcal{G} - a} = \frac{1}{\mathcal{G} + a + x} + \frac{1}{\mathcal{G} - a - x},$$

$$\frac{\mathcal{G} - a + \mathcal{G} + a}{\mathcal{G}^2 - a^2} = \frac{\mathcal{G} - a - x + \mathcal{G} + a + x}{(\mathcal{G} + a + x)(\mathcal{G} - a - x)}, \quad \frac{2\mathcal{G}}{\mathcal{G}^2 - a^2} = \frac{2\mathcal{G}}{\mathcal{G}^2 - (a + x)^2},$$

$$\mathcal{G}^2 - a^2 - 2ax - x^2 = \mathcal{G}^2 - a^2 \Rightarrow x = -2a \text{ alırıq.}$$

Məsələnin şərtinə görə qurulan tənlik belə də ola bilər:

$$\frac{S}{\mathcal{G} + a - x} - \frac{S}{\mathcal{G} + a} = \frac{S}{\mathcal{G} - a} - \frac{S}{\mathcal{G} - a + x}, \text{ buradan isə}$$

$$\frac{1}{\mathcal{G} + a - x} - \frac{1}{\mathcal{G} + a} = \frac{1}{\mathcal{G} - a} - \frac{1}{\mathcal{G} - a + x} \Leftrightarrow \frac{1}{\mathcal{G} + a - x} + \frac{1}{\mathcal{G} - a + x} = \frac{1}{\mathcal{G} - a} + \frac{1}{\mathcal{G} + a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathcal{G} - a + x + \mathcal{G} + a - x}{(\mathcal{G} + a - x)(\mathcal{G} - a + x)} = \frac{\mathcal{G} + a + \mathcal{G} - a}{(\mathcal{G} - a)(\mathcal{G} + a)} \Leftrightarrow \frac{2\mathcal{G}}{\mathcal{G}^2 - a\mathcal{G} + \mathcal{G}x + a\mathcal{G} - a^2 + ax - \mathcal{G}x + ax - x^2} = \frac{2\mathcal{G}}{\mathcal{G}^2 - a^2}$$

$$\text{və ya } 2ax - x^2 = 0, x = 2a.$$

Məsələnin həlli ilə əlaqədar qeyd edək ki, ikinci qayığa diqqət verməyə ehtiyac yoxdur; eyni bir qayığın A-dan B-yə və sonra B-dən A-ya hərəkətini izləmək kifayətdir.

Məsələnin şərtində çayın axma istiqaməti göstərilmişdir. Göstərilən həldə əvvəlcə belə hesab edilir ki, çayın axma istiqaməti A-dan B-yə doğrudur. Onda $x = -2a$ cavabının mənası belədir: A-dan çıxan birinci qayıq sürətini artırmaq deyil azaltmalıdır; uyğun olaraq B-dən çıxan ikinci qayıq sürətini azaltmaq əvəzinə artırmalıdır.

Alınmış ikinci tənlik çayın axma istiqamətinin B-dən A-ya olmasına uyğundur. Beləliklə, yalnız bir cavab ola bilər: çayın axma istiqamətinin əksinə hərəkət edən qayıq öz sürətini $x = 2a$ qədər artırmalı, çayın axma istiqamətində hərəkət edən qayıq isə öz sürətini $x = 2a$ qədər azaltmalıdır.

Sonra məsələnin həllində AB məsafəsi S , qayıqların məxsusi sürətləri isə $\mathcal{Q}$ ilə işarə edilmişdir. Lakin bu kəmiyyətlər cavaba daxil olmadı. Başqa sözlə x -in yalnız çayın axma sürətindən asılı olduğu alındı. Nə üçün? Cavabda S -in olmaması müəyyən qədər aşkardır. Lakin $\mathcal{Q}$ -in cavabda olmadığına izahına ehtiyac vardır. Belə mühakimə etmək olar. Şərtə görə qayıqlardan birinin sürəti nə qədər artırsa, digərinin sürəti o qədər azalır; fiziki olaraq bu çayın axma sürətinin dəyişməsilə eynigüclüdür. Beləliklə, indi məsələnin şərtini belə ifadə etmək olar: “Çayın axma sürəti necə dəyişməlidir ki, bir qayığın yolda olması vaxtı, ikinci qayığın yolda olması vaxtının artması qədər, azalsın?”. Çayın axma istiqaməti əksinə dəyişərsə onda birinci qayığın yolda olması müddəti, ikinci qayığın yolda olma müddəti qədər olar və əksinə; beləliklə, bir qayığın yolda olma müddəti nə qədər artarsa, ikincinin yolda olma müddəti o qədər azalar. Çayın axma sürətinin dəyişməsi isə (axma sürətinin mütləq qiymətinin saxlanması ilə) qayıqların sürətlərinin iki dəfə artması ilə eynigüclüdür, yəni $x = 2a$ və $x = -2a$. İndi cavabda qayıqların məxsusi sürətlərinin və məsafənin olmaması aydındır.

30. Katerin məxsusi sürəti x km/saat olsun. Onda qayıq çayın axını istiqamətində $13\frac{1}{3} : (x + 4)$ (S'), axına qarşı isə $9\frac{1}{3} : (x - 4)$ (S) üzər.

Sal qayıqla görüşənə qədər $\left(13\frac{1}{3} - 9\frac{1}{3}\right) km = 4km$ məsafəni $4:4=1$

(s)-a üzər. Qayıq və sal görüşənə qədər yola eyni vaxt sərf etdiyindən

$\frac{13\frac{1}{3}}{x + 4} + \frac{9\frac{1}{3}}{x - 4} = 1$ tənliyini və buradan $x = 22\frac{2}{3} (km)$ alınır. İndi

çaydakı hadisənin mənzərəsini anlamağa çalışaq. Qayıq axın

istiqamətində $13\frac{1}{3} km$, axının əksinə isə $9\frac{1}{3} km$ üzər, bu məsafələrin

fərqi isə $\left(13\frac{1}{3} - 9\frac{1}{3}\right) \text{ km} = 4 \text{ km}$ dir. Beləliklə, bu müddətdə sal 4 km

məsafə qət edir. Çayın axma sürəti 4 km/saat olduğundan O məntəqəsindən görüş anına qədər üzməyə 1 saat sərf edir. “Qayıq - sal” sisteminə baxmaqla (sahillərdən asılı olmayaraq) alırıq ki, qayıq saldan görüşə qədər müddətdə, başqa sözlə $1:2=0,5$ (S) aralanmışdır. Yarım

saat ərzində (sahillərə nisbətən) qayıq $13\frac{1}{3}$ km yerini dəyişmişdir, odur

ki, onun sürəti $13\frac{1}{3} : 0,5 = 26\frac{2}{3}$ (km/saat) məxsusi sürəti isə

$26\frac{2}{3} - 4 = 22\frac{2}{3}$ (km/saat) olmuşdur.

Məsələnin şərtində qayığın sala eyni zamanda axın istiqamətində üzməyə başlaması verilibdir, lakin bu vəziyyət mühüm deyil. Qayıq salla eyni zamanda, lakin axının əks istiqamətində hərəkətə başlasa idi onda qayığın axın istiqamətində $13\frac{1}{3}$ km, axının əksinə isə $9\frac{1}{3}$ km üzməsi şərti saxlanılmaqla, həmin cavab alınardı.

31. Fərz edək ki, çayın axma sürəti x km/saat, A məntəqəsindən salla görüşə qədər olan məsafə y km-dir. Qayıq bu məsafəni çayın

axma istiqamətində $\frac{y}{20+x}$ (s), sal isə $\frac{y}{x}$ (s) üzür. Onda məsələnin

şərtinə əsasən birinci tənlik $\frac{y}{x} - \frac{y}{20+x} = 2,4$ olur. Sal qayıqla görüş

yerindən B məntəqəsinə qədər daha $(3,6x - y)$ km, qayıq isə geriye qayıdaraq A məntəqəsinə qədər daha y km üzür. Onların bu məsafələri eyni bir vaxtda qət etdiklərinə diqqət yetirməklə ikinci tənliyi alırıq:

$$\frac{y}{20-x} = \frac{3,6x-y}{x}.$$

Beləliklə, məsələni həll etmək üçün iki məchullu iki tənliklər

$$\text{sistemini } \begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{y}{20+x} = \frac{12}{5}, \\ \frac{y}{20-x} = \frac{18}{5}x - y \end{cases} \quad \text{və buradan } x = 4 \text{ (km/saat) alırıq.}$$

Qeyd edək ki, bu məsələnin həllində zamanı deyil məsafələrin bərabərliyindən istifadə etmək olardı. Şərtə görə salın və qayığın görüşə qədər keçdikləri məsafələr eynidir. Çayın axma sürətini x , qayığın hərəkətə başlamasından görüşə qədər olan müddəti z ilə işarə etməklə $(2,4+z)x = z(20+x) = (3,6-2,4-z)(20-x)$ və buradan $x = 4$ (km/saat) alırıq. Bu həll əvvəlkindən qısadır. Çaydakı hadisəni təhlil etməklə x və z arasındakı asılılığı başqa şəkildə müəyyən etmək olar. Məsələnin şərtinə görə qayığın hərəkətə başlaması anına qədər sal çayın axma istiqamətində 2,4 saat x km/saat sürətlə üzmüşdür, başqa sözlə qayığın hərəkətə başlaması anında onunla sal arasındakı məsafə $2,4x$ km olmuşdur. Salın suya nəzərən sürəti sıfırdır, qayığın suya nəzərən sürəti isə axının sürətindən asılı olmayaraq 20 km/saatdır. Odur ki, qayıq $z = 2,4x : 20 = 0,12x$ km/s sonra sala çatır. İkinci tənliyi qurmaq üçün qayığın çayın axma və əksi istiqamətdə getdiyi məsafənin bərabərliyini nəzərə alırıq. Məsələni, tənlikdən istifadə etmədən, hesab yolu ilə də həll etmək mümkündür. Əslində isə bu mümkün olan hallarda tənlikdən istifadə etməmək daha yaxşıdır. Sal cəmi 3,6 s üzmüşdür, bundan qayıqla görüşə qədəri 2,4 saatdır. Beləliklə, qayığın

A-dan sala qədər qət etdiyi məsafə AB məsafəsinin $\frac{2}{3}$ -nə bərabərdir

(2,4:3,6). Suyun axma sürəti olmasa idi əks istiqamətdə də qayığın keçdiyi məsafə belə olardı. Lakin çayın axma sürəti A-dan B-yə doğru məsafədə qayığa və sala təsir etmişdir. Çayın axma sürəti qayığa və

sala eyni müddətdə təsir etdiyindən sal həmin müddətdə $\frac{1}{3}AB$, qayıq

isə axma istiqamətində $\frac{1}{3}AB$ məsafələrini qət etmişlər. Beləliklə,

qayıq suya nisbətən

$$\frac{2}{3}AB + \frac{2}{3}AB + \frac{1}{3}AB = \frac{5}{3}AB$$

məsafə keçmişdir. Həmin müddətdə

sal $\frac{1}{3}AB$ məsafəsinə keçmişdir.

Beləliklə, qayığın sürəti salınkindən

5 dəfə çoxdur ($\frac{5}{3} : \frac{1}{3}$). Çayın axta-

rılan axma sürəti $20:5=4\text{km/s}$.

Beləliklə, “axına” aid məsələlər

olduqca müxtəlifdir, eyni zamanda

maraqlıdır və onların müxtəlif həll üsulları vardır. Belə müxtəlif həll üsullarını mənimsəmək fizika ilə riyaziyyatın əlaqəli təlimi baxımından olduqca faydalıdır. Digər tərəfdən isə tənlik və tənliklər sistemi anlayışlarını daxil etmək üçün məqsəduyğundur.

32. $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ olduqda $S = 4t$ (km) alırıq. $\frac{3}{2} \leq t \leq 2$ olduqda

turistlər istirahət edirlər; gedilən yol $t = \frac{3}{2}$ -də olduğu kimi qalır, başqa

sözlə t -in göstərilən qiymətində yolun uzunluğu $4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ (km) olur.

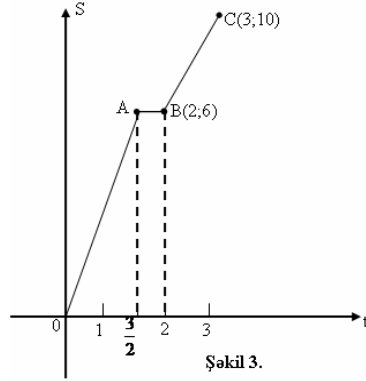
$2 \leq t \leq 3$ olduqda

$$S = 6 + 4(t - 2) = 4t - 2$$

Beləliklə,

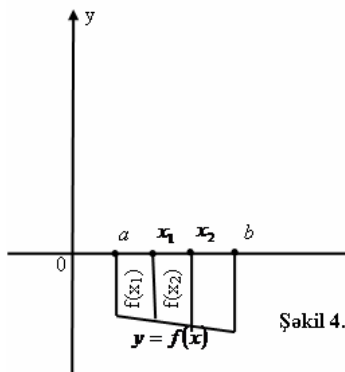
$$S = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t \leq \frac{3}{2} \text{ olduqda} \\ 6, & \frac{3}{2} < t \leq 2 \text{ olduqda} \\ 4t - 2, & 2 < t \leq 3 \text{ olduqda} \end{cases}.$$

Funksiyanın təyin oblastı $0 \leq t \leq 3$ dir, dəyişmə oblastı isə $0 \leq S \leq 10$. İndi, t -in 0-dan 3-ə qədər qiymət aldığını bilərək,

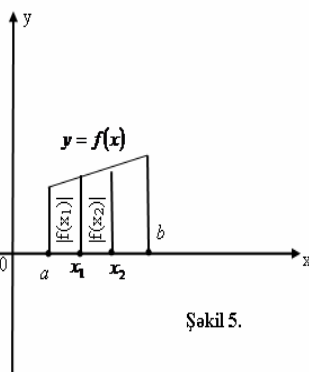


funksiyanın qrafikini quraq. Qapalı $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ intervalında $S = 4t$

funksiyanın qrafikini quraq (Şəkil 3). Yarım qapalı $\left(\frac{3}{2}, 2\right]$ intervalında S kəmiyyəti 6-ya bərabər olan sabit qiymətini dəyişmir. Bu intervalda qrafik Ot oxuna paralel olan parçadır. $2 < t \leq 3$ olduqda $S = 4t - 2$ funksiyasının qrafikini qururuq (Şəkil 3).



Şəkil 4.



Şəkil 5.

33. İlk t_1 san-də paraşütçü cazibə qüvvəsinin təsiri ilə enir. Odur ki, havanın müqavimətini nəzərə almasaq, onda $0 \leq t \leq t_1$ olduqda

$$S = \frac{gt^2}{2} ; \quad t_1 < t \leq t_1 + t_2 \quad \text{olduqda} \quad S = S(t_1) + g(t - t_1) \quad \text{və ya}$$

$$S = \frac{gt_1^2}{2} + g(t - t_1). \quad \text{Beləliklə, } S = \begin{cases} \frac{gt^2}{2}, & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{gt_1^2}{2} + g(t - t_1), & t_1 < t \leq t_1 + t_2 \end{cases}$$

Bu funksiyanın təyin oblastı $0 \leq t \leq t_1 + t_2$, dəyişmə oblastı isə

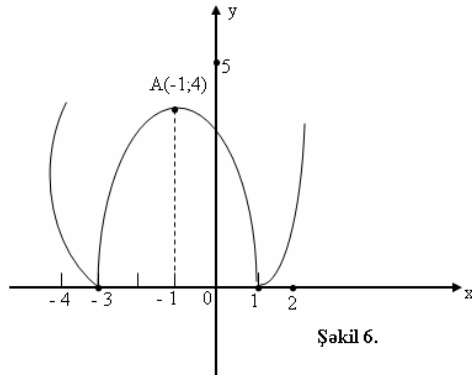
$$0 \leq S \leq \frac{gt_1^2}{2} + gt_2 \quad \text{dir.}$$

34. 1) Fərz edək ki, x_1 və x_2 arqumentin $x_1 < x_2$ şərtini ödəyən ixtiyari qiymətlərdir. $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)$ fərqinə baxaq. Şərtə görə $x_2 - x_1 > 0$, $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2$ vuruğunun işarəsini araşdırmaq.

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot x_2^2} \quad \text{olduğundan} \quad x_1^2 + x_2^2 \geq 2|x_1| \cdot |x_2| > |x_1||x_2|.$$

Odur ki, x_1 və x_2 işarəsindən asılı olmayaraq $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 > 0$. Beləliklə, $y = x^3$ funksiyasını bütün ədəd oxunda artırır. Onun qrafiki kub paraboladır.

2) Əvvəlcə qeyd edək ki, $f(x) \geq 0$ isə onda $f(x)$ və $|f(x)|$ eyni zamanda artır və azalır. Hər hansı intervalda mənfi $f(x)$ funksiyası azalırsa (artırırsa) onda bu intervalda $|f(x)|$ artır (azalır). $f(x) < 0$ halı 4-cü və 5-ci şəkildə təsvir olunur. Məsələn həll etmək üçün $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ və $x^2 + 2x - 3 < 0$ olan intervalları tapmaq. Birinci bərabərsizlik $x \leq -3$ və $x \geq 1$ olduqda ödənilir. İndi $y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ funksiyasının monoton dəyişmə intervalllarını tapmaq. Bu funksiya $x < -1$ olduqda azalır, $x > -1$ olduqda artır. Odur ki, $x < -3$ olduqda, müsbət olmaqla, o azalır. $-3 < x < -1$ olduqda, mənfi olmaqla azalır. $-1 < x < 1$ isə mənfi olmaqla artır. $x > 1$ olduqda, müsbət olmaqla, artır. Odur ki, verilmiş $y = |x^2 + 2x - 3|$



Şəkil 6.

funksiyası $x < -3$ və $-1 < x < 1$ olduqda azalır, $-3 < x < -1$ və $x > 1$ olduqda artır. Funksiyanın qrafiki, bu deyilənlərə əsasən təsvir olunur (Şəkil 6).

3) funksiya $x=0$ nöqtəsindən fərqli hər yerdə təyin olmuşdur. Aşkardır ki, $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$. Əvvəlcə, $x < 0$ olduqda funksiyanın necə olmasına baxaq. Fərz edək ki, $x_1 < x_2 < 0$; onda $f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} < 0$, yəni $x < 0$ olduqda funksiya azalır.

Onun qrafiki hiperboladır (Şəkil 7).

4) $x \leq 0$ olduqda funksiya azalır, $x > 0$ olduqda artır.

35. Əvvəlcə, qeyd edək ki, hər bir kvadrat bərabərsizliyi aşağıdakılardan birinə gətirmək olar:

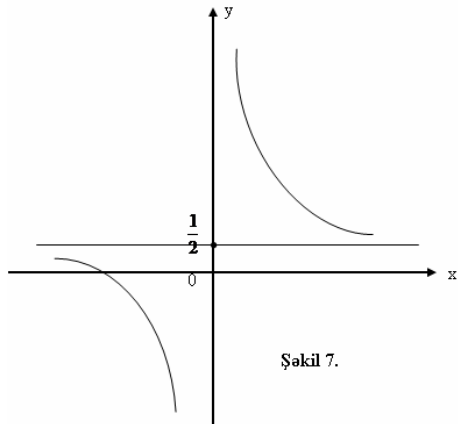
$$x^2 + px + q > 0 \quad (1),$$

$$x^2 + px + q < 0 \quad (2).$$

Aşkardır ki,

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4}.$$

Fərz edək ki, $x^2 + px + q$



Şəkil 7.

(3) kvadrat üçhədlisinin diskriminantı müsbətdir. Mərkəzi $O_1\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$

nöqtəsində və radiusu $O_1B = \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ olan çevrənin tənliyi

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} = 0 \quad (4) \text{ dir. } y = 0 \text{ olduqda, } x\text{-in } (4)$$

tənliyini ödəyən qiymətləri (3) kvadrat üçhədlisini sıfıra çevirir. Beləliklə (4) çevrəsi absis oxunu absisi (3) kvadrat üçhədlisinin köklərinə

uyğun olan M və N nöqtələrini kəsir (Şəkil 8). $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$ ifadəsi

çevrənin $O_1\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$ mərkəzindən koordinatı $(x; y)$ olan ixtiyari

nöqtəyə qədər məsafənin kvadratından ibarətdir. Hər hansı $A(x; y)$ nöqtəsi (4) çevrəsinin xaricində yerləşirsə, onda $O_1A^2 > O_1B^2$, burada

$$O_1A^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2, \quad O_1B^2 = \frac{p^2 - 4q}{4}. \quad \text{Odur ki,} \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} > 0$$

(1-A). Hər hansı $C(x, y)$ nöqtəsi (4) çevrəsinin daxilində isə, onda

$$O_1C^2 < O_1B^2, \quad \text{buradan} \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} < 0 \quad (2-A).$$

Müstəvinin (4) çevrəsinin xaricində yerləşən ixtiyari nöqtəsini koordinatları üçün (1-A) bərabərsizliyi, çevrənin daxilində yerləşən ixtiyari nöqtənin koordinatları üçün isə (2-A) bərabərsizliyi ödənilir.

$y=0$ olduqda (1-A) və (2-A) bərabərsizlikləri uyğun olaraq (1) və (2) bərabərsizlikləridir. (1) bərabərsizliyini həll etmək üçün (1-A) bərabərsizliyində $y=0$ götürmək lazımdır. (1) bərabərsizliyinin həlli müstəvinin (4) çevrəsi xaricində yerləşən və ordinatı sıfır olan nöqtələrin absisləridir. Beləliklə, (1) bərabərsizliyinin həlləri x absis oxunun çevrənin xaricində yerləşən nöqtələrinin absisləri olacaqdır.

$x < X_m$ və $x > X_N$ alırıq, burada $X_M < X_N$ (3) kvadrat üçhəddlinin kökləridir. Bu ümumi izahatdan sonra göstərilən bərabərsizlikləri qrafik üsulla həll etmək məqsədəuyğundur.

1) Verilmiş bərabərsizliyi $(x-7)^2 - 5^2 > 0$ şəkildə yazaq. Mərkəzi $O_1(7;0)$ və radiusu $OM_1 = 5$ (Şəkil 8) olan çevrə qurub $x_M = 2$; $x_N = 12$ alırıq. Beləliklə, $x < 2$; $x > 12$. Deməli, $x^2 - 14x + 24 < 0$ bərabərsizliyinin həlli $2 < x < 12$ dir. $p^2 - 4q = 0$ olduqda (1) bərabərsizliyi

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{q}\right)^2 > 0 ,$$

$x = -\frac{p}{2}$ müstəsna olmaqla ixtiyari x üçün ödənilir, (2) bərabərsizliyinin isə həlli yoxdur, $p^2 - 4q < 0$ olduqda (1) bərabərsizliyi

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} > 0 \text{ ixtiyari } x \text{ üçün ödənilir, (2)}$$

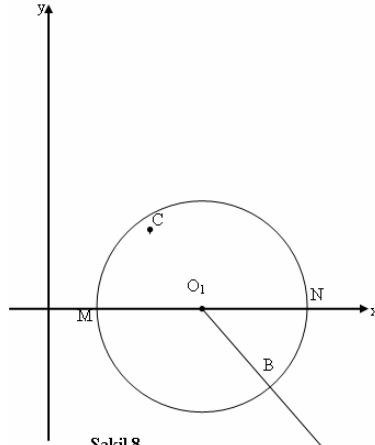
bərabərsizliyinin isə həlli yoxdur.

2) Verilmiş bərabərsizlik aşağıdakı iki bərabərsizliklər sistemilə eynigüclüdür:

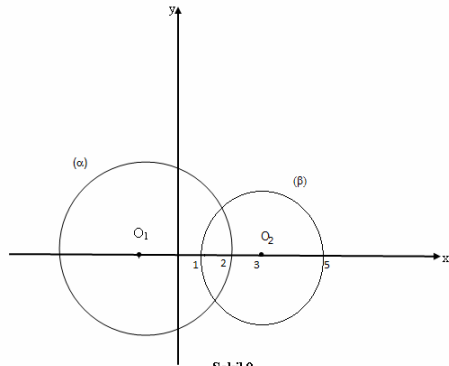
$$\begin{cases} (x+1)^2 - 3^2 > 0, \\ (x-3)^2 - 2^2 < 0; \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 - 3^2 < 0, \\ (x-3)^2 - 2^2 > 0; \end{cases} \quad (\text{II})$$

Bir koordinat sisteminə: mərkəzi $O_1(-1;0)$ nöqtəsində, radiusu 3 olan (α) çevrəsini və mərkəzi $O_2(3;0)$ nöqtəsində, radiusu 2 olan



Şəkil 8.



Şəkil 9.

(β) çevrələrini qururuq (Şəkil 9).

(I) sisteminin cavabı: $2 < x < 5$, (II) sisteminin cavabı: $-4 < x < 1$. Deməli, $-4 < x < 1$; $2 < x < 5$ axtarılan həldir.

36. Verilmiş sistemi $\begin{cases} (x+2,5)^2 - 1,5^2 > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$ şəkildə yazıq. Eyni

koordinat sistemində mərkəzi $A(-2,5; 0)$ nöqtəsində və radiusu $AB=1,5$ olan çevrəni və $y = x - 3$ düz xəttini quraq (Şəkil 10). Onda: $x < -4$; $-1 < x < 3$ nəticəsini alırıq.

37. İsbat edək ki, tənliyin D diskriminantı sıfırdan kiçik deyil.

$$D = 9(a+b+c+d)^2 - 24(ab+bc+ca+ad+bd+cd) = 3[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2].$$

Beləliklə, verilmiş tənliyin kökləri həqiqidir. Onlar yalnız $a=b=c=d$ olduqda öz aralarında bərabərdir.

38. Aşkar bərabərsizliklərə baxaq: $a^2 - ab + b^2 \geq ab$,

$$b^2 - bc + c^2 \geq bc,$$

$$c^2 - ca + a^2 \geq ac.$$

Bu bərabərsizliklərin hədlərini uyğun olaraq $a+b, b+c, c+a$ cəmlərinə vurub $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$,

$$b^3 + c^3 \geq bc(b+c),$$

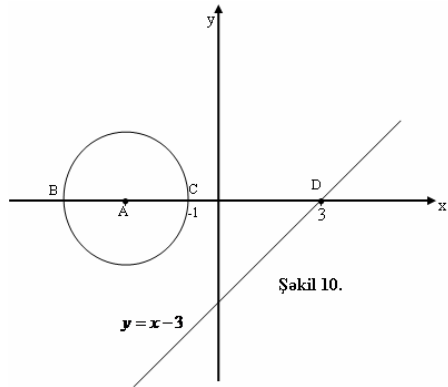
$$a^3 + c^3 \geq ac(a+c) \text{ alırıq və onları hədbə-həd toplayıb}$$

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \quad \text{Buradan}$$

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \quad \text{və}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}.$$

39. Böləni belə çevirək: $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$. Asanlıqla müəy-



Şəkil 10.

yən etmək olar ki, $x^{1001} + x^3 - x^2 - 1$ çoxhədliyi $x^2 + 1$ və $x^2 + x + 1$ ifadələrinə bölünür. Doğrudanda $x^{1001} + x^3 - x^2 - 1 = x^3(x^{998} + 1) - (x^2 + 1)$,

$$x^{1001} + x^3 - x^2 - 1 = x^2(x^{999} - 1) + (x^3 - 1)$$

Onda aşkardır ki, $x^{1001} - 1$ ifadəsini $(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) - \varnothing$ böldükdə qalıqda $-x^3 + x^2$ alınır.

40. Verilmiş ifadədə x yerində $-x$ yazıb $f(x^n) + af(-x^n) = -bx$ alırıq. Şərtə görə $af(x^n) + f(-x^n) = bx$ (1). Digər tərəfdən aldığımız ki, $f(x^n) + af(-x^n) = -bx$ (2). (1)-in hər tərəfini a -ya, (2)-nin hər tərəfini (-1) -ə vurub tərəf-tərəfə topladıqdan sonra $f(x^n)(a^2 - 1) = abx + bx$ və ya $f(x^n)(a + 1)(a - 1) = bx(a + 1) \Leftrightarrow f(x^n) = \frac{bx}{a - 1}$ alırıq. Sonuncu bərabərlikdə x^n yerində x yazsaq, onda x yerində $\sqrt[n]{x}$ yazmaq lazımdır.

$$\text{Beləliklə, } f(x) = \frac{b\sqrt[n]{x}}{a - 1}.$$

Bu məsələdən istifadə etməklə funksional tənlik anlayışını daxil etmək və belə tənliyin həlli üsullarından birini göstərmək olar.

41. Məsələnin şərtindən $1000a + 100b + 10c + a = (5c + 1)^2$ tənliyini alırıq. Aşkardır ki, $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$ və a, b, c rəqəmlərdir. Alınmış tənliyi $1000a + 100b - 25c^2 = 1 - a$ şəklində yazaq. Bu tənliyin sol tərəfi 25-ə bölünür. Odur ki, $a = 1$, onda $c^2 = 4(b + 10)$ yazarıq, buradan, $b = 6, c = 8$. Beləliklə, axtarılan ədəd 1681-dir.

42. Fərz edək ki, $x = \overline{abc} = 100a + 10b + c$ -dir, burada a, b, c eyni zamanda sıfıra bərabər olmayan rəqəmlərdir və $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$. Onda $999x = (1000 - 1)(100a + 10b + c) = 10000a + 1000b + 1000(c - 1) + 100(10 - a - 1) + 10(10 - b - 1) + (10 - c)$. $c \neq 0$ isə onda sonuncu bərabərlikdən alınır ki, $999x$ ədədi $a, b, c - 1$, $10 - a - 1$, $10 - b - 1$, $10 - c$ rəqəmləri ilə yazılır və beləliklə, onun rəqəmləri cəmi

$a + b + c - 1 + 10 - a - 1 + 10 - b - 1 + 10 - c = 27$ dir. Asanlıqla göstərmək olar ki, $c=0$ habelə, $x=1000$ olduqda da doğrudur.

$$43. \text{ Aşkardır ki, } y = \frac{3}{ax^2 + \frac{c}{x^2} + b}.$$

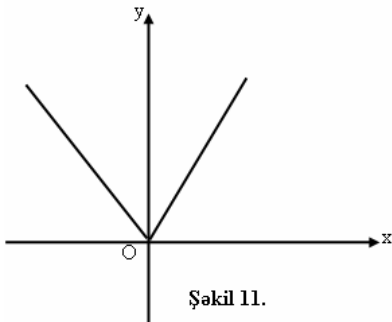
$ax^2 \cdot \frac{c}{x^2}$ hasilı x -dən asılı olmadığından ona da $ax^2 + \frac{c}{x^2}$ cəmi

$ax^2 = \frac{c}{x^2}$ olduqda ən kiçik alır. Deməli, $x = \pm 4\sqrt{\frac{c}{a}}$ olduqda

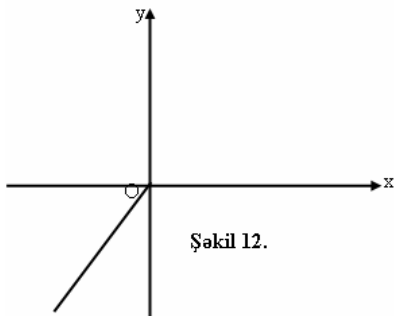
$$y_{\max} = \frac{3}{b + 2\sqrt{ac}}.$$

44. Funksiya məktəb riyaziyyat kursunun əsas anlayışdır. Təcrübə göstərir ki, funksiyanın araşdırılması və qrafikinın qurulmasına kifayət qədər fikir verdikdə şagirdlər riyaziyyatı şüurlu şəkildə mənimsəyirlər, bu yaxın fənlərin də (fizika, kimya, informatika və s.) daha yaxşı öyrənilməsinə kömək edir. Hazırda funksiyanın qrafikini “nöqtələrə” görə deyil onun araşdırılması əsasında qurmaq şagirdlərdə ümumiləşdirmə qabiliyyətini inkişaf etdirmək baxımından faydalıdır. Funksiya anlayışının lazımı səviyyədə mənimsənilməsi üçün onun xassələrini araşdırmaqla qrafikini qurmaq olduqca vacibdir. Hazırki, dərsləkdə baxılmayan bəzi funksiyaların qrafiklər üzrə xassələrini öyrənməyi daha məqsədəuyğun hesab edirik. Funksiyaların qrafiklərinin qurulması ilə əlaqədar onun əsas xüsusiyyətlərinə (təyin və dəyişmə oblastı, artma və azaltması, ekstremum qiymətləri asimptotu) daha çox diqqət vermək lazımdır. Funksiyaların qrafikini qura bilmək qabiliyyəti tənliklər, bərabərsizliklər və onların sistemlərini qrafik yolla həll etmək imkanına malik olmaq üçün lazımdır. Bütün yuxarıda deyilənləri konkret nümunələr əsasında öyrənmək zəruridir.

1) Aşkardır ki, $y \geq 0$ və funksiyanın qrafiki Ox oxunda yuxarıda yerləşir. $|x| = |-x|$, başqa sözlə, baxılan funksiya cüt olduğundan, qrafik Oy oxuna nəzərən simmetrikdir. Əvvəlcə axtarılan qrafiki $x \geq 0$ üçün, başqa sözlə, $y=x$ funksiyasının qrafikini qururuq. Sonra qrafikin qurulmuş hissəsini Oy oxuna nəzərən inikas edirik (Şəkil 11).



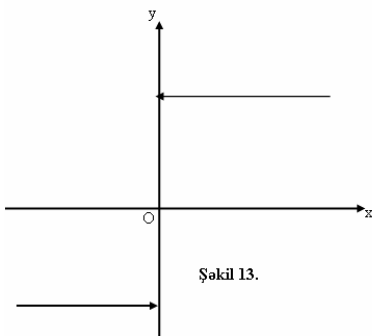
Şəkil 11.



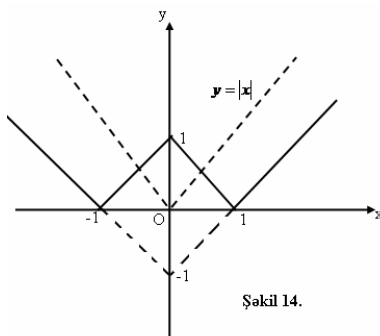
Şəkil 12.

2) $x \geq 0$ isə, onda $y = 0$, $x < 0$ isə onda $y = x$. Beləliklə, qrafik Ox-in sağ yarım oxundan və üçüncü koordinat bucağının tənbölənindən ibarətdir (Şəkil 12).

3) Funksiya $x=0$ dan fərqli bütün Ox oxunda təyin olmuşdur. $x > 0$ isə, onda $y = 1$, $x < 0$ olduqda isə $y = -1$. Beləliklə, qrafik başlanğıc nöqtədən fərqli iki yarım düz xətdən ibarətdir (Şəkil 13).



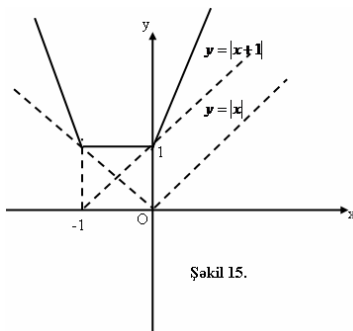
Şəkil 13.



Şəkil 14.

4) Qrafikin qurulması üç mərhələdə aparılır: $y = |x|$ funksiyasının qrafikini qururuq, sonra onu y oxu boyunca -1 sürüşdürürük, sonra qrafikin x oxundan aşağıda yerləşən hissəsini bu oxa nəzərən inikas etdiririk (Şəkil 14). Bu və sonrakı şəkillərin hamısında, bir neçə qrafik olan hallarda verilmiş funksiyanın qrafiki kəsilməz xətlərlə təsvir edilir.

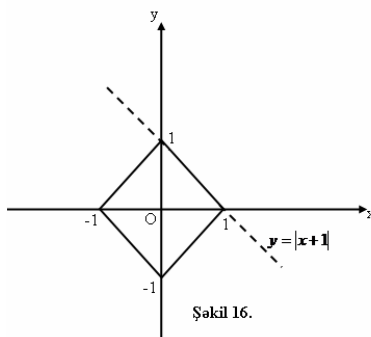
5) $y_1 = |x|$ və $y_2 = |x+1|$ funksiyalarının qrafiklərini qururuq (Şəkil 15), sonra x -in eyni bir qiymətlərində bu qrafiklərin nöqtələrinin ordinatlarının cəmini tapırıq. Xətti funksiyaların cəmi xətti funksiya olduğundan bucaq nöqtələrinin ordinatlarının cəmini, yəni $x=0$ və $x=-1$ və $x > 0$ və $x < -1$ olduqda bir nöqtə üzrə (məsələn, $x = -1,5$ və $x = \frac{1}{2}$) tapmaq kifayətdir.



Şəkil 15.

6) $|y| + |x| = 1$ bərabərliyini ödəyən $(x; y)$ nöqtələrinin həndəsi yeri iki funksiyanın qrafiklərindən ibarətdir: $y = (1 - |x|)$ və $y = -(1 - |x|)$.

Əvvəlcə, $x \geq 0$ və $y \geq 0$ üçün nöqtələrin həndəsi yerini tapmaq kifayətdir. Bu halda verilmiş asılılıq $x + y = 1$ şəklində olur və onun qrafiki $(1; 0)$ və $(0; 1)$ nöqtələrindən keçir. Bu düz xəttin birinci kvadranta olan hissəsi nöqtələrin axtarılan həndəsi yerinə aiddir. Axtarılan həndəsi yerin qalan nöqtələri artıq qurulmuş hissənin hər iki ox və koordinat

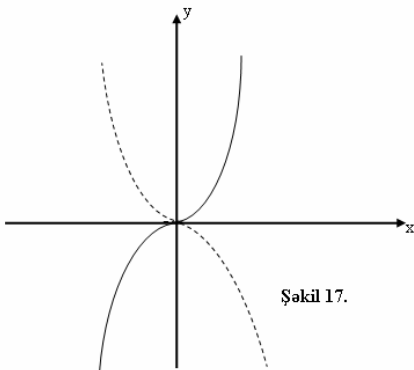


Şəkil 16.

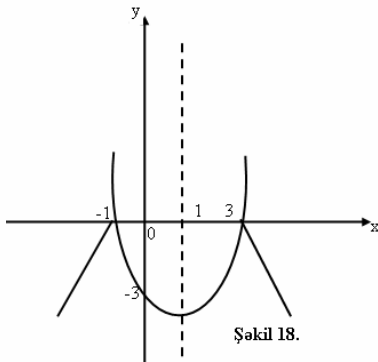
başlanğıcına nəzərən simmetrik çevrilməsindən alınır (Şəkil 16).

7) $x \geq 0$ isə $y = x^2$, $x < 0$ olduqda isə $y = -x^2$ (Şəkil 17).

8) $|y| = x^2 - 2x - 3$ bərabərliyini ödəyən $(x; y)$ nöqtələrinin həndəsi yerini qurmaq üçün qeyd edək ki, y yalnız $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ şərtini ödəyən x -lər üçün vardır.



Şəkil 17.



Şəkil 18.

$x \leq -1$ və $x \geq 3$ aralıklarında verilmiş bərabərlikdən iki funksiya alınır: $y = x^2 - 2x - 3$ və $y = -(x^2 - 2x - 3)$. Nöqtələrin axtarılan həndəsi yerini qurmaq üçün Ox oxundan yuxarıda yerləşən $y = x^2 - 2x - 3$ parabolalarını qurub onu Ox oxuna nəzərən inikas etmək kifayətdir (Şəkil 18).

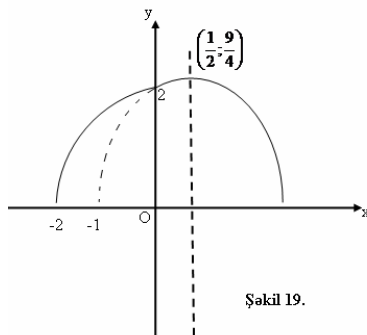
9) $(1 + |x|)(2 - |x|) = (1 + |x|)(2 - |x|) = y$ olduğundan y funksiyası cütdür, odur ki, onun qrafiki ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir. $x \geq 0$ olduqda verilmiş funksiya $y = (1 + x)(2 - x)$ şəkilə düşür. ($x=0$, $y=2$ olduqda). Onun qrafikini quraq. Parabolanın ordinat oxundan sağda yerləşən hissəsi yalnız verilmiş funksiyanın qrafikinin bir hissəsidir, digər hissəsi ($x < 0$ olduqda) ordinat oxuna nəzərən simmetrik alınır (Şəkil 19).

10) Funksiya $x=1$ -dən fərqli bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur.

$x > 1$ olduqda $y = \frac{x^2}{2}$, $x < 1$ olduqda $y = -\frac{x^2}{2}$ (Şəkil 20).

$$\begin{aligned} 11) \quad y &= x^3 - 1 - 3x^2 + 3 = x^3 - 1 - 3(x^2 - 1) = (x-1)(x^2 - 2x - 2) = \\ &= (x-1)\left[x - (1 + \sqrt{3})\right]\left[x - (1 - \sqrt{3})\right] \text{ yazmaq olar.} \end{aligned}$$

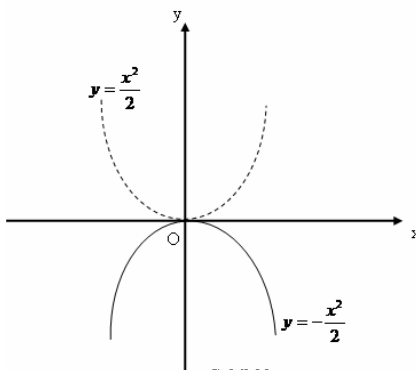
Beləliklə, $1, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$ verilmiş funksiyanın sıfırlarıdır. $(-\infty, 1-\sqrt{3})$ və $(1, 1+\sqrt{3})$ intervallarında funksiya mənfi, $(1-\sqrt{3}, 1)$ və $(1+\sqrt{3}, \infty)$ intervallarında isə müsbətdir. İndi verilmiş funksiyanın sxematik qrafikini qurmaq olar (Şəkil 21). Qrafiki dəqiqləşdirmək üçün maksimum və minimum nöqtələrini tapaq. Fərz edək ki, $A(x_0, y_0)$ nöqtəsi



Şəkil 19.

qrafik üzərindədir və $x_0 > 1+\sqrt{3}$, onda $y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + 2$. (x_0, y_0) nöqtəsindən Ox oxuna paralel düz xətt çəkək.

Bu düz xətt qrafiki daha iki nöqtədə kəsə bilər, qrafiklə bir orta nöqtəsi (toxunma halında maksimumu) və ya onunla birdən artıq orta nöqtəsi olmaya bilər. Əvvəlcə düz xəttin qrafiki kəsdiyi $x \neq x_0$ qiymətlərini axtaraq. Bu qiymətlər



Şəkil 20.

$$x^3 - 3x^2 + 2 = y_0 \quad \text{və ya}$$

$$x^3 - 3x^2 + 2 = x_0^3 - 3x_0^2 + 2$$

və ya $x^3 - x_0^3 - 3(x^2 - x_0^2) = 0$ tənliyindən tapılır. $x - x_0 \neq 0$ olduğundan sonuncu tənliyi $x - x_0$ ifadəsinə ixtisar edib

$$x^2 + x_0x + x_0^2 - 3x - 3x_0 = 0, \quad x^2 - (3 - x_0)x + x_0^2 - 3x_0 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 - x_0 \pm \sqrt{-3x_0^2 + 6x_0 + 9}}{2} \quad \text{alırıq. Maksimum nöqtəsində}$$

$x_1 = x_2$, odur ki, $-3x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0$,

yəni $x_0' = 3$ və $x_0'' = -1$ olmalıdır.

$x_0 > 1 + \sqrt{3}$ olduğunu fərz etdiyimizdən $x_0' = 3$ götürürük. Beləliklə, absisin maksimumu

$$x_1 = x_2 = \frac{3 - x_0'}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0, \text{ maksimumun}$$

özü isə $y = 2$. $x_0 < 1 - \sqrt{3}$ olduqda

isə $x_0'' = -1$ götürürük. Beləliklə, absisin minimumu

$$x_1 = x_2 = \frac{3 - x_0''}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2, \text{ minimumun özü isə } y = -2.$$

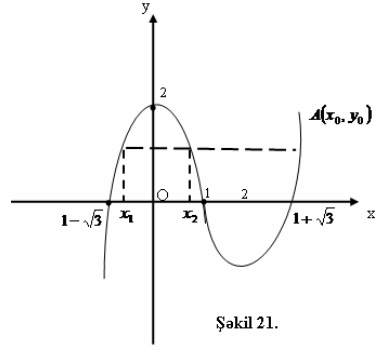
Beləliklə, funksiyanın $x=0$ olduqda 2-yə bərabər maksimumu, $x=2$ olduqda isə -2-yə bərabər minimumu vardır. x arqumenti $-\infty$ -dan 0-a qədər dəyişdikdə funksiya artır, arqument 0-dan 2-yə qədər dəyişdikdə isə azalır.

$$12) y = \frac{3x + 4}{x - 1} \text{ funksiyanın təyin oblastı iki } (-\infty, 1) \text{ və } (1, +\infty)$$

intervaldan ibarətdir. $x \rightarrow 1$ olduqda funksiya sağda $y \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 1$ olduqda funksiya solda isə $y \rightarrow -\infty$ olduğundan $x = 1$ düz xətti şaquli asimptotdur. Verilmiş funksiyanı belə çevirək:

$$y = \frac{3x + 4}{x - 1} = \frac{x + \frac{4}{3}}{\frac{1}{3}(x - 1)} = \frac{x - 1 + \frac{7}{3}}{\frac{1}{3}(x - 1)} = \frac{x - 1 + \frac{7}{3}}{\frac{1}{3}(x - 1)} = 3 + \frac{7}{x - 1}.$$

Beləliklə, funksiyanın qrafikini qurmaq üçün $\frac{7}{x - 1}$ funksiyanın qrafikini qurub, sonra isə onu ordinat oxu boyunca üç vahid yuxarı sürüşdürmək lazımdır. $x \rightarrow \pm\infty$ isə, onda $\frac{7}{x - 1} \rightarrow 0$, beləliklə isə



Şəkil 21.

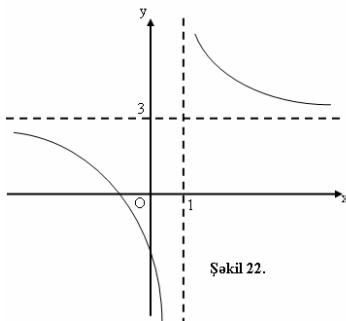
$y \rightarrow 3$, başqa sözlə, $y = 3$ vertikal asimptotdur (Şəkil 21). Qrafiki dəqiqləşdirmək üçün daha bir neçə nöqtə qurmaq olar.

13) Funksiyanı $y = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$ şəkildə yazaq. Onun təyin oblastı üç intervaldan: $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$ qrafiki isə üç qanatdan ibarətdir: $x=0$ isə onda $y=0$, deməli qrafik koordinat başlanğıcından

keçir. Sonra $y = \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}$. Buradan görünür ki,

$x \rightarrow +\infty$ isə, onda müsbət qalmaqla $y \rightarrow 0$. $x \rightarrow -\infty$ isə onda mənfi qalmaqla $y \rightarrow 0$. Beləliklə, absis oxu funksiyanın qrafikinə üfüqi asimptotudur.

$x = 1$ və $x = 2$ nöqtələrinin yaxınlığında funksiyanın özünü necə aparmasına diqqət edək. x sağdan 2-yə yaxınlaşarsa, onda $x - 2 > 0$, $x - 1 > 0$, $x > 0$, habelə, $x - 2 \rightarrow 0$, $x - 1 \rightarrow 1$, $x \rightarrow 2$. Bunlara görə $y \rightarrow +\infty$. x soldan 2-yə yaxınlaşarsa, onda $x - 2 < 0$, $x - 1 > 0$, $x > 0$, odur ki, $y \rightarrow -\infty$. x sağdan 1-ə yaxınlaşarsa, onda $x - 1 > 0$, $x - 2 < 0$, $x > 0$ və $y \rightarrow +\infty$. Deyilənlərdən alınır ki, $x=1$ və $x=2$ düz xətləri funksiyanın qrafikinə şaquli asimptotdur. İndi maksimum və minimum nöqtələrini müəyyən edək. Elə a ədədi tapmaq lazımdır ki, $y = a$ düz xətti funksiyanın qrafikinə toxunsun. y -in bu qiyməti verilmiş funksiya üçün ekstremal olacaqdır. Funksiyanın ekstremal qiymətini bilərək, arqumentin ona uyğun qiymətini asanlıqla tapmaq olar. Fərz edək ki,



Şəkil 22.

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = a \quad \text{və ya}$$

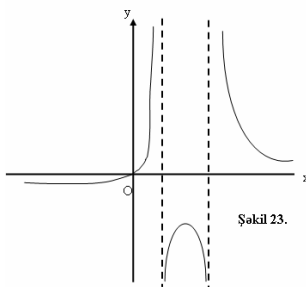
$$ax^2 - (3a + 1)x + 2a = 0.$$

$y = a$ düz xəttinin funksiyanın qrafikinin toxunanı olması üçün bu kvadrat tənliyin diskriminantı sıfıra bərabər olmalıdır, yəni $a^2 + 6a + 1 = 0$, buradan $a_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$. Bu da funksiyanın iki ekstremal qiymətləridir. Arqumentin onlara uyğun qiymətləri $x = \frac{3a+1}{2a}$ bərabərliyindən alınır. Buradan $x_1 = \frac{3(-3+2\sqrt{2})+1}{2(-3+2\sqrt{2})} = -\sqrt{2}$, $x_2 = \frac{3(-3-2\sqrt{2})+1}{2(-3-2\sqrt{2})} = \sqrt{2}$. Beləliklə, $x = \sqrt{2}$ olduqda funksiyanın $-3-2\sqrt{2}$ maksimumu, $x = -\sqrt{2}$ olduqda $-3+2\sqrt{2}$ minimumu vardır (Şəkil 23). Qrafiki dəqiqləşdirmək üçün daha bir neçə nöqtə qurmaq olar.

14) Funksiyanın təyin oblastı iki intervaldan ibarətdir: $(-\infty, 1)$ və $(1, +\infty)$. Beləliklə, funksiyanın qrafiki iki budaqlıdır.

$$y = \frac{x^2 - 1 + 2}{x - 1} = (x + 1) + \frac{2}{x - 1}.$$

$x \rightarrow +\infty$ olduqda $y - (x + 1)$ fərqi sıfıra yaxınlaşdığından $y = x + 1$ düz xətti funksiyanın qrafikinin məlii asimptotudur. x sağdan 1-ə yaxınlaşdıqda $y \rightarrow +\infty$, x soldan 1-ə yaxınlaşdıqda $y \rightarrow -\infty$, odur ki, $x=1$ düz xətti şaquli asimptotudur.



Şəkil 23.

Ekstremum nöqtələrini tapaq. Bunun üçün verilmiş funksional asılılığı belə yazaq: $x^2 - yx + y + 1 = 0$. Bu kvadrat tənliyin diskriminantını sıfır götürüb $y^2 - 4y - 4 = 0$ funksiyanın ekstremal qiymətlərini tapırıq: $y_{1,2} = 2(1 \pm \sqrt{2})$. Arqumentin bunlara uyğun qiymətləri isə $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ dir. Beləliklə, funksiyanın $x = 1 + \sqrt{2}$ nöqtəsində $(2 + 2\sqrt{2})$ -yə bərabər minimumu və $x = 1 - \sqrt{2}$ nöqtəsində $(2 - 2\sqrt{2})$ -yə bərabər maksimumu vardır (Şəkil 24).

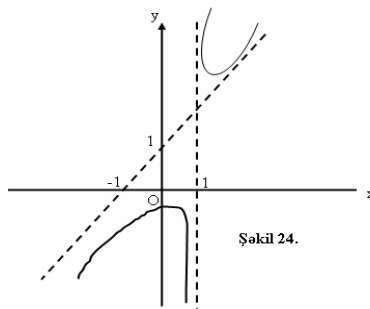
Qrafiki dəqiqləşdirmək məqsədilə daha bir neçə nöqtə tapmaq olar.

15) İki hala baxaq: 1) $x \geq 2$ isə, onda

$$y = \sqrt{2(x+x-2)} = 2\sqrt{x-1} ; 2)$$

$x < 2$ isə onda

$$y = \sqrt{2(x-x+2)} = 2 \text{ (Şəkil 25).}$$



Şəkil 24.

45. Fərz edək ki, N axtarılan ədəddir. Onda $N = n^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 1$,

$$N^2 = (2n+1)^2 + 4n^2(2n+1) + 4n^4 = (2n+1)^2 + 4n^2(n+1)^2,$$

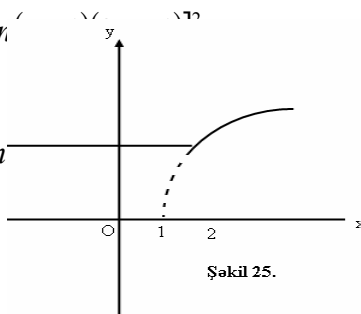
$$N^4 = [4n^2(n+1)^2 - (2n+1)^2]^2 + [4n^2(n+1)^2 + (2n+1)^2]^2$$

. Aşkardır ki, n aşağıdakı tənliyi ödəməlidir:

$$|4n(n+1)(2n+1) - 4n^2(n+1)^2 + (2n+1)^2| = 1$$

, (çünkü, iki ardıcıl ədədin fərqi 1-ə bərabərdir). Sadə çevirmələrdən sonra

$$|4n(n+1)^2(n-2) - 1| = 1$$



Şəkil 25.

tənliyini, buradan isə iki tənlik alırıq: $n(n+1)^2(n-2) = 0$, $2n(n+1)^2(n-2) = 1$.

Birinci tənliyin üç kökü: $n_2 = 0$, $n_2 = -1$, $n_3 = 2$ vardır, ikincinin isə tam həlləri yoxdur. Beləliklə $N_1 = N_2 = 1$, $N_3 = 4 + 9 = 13 = 2^2 + 3^2$; $1^3 = 0^2 + 1^2$; $13^4 = 28561 = 120^2 + 121^2$. Həllin tamlığı üçün N^4 ədədinin iki ardıcıl ədədlərin kvadratları cəmi şəklidə göstərilməsinin yeganəliyini isbat etmək tələb olunur.

46. 1) Hər şeydən əvvəl bilmək lazımdır ki, $x^2 + \frac{1}{2} > 0$. Odur ki,

$$\left[x^2 + \frac{1}{2} \right] = n \geq 0. \text{ Digər tərəfdən aşkardır ki, } -x^2 + 3x \geq 3 \text{ və ya}$$

$x^2 - 3x + 3 \leq 0$ bərabərsizliyini həlli yoxdur. Odur ki, n yalnız 0,1 və 2 qiymətlərini ala bilər. n -in bu üç qiyməti üç bərabərsizlik sistemində

$$\text{uyğundur: } \begin{cases} 0 \leq -x^2 + 3x < 1 \\ 0 \leq x^2 + \frac{1}{2} < 1 \end{cases} ; \begin{cases} 1 \leq -x^2 + 3x < 2 \\ 1 \leq x^2 + \frac{1}{2} < 2 \end{cases} ; \begin{cases} 2 \leq -x^2 + 3x < 3, \\ 2 \leq x^2 + \frac{1}{2} < 3. \end{cases}$$

Bu sistemlərdən uyğun olaraq $0 \leq x < \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1$,

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \leq x < \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ alırıq. 2) Aşkardır ki, tənlik } x\text{-in } \frac{x^2 - 2}{3} \geq x + 1$$

həbelə, $\frac{x^2 - 2}{3} \geq x + 1$ bərabərsizliklərini ödəyən qiymətlərində ödəmə

bilməz. Bu bərabərsizliklərdən birincisinin həlləri içərisində $x \geq 3$

qiymətləri olacaqdır. Doğrudan da, $\frac{x^2 - 2}{3} \geq x + 1$ isə, onda

$x^2 \geq 3x + 5$ və ya $x^2(x - 3) \geq -3x^2 + 3x + 5$. $x \geq 3$ olduqda sonuncu bərabərsizliyin sol tərəfi mənfi olmayacaq, onda sağ tərəfdə yerləşən üçhədli kimi mənfi olacaqdır, başqa sözlə $x \geq 3$ ədədi baxılan bərabərsizliyin həlləri sırasına daxildir.

İndi göstərək ki, $\frac{x^2 - 2}{3} \leq x - 1$ bərabərsizliyin həlləri içərisində

$x \leq -2$ qiymətləri olacaq. Doğrudan da, bu halda $x^2 \leq 3x - 1$ və ya $x^2(x + 2) \leq 2x^2 + 3x - 1$. $x \leq -2$ olduqda sonuncu bərabərsizliyin sol tərəfi sıfırdan böyük olmayacaqdır, onda sağ tərəfdə yerləşən üçhədli kimi müsbət olacaqdır. Beləliklə, verilmiş tənliyin həllərini yalnız $-2 < x < 3$ aralığında axtarmaq lazımdır. Bunun üçün aşağıdakı bərabərsizliklər sistemlərini həll etmək kifayətdir:

$$1) \begin{cases} -2 < \frac{x^2-2}{3} < -1 \\ -2 < x < -1 \end{cases}, 2) \begin{cases} -1 \leq \frac{x^2-2}{3} < 0 \\ -1 \leq x < 0 \end{cases} 3) \begin{cases} 0 \leq \frac{x^2-2}{3} < 1 \\ 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 1 \leq \frac{x^2-2}{3} < 2 \\ 1 < x < 2 \end{cases} 5) \begin{cases} 2 \leq \frac{x^2-2}{3} < 3 \\ 2 \leq x < 3. \end{cases}$$

3) Sisteminin həlli yoxdur. Qalan sistemlərin isə həlləri uyğun olaraq $-\sqrt[3]{4} < x < -1$, $-1 < x < 0$, $-\sqrt[3]{5} \leq x < 2$, $2 \leq x < \sqrt[3]{11}$ - dir və nəticədə $-\sqrt[3]{4} < x < 0$ və $\sqrt[3]{5} \leq x < \sqrt[3]{11}$ alınır.

47. Verilmiş funksiyanın hər tərəfini $\sqrt[3]{50}$ vurmaqla çevirək:

$\sqrt[3]{50}f(x) = \sqrt[3]{\frac{5x^2+5}{3x^2+4} \cdot \frac{5x^2+5}{3x^2+4} \cdot \frac{2(x^2+3)}{3x^2+4}}$. Kök altındakı vuruqların hər biri müsbətdir, odur ki, alınmış bərabərliyin sol tərəfinə orta qiymət haqqındaki teoremi tətbiq edib $\sqrt[3]{50}f(x) \leq \frac{12x^2+16}{3(3x^2+4)} = \frac{4}{3}$ alırıq.

Bərabərlik işarəsi $5x^2+5=2x^2+6$ və ya $x^2 = \frac{1}{3}$ olduqda

mümkündür. Beləliklə, $x^2 = \frac{1}{3}$ olduqda $f_{\max} = \frac{4}{3\sqrt[3]{50}}$.

48. $pq > 0$ olduqda $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2$ -dir. Odur ki, $u > 0, g > 0, w > 0$ olduqda

$$(u+g+w)\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{g} + \frac{1}{w}\right) = 3 + \left(\frac{u}{g} + \frac{g}{u}\right) + \left(\frac{g}{w} + \frac{w}{g}\right) + \left(\frac{w}{u} + \frac{u}{w}\right) \geq 9$$

Onda $(2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \left(\frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} + \frac{1}{a^2 + b^2} \right) \geq 9$ və beləliklə,

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{b^2 + c^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^2 + a^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{9}{2}.$$

Buradan

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{3}{2}.$$

49. Verilmiş tənliyi $(x+1)^4 - 6(x+1)^2 + a + 5 = 0$ şəkildə yazmaq olar. Buradan $x = -1 \pm \sqrt{3 \pm \sqrt{4 - a}}$.

1) $a > 4$ isə tənliyin həqiqi kökü yoxdur.

2) $-5 < a < 4$ isə onda tənliyin dörd həqiqi kökü vardır:

$$x = -1 \pm \sqrt{3 \pm \sqrt{4 - a}}.$$

3) $a < -5$ olduqda tənliyin iki həqiqi kökü vardır.

$$x = -1 \pm \sqrt{3 \pm \sqrt{4 - a}}.$$

4) $a = 4$ isə onda tənliyin iki təkrarlanan kökü vardır:

$$x_{1,2} = -1 + \sqrt{3} \text{ və } x_{3,4} = -1 - \sqrt{3}.$$

5) $a = -5$ isə tənliyin $x_{1,2} = -1$ təkrarlanan kökü və daha iki həqiqi $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}$ vardır.

50. Bir neçə ədədin mütləq qiymətlərinin hasili bu ədədlərin hasilinin mütləq qiymətinə bərabər olduğundan verilmiş tənliyi $|x^3 + 7x^2 - 36| = |x^3 + 14x^2 + 49x + 36|$ şəkildə yazmaq olar. Bu tənlik aşağıdakı iki tənliklə eynigüclüdür:

$$\begin{aligned} 1) \quad & x^3 + 7x^2 - 36 = x^3 + 14x^2 + 49x + 36, \quad 7x^2 + 49x + 72 = 0, \\ 2) \quad & x^3 + 7x^2 - 36 = -(x^3 + 14x^2 + 49x + 36), \\ & 2x^3 + 21x^2 + 49x. \end{aligned}$$

Alınmış tənlikləri həll edib $x_{1,2} = \frac{-49 \pm \sqrt{385}}{14},$

$x_3 = 0, x_4 = -7, x_5 = -3,5$ alırıq.

51. Məsələnin şərtində verilən ədədi N, say sisteminin axtarılan əsasını isə x-lə işarə edək. Onda

$$N = x^{n+3} + x^{n+1} + x^n + \dots + x^3 + x^2 + 1 = x^{n+3} + \frac{x^2(x^n - 1)}{x - 1} + 1 = \frac{x^{n+4} - x^{n+3} + x^{n+2} - x^2 + x - 1}{x - 1} =$$

$$= \frac{(x^2 - x + 1)(x^{n+2} - 1)}{x - 1} = (x^2 - x + 1)(x^{n+1} + x^n + \dots + x + 1).$$

Bilavasitə hesablama göstərir ki, $x=14$ olduqda $x^2 - x + 1$ ifadəsi 61-ə bölünür, $x < 14$ olduqda isə həmin ifadə 61-ə bölünmür. Beləliklə, hər hansı n üçün $x=14$ olduqda N ədədi 61-ə bölünür. 14 ədədi belə xassədə olan ən kiçik ədəddir, çünki $x < 13$ isə N ədədi $n=1$ üçün, $n=2$ üçün $x=13$ ədədi 61-ə bölünmür.

52. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ olduğundan $x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4x_1^3x_2 - 6x_1^2x_2^2 -$

$$- 4x_1x_2^3 = \frac{b^4}{a^4} - 2x_1 \cdot x_2(2x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2) = \frac{b^4}{a^4} - 2 \cdot \frac{c}{a} \left(2 \cdot \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} \right) = \frac{b^4}{a^4} - 4 \frac{b^2c}{a^3} + 2 \cdot \frac{c^2}{a^2};$$

$$x_1^4x_2^4 = \frac{c^4}{a^4}. \text{ Beləliklə, axtarılan tənlik } x^2 - \left(\frac{b^4}{a^4} - 4 \cdot \frac{b^2c}{a^3} + 2 \cdot \frac{c^2}{a^2} \right)x + \frac{c^4}{a^4} = 0 \text{ və}$$

ya $a^4x^2 - (b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2)x + c^4 = 0$ dir.

53. Kəsrin surət və məxrəcini 2-yə vurub

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{2} + 1) \text{ alırıq.}$$

54. $\underbrace{11 \dots 1}_m \cdot \underbrace{100 \dots 05}_{m+1} + 1 = (10^m + 10^{m-1} + \dots + 1)(10^m + 5) + 1 = \frac{(10^m - 1)(10^m + 5)}{10 - 1} + 1 =$

$$= \frac{1}{9}(10^m - 1)(10^m + 5) + 1 = \frac{1}{9}(10^{2m} + 5 \cdot 10^m - 10^m - 5) + 1 = \frac{1}{9}(10^{2m} + 4 \cdot 10^m - 5) + 1 =$$

$$= \frac{1}{9}(10^{2m} + 4 \cdot 10^m - 5 + 4 - 4) + 1 = \frac{1}{9}(10^{2m} + 4 \cdot 10^m + 4 - 9) + 1 = \frac{1}{9}(10^m + 2)^2 - 1 + 1 = \frac{1}{9}(10^m + 2)^2.$$

Buradan tələb olunan alınır, çünki $10^m + 2$ ədədi 3-ə bölünür.

55. Aşkıdır ki, $x \neq 0, a \pm 0, b \neq 0$. Verilmiş tənliyi

$$\sqrt[n]{a+x}(a+x) = \frac{a}{b} x^n \sqrt[n]{x} \text{ şəkildə yazaq. Buradan } (a+x)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{a}{b} x^{\frac{n+1}{n}}$$

$$\text{və ya } a+x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} x \text{ və } x = \frac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1}, \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1 \neq 0.$$

56. 1) Həllin iki üsulunu göstərək: 1) Viyet düsturuna əsasən

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}, x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -\frac{b^3}{a^3},$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a} \quad . \text{ Buradan}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = -\frac{b^3}{a^3} = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2 + 2x_1 x_2 x_3)$$

$$\text{və ya } x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2 + 2x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Alınmış bərabərliyi belə yazmaq olar:

$$(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)(x_1 + x_2 + x_3) - x_1 x_2 x_3 = 0; \text{ köklərin simmetrik}$$

$$\text{funksiyalarının qiymətlərini yerinə yazıb } -\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} + \frac{d}{a} = 0 \text{ və ya}$$

$$ad = bc \text{ alırıq. 2) Asanlıqla yoxlamaq olar ki,}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2};$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1) + 3x_1 x_2 x_3 =$$

$$= \frac{1}{a^3}(-b^3 + 3abc - 3a^2 d) = -\frac{b^3}{a^3}. \text{ Beləliklə, } 3abc = 3a^2 d \text{ və ya}$$

$$bc = ad. \text{ Sonra,}$$

$$x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 = \frac{c^2}{a^2} - 2x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{a^2}(c^2 - 2bd);$$

$$x_1^3 x_2^3 + x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3 = \frac{c}{a} \left[\frac{1}{a^2}(c^2 - 2bd) - \frac{1}{a^2} bd \right] + 3 \frac{d^2}{a^2} - \frac{1}{a^3}(c^3 - 3bcd + 3ad^2) = \frac{c^3}{a^3}$$

$$\text{Buradan alırıq ki, } ad = bc. \text{ Nəhayət, } x_1^3 x_2^3 x_3^3 = -\frac{d^3}{a^3}.$$

Beləliklə, $ad = bc$ münasibəti birinci tənliyin köklərinin ikinci tənliyin köklərinin kubu olması üçün zəruri və kafi şərtidir.

57. $a^2 + a + 1 = 0$ bərabərliyindən alınır ki, $a + \frac{1}{a} = -1$ və $a^3 = 1$. Onda

$$a^{2013} + \frac{1}{a^{2013}} = (a^3)^{670} a^2 + \frac{1}{(a^3)^{670} a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = 1 - 2 = -1.$$

58. Viyet teoreminə görə $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$;
 $x_1' + x_2' = -\frac{b'}{a'}$, $x_1' \cdot x_2' = \frac{c'}{a'}$

Verilmiş tənliklərin diskriminantı uyğun olaraq $D = b^2 - 4ac$ və $D' = b'^2 - 4a'c'$. Fərz edək ki, $X_1 = x_1 + x_1'$ və $X_2 = x_2 + x_2'$,
 onda $X_1 + X_2 = -\frac{ab' + a'b}{aa'}$, $X_1 \cdot X_2 = \frac{2(ac' + a'c) + bb' - \sqrt{DD'}}{2aa'}$.

Beləliklə, axtarılan tənliklərdən biri
 $2aa'x^2 + 2(ab' + a'b)x + 2(ac' + a'c) + bb' + \sqrt{DD'} = 0$. Analoji
 olaraq kökləri $x_1 + x_2'$ və $x_2 + x_1'$ olan kvadrat tənliyi alırıq:
 $2aa'x^2 + (ab + a'b)x + 2(ac' + a'c) + bb' + \sqrt{DD'} = 0$

59. Aşkardır ki, $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$, $10 + 6\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^3$. Onda
 $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} + 1$

60. Həllin iki üsulunu göstərək:

1) Əvvəla, $x > 0$. Sonra tənliyin hər tərəfini kvadrata yüksəldib və tam şəkildə gətirməklə

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + 1)(x^2 - 12) &= \sqrt{2}(1 - \sqrt{3})\sqrt{x}(x - 2\sqrt{3}) \text{ və buradan} \\ (x - 2\sqrt{3})[(\sqrt{3} + 1)(x + 2\sqrt{3}) - \sqrt{2}(1 - \sqrt{3})\sqrt{x}] &= 0 \text{ alırıq.} \end{aligned}$$

$(\sqrt{3}+1)x + \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{x} + (6+2\sqrt{3}) = 0$ tənliyinin bütün hədləri müsbət olduğundan onun həqiqi kökü yoxdur. Beləliklə, $x - 2\sqrt{3} = 0$ və $x = 2\sqrt{3}$.

2) Asanlıqla müəyyən etmək olar ki,

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3x} - 6}{\sqrt{2x+6}} = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{\frac{6}{x}}}{\sqrt{2 + \frac{6}{x}}} \text{ artan, } f_2(x) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+4}} \text{ isə}$$

azalan funksiyadır ($x > 0$). Beləliklə, verilmiş $f_1(x) = f_2(x)$ tənliyinin yalnız bir kökü ola bilər.

Sonra görürük ki, $f_2(x) = f_1\left(\frac{12}{x}\right)$. Doğrudanda

$$f_1\left(\frac{12}{x}\right) = \frac{\sqrt{\frac{12}{x}} + \sqrt{\frac{36}{x}} - \sqrt{6}}{\sqrt{\frac{24}{x} + 6}} = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{36} - \sqrt{6x}}{\sqrt{24 + 6x}} = f_2(x) \text{ . Odur ki,}$$

verilmiş tənliyi $f_2(x) = f_1\left(\frac{12}{x}\right)$ şəkildə göstərmək olar. Buradan

$$x = \frac{12}{x}, x^2 = 12, x = 2\sqrt{3} \text{ ; yuxarıdakı qeydə görə bu tənliyin yeganə}$$

köküdür. Beləliklə, $x = 2\sqrt{3}$.

61. I. Fərz edək ki, oturacaqları $AB=a$, $DC=b$ olan ABCD trapesiyası verilir. Bu trapesiyada ucları yan tərəflər üzərində olan və oturacaqlara paralel dörd parça çəkilmişdir (Şəkil 26 a).

1) Trapesiyanın diaqonallarının O kəsişmə nöqtəsindən keçən HF parçası a

$$\text{və } b \text{ -in harmonik ortasını təsvir edir: } HF = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

2) Verilmiş trapesiyanı iki oxşar trapesiyaya bölən GK parçası a və b parçalarının həndəsi ortasını təsvir edir: $GK = \sqrt{ab}$.

3) Trapesiyanın $MN = \frac{a+b}{2}$ orta xətti a və b parçalarının ədədi ortasıdır.

4) Verilmiş trapesiyanı iki müadil trapesiyaya bölən QR parçası a və b – in kvadratik ortasıdır: $QR = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Bu xassələrin qısa əsaslandırılmasını göstərək.

1) $\triangle ABD \sim \triangle HOD$ və $\triangle ABC \sim \triangle OFC$ -dən $\frac{HO}{a} = \frac{HD}{AD}$ və $\frac{OF}{a} = \frac{FC}{BC}$ alırıq. $\frac{HD}{AD} = \frac{FC}{BC}$ -dən $HO = OF = \frac{1}{2}HF$ alınır. $\triangle ADC \sim \triangle AHO$ -dən $\frac{HF}{2b} = \frac{AD - DH}{AD} = 1 - \frac{DH}{AD}$. Onda $\frac{HF}{2b} = 1 - \frac{HF}{2a}$, buradan $HF = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

2) $DGKC$ və $GABK$ trapesiyalarının oxşarlığından $a : GK = GK : b$ alınır, buradan $GK = \sqrt{ab}$

3) Trapesiyanın orta xəttinin xassəsi həndəsə dərsliyindən məlumdur.

Trapeciyanın paralel olmayan DA və CB yan tərəflərini T nöqtəsində kəsişənə qədər uzatsaq ATB üçbucağın alırıq.

Bu üçbucağın sahəsini S_x , $ABCD$ trapesiyasının sahəsini isə S ilə işarə edək. Onda oxşar üçbucaqların sahəsinin xassəsi haqqında teoremə görə $\frac{S_x}{S + S_x} = \frac{a^2}{b^2}$ yazırıq, buradan $S_x = \frac{a^2 S}{b^2 - a^2}$. Şərtə görə

QR trapesiyanı iki müadil hissəyə böldüyündən və $\triangle QTR \sim \triangle DTC$

olduğundan $\frac{S_x + \frac{1}{2}S}{S_x + S} = \frac{QR^2}{b^2}$. Bu tənəsübdə S_x yerində onun

ifadəsini yazdıqda $QR = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ alırıq.

II. Aşkardır ki, GK təkcə verilmiş ABCD trapesiyasını deyil, habelə HFNR trapesiyanı da iki oxşar trapesiyaya bölür. Doğrudanda $GHEK \sim MGKN$ isə, onda $HF : GK = GK : MN$, lakin

$$HF = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, MN = \frac{a+b}{2} \text{ onda } GK = \sqrt{HF \cdot MN} = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \cdot \frac{a+b}{2}} = \sqrt{ab}.$$

Beləliklə, iki kəmiyyətin həndəsi ortası, onlardan birini onların ədədi ortası, digərini onların harmonik ortası ilə əvəz etdikdə, dəyişmir.

Doğrudan

da,

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}}{2} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{2}{\frac{a+b}{ab}}}{2} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{2ab}{a+b}}{2} = \\ &= \frac{(a+b)^2 + 4ab}{2(a+b)} = \frac{(a+b)^2 + 4ab}{4(a+b)} = \frac{a+b}{4} + \frac{ab}{a+b}. \end{aligned}$$

Beləliklə, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ bərabərsizliyi $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{4} + \frac{ab}{a+b}$ ilə əvəz olunmaqla gücləndirilir.

III. Göstərək ki, HF, GK, MN və QR parçalarını bir şəkil üzərində qurmaq olar. Trapesiyanın böyük oturacağı üzərində $DC = b$,

$$DN_1 = MN = \frac{a+b}{2} \text{ ayıraq; Onda } N_1C = \frac{b-a}{2}. N_1L \perp DC \text{ çəkək}$$

və $N_1L = N_1C$ ayıraq. Düzbucaqlı DN_1L üçbucağından

$$DL = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}. \text{ Diametr kimi } DN_1$$

üzərində yarımçevrə, sonra isə $N_1P = N_1L = \frac{b-a}{2}$ vətərini quraq.

$$DN_1P \text{ düzbucaqlı üçbucağından } DP = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

$DN_1 = \frac{a+b}{2}$ hipotenuzu üzərində $DP = \sqrt{ab}$ katetinin DZ proyeksiyasını

$$\text{qurub } DP^2 = DN_1 \cdot DZ \text{ alırıq. Buradan } DZ = \frac{DP^2}{DN_1} = \frac{ab \cdot 2}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Beləliklə, ΔDZP -də $DZ = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ katet, $DP = \sqrt{ab}$ hipotenuzudur.

ΔDN_1P -də $DP = \sqrt{ab}$ katet, $DN_1 = \frac{a+b}{2}$ hipotenuzudur. ΔDN_1L -

də $DL = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ hipotenuzudur.

$$\text{Buradan } \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \text{ alınır. Bu}$$

bərabərsizliklərin doğruluğu habelə Z, P_1, N_1, L_1 nöqtələrinin DC parçası üzərindəki vəziyyətindən də görünür. $a = b$ olduqda baxdığımız orta qiymətlər öz aralarında bərabərdir, onda ABCD trapesiyası paraleloqrama çevrilir, HF, GK, MN, QR parçaları isə diaqonalların kəsişmə nöqtəsindən keçən və $a = b$ -yə bərabər olan bir parçadır.

IV. HF və MN parçalarının qurulmasında çətinlik yoxdur. MN parçasını qurduqdan sonra çertyojdan görüldüyü kimi trapesiyanı iki oxşar və iki müadil hissələrə bölən GK və QR parçalarını qurmaq olar.

Verilmiş bərabərsizlikləri həndəsi olaraq aşağıdakı kimi də təsvir etmək olar.

Fərz edək ki, $AC = a$, $CB = b$, $AB = a + b$ üzərində, diametr kimi, mərkəzi O nöqtəsində olan yarım çevrə quraq (Şəkil 26b). $CD \perp AB$, $OF \perp AB$, $CE \perp OD$ çəkək:

Onda:

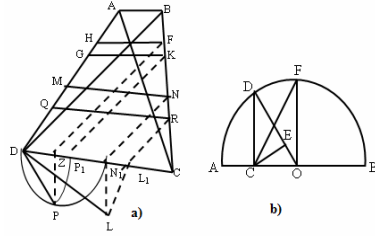
$$1) DC = \sqrt{ab},$$

$$2) OD = OF = OB = \frac{a+b}{2},$$

$$3) \quad \Delta CDO \quad \text{-dan}$$

$$DE = \frac{OC^2}{OD} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

$$4) CO = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2};$$



Şəkil 26

$$\Delta CFO \quad \text{-dan} \quad CF = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

$DE < DC < OD < CF$ (Şəkil 26 b) olduğundan

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}; \quad a = b \quad \text{olduqda baxılan orta}$$

qiymətlər öz aralarında bərabər olur. Onda DE , DC , OD və CF parçaları OF -in üzərinə düşür. Şəkil 26 b -dən alınır ki,

$$DC = \sqrt{ab} = \sqrt{OD \cdot DE} = \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}}.$$

$$62. \quad \text{Eyniliyin sol tərəfində hər bir toplananı} \quad \frac{2k}{x^2 - k^2} = \frac{1}{x-k} - \frac{1}{x+k}, \quad \text{sağ tərəfdə isə} \quad \frac{11}{(x-11+k)(x+k)} = \frac{1}{x-11+k} - \frac{1}{x+k}$$

$$\text{şəkildə yazaq. Onda} \quad \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x-10} - \frac{1}{x+10} = \frac{1}{x-11+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-11+2} - \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x-11+10} - \frac{1}{x+10}$$

alarıq. Sağda və soldakı eyni hədlər islah olur və nəticədə hər iki tərəfdə "0" qalır.

63. $u = f(x)$ funksiyasını $u = 3 - |x|$ şəkildə yazmaq olar.

Beləliklə,

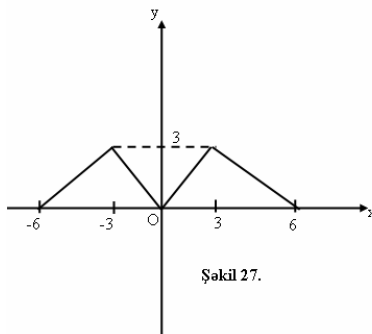
$$y = f[f(x)] = f(u) = 3 - |u| = 3 - |3 - |x||.$$

$$x \leq -3 \text{ olduqda } y = 6 + x;$$

$$-3 \leq x \leq 0 \text{ olduqda } y = -x;$$

$$0 \leq x \leq 3 \text{ olduqda } y = x;$$

$$x \geq 3 \text{ olduqda } y = 6 - x;$$



(Şəkil 27).

64. Əvvəlcə qeyd edək ki, belə bərabərsizliyi isbat etmək üçün riyazi induksiya metodundan istifadə etmək məqsədəuyğundur. Hazırkı proqrama görə bu metod “Birləşmələr” mövzusunun daxilində XI sinifdə öyrənilir. Lakin həmin metodun IX sinifdən başlayaraq öyrənilməsi zəruridir. Baxılan bərabərsizlik $n=2$ üçün doğrudur. Onun n üçün doğruluğunu qəbul edərək $n+1$ üçün doğru olduğunu göstərək. Doğrudan da

$$\left(2 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(2 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n \left(2 - \frac{1}{n}\right) \geq n \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2n - 1 = (n+1) + (n-2) \geq n+1.$$

Bərabərsizliyin ümumiliyi isbat olundu; bərabərlik $n=1$ üçün doğrudur.

$$65. \text{ Funksiyanı } y = \frac{\sqrt{25(x^2 + 6x + 18)} + 12}{x + 3} = \frac{\sqrt{25x^2 + 150x + 280} + 12}{x + 3} = \frac{\sqrt{(25x + 50)(x + 4)} + 12}{x + 3} \text{ şəkildə yazmaq olar. Orta qiymət haqqında}$$

teoremə görə $\sqrt{(25x + 50)(x + 4)} \leq 13x + 27$. Onda

$$y \leq \frac{13x + 27 + 12}{x + 3} = \frac{13x + 39}{x + 3} = 13, \quad y \leq 13 \text{ alırıq. Habelə}$$

$25x + 50 \geq 0$ və ya $x + 2 \geq 0$, $x + 4 \geq 0$, deməli $x \geq -2$. Beləliklə,

$$y \leq 13, \text{ bərabərlik } 25x + 50 = x + 4, \text{ yəni } x = -\frac{23}{12} \text{ olduqda}$$

mümkündür. Aşkardır ki, $-\frac{23}{12} > -2$. Beləliklə, $x = -\frac{23}{12}$ nöqtəsində

$$y_{\max} = 13.$$

66. Həllin 4 üsulunu göstərək:

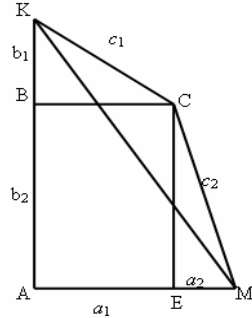
1) $AE = a_1$, $AB = b_2$ olan $ABCE$ düzbucaqlısını quraq. Bu dördbucaqlısını 28-ci şəkildə göstərdiyi kimi CEM və BCK düzbucaqlı üçbucaqları ilə tamamlayaq. $EM = a_2$, $BK = b_1$ olsun. Onda $(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = MK^2 \leq (c_1 + c_2)^2$.

Buradan

$$a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + b^2 + b^2 c + 2a_1 a_2 + 2b_1 b_2 \leq c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2.$$

Məsələnin şərtində verilənləri nəzərə alıb $a_1 a_2 + b_1 b_2 \leq c_1 c_2$ alırıq. Yalnız və yalnız C nöqtəsi MK düz xətti üzərində olduqda bərabərlik ödənilir. Bu halda isə BCK və MEC üçbucaqları oxşardır. Odur ki,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$



Şəkil 28.

2) $(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 = a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2$, $2a_1 a_2 b_1 b_2 \leq (a_1 b_2)^2 + (a_2 b_1)^2$ olduğundan

$(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 \leq a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = c_1^2 c_2^2$ və buradan $a_1 a_2 + b_1 b_2 \leq c_1 c_2$. Bərabərlik $a_1 b_2 = a_2 b_1$ olduqda ödənilir. Onda $a_2 = k a_1$, $b_2 = k b_1$, $c_2^2 = k^2 c_1^2$ və $c_2 = k c_1$.

Beləliklə, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$.

$$3) (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2.$$

Deməli, $(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 \leq c_1^2 c_2^2$ və $a_1 a_2 + b_1 b_2 \leq c_1 c_2$.

4) Fərz edək ki, $a_1 = c_1 \cos \alpha$, $b_1 = c_1 \sin \alpha$, $a_2 = c_2 \cos \beta$, $b_2 = c_2 \sin \beta$.

Onda

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = c_1 c_2 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = c_1 c_2 \cos(\alpha - \beta) \leq c_1 c_2.$$

Sonuncu üç həldən aydın olur ki, a_i, b_i, c_i ədədlərinin hamısının müsbət olması şərti artıqdır. $c_1 c_2 \geq 0$ olduğunu tələb etmək kifayətdir.

67. $y = (x-5)(x-1)(x-6)(x-2) + 9 = (x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7x + 6) + 9 = (x^2 - 7x)^2 + 16(x^2 - 7x) + 69 = (x^2 - 7x + 8)^2 + 5$. Buradan, $x^2 - 7x + 8 = 0$ və ya $x = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{17})$ olduqda $y_{\min} = 5$.

68. Ədədləri mərtəbə vahidi üzrə yazıb sadə çevirmələr apardıqdan sonra $1000x - 889y + 1109z + t = 0$ və ya $111(9x - 8y + 10z) = (y + z) - (x + t)$

(1) alırıq.

x, y, z, t birqiymətli ədədlər olduğundan $9x - 8y + 10z = 0$ (2). Onda $y + z = x + t$ (3). (2) - ni çevirib $10(y + z) = 9(2y - x)$ alırıq. Yalnız iki hal ola bilər:

1) $y + z = 2y - x = 0$, onda $x + t = 0$. Trivial $x = y = z = t = 0$ həlli alınır.

$$2) \ y + z = 9; \ 2y - x = 10, \text{ başqa sözlə } \begin{cases} y + z = 9 \\ x + t = 9 \\ 2y - x = 10 \end{cases} \text{ sistemini}$$

alırıq. Bu sistemin 3-cü tənliyindən alınır ki, x - cüt ədəddir, ardıcıl olaraq $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 4$; $x_4 = 6$; $x_5 = 8$ götürüb aşağıdakı həlləri alırıq.

	1	2	3	4	5
x	0	2	4	6	8
y	5	6	7	8	9
z	4	3	2	1	0
t	9	7	5	3	1

$$69. \frac{2}{1+2\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}} = \frac{2(2\sqrt{2}-1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})}{8-(1-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9})^2} = \frac{2(2\sqrt{2}-1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})}{1-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}} = \frac{2(2\sqrt{2}-1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})(1+\sqrt[3]{3})}{1+3} = \sqrt[6]{72} + \sqrt[3]{9} + \sqrt{2} + 1.$$

$$70. \quad f(x) = 2x^2 - (a+b+c+d)x + (ad+bc) \quad \text{kvadrat}$$

üçədlisinə və onun $D = (a+b+c+d)^2 - 8(ad+bc)$ diskriminantına baxaq. İsbat edək ki, $a > c$, $b > d$ olduqda üçədlinin kökləri həqiqi və müxtəlifdir, buradan da isbat ediləcək bərabərsizlik alınır.

$$f(a) = a^2 - ab - ac + bc = (a-b)(a-c);$$

$$f(b) = b^2 - ab - bd + ad = (b-a)(b-d);$$

$$f(c) = c^2 - ac - cd + ad = (c-a)(c-d);$$

$$f(d) = d^2 - bd - cd + bc = (d-b)(d-c).$$

$a \neq b$ isə onda kvadrat üçhəddli x a -dan b -yə keçdikdə işarəsini dəyişir. $c \neq d$ olduqda $f(c)$ və $f(d)$ müxtəlif işarəlidir. Hər iki halda $f(x)$ -in iki müxtəlif həqiqi kökü vardır. $a = b$ və $c = d$ isə, onda $f(a) = f(c)$, deməli $f(x)$ -in yenə iki müxtəlif həqiqi kökü ($a > c$) vardır. Beləliklə, $D > 0$. Bu da verilmiş bərabərsizliyin isbatı deməkdir.

$$71. N - \text{axtarılan ədəddirsə, onda } N = \overline{xyz_5} = \overline{zyx_7}.$$

Buradan alınır ki, $25x + 5y + z = 49z + 7y + x$ və ya $y = 12(x - 2z)$. Lakin $0 \leq y \leq 4$, odur ki, $x - 2z = 0$, $y = 0$. İki hal mümkündür;

$$1) x = 4, z = 2, N = 402_5 = 204_7 = 102_{10},$$

$$2) x = 2, z = 1, N = 201_5 = 102_7 = 51_{10}.$$

$$72. \text{ Tənliyi belə yazmaq olar: } x^4 - 4x^3a + 6x^2a^2 - 4xa^3 + a^4 - 2(x^3a - 2x^2a^2 + xa^3) = 0 \text{ və ya } (x-a)^4 - 2ax(x-a)^2 = 0, \\ (x-a)^2[(x-a)^2 - 2ax] = 0, (x-a)^2(x^2 - 4ax + a^2) = 0. \text{ Beləliklə, } x_1 = x_2 = a, x_3 = a(2 + \sqrt{3}), x_4 = a(2 - \sqrt{3}).$$

$$73. \frac{295 - 413\sqrt[3]{2} + 177\sqrt[3]{4}}{5 + 3\sqrt[3]{4} - 7\sqrt[3]{2}} = \frac{59(5 + 3\sqrt[3]{4} - 7\sqrt[3]{2})}{5 + 3\sqrt[3]{4} - 7\sqrt[3]{2}} = 59.$$

$$74. \text{ Şərtə görə, } \overline{abcd} = (cd)^2. \text{ Buradan}$$

$100(10a + b) - (10c + d) = (10c + d)^2$, $100(10a + b) = (10c + d)(10c + d - 1)$; $10c + d = k$ olsun. Aşkındır ki, $c \neq 0$. Odur ki, k - ikirəqəmli ədəddir. Beləliklə, $100(10a + b) = k(k - 1)$; $k(k - 1)$ hasilı 100-ə bölünür. Odur ki, k və $k-1$ ədədlərindən biri 4-ə, digəri 25-ə bölünməlidir. Asanlıqla müəyyən etmək olar ki, $k=25$, $k-1=24$ və $k=76$, $k-1=75$. Birinci halda $10a + b = 6$, $a = 0$ alınır ki, bu şərtə ziddir. İkinci halda

isə $10a + b = 193$ və $a = 5$, $b = 7$. Onda $76 = 10c + d$ və $c = 7, d = 6$. Beləliklə, axtarılan ədəd 5776-dır.

$$75. \quad 1^2 - 2^2 + \dots + 101^2 = 1 + (101^2 - 100^2) + (99^2 - 98^2) + \dots + (3^2 - 2^2) = 201 + 197 + \dots + 9 + 5 + 1 = \frac{1}{2}(201 + 1)51 = 101 \cdot 51 = 5151.$$

76. A məntəqəsindən velosipedçinin avtobusla görüşdüyü yerə qədər məsafə y km, velosipedçinin sürəti x km/s olsun. Onda avtobusun və yük maşınının sürətləri uyğun olaraq $(x+20)$ km/s və $(x+10)$ km/s olar. $\frac{y}{x}$ saatda avtobus $\frac{y}{x}(x+20)$ km yol gedər və şərtə görə

$$y + \frac{y}{x}(x+20) = x+20 \quad (1) \quad \text{Analoji olaraq } \frac{y - \frac{x}{15}}{x} \text{ saat ərzində yük}$$

maşını $\frac{15y-x}{15x}(x+10)$ km yol gedər. Odur ki,

$$\frac{15y-x}{15} + \frac{15y-x}{15x}(x+10) = x+10 \quad (2). \quad (1) \text{ və } (2) \text{ tənliklər sistemini}$$

həll edib $2x^2 - 45x + 100 = 0$ tənliyini və buradan $x = 20$ (km/s) alırıq.

77. A və B komandalarındakı oyunçuların sayı uyğun olaraq x , y olsun. Onda $\begin{cases} xy = 4(x+y) \\ (x-1)(y-1) = xy - 17 \end{cases}$ və ya $\begin{cases} xy = 4(x+y) \\ x+y = 18 \end{cases}$ və ya $\begin{cases} x+y = 18 \\ xy = 72 \end{cases}$.

Beləliklə x , y Viyet teoreminə görə $z^2 - 18z + 72 = 0$ tənliyinin kökləridir.

Buradan $z_1 = 6$, $z_2 = 6$. A komandakı oyunçuların sayı B-dəkindən az olduğundan A-da 6 oyunçu olmuşdur, onlardan 5-i çıxış etmişdir.

78. Fərz edək ki, A-dan B-dən çıxan qatarların sürətləri x və y -dir.

Şərtə görə $\frac{360}{x} \geq 5$; $\frac{360}{1,5x+y} < 2$. Buradan $x \leq 72$, $2(1,5x+y) > 360$,

$$1,5x + y > 180, \quad y > 180 - 1,5x = 180 - \frac{3}{2} \cdot 72 = 72; \quad y > 72.$$

Deməli, $x \leq 72 < y$. İkinci qatarın sürəti çoxdur.

79. Birinci, ikinci, üçüncü fəhlənin bir saatda bütün işin yerinə yetirdikləri hissələrini uyğun olaraq x_1, x_2, x_3 -lə işarə edək. Onda

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{x_1 + x_3} + 2 = \frac{1}{x_1 + x_2} \\ \frac{4}{3}x_2 = x_3 \end{cases} \text{ üçüncü tənlikdən } x_3 \text{ götürüb, birinci tənlikdə}$$

x_2 -ni x_1 -lə ifadə edib ikinci tənlikdə yerinə yazsaq $\frac{1}{\frac{1}{2} - x_2} + 2 = \frac{1}{\frac{1}{12} - \frac{4}{3}x_2}$ və ya $192x_2^2 - 52x_2 + 1 = 0$ alırıq. Bu tənliyin

kökləri $x_2' = \frac{1}{4}$ və $x_2'' = \frac{1}{48}$ -dir. Birinci kök məsələnin mənasına

zidd olduğundan onu artıq (birinci tənlikdən $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{12}, \frac{1}{4} > \frac{1}{12}$).

Cavab: $x_2 = \frac{1}{48}$ -dir.

80. Tənliyin təyin oblastı və a parametrimin mümkün qiymətləri çoxluğu $x - 2 \neq 0$ (1) şərtindən tapılır. Modulun mənfi olmamasından alınır ki, verilmiş tənlik yalnız və yalnız $\frac{(3-x)a}{x-2} + 1 = 0$ (2) və

$2y - |2a - 1| + \frac{1}{2} = 0$ (3) olduqda ödənilir. Müsbət x ədədinin (2)

tənliyini ödədiyi a parametrimin qiymətləri $x = \frac{2-3a}{1-a} > 0$

bərabərsizliyindən tapılır. Bu bərabərsizliyin həlli $a < \frac{2}{3}$ və $a > 1$ (4)

dir; habelə (1) şərtinə görə $x - 2 = \frac{2-3a}{1-a} - 2 \neq 0$, yəni $a \neq 0$ (5).

Müsbət y ədədinin (3) tənliyini ödədiyi a parametrimin qiymətləri

$y = \frac{1}{2}|2a-1| - \frac{1}{4} > 0$ bərabərsizliyindən tapılır. Bu bərabərsizliyi

həll edib $a < \frac{1}{4}$ və $a > \frac{3}{4}$ (6) alırıq. a -ın eyni zamanda (4), (5) və (6) şərtlərini ödəyən qiymətlər çoxluğu cavabı verir. Nəticə $a < \frac{1}{4}$, $a \neq 0$, $a > 1$ dir.

$$81. \quad x = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{120}{121}, \quad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{119}{120} \quad \text{olsun.}$$

$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}, \frac{4}{5} > \frac{3}{4}, \frac{6}{7} > \frac{5}{6}, \dots, \frac{120}{121} > \frac{119}{120}$ olduğundan $x > y$ və $x^2 > xy$.

$xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{119}{120} \cdot \frac{120}{121} = \frac{1}{121}$. Beləliklə, $x^2 > \frac{1}{121}$, buradan $x > \frac{1}{11}$.

82. $\frac{x}{y} = a$, $\frac{y}{z} = b$, $\frac{z}{x} = c$ ilə işarə edək. Bu bərabərlikləri tərəf-

tərəfə vurub $abc = 1$, digər tərəfdən $a + b + c = \frac{25}{6}$,

$ab + ac + bc = \frac{23}{6}$ (1) alırıq. Viyet teoreminə görə a, b, c

məchullarını $t^3 - \frac{25}{6}t^2 + \frac{23}{6}t - 1 = 0$ kub tənliyini kökləri üçlüyü

kimi axtarmaq olar. Aşkardır ki, bu tənliyin $t_1 = 3$ tam kökü vardır.

Bundan sonra qalan $t_2 = \frac{2}{3}, t_3 = \frac{1}{2}$ kökləri tapırıq. Məsələn,

$a = 3, b = \frac{2}{3}, c = \frac{1}{2}$ götürüb $x : y = 3 : 1 = 6 : 2$, $y : z = 2 : 3$

olduğundan axtarılan məchullar üçün $x : y : z = 6 : 2 : 3$ nisbətini alırıq. Analoji olaraq axtarılan nisbətin daha beş mümkün qiymətlərini tapmaq olar: $3 : 1 : 2$, $2 : 3 : 6$, $2 : 3 : 1$, $1 : 2 : 3$, $3 : 6 : 2$.

83. $x + 2 = y$ əvəz edək. Onda $(y - 1)^2 + y^3 + (y + 1)^4 = 0$ və ya $y^4 + 5y^2 + 7y^2 + 2y = 0$ alırıq. Buradan $y_1 = 0$ və sonra $y^3 + 5y^2 + 7y + 2 = (y^3 + 2y^2) + (3y^2 + 6y) + (y + 2) = (y + 2)(y^2 + 3y + 1) = 0$, buradan $y_2 = -2$, $y_{3,4} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$. Beləliklə, verilmiş tənliyin kökləri $x_1 = -2$, $x_2 = -4$, $x_{3,4} = \frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}$ dir.

84. Şərtə görə $2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0$. Lakin $2a^2 - 5ab + 2b^2 = (2a^2 - 4ab) - (ab - 2b^2) = (2a - b)(a - 2b)$. Onda $a - 2b = 0$ və ya $2a - b = 0$. Şərtə görə $b > a > 0$, odur ki, $b = 2a$ ($a = 2b$ yox). Beləliklə, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{a+2a}{a-2a} = -3$.

85. $f(x)$ funksiyasını təyin edən eynilikdən alınır ki, bu funksiya x -in hər hansı qiymətində təyin olunmuşdursa onda $\frac{a^2}{a-x}$ qiymətində də təyin olunmuşdur. Onda $f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) + f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right) = \frac{a^2}{a-x}$ (2) eyniliyini alırıq.

Yenidən (2) -də x yerində $\frac{a^2}{a-x}$ yazıb $f\left(\frac{ax-a^2}{a}\right) + f(x) = \frac{ax-a^2}{x}$ (3) eyniliyini alırıq. (2) bərabərliyinin hər tərəfini -1 -ə vurub alınmış bərabərliyi (1) və (3) ilə tərəf-tərəfə toplayıb $f(x) = \frac{x^3 - a^2x + a^3}{2x(x-a)}$ tapırıq.

86. Həllin iki üsulunu göstərək.

I. Verilmiş tənliyi $\frac{xyzt + xy + xt + zt + 1}{yzt + y + t} = \frac{54}{17}$ şəkildə yazmaq və onun sol tərəfini aşağıdakı şəkildə çevirək.

$$\frac{xyz + xy + xt + zt + 1}{yzt + y + t} = x + \frac{zt + 1}{y(z + 1) + t} = x + \frac{1}{y + \frac{z}{zt + 1}} = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{t}}}.$$

Buradan görünür ki, sol tərəf hər hansı rasional ədədin zənciri kəsə ayrılmasından ibarətdir və tənliyi həll etmək üçün sağ tərəfi də

$$\text{zənciri kəsər şəklində göstərmək lazımdır: } \frac{54}{17} = 3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Ədədin zənciri kəsə ayrılmasının yeganəliyindən alınır ki, $x=3$, $y=5$, $z=1$, $t=2$.

II. Tənliyi $54yzt + 54y + 54t = 17xyz + 17xy + 17xt + 17zt + 17$ və ya $yzt(54 - 17x) + y(54 - 17x) + t(54 - 17x) = 17(z + 1)$ və ya $(54 - 17x)(yzt + y + t) = 17(z + 1)$ şəklində yazmaq. $yzt + y + t > z + 1$ olduğundan $0 < 54 - 17x < 17$, buradan $x=3$. İndi $3(yzt + y + t) = 17(z + 1)$ tənliyini alırıq. Bu tənliyi $(17 - 3y)(zt + 1) = 3t$ şəklində yazmaq olar. $zt + 1 > t$ olduğundan $0 < 17 - 3y < 3$, buradan $y=5$. Onda $2(zt + 1) = 3t$ tənliyini alırıq. Buradan alınır ki, t cüt ədəddir və 2 ədədi t -yə bölünür, yəni $t=2$ və nəhayət $z=1$. Bilavasitə yoxlamaqla müəyyən etmək olar ki, tapılmış dörd ədəd həqiqətən tənliyin həlləridir.

87. Göstərilən misallardan istifadə etməklə həqiqi ədədlər sahəsində bütün köklərin hesabı olması şərt ilə irrasional cəbri tənliklər həllinin mühüm bir üsulunu göstəririk. Bəzən hər hansı əvəzləmə ilə yeni dəyişənə keçməklə irrasional ifadəni rasional şəkildə gətirmək olur. Bu halda uyğun əvəzləmə ilə baxılan irrasional ifadə rasionallaşır və ona rasionallaşdırma deyilir.

İrrasional ifadəni rasionallaşdırmaq üçün belə əvəzləmənin tətbiq edilməsi fikri inteqral hesabında irrasional ifadələrin inteqrallanması üçün tətbiq edilən analogi əvəzləmədən götürülmüşdür. Bununla da orta məktəbin IX sinifində uyğun çalışmalar vasitəsilə şagirdləri gələcəkdə irrasional ifadələrin inteqrallanması işinə kömək edə bilən hazırlıq mərhələsi yerinə yetirilir.

İrrasional tənliklərin (və ya bərabərsizliklərin) rasionallıq əvəzləmə üsulu ilə həlli rasionallaşdırma üsulu adlanır.

Bu metodun tətbiqilə irrasional tənliklərin həlli ilə əlaqədar şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətinin inkişaf etdirilməsinə də mühüm bir nümunə göstəririk.

Rasionallaşdırıcı əvəzləmələri tətbiq edərkən bu əvəzləmə nəticəsində alınan yeni rasionallıq tənliyinin təyin oblastının verilmiş irrasional tənliyinin təyin oblastına uyğun olmasına xüsusi diqqət vermək lazımdır. Yalnız bu şərt gözləniləndə alınmış rasionallıq tənlik verilmiş irrasional tənliklə birgüclü (ekvivalent) olur.

İrrasional tənliklərin həlli ilə əlaqədar şagirdlərdə ümumiləşdirmə qabiliyyətini inkişaf etdirmək məqsədilə göstərilən çalışmaları həllində istifadə olunan irrasional ifadələrin rasionallaşdırılması üçün istifadə olunan əvəzləmələri də göstərək.

1) $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ (1) şəklində ifadələr, burada R – rasionallıq funksiya mənasını verir, a və b sabitlərdir, n - ixtiyari tam ədəddir, $t = \sqrt[n]{ax+b}$ (2) əvəzləməsilə rasionallaşdırılır. Doğrudan da (2) bərabərliyin hər tərəfini n -ci dərəcədən qüvvətə yüksəldib $t^n = ax+b$ və buradan $x = \frac{t^n - b}{a} = \varphi(t)$ alırıq, $\varphi(t)$ - rasionallıq funksiyadır.

Beləliklə $R(x, \sqrt[n]{ax+b}) = R[\varphi(t), t]$.

Rasionallıq funksiyanın rasionallıq funksiyası da rasionallıq funksiya olduğundan, sonuncu bərabərliyin sağ tərəfi rasionaldır. Baxılan tənliyinin təyin oblastı $x \geq 0$ dır. $t = \sqrt[n]{x}$ ($t \geq 0$) rasionallaşdırıcı

əvəzləməsilə baxılan tənlik onunla eynigüclü
$$\begin{cases} \frac{t^2 - 4}{t + 2} = t^2 - 8 \\ t \geq 0 \end{cases} \text{ qarışıq}$$

sistemə gəlir. Kəsri $t + 2 > 0$ -yə ixtisar etdikdən sonra isə

$$\begin{cases} t^2 - t - 6 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \text{ alırıq. Bu sistemdə verilən tənliklə eynigüclüdür.}$$

Sonuncu tənliyin həlli $t=3$ –dür. Onda $x=9$.

2) Əvvəlkinə analoji olaraq isbat edilir ki, $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ (3)

şəklində funksiyanı $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (4) əvəzləməsilə, $ad - bc \neq 0$ şərti

ödənildikdə, rəşional şəkilə gətirmək olar, burada a, b, c, d – hər hansı sabitlər, n -ixtiyari müsbət tam ədəddir.

$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots\right)$ (5) şəklində irrəşional funksiya

$t = \sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (6) əvəzləməsilə rəşionallaşdırılır, burada r ilə

radikalların dərəcəsinin ƏKOB işarə edilib. Verilmiş tənliyin köklərini $(x-2)(x-3) > 0$ sahəsində axtarmalıyıq (aşkardır ki, $x=2, x=3$ onun kökləri deyil). Tənliyin hər tərəfini $\sqrt[3]{x-3}$ -ə bölüb

$$6 + \sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}} = 5\sqrt[6]{\frac{x-2}{x-3}} \text{ alırıq.}$$

Alınmış tənlik $t = \sqrt[6]{\frac{x-2}{x-3}}$ ($t > 0$) rəşionallaşdırıcı əvəzləməsilə

onunla birgüclü $\begin{cases} t^2 - 5t + 6 = 0 \\ t > 0 \end{cases}$ qarışıq sisteminə gəlir. Buradan

$$t_1 = 2 \text{ və } t_2 = 3 \text{ və əvəzləməyə əsasən } x_1 = 3\frac{1}{63}, x_2 = 3\frac{1}{728} \text{ alırıq.}$$

3) Göstərmək olar ki, $y = x^m(a + bx^n)^p$ (7) ifadəsində, burada a, b -sabitlərdir, m, n qüvvət dərəcələri isə hər hansı rəşional ədədlərdir,

yalnız $p, \frac{m}{n}$ və ya $\frac{m}{n} + p$ ədədlərindən biri tam olduğu üç halda rəşionallaşdırıcı əvəzləmə mümkündür. Bu hallarda rəşionallaşdırıcı

əvəzləmələr uyğun olaraq $t = \sqrt[r]{x}$, $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$ və $t = \sqrt[s]{\frac{a + bx^n}{x^m}}$

(8) ola bilər, burada r ilə m və n ədədlərinin məxrəcinin ƏKOB, S ilə p ədədinin məxrəci işarə edilmişdir.

Göstərilən üç rasionallaşdırıcı əvəzləmənin varlığı birinci halda tənliyi $R(x, y) = 0$, ikinci və üçüncü hallarda isə $R(x'', y) = 0$ şəkilə gətirməyin mümkünlüyünü göstərir.

Tənliyin təyin oblastı $0 \leq x \leq 1$ -dir. Onu $(5x+2)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + (5x-7) = 0$ ($x \neq 0, x=0$ kök deyil) şəkilə gətirək. Rasionallaşdırmanın üçüncü halını tətbiq etmək olar ($m = -\frac{1}{2}, n = 1, p = \frac{1}{2}; \frac{m}{n} + p = 0$ - tam

ədəddir). Beləliklə, $t = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ($t \geq 0$) əvəzləməsilə verilmiş irrasional

tənlik $2t^3 - 7t^2 + 7t - 2$ və ya $(t-1)(t-2)\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0$ rasional şəkilə

düşür. Buradan $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = \frac{1}{2}$ və əvəzləmədən istifadə edib

$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{5}, x_3 = \frac{4}{5}$ alırıq.

4) $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ (9) şəklində funksiya kvadratik irrasionalıq adlanır, burada $a \neq 0, b$ və c hər hansı sabitlərdir. Bu ifadə Eyler əvəzləməsi adlanan əvəzləmələrin birilə rasionallaşır. Bunu asanlıqla isbat etmək olar. Bunun üçün $ax^2 + bx + c$ kvadrat üçhədlisinin mənfi və köklərinin bərabər olmadığı nəzərdə tutulur (əks halda kökü rasional ifadə ilə əvəz etmək olar).

a) Əvvəlcə $D = b^2 - 4ac < 0$ olan hala baxaq. Bu halda $ax^2 + bx + c$ kvadrat üçhədlisinin işarəsi a -nın işarəsi ilə eyni olur və bu kvadrat üçhədlisi müsbət olduğundan ($D < 0$ şərtinə görə kvadrat üçhədlisi sıfıra bərabər ola bilməz) $a > 0$.

Beləliklə, $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}$ (və ya $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a}$) (10) əvəzləməsindən istifadə etmək olar. Buna çox vaxt Eylerin birinci əvəzləməsi deyilir. İsbat edək ki, bu əvəzləmə (9) funksiyasını rasionallaşdırır.

$ax^2 + bx + c = t - x\sqrt{a}$ bərabərliyinin (qeyd edək ki, $t - x\sqrt{a} \geq 0$) hər tərəfini kvadrata yüksəldib $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}tx$ və buradan $x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t} = \varphi(t)$,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{at^2 + b + c\sqrt{a}}}{2\sqrt{a}t} = \psi(t), \quad \text{burada } \varphi(t) \text{ və } \psi(t) \text{ rasional}$$

ifadələrdir, alırıq. Beləliklə, $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) = R[\varphi(t), \psi(t)]$.

Alınmış bərabərliyin sağ tərəfi rasional funksiyaadır.

b) İndi $D > 0$, başqa sözlə $ax^2 + bx + c$ kvadrat üçhədlisinin iki müxtəlif həqiqi x_1, x_2 kökü olan hala baxaq. Bu halda $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Əvvəlkinə analoji olaraq isbat edilir ki, bu halda (9) funksiyası $t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_1}$ ($x \neq x_1$) (11) əvəzləməsilə

rasionalaşdırılır (Eylerin II əvəzləməsi adlanır).

Qeyd edək ki, (11) rasionallaşdırıcı əvəzləməsi $x \neq x_1$ şərtilə doğrudur. Beləliklə irrasional tənliklərin həllində bu əvəzləməni tətbiq edərkən $x = x_1$ -in verilmiş tənliyin kökü olmadığını yoxlamaq lazımdır (əks halda bu kök itə bilər).

$c > 0$ isə onda bu halda $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$ (və ya $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$) (12) götürmək olar.

$a > 0$ və $c > 0$ olduqda $x = \frac{1}{z}$ əvəzləməsilə biri digərinə gəlir.

Odur ki, həmişə (12) əvəzləməsindən istifadə etməmək olar. Baxılan tənliyin təyin oblastı $-\infty < x < \infty$ dur. Eylerin birinci rasionallaşdırıcı əvəzləməsini tətbiq edək: $t = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$. Yeni t məchulunu tapmaq üçün $t(t^2 - t - 6) = 0$ tənliyini alırıq. Onun kökləri $t_1 = 0$, $t_2 = 3$ və $t_3 = -2$ dir. Bunları əvəzləmədə yerinə yazıb $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{8}{7}$ alırıq.

$R\left(x, x^2 + px + q, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$ (13) ifadəsini rasionallaşdırmaq

üçün $x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1}$ (14) kəsir-rasional əvəzləməsi tətbiq olunur.

α və β əmsalları elə seçilir ki, hər iki kvadrat üçhədlidə bir dərəcəli hədlər eyni zamanda yox olsun. Bununla çevrilmiş ifadə $R_1\left(t, \sqrt{At^2 + B}\right)$ şəklinə düşür və yuxarıda baxdığımız uyğun əvəzləmə ilə rasionallaşdırılır.

Təklif olunan çalışmaları əlaqədar daha çox tətbiq olunan əvəzləmələrə baxdıq. Bilmək lazımdır ki, eyni bir irrasional tənlik bir neçə müxtəlif əvəzləmə ilə rasionallaşdırıla bilər. Bu əvəzləmələrin seçilməsi alınan rasionallıq tənliyinin formasından asılıdır.

5) Tənliyin təyin oblastı $-3 \leq x \leq 1$ dir. Burada $t = \sqrt{3 - 2x - x^2} + x + 1$ ($-2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$) rasionallaşdırıcı əvəzləmədən istifadə etmək məqsədəuyğundur. Onda $\begin{cases} t^2 + 2t - 8 = 0 \\ -2 \leq t \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$ qarışıq sistemini alırıq. Buradan $t=2$. Sonra əvəzləmədə bunu yerinə yazıb verilən tənliyin $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ köklərini tapırıq.

6) $R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$ (1) funksiyasına baxaq. $x = |a|\sin t$ (16) rasionallaşdırıcı əvəzləmədən istifadə edib $\sqrt{a^2 - x^2} = |a|\cos t$ alırıq. Belə hesab edirik ki, x ədədi $-|a|$ və $|a|$ arasında ($-|a| \leq x \leq |a|$), t isə $-\frac{\pi}{2}$ və $\frac{\pi}{2}$ ($-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) arasında dəyişir. Onda ki, $t = \arcsin \frac{x}{|a|}$. Göstərilən əvəzləmə ilə baxılan funksiya $R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) = R(|a|\sin t, |a|\cos t)$ şəklinə düşür. (15) funksiyası habelə $x = |a|\cos t$ əvəzləməsilə də rasionallaşır, $0 \leq t \leq \pi$, yəni $t = \arccos \frac{x}{|a|}$. Analoji olaraq

$R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ (18) funksiyası $x = |a|\tanh t$ ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$) (19)

əvəzləməsilə $\sqrt{a^2 + x^2} = |a|\cosh t$ olduğundan $R(|a|\tanh t, |a|\cosh t)$ şəklinə düşür. $R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$ (20) funksiyasını rasionallaşdırmaq üçün $x = |a|\sec t$ (21) əvəzləməsini tətbiq etmək olar.

$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx^2 + c}\right)$ ifadəsini triqonometrik əvəzləmə ilə rasionallaşdırmaq üçün əvvəlcə bu ifadəni yuxarıda baxdığımız (15), (18) və (20) şəkillərindən birinə gətirmək lazımdır.

Baxılan tənliyin təyin oblastı $|x| \leq 1$ -dir. $x = \sin t$ əvəzləməsini tətbiq edib $1 + \sin^3 t + \cos^3 t = 3 \sin t \cos t$ tənliyini alırıq. Bu sonuncu tənlik isə $z = \sin t + \cos t = x + \sqrt{1 - x^2}$ əvəzləməsilə onunla ($z = \sin t + \cos t$ - in hər tərəfini əvvəl kvadrata, sonra kuba yüksəldib $\sin t \cos t = \frac{z^2 - 1}{2}$, $\sin^3 t + \cos^3 t = \frac{-3(x^2 - 1)^2}{2} + z^3$ alıb) birgüclü $\begin{cases} z^3 + 3z^2 - 3z - 5 = 0 \\ |z| \leq \sqrt{2} \end{cases}$ kökü $z = -1$ olan qarışıq sisteminə gəlir. Buradan

$x + \sqrt{1 - x^2} = -1$ və $x = -1$ alırıq.

Nəticə olaraq qeyd etmək ki, rasionallaşdırma metodu irrasional bərabərsizliklərin həllində, irrasional ifadələrin çevrilməsində də tətbiq edilə bilər.

Bilmək lazımdır ki, başqa irrasional ifadələrin rasionallaşdırılmasında onlara uyğun triqonometrik əvəzləmələrdən istifadə olunur. Məsələn, $R\left(x, \sqrt{(x-a)(b-x)}\right)$, burada $a < x < b$, funksiyanın rasionallaşdırılmasında $x = a \cos^2 t + b \sin^2 t$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ əvəzləməsin-

dən, $R\left(x, \sqrt{(x^2 - a^2)^3}\right)$ funksiyanın rasionallaşdırılmasında isə

$x = |a| \sec t$ əvəzləmədən istifadə etmək lazım gəlir.

Məktəblilərin müxtəlif rasionallaşdırıcı əvəzləmələrdən istifadə etməsinin sözsüz ki, ali məktəbdə irrasional funksiyaların inteqrallanması metodlarını daha müvəffəqiyyətlə öyrənilməsinə müəyyən köməyi ola bilər.

88.

	Bir gündə tədarük edilən ağacın m ³ sayı	Bir gündə tədarük edilən ağacın m ³ sayı	İş günün sayı
Plana görə	100	x	$\frac{x}{100}$
Faktik	110	x	$\frac{x}{110}$

Şərtə görə $\frac{x}{100} - \frac{x}{110} = 5$ tənliyini və buradan $x = 5500m^3$

alırıq. Tənlilik qurmaq yolu ilə mətnli məsələni həll etdikdən sonra bu həllin doğruluğunu yoxlamaq lazımdır. Bu əsasən məsələnin şərtinin ödənilməsinin yoxlanması ilə olur. Başqa bir yol isə baxılan məsələdə verilənlərdən birini məchul, əvvəlki məchulu isə məlum hesab edərək alınmış yeni məsələnin həllindən ibarətdir. Bu yolla baxılan məsələnin həllini yoxlamaq üçün belə məsələ tərtib etmək və onun həllini yerinə yetirmək lazımdır: “Ağackəsənlər arteli 5500 m³ ağac tədarük etmişdir. Onlar planı artıqlaması ilə yerinə yetirərək gündə plandan əlavə 10m³ ağac tədarük edərək bu işə 5 gün vaxtından əvvəl qurtarmışlar. Ağackəsənlər arteli plana görə gündə neçə kubmetr ağac tədarük etməli idilər?”

Bu məsələdə tələb ediləni y ilə işarə edək. Əvvəlki məsələdəkinə analoji mühakimədən sonra $\frac{5500}{y} - \frac{5500}{y+10} = 5$ tənliyini alırıq.

Göründüyü kimi “yoxlama” başqa sözlə, yeni məsələnin həlli kvadrat tənliyin həllinə (əvvəlki məsələdə olduğu kimi xətti tənliyə yox) gətirilir, onun köklərindən biri ($y_1 = -110$) isə yeni tərtib olunan məsələni ödəmir. Digər $y_2 = 100m^3$ həll isə tələb ediləndir. Mətnli məsələlərin həllinin yoxlanmasında bəzən bu üsuldən də istifadə etmək lazımdır.

89. Verilmiş rəqəmlərdən bütün mümkün olan üçrəqəmli ədədləri düzəldək: $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$. Onda $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, $\overline{acb} = 100a + 10c + b$ və s. Bütün bu ədədlərin cəmi $100(a + a + b + b + c + c) + 10(b + c + a + c + a + c) +$

$$+(c+b+c+a+b+a)=200(a+b+c)+20(a+b+c)+2(a+b+c)=222(a+b+c)=$$

$$=6 \cdot 37(a+b+c)\text{-dir.}$$

90. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, sistemin həlləri elədir ki, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_8 \geq 0$. Tənliklərin hər birini tərəflərini kvadrata yüksəldib alınan tənlikləri toplasaq: $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8 = 0$ alırıq. Beləliklə, sistemin yeganə $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_8 = 0$ həlli vardır.

91. Tənliyin hər tərəfini kvadrata yüksəldək:

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{x^2 + 1 + x + \frac{1}{x}} = x + 3 \quad \text{və ya} \quad 2\sqrt{x^2 + 1 + x + \frac{1}{x}} = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right).$$

$$\text{Lakin } x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \quad \text{və sol tərəf mənfi deyil, beləliklə } x^2 + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Bu isə yalnız $x=1$ və ya $x=-1$ olduqda mümkündür. Yoxlama ilə müəyyən edirik ki, $x=-1$ verilmiş tənliyin yeganə köküdür.

92. Aşağıdakı həllər aşkardır:

$$x - \text{ixtiyari}, y = 0, z = 0;$$

$$x = 0, y = \text{ixtiyari}, z = 0; \quad (1)$$

$$x = 0, y = 0, z = \text{ixtiyari}$$

Fərz edək ki, $xyz \neq 0$; sistemin hər bir tənliyini $x^2 y^2 z^2$ -na bölüb

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3, \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 4, \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 5 \end{cases} \quad (2)$$

tənliklər sistemini alırıq.

(2) tənliklərini hədbə-həd toplayıb mötərizələri açıdıqdan sonra

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 12 = 0 \quad \text{və} \quad \text{buradan} \quad \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)_1 = -3,$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)_2 = 4 \quad \text{alırıq.}$$

Birinci halda (2) sistemi

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + 3\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3, \\ \left(\frac{1}{y} + 3\right)^2 = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 4, \\ \left(\frac{1}{z} + 3\right)^2 = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 5 \end{cases}$$

şəklinə düşür və buradan $x = -\frac{5}{6}$, $y = -1$, $z = -\frac{5}{4}$, ikinci halda isə

$$x = \frac{9}{13}, y = \frac{3}{4}, z = \frac{9}{11} \text{ alırıq.}$$

93. $2(9x + 7y) = 7(5x + 2y) - 17x$. Bu bərabərliyin sağ tərəfi 17-yə bölünür, onda $2(9x + 7y)$ -də 17-yə bölünür. 2 və 17 qarşılıqlı sadə ədədlər olduğundan $9x + 7y$ -də 17-yə bölünür.

94. Fərz edək ki, $(a; b)$ nöqtəsi verilmiş funksiyanın qrafikinə simmetriya mərkəzidir, onda qrafik üzərindəki hər bir $(x; y)$ nöqtəsinə qrafikin digər $(2a - x; 2b - y)$ nöqtəsi uyğundur.

$2b - y = \frac{1}{2a - x - 1} + \frac{1}{2a - x - 2} + \frac{1}{2a - x - 3}$ (1) bərabərliyi verilmiş qrafikin ixtiyari $(x; y)$ nöqtəsi üçün ödənilir. $x=0$ və $x=-1$ götürüb a

$$\text{və } b \text{ -yə nəzərən } \begin{cases} 2b + \frac{11}{6} = \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2a-2} + \frac{1}{2a-3} \\ 2b + \frac{13}{12} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2a-2} \end{cases} \text{ tənliklər sistemini}$$

alırıq. Sistemin ikinci tənliyindən birincini çıxıb $\frac{3}{4} = \frac{1}{2a-3} - \frac{1}{2a}$ və

buradan $a_1 = 2$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ alırıq. b üçün uyğun qiymətlər

$b_1 = 0$, $b_2 = -\frac{35}{24}$ dir. Alınmış qiymətləri (1) də yerinə yazıb müəyyən

edirik ki, $(2; 0)$ yeganə simmetriya mərkəzidir.

95. Fərz edək ki, α, β, γ verilmiş tənliyin kökləridir. Onda $\alpha^3 = -(\alpha + 1)$, buradan $\alpha^9 = -(\alpha + 1)^3$ və

$$\alpha^{11} = -\alpha^2(\alpha + 1)^3 = -\alpha^5 - 3\alpha^4 - 3\alpha^3 - \alpha^2 = \\ = -(\alpha^3 + \alpha + 1)(\alpha^2 + 3\alpha + 2) + 3\alpha^2 + 5\alpha + 2 = 3\alpha^2 + 5\alpha + 2.$$

Analoji olaraq $\beta'' = 3\beta^2 + 5\beta + 2$ və $\gamma'' = 3\gamma^2 + 5\gamma + 2$. Alınmış üç bərabərliyi tərəf-tərəfə toplayaq:

$$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 5(\alpha + \beta + \gamma) + 6 \quad . \text{ Viyet teoreminə görə} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad ,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 0^2 - 2 \cdot 1 = -2 \quad . \text{ Odur ki, } \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 + 6 = 0.$$

96. Fərz edək ki, verilmiş tənliyin kökləri α, β, γ -dir. Onda $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$, $\beta^3 + p\beta + q = 0$, $\gamma^3 + p\gamma + q = 0$ və ya $\alpha^3 = -(p\alpha + q)$, $\beta^3 = -(p\beta + q)$, $\gamma^3 = -(p\gamma + q)$. Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplayıb

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -(p\alpha + q) - (p\beta + q) - (p\gamma + q) = -p(\alpha + \beta + \gamma) - 3q$$

alırıq. Viyet teoreminə görə $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Onda

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3q . \text{ Bunu da isbat etmək tələb olunurdu.}$$

97. Funksiyanın (f) arqumentinin verilmiş bərabərliyi ödəyən qiymətlərini tapaq.

$$\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| = \frac{1}{\left| x + \frac{1}{x} \right|} \leq \frac{1}{2} \text{ olduğundan verilmiş bərabərlik arqumentin}$$

yalnız $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ parçasından götürülmüş qiymətləri üçün f funksiyasını təyin edir.

$$\frac{x}{x^2 + 1} = z \text{ ilə əvəz edək. Onda } \frac{x^4 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ və}$$

$$\frac{1}{x + \frac{1}{x}} = z \text{ və ya } x + \frac{1}{x} = \frac{1}{z} , \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{z^2} - 2 \text{ olduğundan}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - 2 \quad . \quad \text{Beləliklə, verilmiş tənliyi} \quad f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^2} - 2, & |z| \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(z), & |z| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

düsturu ilə verilən hər bir funksiya ödəyir, burada $\varphi(z)$ ixtiyari funksiyadır. (hətta $|z| > \frac{1}{2}$ çoxluğunda təyin olmayan funksiya da ola bilər).

98. Fərz edək ki, nurani qocanın k oğlu vardır və onların hər biri $x_1, x_2, \dots, x_k$ qəpik almışdır. Belə güman olunur ki, oğlanlardan hər bir tam sayda manat almasalarda hər halda tam sayda qəpiklər ala bilərlər. Hələ də bu fərziyyədən istifadə mühümdür.

Məsələnin şərtinə görə $x_1 = 10^5 + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k - 100}{10}$ buradan

[illegible]

Hər sonrakı tənlikdən əvvəlkini çıxıb

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_1 = 10^5 - \frac{1}{9}x_2 \\ x_3 - x_2 = 10^5 - \frac{1}{9}x_3 \\ \\ x_k - x_{k-1} = 10^5 - \frac{1}{9}x_k \end{array} \right. \quad \text{və ya}$$

[illegible]

İkincidən başlayaraq tənliklərin hər birini ardıcıl olaraq $\frac{10}{9}, \left(\frac{10}{9}\right)^2, \dots, \left(\frac{10}{9}\right)^{k-1}$ -ə vurub və onları tərəf-tərəfə toplayıb $\left(\frac{10}{9}\right)^{k-1} \cdot x_k - x_1 = 10^5 \left[1 + \frac{10}{9} + \dots + \left(\frac{10}{9}\right)^{k-2} \right]$ münasibətinə gəlirik. Lakin $1 + \frac{10}{9} + \dots + \left(\frac{10}{9}\right)^{k-2} = \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^{k-1} - 1}{\frac{10}{9} - 1} = 9 \left[\left(\frac{10}{9}\right)^{k-1} - 1 \right]$ və $x_k = 10^5 \cdot k$ olduğundan $\left(\frac{10}{9}\right)^{k-1} \cdot k \cdot 10^5 - x_1 = 10^5 \cdot 9 \left[\left(\frac{10}{9}\right)^{k-1} - 1 \right]$, buradan

$$10^5 \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^{k-1} (k-9) = x_1 - 9 \cdot 10^5 \cdot x_1 - \text{müsbət tam ədəd olduğundan } k-9$$

ifadəsi 9^{k-1} -ə bölünür. Aşkardır ki, bu $k=9$ olduqda mümkündür, k məchulunun 2-dən 8-ə qədər qiymətlərində mümkün deyil. Bundan əlavə, məsələn tam riyazi induksiya⁶ metodundan istifadə edərək asanlıqla göstərmək olar ki, bütün $k > 9$ üçün $0 < k-9 < 9^{k-1}$, buradan görünür ki, məsələnin şərti bütün $k > 9$ qiymətlərində də ödənilir. Formal olaraq məsələnin şərti $k=1$ üçün də ödənilir, lakin bu halı atmaq lazımdır. Çünki oğlanların sayı 1-dən çox olub, əksi halda məsələdə deyilən vəsiyyətdə ehtiyac yoxdur. Beləliklə, k yalnız 9-a bərabər ola bilər. Alınan qiyməti (1) -də yerinə yazıb ardıcıl olaraq tapırıq ki, $x_9 = x_8 = \dots = x_1 = 9 \cdot 10^5$. Beləliklə, atanın 9 oğlu olmuşdur və onların hər birinə 9000 m çatmışdır. Deməli, qocanın yığdığı və oğlanlar arasında bərabər böldüyü ümumi məbləğ 81000 m olmuşdur. Məsələnin şərtində belə bərabərlik şərti qoyularsa onu asanlıqla həll etmək olardı. Odur ki, məsələdə oğlanların hər birinə eyni miqdarda pul verilməsi şərtini qoymağı lazım bilmədik.

99. $\Delta = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - (ab + ac + ad + al) = \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - l\right)^2$

fərqinə baxaq. Aşkardır ki, bu fərq mənfi deyil. $\frac{a}{2} = b = c = d = l$

⁶ Bu metodun IX sinifdə öyrəniləcəyini nəzərdə tuturuq

olduqda bərabərlik mümkündür. Beləliklə,
 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + l^2 \geq a(b + c + d + l)$.

100. Axtarılan ədədlər $\overline{aaaaa}$ və $\overline{bbbbb}$ olsun. Onda məsələnin şərtinə görə $\begin{cases} \overline{aaaaa} = \overline{bbbbb} \cdot 16 + r \\ \overline{aaaa} = \overline{bbb} \cdot 16 + (r - 2000) \end{cases}$ burada r ilə $\overline{aaaaa}$ -nın

$\overline{bbbbb}$ -yə bölünməsindən alınan qalıq işarə edilmişdir. Birinci bərabərlikdən ikincini çıxdıqdan sonra $a \cdot 10^4 = b \cdot 10^3 \cdot 16 + 2000$ və ya $5a = 8b + 1$ alırıq. Sonuncu bərabərlikdə a, b birrəqəmli ədədlər, sağ tərəf isə tək ədəd olduğundan a tək ədəddir. $a = 1; 3; 7; 9$ olduqda b tam ədəd deyil. $a = 5$ olduqda $b = 3$. Odur ki, axtarılan ədədlər 55555 və 3333 –dir.

101. Verilmiş tənliyin diskriminantı müsbətdir, odur ki, onun x_1, x_2 kökləri həqiqi ədədlərdir. Bundan əlavə x_1, x_2 müsbət ədədlərdir və Viyet teoreminə görə $x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = 1$. Odur ki, $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 5$ və $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{5}$. Analoji olaraq $(\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2})^2 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 2\sqrt[4]{x_1 x_2} = \sqrt{5} + 2$ və $\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2} = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$.

102. Verilmiş funksiyanı $y = ax^3 + bx^2 + cx + d = ba \frac{(x-1)x(x+1)}{6} + 2b \frac{x(x-1)}{2} + (a+b+b)x + d$ şəklində göstərək. x -in ixtiyari tam qiymətlərində $(x-1)x(x+1)$ və $x(x-1)$ ardıcıl tam ədədlərin hasili kimi uyğun olaraq 6-ya və 2-yə bölünür. Beləliklə, $6a, 2b, a+b+c$ və d ədədlərinin tam olmasını tələb etməklə kafi şərti alırıq. Bu şərt həm də zəruri olacaqdır. Doğrudan da $x=0; 1; -1; 2$ olduqda $d, a+b+c+d, -a+b-c+d, 8a+4b+2c+d$ tam ədədlərini alırıq, buradan alınır ki, $a+b+c = (a+b+c+d) - d$; $2b = (a+b+c+d) + (-a+b-c+d) - 2d$;

$6a = (8a + 4b + 2c + d) + 2(-a + b - c + d) - 6b - 3d$ -in hər biri tamdır. Deməli, $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$ və $d=1$ qiymətləri tapılan zəruri və kafi şərti ödəyir.

103. Verilmiş sistemin birinci tənliyini $(3x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (y - 3z)^2 = 0$ şəklində yazmaq olar. Bu bərabərlik yalnız $x = 2z$, $y = 3z$ olduqda ödənilir. x və y -in z ilə ifadəsini ikinci tənlikdə yerinə yazıb $(2z)^3 + (3z)^3 + z^3 = 288$ və buradan $z=2$ alırıq. Onda $x=4$, $y=6$. Beləliklə, verilmiş sistemin yeganə $x=4$, $y=6$, $z=2$ həlli vardır.

104. $b=0$ və $c=a$ olduqda verilmiş çoxhədli 0-a bərabər olur, odur ki, $b(c - a)$ -ya bölünür. Verilmiş çoxhədlidə mötərizələri açıb onu c -in qüvvətləri cəmi şəklidə göstərüb $b(c - a)$ -ya böldükdə qismətdə

$$c^2 + c^2(a+b) + c(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)(a+b) = c^2(c+a+b) + (a^2 - b^2)(c+a+b) = (a+b+c)(a^2 - b^2 + c^2) \text{ alınır.}$$

Beləliklə, verilmiş çoxhədli $b(c - a)(a + b + c)(a^2 - b^2 + c^2)$ -na bərabərdir.

105. $(a + b - c)^2 \geq 0$ buradan $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc) \geq 0$,
 $bc + ac - ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$ alırıq. Şərtə görə $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$. Onda
 $bc + ac - ab \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$, onda $bc + ac - ab < 1$ və $\frac{bc}{abc} + \frac{ac}{abc} - \frac{ab}{abc} < \frac{1}{abc}$,
 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$.

106. Verilmiş tənliyin hər tərəfini $\sqrt{3x-2}$ -yə vurub $x^2 - (3x - 2) = (1 - x)\sqrt{3x - 2}$ və ya $(x - 1)(x - 2) = (1 - x)\sqrt{3x - 2}$ alırıq. Buradan, $x_1 = 1$. $\sqrt{3x - 2} = x - 2$ tənliyinin yeganə $x=1$ kökü vardır. Beləliklə, $x=1$ verilmiş tənliyin yeganə köküdür.

$$107. 5ab = 3b^2 - 10a^2 \text{ olduğundan } \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b} = \frac{3a^2 + 15ab - 6b^2}{9a^2 - b^2} = \frac{3a^2 + 3(3b^2 - 10a^2) - 6b^2}{9a^2 - b^2} = \frac{-3(9a^2 - b^2)}{9a^2 - b^2} = -3.$$

$$108. \frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2} = \frac{(2y-x)^2}{x^2 + y^2} - 1 = 4 - \frac{(y+2x)^2}{x^2 + y^2}$$

Beləliklə, verilmiş kəsr $y = -2x (x \neq 0)$ olduqda ən böyük 4 və $y = \frac{1}{2}x$ olduqda ($x \neq 0$) ən kiçik -1 qiymətlərini alır.

109. 71 ədədini sadəlik üçün a ilə işarə edək. Onda $(a-1)(a^9 + a^8 + a^7 + \dots + a^2 + a + 1) + 1 = (a^{10} + a^9 + a^8 + \dots + a^3 + a^2 + a) - (a^9 + a^8 + a^7 + \dots + a^2 + a + 1) + 1 = a^{10}$.

Beləliklə, verilmiş ifadə 71^{10} -yə bərabərdir.

110. Şərtə görə, ardıcıl olaraq: $x + y = -(z + t)$,
 $(x + y)^3 = -(z + t)^3$, $x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -z^3 - t^3 - 3zt(z + t)$,
 $x^3 + y^3 - 3xy(z + t) = -z^3 - t^3 - 3zt(z + t)$,
 $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 3(xy - zt)(z + t)$ alırıq.

111. Verilmiş tənliyi $(x + y)(x + y + 1) = -3y$ şəklində yazaq. Buradan alınır ki, ya $x + y$, ya da $x + y + 1$ ifadəsi 3-ə bölünür. Hər hansı tam k ədədi üçün $x + y = 3k$ isə, onda $y = -3k^2 - k$ və $x = 3k^2 + 4k$. $x + y + 1 = 3k$ isə, onda $y = -3k^2 + k$ və $x = 3k^2 + 2k - 1$. Beləliklə, verilmiş tənliyin iki seriya tam həlləri vardır:

$$\begin{cases} x = 3k^2 + 4k, \\ y = -3k^2 - k \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3k^2 + 2k - 1, \\ y = -3k^2 + k \end{cases}$$

112. Verilmiş sistemi $\begin{cases} y(x + y)^2 = 9, \\ y(x^3 - y^3) = 7 \end{cases}$ şəklində yazaq. Birinci

tənlikdən görünür ki, $y > 0$, onda ikinci tənlikdən alınır ki, $x > y > 0$.

$\sqrt{y} = t$ əvəz edək. onda birinci tənlikdən $x = \frac{3}{t} - t^2$ alırıq və ikinci

$$\text{tənlik } t^2 \left[\left(\frac{3}{t} - t^2 \right)^3 - t^6 \right] = 7 \text{ və ya } (3 - t^3)^3 - t^9 - 7t = 0 \text{ şəklində}$$

düşür. Alınmış tənliyin sol tərəfi azalan funksiyadır, odur ki, onun birdən çox olmayan kökü vardır. Aşkardır ki, bundan əlavə $t=1$ onun köküdür. Onda $y=1$, $x=2$ verilmiş tənliklər sisteminin yeganə həllidir.

113. $\beta^2 + a\beta^2 + b\beta + c = 0$ şəklində münasibəti müəyyən etməliyik, burada a, b, c məchul tam ədədlərdir. Şərtə görə

$$\alpha^3 = \alpha + 1 \quad \text{olduğundan}$$

$$\beta^3 = (2\alpha^2 - \alpha)^3 = \alpha^3(2\alpha - 1)^3 = \alpha^3(8\alpha^3 - 12\alpha^2 + 6\alpha - 1) = (\alpha + 1)(-12\alpha^2 + 14\alpha + 7) = -12\alpha^3 + 2\alpha^2 + 21\alpha + 7 = 2\alpha^2 + 9\alpha - 5$$

$$\beta^2 = (2\alpha^2 - \alpha)^2 = 4\alpha^4 - 4\alpha^3 + \alpha^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha -$$

$$-4\alpha - 4 + \alpha^2 = 5\alpha^2 - 4; \text{ onda axtarılan münasibət belə şəkllə düşər:}$$

$$(2\alpha^2 + 9\alpha - 5) + (5\alpha^2 - 4)a + (2\alpha^2 - \alpha)b + c = 0 \quad \text{və ya}$$

$$\alpha^2(2 + 5a + 2b) + \alpha(9 - b) + (-5 - 4a + c) = 0. \quad \text{İndi } a, b, c$$

ədədlərini elə seçməliyik ki, α -nın müxtəlif qüvvətlərinin əmsalları sıfıra bərabər olsun. Başqa sözlə, sonuncu tənliyin sağ tərəfi sıfır olduğundan sol tərəfdəki əmsalların hər biri sıfıra bərabər olar:

$$\begin{cases} 2 + 5a + 2b = 0 \\ 9 - b = 0 \\ -5 - 4a + c = 0 \end{cases}, \text{ buradan } b = 9, a = -4, c = -11.$$

Beləliklə, axtarılan tənlik $\beta^3 - 4\beta^2 + 9\beta - 1 = 0$ -dır.

114. Verilmiş rəqəmlərdən 24 dörd rəqəmli ədəd düzəltmək olar, onlardan

$$\overline{24xy}, \overline{42xy}, \overline{x24y}, \overline{x42y}, \overline{xy24}, \overline{yx42},$$

$\overline{yx42}, \overline{yx24}, \overline{y42x}, \overline{y24x}, \overline{42yx}, \overline{24xy}$ şəklində ədədlər məsələnin şərtini ödəmir. Deməli, məsələnin şərtini 12 ədəd ödəyir.

115. $x > 0$ olduqda $f(x) > x$ bərabərsizliyi ödənildiyindən, koordinat müstəvisinin birinci rübündə f funksiyasının qrafiki $y=x$ düz xəttindən yuxarıda yerləşir, odur ki, g funksiyasının ona simmetrik

qrafiki bu düz xətdən aşağıda yerləşir. Beləliklə, $x > 0$ olduqda bu funksiyaların qrafikləri kəsişmir.

$f(x)$ və $g(x)$ tək funksiyalar olduğundan, baxılan tənliyin mənfəi kökü yoxdur. Odur ki, onun yeganə kökü 0-dır: $f(0)=0$ olduğundan, onda tərs funksiyanın tərifinə görə $g(0)=0$, yəni $f(0)=j(0)=0$.

116. Verilmiş sistemin tənliklərini tərəf-tərəfə toplayıb və çıxsaq onunla birgüclü

$$\begin{cases} (x+y)(1-\sqrt{x^2-y^2}) = \sqrt{1-x^2+y^2} (a+b), \\ (x-y)(1+\sqrt{x^2-y^2}) = \sqrt{1-x^2+y^2} (a-b) \end{cases} \quad (1)$$

sistemi alırıq. Bu tənliklərin sol və sağ tərəflərini bir-birinə vurub $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ (2) alırıq. Bu münasibətdən istifadə etməklə (1) sistemini belə yazmaq olar:

$$\begin{cases} x+y = \frac{(a+b)\sqrt{1-a^2+b^2}}{1-\sqrt{a^2-b^2}}, \\ x-y = \frac{(a-b)\sqrt{1-a^2+b^2}}{1+\sqrt{a^2-b^2}}. \end{cases}$$

Buradan $x = \frac{a+b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$, $y = \frac{b+a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$. Bu cavabın

verilən sistemi ödədəyi aparılan çevirmələrdə eynigüclülüyn gözlənilməsindən alınır.

117. Baxılan bərabərliyin hər tərəfindən $\overline{xxxxx}$ ədədini çıxsaq:

$\overline{3xxxxx} - \overline{xxxxx} = \overline{yxxxxx} - \overline{xxxxx} - y$, burada $\overline{xxxxx} = a$ əvəz edək.

Onda $3a - a = \overline{y00000} + \overline{xxxxx} - \overline{xxxxx} - y$ və ya $2a = y \cdot 100000 - y$,

$2a = 99999y$ alırıq. lakin $2a = \overline{2xxxxx} = 2x \cdot 11111$ olduğundan,

$2x \cdot 11111 = 99999y \Leftrightarrow 2x = 9y$. Buradan alınır ki, $x=9$, $y=2$.

118. 999 ədədi 37-yə bölündüyündən altırəqəmli $\overline{a_1b_1c_1a_2b_2c_2} = \overline{a_1b_1c_1(999+1)} + \overline{a_2b_2c_2}$ ədədi yalnız və yalnız $\overline{a_1b_1c_1} + \overline{a_2c_2b_2} = (a_1+a_2)100 + (b_1+b_2)10 + (c_1+c_2)$ ədədi 37-yə bölündükdə 37-yə bölünür. a_1 və a_2 , b_1 və b_2 , c_1 və c_2 rəqəmləri sonuncu ifadəyə simmetrik daxil olduğundan, bu cütələr daxil olan

rəqəmləri dəyişməklə bu ədəddən 37-yə bölünən daha 7 ədəd alınır. Sonra $10(100a + 10b + c) = 999a + (100b + 10c + a)$ olduğundan $\overline{a_1b_1c_1a_2b_2c_2}$ ilə yanaşı, $\overline{b_1c_1a_1b_2c_2a_2}$, $\overline{c_1a_1b_1c_2a_2b_2}$ ədədləri də 37-yə bölünər. a_1 və a_2 , b_1 və b_2 , c_1 və c_2 rəqəmləri sonuncu ifadəyə simmetrik daxil olduğundan, bu cütlər daxil olan rəqəmləri dəyişməklə bu ədəddən 37-yə bölünən daha 7 ədəd alınır. Sonra $10(100a + 10b + c) = 999a + (100b + c + a)$ olduğundan $\overline{a_1b_1c_1a_2b_2c_2}$ ilə yanaşı $\overline{b_1c_1a_1b_2c_2a_2}$, $\overline{c_1a_1b_1c_2a_2b_2}$ ədədləri də 37-yə bölünür. Sonrakı yerdəyişmə nəticəsində bu iki ədədin hər birindən 37-yə bölünən daha 7 ədəd alınır. Nəticədə $2 + 3 \cdot 7 = 23$ ədəd alınır.

Qeyd edək ki, 37-yə bölünən bəzi altıraqəmli ədədlərdən onların rəqəmlərinin yerini dəyişməklə 23-dən çox belə ədəd almaq olar. Məsələn, 123876 ədədindən göstərilən xassəyə malik 47 ədəd almaq olar.

119. Verilmiş tənliyi $(x - y + 1)[(x + 2y)^2 + y^2] = 0$ şəklində yazmaq olar. Buradan $y = x + 1$, $x + 2y = 0$, $y = 0$ yazıla bilər. Deməli, baxılan çoxluq $y = x + 1$ düz xətt ilə $\{0\}$ çoxluğunun, burada $O(0; 0)$ birləşməsidir.

120. Verilmiş bərabərlikdə $x=2$ və $x = \frac{1}{2}$ yazaraq, onda

$$\begin{cases} f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{İkinci bərabərliyin hər tərəfini 3-ə vurub,}$$

birincidən çıxıb $f(2) = -\frac{13}{32}$ alırıq.

121. Sistemin birinci tənliyinin sol tərəfinin hədlərini, x -ə nəzərən kvadrat üçhəddli kimi baxaraq, qruplaşdıraraq; əvvəldən kəsrdən qaçmaq üçün bu tənliyin hər tərəfini 10-a vuraq. Onda $100x^2 - 20(y + 10)x + 50y^2 - 60y + 410 =$
 $= (10x - y - 19)^2 + 49y^2 - 98y + 49 = (10x - y - 19)^2 + 49(y^2 - 2y + 1) = (10x - y - 19)^2 +$

$+49(y-1)^2$. Buradan görünür ki, verilmiş sistemin birinci tənliyi yalnız $10x - y - 19 = 0$, $y - 1 = 0$ halında ödənilir. Buradan $x=2$, $y=1$. İndi bu ədədlər cütünün ikinci tənliyi, beləliklə isə sistemi ödənildiyini göstərmək lazımdır. Beləliklə, verilmiş sistemin yeganə (2; 1) həlli vardır.

122. $a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3 = (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + ab - a - b = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (a-1)(b-1) = \left[(a-1) + \frac{1}{2}(b-1) \right]^2 + \frac{3}{4}(b-1)^2$. Buradan görünür ki, baxılan bərabərsizlik a və b -in $a=b=1$ -dən fərqli bütün qiymətlərində ödənilir.

123. Sol tərəfi a ilə işarə edək: $a = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$, onda $a^3 = 64$, $a = 4$.

124. Şərtə verilən bərabərliyi $49(100x+10+x)=16(100z+10y+x)$ şəkildə yazaq. Uyğun çevirmədən sonra $47(4x-z)=10(4x-y)$ alırıq. Buradan alınır ki, $4x-y$ ifadəsi 47-yə bölünür, $x \leq 9$ olduğundan bu yalnız $4x-y=0$ olduqda mümkündür, odur ki, $y=4x$, ona görə də $z=4x$. x yalnız 1 və ya 2 ola bilər. Onda $y_1=4$, $y_2=8$; $z_1=4$, $z_2=8$. Beləliklə, verilmiş məsələnin iki həllini alırıq $(1; 4; 4), (2; 8; 8)$.

125. I və II qabların tutumları uyğun olaraq $(49+x)l$ və $(56+y)l$ olsun. I qaba II-dən x l su tökdükdə II qabda $(56-x)l$ və ya $\frac{1}{2}(56+y)l$ su olar. Yəni, $56-x = \frac{1}{2}(56+y)$ tənliyini alırıq. I qabdan ikinciyə y l su tökdükdə onda birinci qabda $(49-y)l$ və ya $\frac{1}{3}(49+x)l$ su olar. Yəni $(49-y) = \frac{1}{3}(49+x)$ tənliyini alırıq. Beləliklə,
$$\begin{cases} 56-x = \frac{1}{2}(56+y) \\ 49-y = \frac{1}{3}(49+x) \end{cases}$$
 tənliklər sistemini və buradan $x=14$ l, $y=28$ l alırıq.

Onda I və II qabların tutumları uyğun olaraq $49+14=63$ (l), $56+28=84$ (l) dir.

126. Kök altındaki ifadəni belə çevirək:
 $1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2} = 27 - 27\sqrt[3]{26} + 9 \cdot \sqrt[3]{26^2} - 26 = 3^3 - 3 \cdot 3^2\sqrt[3]{26} + 3 \cdot 3\sqrt[3]{26^2} - \sqrt[3]{26^3} = (3 - \sqrt[3]{26})^3$.

Beləliklə, verilmiş ifadə $\sqrt[3]{(3 - \sqrt[3]{26})^3} + \sqrt[3]{26} - 3 - \sqrt[3]{26} + \sqrt[3]{26} = 3$ -dir.

127. Sistemin tənliklərini tərəf-tərəfə toplayıb $x^2 + 9y^2 + 6xy = 100$ və ya $x + 3y = 10$, çıxdıqda isə $2y + z = 0$ alırıq. $2y + z = 0$ tənliyindən $(1; 4)$ və $(2; 2)$ ($x, y \in N$ olduğundan), $x + 3y = 0$ -dan isə $y=1$ və $y=2$ olduqda uyğun olaraq $x=7$, $x=4$ tapırıq. Beləliklə, verilmiş sistemin həlləri $(7; 1; 4)$ və $(4; 2; 2)$ üçlükləridir.

128. Dərəkədə iştirak edənlərin ümumi sayı – n , dərəkə rəhbərindən başqa, onun üzvlərinin qalanlarının yaşları cəmi – S olsun. Onda şərtə görə $\frac{S+17}{n} = 11$, $\frac{S}{n-1} = 10$.

İkinci tənlikdən $S = 10n - 10$, onda birinci tənlikdən $10n + 7 = 11n$, buradan $n = 7$.

129. Kapitanın yaşı – n , qalan oyunçuların yaşlarının cəmi – S olsun; şərtə görə $\frac{S+n}{11} - \frac{S}{10} = 1$ və ya $10n - S = 110$ və ya $11n - (S + n) = 110$, buradan $n - \frac{S+n}{11} = 10$, beləliklə kapitanın yaşı

komandanın orta yaşından 10 il çoxdur, burada $\frac{S+n}{11}$ - komandanın orta yaşıdır.

130. Fərz edək ki, $x \neq 0$, onda $a \neq 0$ və $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1$; $\frac{1}{a} = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + \frac{1}{x} + 1$; $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a}$; $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = \left(\frac{1-a}{a}\right)^2 - 1 = \frac{1-2a}{a^2}$; onda $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{a^2}{1-2a}$.

131. Tənliyi $(x-3)^3 + 9 = \sqrt[3]{x-9} + 3$ şəkildə yazaq. Qeyd edək ki, alınmış tənliyin sol və sağ tərəfindəki funksiyalar qarşılıqlı tərs və artan funksiyalardır. Bu funksiyaları $f(x)$ və $g(x)$ ilə işarə edək. İndi göstərək ki, $f(x)$ və $g(x)$ qarşılıqlı tərs, artan və hər yerdə təyin edilmiş

funksiyalardırsa onda $f(x)=g(x)$ tənliyi $f(x)=x$ tənliyi ilə eynigüclüdür. Doğrudan da $f(a)=a$ isə, onda $g[f(a)]=g(a)$, yəni $g(a)=a=f(a)$. Deməli ikinci tənliyin hər bir həlli birinci tənliyin həllidir. a ikinci tənliyin həlli deyildirsə, başqa sözlə $f(a)>a$ və ya $f(a)<a$ isə onda $f(a)>a=g[f(a)]>g(a)$ və ya $f(a)<a=g[f(a)]<g(a)$, deməli a birinci tənliyin kökü deyil. $f(x)=x$ və ya $x^3-9x^2+26x-18=0$ tənliyini həll edək. Onun köklərindən biri $x=1$ dir. Tənliyin sol tərəfini vuruqlarına ayıraraq $(x-1)(x^2-8x+18)=0$ alırıq. Buradan görünür ki, onun başqa kökü yoxdur.

132. Fərz edək ki, 25 alma x manatdır, onda 1 manata x alma almaq olar. Beləliklə:
$$\begin{cases} 25 \text{ alma} - x \text{ manat} \\ x \text{ alma} - 1 \text{ manat} \end{cases}$$

Buradan $x^2=25$, $x=5$. Deməli 25 almaya 5 m vermək, 1 manata 5 alma almaq olar. Onda 3 manata 15 alma almaq olar.

133. $\overline{xyztk} = \overline{2xy} \cdot \overline{ztk}$ və ya $1000\overline{xy} + \overline{ztk} = \overline{2xy} \cdot \overline{ztk}$ və ya $1000\overline{xy} = \overline{ztk}(\overline{2xy} - 1)$ bərabərliyindən alınır ki, $1000\overline{xy}$ ədədi $(\overline{2xy} - 1)$ -ə bölünür. $\overline{xy}$ və $\overline{2xy} - 1$ ədədlərinin 1-dən fərqli ortaq böləni olmadığından 1000 ədədi $(\overline{2xy} - 1)$ -ə bölünür. Odur ki, $\overline{2xy} - 1$ tək ədədi 25-ə və ya 125-ə bərabərdir. Onda $\overline{xy} = 13$ və ya $\overline{xy} = 63$. $\overline{ztk}$ isə uyğun olaraq 520 və ya 504-dür. Onda axtarılan beşrəqəmli ədəd 13520 və ya 63504-dür.

134. a ədədi n rəqəmlidirsə o 10^{n-1} -dən kiçik deyil, onun rəqəmlərinin cəmi isə $9n$ -dən böyük deyil. Odur ki, məsələnin şərtinin ödənilməsi üçün $10^{n-1} \leq 59 \cdot 9n$ bərabərsizliyi ödənilməlidir. Bu isə yalnız $n \leq 4$ olduqda mümkündür.

Aşkardır ki, axtarılan ədəd birrəqəmli və üçrəqəmli ola bilməz. $a = \overline{xyz}$ olduqda isə məsələnin şərtini $\overline{xyz} = 59(x+y+z)$ və ya $99x+9y = 58(x+y+z)$ şəkildə yazmaq olar; buradan alınır ki, $x+y+z$ ifadəsi 9-a bölünür. Onda $x+y+z$ cəmi 9-a və ya 18-ə bərabərdir. Birinci halda $a=531$ alırıq, ikinci halda isə dördəqəmli ədəd alınır.

Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, dördüncü dərəcəli tənliyin köklərindən məsələnin həllini ödəyənə yoxdur. Beləliklə, məsələnin yeganə həlli 531 ədədidir.

135. Aşkındır ki, -3 və -5 verilmiş tənliyin kökləridir. Onun qalan köklərini tapmaq üçün $y=x+4$ əvəz edək, onda tənlik $(y-2)^2 + (y-1)^3 + y^4 = 2$ və ya $y^4 + y^3 - 2y^2 - y + 1 = 0$ şəkilə düşər. Alınmış tənliyin 1 və -1 kökləri vardır; bu isə lazımı qruplaşdırma aparmağa kömək edir:

$$y^4 + y^3 - 2y^2 - y + 1 = y^2(y^2 + y - 2) - (y-1) = y^2(y-1)(y+2) - (y-1) = (y-1)(y^3 + 2y^2 - 1) = (y-1)[(y^3 + y^2) + (y^2 - 1)] = (y-1)(y+1)(y^2 + y - 1)$$

$$y^2 + y - 1 = 0 \text{ tənliyindən daha iki } -\frac{9+\sqrt{5}}{2}, -\frac{9-\sqrt{5}}{2} \text{ köklərini}$$

tapırıq. Deməli verilmiş tənliyin kökləri -3; -5; $\frac{-17-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-17+\sqrt{5}}{2}$ dir.

136. Verilmiş ədədlərin cəmi

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \text{ müsbətdir. Odur ki, toplananlardan heç olmasa biri müsbətdir. Bunu da isbat etmək tələb edilirdi.}$$

137. Tənliyin bütün hədlərini sol tərəfdə yazıb oxşar hədləri islah etdikdən sonar

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x^2y^2 - x^2y - xy^3 = 0,$$

$(x-y)^2(1-xy) = 0$ alırıq. Buradan $x=y$ və ya $xy=1$. Beləliklə, verilmiş tənliyin qrafiki düz xətt və hiperbolanın birləşməsidir. Bunları da asanlıqla qurmaq olar.

$$138. x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2x(x+y-z-t) = 3x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy - 2xz - 2xt = (x+y)^2 + (x-z)^2 + (x-t)^2.$$

$$139. \text{ Tənliyi } \sqrt{x^3 + 24} - \sqrt{x^3 + 12} = 3x + 8 \text{ şəkildə yazıb sol tərəfi qoşmasına vurub bölsək } \frac{12}{\sqrt{x^3 + 24} + \sqrt{x^3 + 12}} = 3x + 8 \text{ alırıq.}$$

Sonuncu tənliyin sol tərəfi azalan, sağ tərəfi isə artan funksiyadır, odur ki, onun birdən çox kökü ola bilməz. Digər tərəfdən, aşkındır ki, $x=-2$ onun köküdür. Beləliklə, verilmiş tənliyin yeganə $x=-2$ həlli vardır.

140. $5^3 + 7^3 = 468$ olduğundan, verilmiş bərabərliyi məsələn $x = 5 \cdot 468$, $y = 7 \cdot 468$ ədədləri ödəyir. Doğrudan da $x^3 + y^3 = (5 \cdot 468)^3 + (7 \cdot 468)^3 = 468^3(5^3 + 7^3) = 468^3 \cdot 468 = 468^4$.

$$141. (\sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}})^2 = 8+2=10 \quad \text{və} \quad 4(3-\sqrt{5}) = 12+4\sqrt{5} = (\sqrt{10}-\sqrt{2})^2.$$

$$\text{Onda} \quad \sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{10} \quad , \quad 2\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{10}-\sqrt{2}.$$

Beləliklə, verilmiş ifadə $\sqrt{2}$ bərabərdir.

142. Fərz edək ki, α və $\beta \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervalından götürülmüş elə

ədədlərdir ki, $a = \sin^2 \alpha$, $b = \sin^2 \beta$. Onda

$$\begin{aligned} \sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} &< \sqrt{ab} + \sqrt{(1-a)(1-b)} = \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} + \sqrt{(1-\sin^2 \alpha)(1-\sin^2 \beta)} = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) < 1. \end{aligned}$$

Beləliklə, $1 - \sqrt{abc} > \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$, $(1 - \sqrt{abc})^2 > (1-a)(1-b)(1-c)$,

$$1 - 2\sqrt{abc} + abc > 1 - a - b - c + ab + bc + ca - abc \quad \text{və} \quad \text{buradan} \\ a + b + c + 2abc > ab + bc + ca + 2\sqrt{abc}.$$

143. Bu dərəcəsi ikidən yuxarı olmayan parametrlı tənlikdir. Əvvəlcə onların ümumi növü və həlli haqqında lazımı qeydlər edək. Onların ümumi növü $F(a, x) = f(a)x^2 + g(a)x + h(a)$ və $F(a, b, x) = f(a, b)x^2 + g(a, b)x + h(a, b)$ çoxhədlilərlə müəyyən edilir. Göründüyü kimi birinci çoxhədli a parametrlı, ikincisi isə a, b parametrlidir. Bunlarla əlaqədar olaraq təcrübədə ən çox aşağıdakı məsələlərə təsadüf olunur:

- parametrlı tənliyin həlli;
- parametrlı tənliyin ümumi həllinin hər hansı xassələri ödəyən, qiymətlərinin tapılması.

Dərəcəsi ikidən yüksək olmayan parametrlı tənliklər (VIII) x dəyişənli a parametrlı dərəcəsi ikidən yüksək olmayan $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0$ tənliyinin xüsusi hallarda həlləri aşağıdakılardan biri ola bilər:

$$1) \underbrace{\{a/f(a) = g(a) = h(a) = 0\}}_{\infty}; \quad 2) \underbrace{\{a/f(a) = g(a) = 0, h(a) \neq 0\}}_{\emptyset};$$

$$\begin{array}{ll}
 3) \frac{\{a/f(a)=0, g(a) \neq 0\}}{\left\{x/x = -\frac{h(a)}{g(a)}\right\}}; & 4) \frac{\{a/f(a) \neq 0, D = g^2(a) - 4f(a)h(a) = 0\}}{\left\{x/x = -\frac{g(a)}{2f(a)}\right\}}; \\
 5) \frac{\{a/f(a) \neq 0, D < 0\}}{hell\ yoxdur}; & 6) \frac{\{a/f(a) \neq 0, D > 0\}}{\left\{x/x = \frac{-g(a) \pm \sqrt{D}}{2f(a)}\right\}}.
 \end{array}$$

Əvvəlcə, buradakı məntiqi yazılış formasının mahiyyətini şagirdlərə izah etmək lazımdır. Parametrin nəzarət qiymətləri $f(a)=0$ və $D=0$ tənliklərindən tapılır. Parametrin mümkün qiymətləri aralığında alınmış nəzarət qiymətlərində D diskriminantının müəyyən işarəsinə xüsusi tənliklərin son iki həllindən 5), 6) biri uyğun olur. Beləliklə dərəcəsi ikidən yüksək olmayan parametrlı tənliyin həlli aşağıdakı mərhələlərlə aparılır.

1) Ədəd oxu üzərində parametrin, uyğun xüsusi tənliyin təyin olunmadığı, bütün nəzarət qiymətləri qeyd edilir;

2) Parametrin mümkün qiymətləri oblastında verilmiş tənlik eynigüclü çevirmələr vasitəsilə $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0$ şəkilə gətirilir,

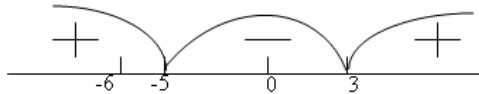
3) Parametrin, $f(a)=0$ tənliyindən nəzarət qiymətləri çoxluğu tapılır; $f(a)=0$ tənliyinin sonlu sayda həlləri varsa, onda parametrin tapılmış hər bir qiyməti üçün uyğun xüsusi tənliklər ayrılıqda həll edilir. Birinci üç növ üzrə xüsusi tənliklər təsnifata ayrılır. $f(a)=0$ tənliyinin sonsuz həlləri çoxluğunda $g(a)=0$ tənliyi həll edilib ∞ və $\emptyset$ növləri ayrılır. $\{a \mid f(a)=0, g(a) \neq 0\}$ çoxluğuna həlli 3) olan tənlik növü uyğundur;

4) Parametrin $D = g^2(a) - 4f(a)h(a)$ -in sıfır olduğu nəzarət qiyməti ayrılır. Uyğun xüsusi tənliyin $x = -\frac{g(a)}{2f(a)}$ ikiqat kökü tapılır;

5) Parametrin tapılan nəzarət qiymətləri onun mümkün qiymətləri onun mümkün qiymətləri oblastını aralıqlara ayırır. Hər bir aralıqda D diskriminantının işarəsi müəyyən edilir. $\{a \mid f(a) \neq 0, D < 0\}$ çoxluğuna həlli olmayan xüsusi tənlik növü uyğundur, parametrin

$$\{a \mid f(a) \neq 0, D > 0\}$$

qiymətləri üçün xüsusi tənliyin iki müxtəlif həqiqi kökləri vardır. Bu ümumi nəzəri məlumatı verdikdən sonra təqdim edilən tənliyi və ona oxşarları həll etmək lazımdır.



Şəkil 29.

Təqdim olunan tənlikdə $a = 0$ nəzarət qiymətidir, bunun üçün uyğun xüsusi tənlik təyin olunmamışdır. $\{a \mid a \neq 0\}$ çoxluğunda verilmiş

tənlik $(a + 6)x^2 - (a + 3)x + 1 = 0$ ilə birgüclüdür. $a = -6$ olduqda

$f(a) = a + 6$ sıfıra çevrilir, uyğun $3x + 1 = 0$ xüsusi tənliyin $x = -\frac{1}{3}$

yeganə həlli vardır. $\{a \mid a \neq -6\}$ çoxluğunda xüsusi tənlik

diskriminantı $D = a^2 + 2a - 15$ olan kvadrat tənlikdir. $a = -5$ və $a = 3$ olduqda $D=0$. Fərz edək ki, $a = -5$, onda alınan $x^2 + 2x + 1 = 0$ xüsusi tənliyin $x=-1$ təkrarlanan kökü vardır. $a = 3$

üçün uyğun $9x^2 - 6x + 1 = 0$ xüsusi tənliyin $x = \frac{1}{3}$ ikiqat kökü vardır.

Ədəd oxu üzərində parametrin tapılan qiymətlərini və alınmış aralıqların hər birində diskriminantın işarəsini təyin edək (Şəkil 29).

$a \in (-5; 0) \cup (0; 3)$ isə onda uyğun xüsusi tənliyin həlli yoxdur.

Parametrin $\{a \mid a \in (-\infty; -6) \cup (-6; -5) \cup (3; \infty)\}$ -dən olan

qiymətləri üçün xüsusi tənliyin iki müxtəlif $x = \frac{a+3 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 15}}{2(a+6)}$

ümumi həlli vardır. Cavabı şagirdlərin ayrıca qeyd etmələri lazımdır:

$$\frac{\{a \mid a = 0\}}{\text{təyin olunmayıb}}; \quad \frac{\{a \mid a = -6\}}{\left\{x \mid x = -\frac{1}{3}\right\}}; \quad \frac{\{a \mid a = -5\}}{\{x \mid x = -1\}}; \quad \frac{\{a \mid a = 3\}}{\left\{x \mid x = \frac{1}{3}\right\}};$$

$$\frac{\{a \mid a \in (5; 0) \cup (0; 3)\}}{\text{həll yoxdur}}; \quad \frac{\{a \mid a \in (\infty; -6) \cup (-6; -5) \cup (3; \infty)\}}{\left\{x \mid x = \frac{a+3 \pm \sqrt{a^2 + 2a - 15}}{2(a+6)}\right\}};$$

Parametr daxil olan tənliklər və bərabərsizliklərin həlli ilə əlaqədar şagirdlərin tədqiqatçılıq fəaliyyətinin araşdırılmasına xüsusi ehtiyac vardır.

144. Dərəcəsi ikidən yuxarı olmayan a, b parametrlı və x dəyişənli $f(a; b)x^2 + g(a, b)x + h(a, b) = 0$ tənliyinin hər bir xüsusi həlləri 143-in əvvəlində göstərilən analogi xüsusiyyətli növlərdən birinə aiddir. Parametrlərin nəzarət qiymətləri

$$f(a, b) = 0 \quad \text{və}$$

$$D = g(a, b)^2 - 4f(a; b)h(a; b) = 0$$

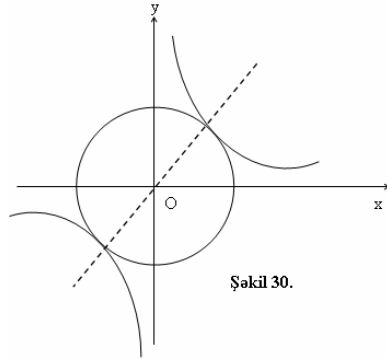
tənliklərilə müəyyən edilir. Oab müstəvisində bu tənliklər D diskriminantının müəyyən işarəyə malik olduğu oblastları ayırır. Onda iki parametrlı tənlik həllinin ümumi sxemi dəyişmir, yalnız ədəd düz xətti əvəzində Oab koordinat müstəvisindən istifadə olunur.

Parametrlərin nəzarət xəttinin qrafik təsviri və onlarla ayrılan oblastların bir növlülüyü həllin hər bir mərhələsinin əyanılığını təmin edir.

Təqdim olunan tənliyin xüsusi tənlikləri $a - b = 0$ olan a, b parametrlərinin bütün qiymətləri üçün başqa sözlə $\{(a, b) \mid a = b\}$ çoxluğunda təyin olunmamışdır.

Parametrlərin $\{(a, b) \mid a \neq b\}$ mümkün qiymətləri oblastında verilmiş tənlik $(2 - ab)x^2 - 2(a - b)x + 2 = 0$ tənliyi ilə birgüclüdür. Parametrlər üçün $2 - ab = 0$ bərabərliyini ödəyən qiymətlər nəzarət hesab olunur. $\{(a, b) \mid b \neq a, ab = 2\}$ nöqtələr çoxluğunda $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ və $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ nöqtələri müstəsna olmaqla $ab = 2$ hiperbolasına (Şəkil 30) uyğun $-2(a - b)x + 2 = 0$ xüsusi tənliyin

$$x = \frac{1}{a - b} \quad \text{ümumi həlli vardır.}$$



Şəkil 30.

Parametrlərin $\{(a, b) \mid a \neq b, ab \neq 2\}$ qiyməti üçün uyğun xüsusi tənlik

kvadrat tənlikdir. $D = 4(a - b)^2 - 8(2 - ab) = 4(a^2 + b^2 - 4)$ diskriminantı, yenə $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ və $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ nöqtələri müstəsna olmaqla $a^2 + b^2 = 4$ çevrənin $\{(a, b) \mid a \neq b, a^2 + b^2 - 4 = 0\}$ nəzarət nöqtələri çoxluğunda, sıfıra bərabərdir. Çevrənin $\{(a, b) \mid a \neq b, a^2 + b^2 - 4 = 0\}$ nöqtələri çoxluğunda uyğun xüsusi

$$(2 - ab)\left(x - \frac{a - b}{2 - ab}\right)^2 = 0 \text{ tənliyinin təkrarlanan } x = \frac{a - b}{2 - ab} \text{ kökü}$$

vardır. Parametrin, hiperbolanın və çevrənin nöqtələrindən fərqli, mümkün qiymətlərində uyğun kvadrat tənliyinin diskriminantı sıfırdan fərqlidir. Dairənin $\{(a, b) \mid a \neq b, a^2 + b^2 < 4\}$ nöqtələri çoxluğunda D – diskriminantı mənfidir və uyğun məxsusi olmayan xüsusi tənliyin həlli yoxdur. Bu dairənin xaricindəki

$\{(a, b) \mid a \neq b, ab \neq 2, a^2 + b^2 > 4\}$ nöqtələri üçün $D > 0$ və tənliyin ümumi həlli $x = \frac{a - b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 4}}{2 - ab}$ dir. Beləliklə, verilmiş tənliyin

həlli nəticəsində aşağıdakı cavablar alınır:

$$\frac{\{(a; b) \mid a = b\}}{\text{teyin olunmayıb}}, \frac{\{(a; b) \mid a \neq b, ab = 2\}}{\left\{x \mid x = \frac{1}{a - b}\right\}},$$

$$\frac{\{(a; b) \mid a^2 + b^2 = 4; a \neq b\}}{\left\{x \mid x = \frac{a - b}{2 - ab}\right\}}, \frac{\{(a; b) \mid a \neq b, a^2 + b^2 < 4\}}{\text{hell yoxdur}},$$

$$\frac{\{(a; b) \mid a \neq b, ab \neq 2, a^2 + b^2 > 4\}}{\left\{x \mid x = \frac{a - b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 4}}{2 - ab}\right\}},$$

145. Parametri a və dəyişəni x olan $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) < 0$ bərabərsizliyində parametrin mümkün qiymətlərini tapmağa aid bütün xüsusi bərabərsizliklər aşağıdakı növlərə ayrılır:

- 1) $\frac{\{a | f(a) = g(a) = 0, h(a) < 0\}}{\infty}$;
- 2) $\frac{\{a | f(a) - g(a) = 0, h(a) = 0\}}{\emptyset}$;
- 3) $\frac{\{a | f(a) = 0, g(a) > 0\}}{\left\{x \mid x \in \left(-\infty; \frac{h(a)}{g(a)}\right)\right\}}$;
- 4) $\frac{\{a | f(a) = 0, g(a) < 0\}}{\left\{x \mid x \in \left(-\frac{h(a)}{g(a)}; +\infty\right)\right\}}$;
- 5) $\frac{\{a | f(a) > 0, D \leq 0\}}{\text{həlli yoxdur}}$;
- 6) $\frac{\{a | f(a) < 0, D < 0\}}{\{x | x \in R\}}$;
- 7) $\frac{\{a | f(a) > 0, D > 0\}}{\left\{x \mid x \in \left(\frac{-g(a) - \sqrt{D}}{2f(a)}; \frac{-g(a) + \sqrt{D}}{2f(a)}\right)\right\}}$;
- 8) $\frac{\{a | f(a) < 0, D \geq 0\}}{\left\{x \mid x \in \left(-\infty; \frac{-g(a) + \sqrt{D}}{2f(a)}\right) \cup \left(\frac{-g(a) - \sqrt{D}}{2f(a)}; +\infty\right)\right\}}$

Xüsusi bərabərsizliklərin aparılan təsnifatı dərəcəsi ikidən yüksək olmayan parametrlə bərabərsizliyin həllinin ümumi sxemini təyin edir.

1) Ədəd düz xətti üzərində parametrin, uyğun xüsusi bərabərsizliyin təyin olmadığı, bütün nəzarət qiymətləri qeyd edilir. Hər birində parametrin, uyğun xüsusi bərabərsizliyin həlli ayrılıqda aparılan, mümkün qiymətləri aralığı ayrılır.

2) Parametrin ayrılmış qiymətləri aralığında birgüclü çevirmələr vasitəsilə verilmiş bərabərsizlik $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) < 0$ şəklinə gətirilir. $\{a | f(a) = 0\}$ çoxluğu parametrin ayrılmış mümkün qiymətlərinin yeni ayrılışını təyin edir. Bərabərsizliyin sonrakı həlli $\{a | f(a) = 0\}$ qiymətləri həm də parametrin mümkün qiymətlərinin yeni ayrılışı üçün ayrılıqda yerinə yetirilir.

3) $\{a | f(a) = 0\}$ çoxluğu $g(a)$ və $h(a)$ -nın qiymətlərindən asılı olaraq 1)-4) xüsusi bərabərsizliklər növü ilə dörd alt çoxluğa ayrılır.

4) Parametrin hər bir ayrılan nəzarət qiymətləri aralığında $f(a)$ əmsalı işarəsini sabit saxlayır. Parametrin $D = g^2(a) - 4f(a)h(a)$ -

nın sıfıra bərabər olan qiymətləri parametrin mümkün qiymətlərində yeni ayrılmanı təyin edir.

5) Parametrin mümkün qiymətlərində alınmış ayırmada $f(a)$ və D -nin işarəsi müəyyən edilir. Mənfi olmayan diskriminant üçün

$$f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0 \quad \text{tənliyinin} \quad f_1(a) = \frac{-g(a) - \sqrt{D}}{2f(a)} \quad \text{və}$$

$$f_2(a) = \frac{-g(a) + \sqrt{D}}{2f(a)} \quad \text{ümumi həlləri tapılır. } f(a) \text{ -nin işarəsindən asılı}$$

olan $A_2(a) = f_2(a) - f_1(a) = \frac{\sqrt{D}}{f(a)}$ fərqi nəzərə almaqla onların

aralıqda qarşılıqlı yerləşmə vəziyyətləri təyin edilir. Parametrin

$$\left\{ a \mid \begin{array}{l} f(a) > 0; \\ D \leq 0 \end{array} \right\}; \quad \{a/f(a) > 0, D > 0\}, \quad \{a/f(a) < 0, D < 0\}, \quad \{a/f(a) < 0, D \geq 0\}$$

çoxluqlarından hər birindəki qiymətləri məxsusi olmayan bərabərsizliklərin uyğun ümumi həllə birlikdə 5)-8) tiplərindən birini müəyyən edir.

İndi verilən bərabərsizliyin həllini göstərək. $a = -2$ nəzarət qiymətidir, bunun üçün uyğun xüsusi bərabərsizlik təyin olunmamışdır. Parametrin $\{a \mid a \in (-\infty; -2)\}$ qiymətləri üçün xüsusi bərabərsizliklər

məcmusuna baxaq. Onda $a + 2 < 0$ və verilmiş bərabərsizlik $2(2x^2 + 1) < (a + 2)(2x - x^2)$ və ya $(a + 6)x^2 - 2(a + 2)x + 2 < 0$ (1)

ilə birgüclüdür. (1) bərabərsizliyində parametrin $a + 6 = 0$ və $D = 4(a^2 + 2a - 8) = 0$ münasibətlərini ödəyən qiymətləri nəzarət

qiymətləridir. Buradan $a = -6 \in (-\infty; -2)$ və $a = -4 \in (-\infty; -2)$ parametrin bütün nəzarət qiymətləri $(-\infty; -2)$ çoxluğundadır. Ədəd oxu üzərində parametrin tapılmış nəzarət qiymətlərini qeyd edək (Şəkil

31). $a = -6$ üçün uyğun xüsusi $8x + 2 < 0$ bərabərsizliyi $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$

həllər çoxluğunda xəttidir. $a = -4$ isə, onda uyğun $2x^2 + 4x + 2 < 0$ xüsusi bərabərsizliyinin həlli yoxdur. Fərz edək ki, $a \in (-\infty; -6)$, onda $a + 6 < 0$, $D = 4(a + 4)(a - 2) > 0$. (1) bərabərsizliyi ümumi

$$\text{həlləri } f_1(a) = \frac{a+2-\sqrt{(a+4)(a-2)}}{a+6}, \quad f_2(a) = \frac{a+2+\sqrt{(a+4)(a-2)}}{a+6}$$

olan $(a+b)x^2 - 2(a+2)x + 2 = 0$ tənliyinə uyğundur. $a+6 < 0$ olduğundan

$$f_2(a) - f_1(a) = \frac{2\sqrt{(a+4)(a-2)}}{a+6} < 0, \quad \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ -5 \quad -4 \quad -2 \end{array} \rightarrow$$

Şəkil 31.

yəni $f_2(a) < f_1(a)$. Buradan

$a \in (-\infty; -6)$ üçün (1) bərabərsizliyinin ümumi həlli $(-\infty; f_2(a) \cup (f_2(a); \infty))$ aralığıdır. $\{a \mid a \in (-6; -4)\}$ çoxluğunda uyğun xüsusi bərabərsizlik üçün $a+6 > 0$, $D > 0$ həm də $f_2(a) - f_1(a) > 0$ və $f_2(a) > f_1(a)$. Onda (1) bərabərsizliyinin həlli parametrin verilmiş aralıqdan götürülmüş qiyməti üçün $[f_1(a), f_2(a)]$ şəkildədir. Fərz edək ki, $a \in (-4; -2)$, onda $a+6 > 0$, $D < 0$ və uyğun xüsusi bərabərsizliyin həll yoxdur. Parametrin $\{a \mid a \in (-2; +\infty)\}$ qiymətləri üçün xüsusi bərabərsizliklərin məcmusuna baxaq. Verilmiş bərabərsizlik $(a+b)x^2 - 2(a+2)x + 2 > 0$ (2) ilə birgüclüdür. Bununla $a+6 > 0$, $D = 4(a+4)(a-2)$ diskriminantı, parametrin nəzarət qiyməti olan $a = 2 \in (-2; +\infty)$ nöqtəsində sıfıra bərabərdir. $a = 2$ isə, onda uyğun $8x^2 - 8x + 2 > 0$ xüsusi bərabərsizliyi bütün $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ üçün doğrudur. $a = 2$ qiyməti $(-2; +\infty)$ aralığın iki $(-2; 2)$ və $(2; +\infty)$ aralıqlarına ayırır. Əmsalın $a \in (-2; 2)$ qiymətləri üçün $a+6 > 0$, $D < 0$ və uyğun xüsusi bərabərsizliyin həllər çoxluğu $\mathbb{R}$ ilə üst-üstə düşür. Fərz edək ki, $a \in (2; +\infty)$ onda $a+6 > 0$, $D > 0$ həm də $f_2(a) > f_1(a)$. Verilmiş aralıqda bərabərsizliyin ümumi həlli $(-\infty; f_1(a)) \cup (f_2(a); +\infty)$ dir. Beləliklə, cavab belə olur:

$$\frac{\{a/a = -2\}}{\text{teyin olunmayıb}}; \left\{ \frac{\{a/a = -6\}}{\{x/x \in (-\infty; -\frac{1}{4})\}} \right\}; \frac{\{a/a \in (-4; -2)\}}{\text{həlli yoxdur}};$$

$$\frac{\{a/a \in (-2; 2)\}}{\{x/x \in R\}}; \frac{\{a/a \in (-\infty; -6) \cup \{2\}\}}{\{x/x \in (-\infty; f_2(a)) \cup (f_1(a); +\infty)\}};$$

$$\frac{\{a/a \in (-6; -4)\}}{\{x/x \in (f_1(a); f_2(a))\}}; \frac{\{a/a \in (2; +\infty)\}}{\{x/x \in (-\infty; f_1(a)) \cup (f_2(a); +\infty)\}}; \text{burada}$$

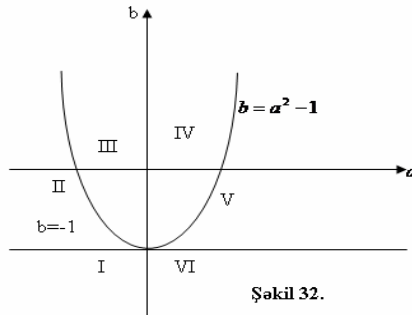
$$f_1(a) = \frac{a+2-\sqrt{(a+4)(a-2)}}{a+6}, \quad f_2(a) = \frac{a+2+\sqrt{(a+4)(a-2)}}{a+6}.$$

146. Dərəcəsi ikidən yuxarı olmayan a, b parametrlili və x dəyişənli $f(a, b)x^2 + g(a, b)x + h(a, b) < 0$ bərabərsizliyində xüsusi bərabərsizliklər 145-in həllindən əvvəl bir parametrlili bərabərsizlik üçün göstərilən 1) – 8) tipləri kimi təsnifata ayrılır.

Parametrlərin nəzarət qiymətləri analogi olaraq $f(a, b) = 0$ və $D=0$ tənlikləri ilə təyin olunur. Baxılan bərabərsizlik $a = 0$, başqa sözlə Ob oxunun bütün $\{(0; b) | b \in R\}$ nöqtələri üçün təyin olunmamışdır. Parametrlərin qiymətlərinin uyğun nizamlı cütləri nəzarət üçündür.

Parametrlərin $\{(a; b) | a \neq 0\}$ mümkün qiymətləri oblastında Oab müstəvisinin $1+b=0$ olan nöqtələri də nəzarət nöqtələridir. $b=-1$ düz xəttinin $\{(a; -1) | a \neq 0\}$ nöqtələri üçün uyğun xüsusi bərabərsizlik $2ax + a < 0$ şəklindədir. Onda $b=-1$ düz xəttinin Ob oxundan sağda yerləşən $\{(a; -1) | a > 0\}$

nöqtələr çoxluğunda uyğun xüsusi bərabərsizliyin həlləri çoxluğu $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ dir. Ob oxunun $b=-1$ düz xəttinin $\{(a; -1) | a < 0\}$ nöqtələri üçün bərabərsizliyin ümumi



həlli $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ aralığıdır.

$\{(a, b) \mid a \neq 0, b \neq -1\}$ çoxluğunda xüsusi bərabərsizliklər məcmusuna baxaq. Verilmiş bərabərsizlik diskriminantı $D = 4(a^2 - 1 - b)$ olan $\frac{1+b}{a}x^2 + 2ax + a = 0$ tənliyi uyğundur.

Diskriminant parabolunun $(0; -1)$ nöqtəsi müstəsna olmaqla $\{(a, b) \mid a \neq 0, b = a^2 - 1\}$ çoxluğunda sıfıra bərabər olur. Parametrlərin nəzarət qiymətlərinin ayrılmış çoxluğunu Oab koordinatlar müstəvisində qeyd edək (Şəkil 32). $a(x+1)^2 < 0$ xüsusi bərabərsizliyinə uyğun $\{(a, b) \mid a \neq 0, b = a^2 - 1\}$ nöqtələr çoxluğunda $a < 0$ üçün həllər çoxluğu $\{x \mid x \in (-\infty; -1) \cup (-1; -\infty)\}$ -dir, $a > 0$ üçün isə həll yoxdur. Xüsusi bərabərsizlik növünün xarakteristikası $\frac{\{(a, b) \mid a < 0, b = a^2 - 1\}}{x \mid x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)}$ və $\frac{\{(a, b) \mid a > 0, b = a^2 - 1\}}{\text{hell yoxdur}}$.

Parametrlərin sərhəd nöqtələri qiymətləri xətti $a = 0, b = -1, b = a^2 - 1$ parametrlərin bütün mümkün qiymətləri çoxluğunu bərabərsizliklərin müəyyən sistemi ilə təyin edilən I-VI oblastlar məcmusuna ayırır.

Xüsusi bərabərsizliklər məcmunun sonrakı həllini hər bir oblastdan olan nöqtələr üçün ayrılıqda aparaq. Bununla qeyd edək ki, III və IV oblastın nöqtələri üçün $D = 4(a^2 - 1 - b) < 0$, qalan oblastlar üçün $D > 0$. I oblastın $\{(a, b) \mid a < 0, b < -1\}$ nöqtələri çoxluğunda əsas

bərabərsizlikdə $\frac{1+b}{a} > 0, D > 0$. Onda uyğun tənlikdə ümumi həllər

$$f_1(a, b) = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 1 - b}}{(1+b)/a} \quad \text{və} \quad f_2(a, b) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 1 - b}}{(1+b)/a} \quad \text{-dir, həm də}$$

$f_2(a, b) - f_1(a, b) > 0$. I oblastının nöqtələri üçün bərabərsizliyin həlləri çoxluğu $-(f_1(a, b), f_2(a, b))$ dir. II oblastın

$\{(a, b) \mid a < 0, b > -1, a^2 - 1 - b > 0\}$ nöqtələri üçün verilən bərabərsizlikdə $\frac{1+b}{a} < 0, D > 0, f_2(a; b) < f_1(a; b)$ və bu çoxluqda bərabərsizliyin

ümumi həlli $(-\infty; f_2(a, b)) \cup (f_1(a, b); +\infty)$. III oblastın nöqtələr çoxluğu $\{(a, b) \mid a < 0, a^2 - 1 - b < 0\}$.

Uyğun xüsusi bərabərsizliklər üçün $\frac{1+b}{a} < 0, D < 0$, odur ki, onların ümumi həlli bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur.

$\{(a, b) \mid a > 0, a^2 - 1 - b < 0\}$ çoxluğunda IV oblastın $\frac{1+b}{a} > 0, D < 0$ nöqtələr çoxluğuna uyğun xüsusi bərabərsizliyin həlli yoxdur. V oblastın $\{(a, b) \mid a > 0, b > -1, a^2 - 1 - b > 0\}$ nöqtələri üçün $\frac{1+b}{a} > 0, D > 0$, habelə $f_2(a, b) > f_1(a, b)$. Onda bərabərsizliyin

ümumi həlli $(f_1(a, b), f_2(a, b))$. VI oblastın $\{(a, b) \mid a > 0, b < -1\}$ nöqtələri üçün xüsusi bərabərsizliklər məcmusuna baxaq. Uyğun xüsusi bərabərsizlik üçün $\frac{1+b}{a} < 0, D > 0$, $f_2(a, b) < f_1(a, b)$.

Bərabərsizliyin ümumi həlləri çoxluğu $(-\infty; f_2(a, b)) \cup (f_1(a, b); +\infty)$.

Beləliklə, verilən bərabərsizliyin həllindən alınan cavablar bunlardır:

$$\frac{\{(0; b) \mid b \in R\}}{\text{təyin olunmayıb}}; \quad \frac{\{(a; -1) \mid a > 0\}}{\{x \mid x \in (-\infty; -1)\}}; \quad \frac{\{(a; -1) \mid a < 0\}}{\left\{x \mid x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)\right\}};$$

$$\frac{\{(a; b) \mid a > 0, a^2 - 1 - b \leq 0\}}{\text{həll yoxdur}};$$

$$\frac{\{(a; b) \mid a < 0, b < -1\} \cup \{(a; b) \mid a > 0, b > -1, a^2 - 1 - b > 0\}}{\{x \mid x \in (f_1(a; b), f_2(a; b))\}};$$

$$\frac{\{(a;b) \mid a < 0, b > -1, a^2 - 1 - b \geq 0\} \cup \{(a;b) \mid a > 0, b < -1\}}{\{x \mid x \in (-\infty; f_2(a;b)) \cup f_1(a;b); +\infty\}} ;$$

$$\frac{\{(a;b) \mid a < 0, a^2 - 1 - b < 0\}}{\{x \mid x \in R\}} , \text{ burada } f_1(a, b) = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 1 - b}}{(1+b)/a} \text{ və}$$

$$f_2(a, b) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 1 - b}}{(1+b)/a} .$$

147. Ənənəvi olaraq “Vektor” mövzusu məktəb həndəsə kursunda öyrənilir, yalnız həndəsə və fizika məsələlərinə tətbiq edilir. Lakin məktəb cəbr kursunun bəzi məsələlərini vektorun skalyar hasilinin tətbiqi ilə həll etmək olar. Skalyar hasilin cəbrdə tətbiqinə nümunə göstərmək məqsədilə verilmiş tənliyin həllində bu aparatdan istifadə etməyi lazım bildik. Cəbr kursunda skalyar hasilini öyrənmək üçün əvvəlcə onun tərifini və xassələrini xatırlamaq lazımdır.

İki vektorun skalyar hasilini onların uzunluqları ilə aralarındakı bucağın kosinusu hasilinə deyilir, yəni $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$, burada α ilə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucaq işarə edilmişdir. $|\cos \alpha| \leq 1$ olduğundan $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ (1) və $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ (2). Qeyd edək ki, (1) bərabərliyində $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları bərabər olduqda, (2) bərabərsizliyində isə həmin vektorlar eyni istiqamətli olduqda onlar bərabərliyə çevirilir. Bundan əlavə xatırladaq ki, düzbucaqlı koordinatlar sistemində vektorların koordinatları məlumdursa, onda $\vec{a}(a_1, a_2), \vec{b}(b_1, b_2)$ vektorlarının skalyar hasilini və $\vec{a}$ vektorunun uzunluğu uyğun olaraq $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ düsturları ilə tapılır və beləliklə, $a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ (3) üç ölçülü fəza üçün də analogi düsturları yuxarı siniflərdə vermək və uyğun tətbiqlərini göstərmək olar.

Məktəb cəbr kursunda $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2$ irrasional tənlik bir qayda olaraq onun hər iki tərəfinin kvadrata yüksəldilməsilə həll edilir. Şagirdlərin riyazi mədəniyyətinin yüksəldilməsi və fənlər arasındakı əlaqənin yerinə yetirilməsi məqsədilə həmin tənliyi iki vektorun skalyar hasilinin

təbiiqi ilə həll edilməsini lazım bildik. Bunun üçün $\bar{u}(\sqrt{x-2}; \sqrt{4-x})$ və $\bar{v}(1;1)$ vektorlarına baxaq. Onda $|\bar{u}| = \sqrt{2}$, $|\bar{v}| = \sqrt{2}$. $\bar{u} \cdot \bar{v} \leq |\bar{u}||\bar{v}|$ olduğundan $\bar{u} \cdot \bar{v} = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq |\bar{u}||\bar{v}| = 2$. Vektorlar eyni istiqamətli olduqda, yəni $\frac{\sqrt{x-2}}{1} = \frac{\sqrt{4-x}}{1}$ ödənildikdə bu

bərabərsizlik bərabərliyə çevrilir. Sonuncu bərabərlikdən $x=3$ alırıq.

148. Skalyar hasilin təbiiqi ilə bərabərsizliyi asanlıqla isbat etmək olar (əvvəlki məsələdə iki vektorun skalyar hasilinin irrasional tənliyin həllində təbiiqi ilə əlaqədar ümumi izahata baxmalı):

$\bar{u}(\sqrt{a}; \sqrt{c})$ və $\bar{v}(\sqrt{b}; \sqrt{d})$ vektorlarını daxil edək, onda $\bar{u} \cdot \bar{v} = \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$, burada $|\bar{u}| = \sqrt{a+c}$ və $|\bar{v}| = \sqrt{b+d}$. Məsələ 147-dəki (1) münasibətinə əsasən $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ alırıq.

149. Verilmiş tənliyi $\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = x+y-1$ şəklində yazaq. $\bar{a}(x;y)$, $\bar{b}(1;1)$ vektorlarına baxaq (məsələ 147-dəki nəzəri məlumata və 148-in həllinə baxmalı), onda $|\bar{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$ və $|\bar{b}| = \sqrt{2}$. Skalyar hasil $\vec{a} \cdot \vec{b} = x+y$. Məsələ 147-dəki (1) münasibətinə əsasən müəyyən edirik ki, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \geq x+y > x+y-1$.

Deməli, verilən tənliyin kökləri yoxdur.

150. Tənliyin sol tərəfini çevirək:

$x^3 + x^2 + 4x + 4 = x^2(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x^2+4)$. Onda verilmiş tənlik belə olar: $\sqrt{(x^2+1)(x+1)} = x\sqrt{x} + 2$. Tənliyin mümkün qiymətləri çoxluğu $x \geq 0$ -dir. $\bar{a}(x;2)$ və $\bar{b}(\sqrt{x};1)$ vektorlarını daxil edək (məsələ 147-nin həllində istifadə edilən əməliyyata baxmalı) və onların skalyar hasilini tapaq: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{x^2+4}$,

$\left| \vec{b} \right| = \sqrt{x+1}$ və $\vec{a} \cdot \vec{b} = x\sqrt{x} + 2$. Son üç bərabərlikdən görünür ki,

verilən tənliyi $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right|$ şəklində yazmaq olar. Lakin bu bərabərlik

yalnız $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucağın kosinusu 1-ə bərabər olduqda, yəni $\alpha = 0$ isə ödənilir. Beləliklə, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları eyni istiqamətli olmalıdır. Lakin bu halda onların koordinatları mütənasib olmalıdır, yəni $x > 0$ üçün $\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{2}{1}$ bərabərliyi ödənilməlidir.

Buradan $x=4$. $x=0$ olduqda tənliyin sol və sağ tərəfləri eynidir. Deməli, $x=0$ tənliyin köküdür. Beləliklə, verilmiş tənliyin iki $x_1 = 0$ və $x_2 = 4$ kökü tapıldı. Verilmiş tənlik kvadrat tənliyə gəldiyindən, onun başqa kökü yoxdur.

151. $\vec{a}(\sqrt{1+x}; \sqrt{3-x})$ və $\vec{b}(x;1)$ vektorlarına baxaq (məsələ

147-150-də olduğu kimi). Onda verilmiş tənliyi $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right|$ şəklində

yazmaq olar. Bu yalnız vektorların koordinatları mütənasib olduqda ödənilir. $x=0$ tənliyin kökü olmadığından mütənasiblik şərtini

$\frac{\sqrt{1+x}}{x} = \sqrt{3-x}$ şəklində yazmaq münasibdir. Buradan

$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ və ya $(x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$. Buradan $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ (Tənliyin təyin oblastından $x > 0$ alındığından $1 - \sqrt{2}$ onun kökü deyil).

152. İndi skalyar hasili metodunun funksiyanın ekstremumunun tapılmasına tətbiqini göstərək (147-in həllindən əvvəlki izahata baxmalı). Verilmiş funksiya $[-15;17]$ aralığında təyin olunmuşdur.

$\vec{a}(\sqrt{x+15}; \sqrt{17-x})$ və $\vec{b}(1;1)$ vektorlarına baxaq, onda $\left| \vec{a} \right| = 4\sqrt{2}$,

$$\left| \vec{b} \right| = \sqrt{2} \quad \text{və} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{x+15} + \sqrt{17-x}, \quad \text{beləliklə,} \quad \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8.$$

147-in həllindən əvvəlki (1) münasibətinə əsasən hökm edə bilərik ki, $\sqrt{x+15} + \sqrt{17-x} \leq 8$. Buradan $\sqrt{x+15} = \sqrt{17-x}$ olduqda $\max_{[-15;17]} y = 8$

olur. Onda $x=1$, $y(-15) = 4\sqrt{2}$, $y(17) = 4\sqrt{2}$. Beləliklə, $y_{\max} = y(1) = 8$.

$$\begin{aligned} 153. \text{ Yox. Doğrudan da, } \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \sqrt{15} &= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} - \sqrt{15} = \\ &= \frac{8+2\sqrt{15}}{2} - \sqrt{15} = 4 + \sqrt{15} - \sqrt{15} = 4. \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-7\sqrt{8}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4.$$

154. Cəbr dərslərində (eləcə də digər riyazi fənlərdə) bərabərsizliklərin müxtəlif metodlarla həll edilməsi şagirdləri müxtəlif ümumi isbat metodları tanış etməkdə, habelə onları heyratlandırməklə riyaziyyatı dərinədən öyrənməyə maraqlarını artırmaq, ümumiləşdirmə qabiliyyətlərini inkişaf etdirmək üçün olduqca faydalıdır. Odur ki, verilən bərabərsizliyin isbatının yeddi metodunu göstəririk.

I (Əksini fərz etmə metodu). Fərz edək i, bərabərsizlik ödənilmir. Onda,

$$|ac-bd| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} ac-bd > 1 \\ ac-bd < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(ac-bd) > a^2+b^2+c^2+d^2 \\ 2(ac-bd) < -(a^2+b^2+c^2+d^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-c)^2 + (b+d)^2 < 0 \\ (a+c)^2 + (b-d)^2 < 0 \end{cases}$$

Alınmış doğru olmayan bərabərsizliklər məcmusu fərziyəmizin doğru olmadığını göstərir.

$$\begin{aligned} \text{II (Analiz metodu). Eynigüclü çevirmələr apararaq:} \\ |ac-bd| \leq 1 \Leftrightarrow (ac-bd)^2 \leq 1 \Leftrightarrow a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 \leq 1 \Leftrightarrow a^2(1-d^2) - 2abcd + b^2(1-c^2) \leq \\ \leq 1 \Leftrightarrow a^2 - a^2d^2 - 2abcd + b^2 - b^2c^2 \leq 1 \Leftrightarrow (ad+bc)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Alınmış aşkar bərabərsizlik və çevirmələrin eynigüclülüüyü verilmiş bərabərsizliyin isbatı deməkdir.

III (Sintez metodu). Dayaq bərabərsizliyi olaraq $(a-c)^2 + (b+d)^2 \geq 0$ və $(a+c)^2 + (b-d)^2 \geq 0$ bərabərsizliklərinə baxaq və $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ olduğunu nəzərə almaqla eynigüclü

çevirmələr apararaq isbat ediləcək bərabərsizliyi alırıq:

$$\begin{cases} a^2 - 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \geq 0 \\ a^2 + 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq 2ac - 2bd \\ (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq 2bd - 2ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \geq 2ac - 2bd \\ 2 \geq 2bd - 2ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac - bd \leq 1 \\ ac - bd \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow |ac - bd| \leq 1.$$

IV (Qüvvətləndirmə üsulu). Modulun $|x - y| \leq |x| + |y|$ xassəsini

və həndəsi orta ilə ədədi orta arasındakı münasibəti (yəni $\sqrt{ac} \leq \frac{a+c}{2}$

və $\sqrt{bd} \leq \frac{b+d}{2}$ bərabərsizliklərini) tətbiq edərək

$$\begin{aligned} |ac - bd| &\leq |ac| + |bd| = \sqrt{a^2 c^2} + \\ &+ \sqrt{b^2 d^2} \leq \left(\frac{a^2 + c^2}{2} \right) + \left(\frac{b^2 + d^2}{2} \right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} = 1. \end{aligned}$$

V (Zəyiflətmə üsulu). $a^2 + b^2 = 1$ və $c^2 + d^2 = 1$ olduğundan $1 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2 = (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \geq (ac - bd)^2$, çünki $(ad + bc)^2 \geq 0$. Alınmış $(ac - bd)^2 \leq 1$ bərabərsizliyindən $|ac - bd| \leq 1$ alınır.

VI (Vektor üsulu). $\vec{x}(a; -b)$ və $\vec{y}(c; d)$ vektorlarını daxil edək. Fərz edək ki, φ bu vektorlar arasındakı bucaqdır. Onda $|\cos \varphi| \leq 1$ olduğunu nəzərə almaqla skalyar hasilin tərifinə və skalyar hasil haqqında teoremə əsasən (məsələn 157-in həllindən əvvəlki nəzəri məlumatlara baxmalı)

$$|ac - bd| = |\vec{x} \vec{y}| = |\vec{x}| |\vec{y}| \cdot |\cos \varphi| \leq |\vec{x}| |\vec{y}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = 1.$$

VII (Triqonometrik metod). Mərkəzi koordinat başlanğıcında və radiusu 1 olan çevrə üzərində ixtiyari iki $X(a; b)$ və $Y(c; d)$ nöqtələrini qeyd edək.

OX və OY radiuslarının Ox oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaqları α, β ilə işarə edək. Onda $a = \cos \alpha, b = \sin \alpha, c = \cos \beta, d = \sin \beta$ və $|ac - bd| = |\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta| = |\cos(\alpha + \beta)| \leq 1$.

Bərabərsizlik isbat olundu.

155. Əvvəlcə bu və sonrakı 156-162 mətnli məsələlərin həlli ilə əlaqədar bəzi metodik fikirləri qeyd edək. Məlumdur ki, şagirdlər belə məsələlərin həllində ciddi çətinliklərlə qarşılaşırlar. **Birinci** çətinlik təklif olunan mətnin riyaziləşdirilməsindən, başqa sözlə tənlik, bərabərsizlik və ya onların sistemləri, diaqram, qrafik, cədvəl, funksiya və s. dən ibarət ola biləcək riyazi modelin qurulmasından ibarətdir. Məsələnin məzmununu riyazi dilə gətirmək üçün şagirdlər onu diqqətlə öyrənməli və düzgün şərh etməli, məsələnin sualını formallaşdırmalı, axtarılan kəmiyyətlərin verilənlərlə ifadəsini yazmalı və dəyişəni daxil etməlidir. Bununla əlaqədar şagirdlərin qarşılaşdıqları problemlər müxtəlif xarakterdə olur. Çox vaxt bunlar fiziki, kimyavi, iqtisadi istilahların, qanunların, asılılıqların başa düşülməməsindən irəli gəlir. Məsələn, şagirdlərin heç də hamısı məsafə, sürət və zaman və ya iş, əmək məhsuldarlığı və zaman arasındakı asılılıqları və s. aydın dərk etmir. Onlar obyektlərin qarş-qarşıya və ya eyni istiqamətdə yaxınlaşması zamanı sürəti təyin etməkdə, çevrə üzrə hərəkəti müəyyənləşdirməkdə, ölçülərin seçilməsində çətinlik çəkirlər.

İkinci çətinlik verilmiş kəmiyyətlər və daxil edilən dəyişənlərlə əlaqədar tənlik və bərabərsizliklərin qurulmasından ibarətdir.

Üçüncü çətinlik məsələnin sualının ifadə edilməsinə tətbiq edilən funksiyanın (münasibətin) qurulması ilə əlaqədardır. Şərti olaraq bunu məqsəd funksiyası adlandırmaq olar. Məsələnin həllində bu olduqca zəruridir. İş ondan ibarətdir ki, hər hansı tənlik aldıqda, şagirdlər ona daxil olan dəyişəni tapmağa çalışır. Bu isə həmişə mümkün olmur və ola bilər ki, lazım da deyil.

Nəhayət, dördüncü çətinlik alınmış tənlik və bərabərsizliyin səmərəli üsullarla həll edilməsilə əlaqədardır.

Təqdim edilən məsələ ilə əlaqədar ən əsası onu başa düşmək lazımdır ki, maşınların birinci qarşılaşması ikincinin birincini ötməsi anında baş verir.

A-dan birinci görüş yerinə qədər olan məsafəni S km, ikinci maşının sürətini g km/saat işarə etsək, onda məsələnin şərtindən alınır ki, ikinci maşın 72 km($120-48=72$) birincisi isə 48 km məsafəni eyni vaxta qət edirlər. Odur ki, $\frac{72}{g} = \frac{48}{80}$, buradan $g = 120$ (km/s).

Birinci görüş yerindən B məntəqəsinə qədər qalan $(480-S)$ km məsafəni

birinci maşın 80 km/s sürətlə keçməlidir. Bunu o, $\frac{480 - S}{80}$ saat vaxt

sərf edir. Həmin vaxtda ikinci maşın birinci görüş yerindən (daha doğrusu ötmə yerindən) B məntəqəsinə qədər məsafəni keçməyə $\left(\frac{1}{3} + \frac{(480 - S)}{9}\right)$ saat. B məntəqəsində dayanmağa və B-dən 120 km

aralanmağa daha $\frac{120}{9}$ s. Sərf edir. Beləliklə, ikinci bir tənlik alırıq:

$$\frac{480 - S}{80} = \frac{480 - S}{9} + \frac{1}{3} + \frac{120}{9} . \quad \text{Burada } 9 = 120 \text{ km/s} \text{ olduğunu}$$

bilərək $S=160$ (km) tapırıq.

Göründüyü kimi baxılan məsələdə birinci çətinliklə qarşılaşırıq. Bu məsələnin mətnini riyazi dilə gətirməkdən ibarətdir. Bu mətnin özündə gizli cəhət vardır: Ötmə anı haqqında birbaşa heçnə deyilmir. Bundan əlavə həmin an “qarşılaşma” adlanmışdır, bu söz isə adətən bir istiqamətdə deyil əks istiqamətdə hərəkətlə əlaqədar işlənir. 156 və 157 məsələlərinin həlli ilə əlaqədar da şagirdlər riyazi modelin qurulmasında çətinlik çəkirlər. Lakin burada ikimənahlılıq yoxdur, ancaq hərəkətin çevrə üzrə olmasından söhbət gedir. Buradakı çətinlik və hərəkətin dövrü olması ilə əlaqədardır. Hərəkətin çevrə üzərində olması ilə əlaqədar da yalnız zaman, yol, sürət kateqoriyaları üzrə fikirləşdikdə çətinlik aradan qalxır. Çevrə üzrə hərəkəti hətta obyektlər bir nöqtədən başlayaraq əks istiqamətdə yerlərini dəyişdikdə belə, onların bir-birindən aralanması deyil yaxınlaşdığını müşahidə edirik, deməli düz xətt üzrə qarşı-qarşıya hərəkət kimi alınır. Bu paradoks da düz xətt üzrə hərəkətə nisbətən çevrə üzrə hərəkətə aid məsələlər həllində şagirdlərin müəyyən çətinlik çəkmələrinə səbəb olur.

156. Çevrənin uzunluğu l m, cisimlərin sürətləri isə x m/dəq və y m/dəq olsun, müəyyənlik üçün $x > y$ hesab edək. Məsələdə, hər birini tənliklə təsvir etmək mümkün olan, üç vəziyyətdən söhbət gedir. Eyni istiqamətdə hərəkət zamanı birinci cisim ikinciyə $(x-y)$ m/dəq. sürətlə yaxınlaşır. Birinci ötmədən sonra digər ötmə, $(x-y)$ m/dəq. sürətlə l m məsafə üçün lazım olan vaxtdan başqa sözlə 56 dəqiqədən sonra baş

verə bilər: $\frac{l}{x - y} = 56$ (1) əks istiqamətdə hərəkət zamanı cisimlər

$(x+y)$ m/dəq. sürətlə yaxınlaşırlar, deməli 1 m məsafəni onlar birlikdə 8 dəqiqəyə keçirlər. Odur ki, $\frac{l}{x+y} = 8$ (2)

İlk məsafə 40 m-ə bərabər olduğundan və görüşə qədər 26 m məsafə qaldığından gedilən ümumi yol $40m-26m=14m$ dir. Bu məsafə, $(x+y)$ m/dəq sürətlə, 24 saniyədə, yəni $\frac{24}{60}$ dəq $= \frac{2}{5}$ dəq keçilmişdir.

Beləliklə, məsələnin sonuncu şərti $\frac{14}{x+y} = \frac{2}{5}$ (3) tənliyinə gəlir. (2)-ni

(1)-ə bölüb $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{7}$ və buradan, $y = \frac{3}{4}x$ alırıq. Bunu (3)-də yerinə yazıb $x=20$ m/dəq tapırıq. Onda $y=15$ m/dəq. (2)-dən isə $l=280$ m.

157. Qaçıcıların sürətlərini uyğun olaraq ϑ_1, ϑ_2 və ϑ_3 ilə işarə edək. Onda üçüncü qaçıcı 3 dövrə $\frac{3}{\vartheta_3}$ dəqiqə vaxt sərf edir ki, bu onun

ikinci qaçıcını ötməyə sərf etdiyi vaxta, yəni $\frac{1/2}{\vartheta_3 - \vartheta_2}$ -yə bərabərdir,

çünki onların arasındakı ilk məsafə $1/2$ dövrə, yaxınlaşma sürəti isə $(\vartheta_3 - \vartheta_2)$ dövr/dəq-yə bərabərdir. Beləliklə, $\frac{3}{\vartheta_3} = \frac{1}{2(\vartheta_3 - \vartheta_2)}$ tənliyini və

buradan $\vartheta_3 = \frac{6}{5}\vartheta_2$ (1) alırıq. Birinci və üçüncü qaçıcılar $(\vartheta_1 - \vartheta_3)$

döv/dəq sürəti ilə yaxınlaşırlar və $\frac{1/2}{\vartheta_1 - \vartheta_3}$ dəqiqədən sonra

bərabərləşirlər, bununla $\frac{1/2}{\vartheta_3 - \vartheta_2}$ kəmiyyəti $\frac{5}{2}$ dəqiqə artır. Beləliklə,

$\frac{1/2}{\vartheta_1 - \vartheta_3} = \frac{1/2}{\vartheta_3 - \vartheta_2} + \frac{5}{2}$ (2). $\frac{1}{\vartheta_1 - \vartheta_3} = 6$ (3) tənlikləri doğrudur. (3)-dən

$$g_1 = \frac{1+6g_2}{6}. \quad g_3 \text{ və } g_1 \text{ -in qiymətlərini (2)-də yerinə yazıb } g_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{döv/dəq, } \frac{1}{g_2} = 2 \text{ dövr tapırıq.}$$

Aşağıdakı iki məsələnin həlli tənlik qurmaq üçün axtarılanı düzgün seçməyin necə əhəmiyyətli olduğunu nümayiş etdirmək baxımdan faydalıdır. Məchulun düzgün seçilməməsi tənlik qurma prosesini kifayət qədər çətinləşdirir. Məsələn, 158-də məchul olaraq maqnitafonun qiymətini seçmək səhv addım olardı. Məsələ 159-da isə qabda qliserinin deyil suyun saxlanılmasına baxmaq çətinlik yaradırdı.

158. Fərz edək ki, qrupdakı tələbələrin sayı $-x$, əvvəlcə verilməli olan üzvlüyün miqdarı isə y manatdır. Onda maqnitafonun qiyməti $x y$ məsələnin şərtini isə
$$\begin{cases} xy = (x-2)(y+1) \\ 170 \leq xy \leq 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = 2 \\ 170 \leq xy \leq 195 \end{cases} \text{ şəkildə}$$
 yazmaq olar. Beləliklə, $340 \leq x(x-2) \leq 390$. Şərtə görə x natural ədəd olduğundan y -i bilərəkdən kənar etdik. İndi bərabərsizlik sisteminin tam həllini tapmaq olar. $x^2 - 2x - 340 \geq 0$ bərabərsizliyindən $x \geq 1 + \sqrt{1+340}$. $x^2 - 2x - 390 \leq 0$ bərabərsizliyindən isə $x \leq 1 + \sqrt{1+390}$. Beləliklə, $19 < 1 + \sqrt{341} \leq x \leq 1 + \sqrt{391} \leq 21$ bərabərsizliyinin tam həllini tapmaq lazımdır. Aşkardır ki, $x=20$. Onda $y=9$ və $xy = 180$.

159. Qabda qliserinin saxlanmasını izləyək. Onun ilk miqdarı $x l$ olarsa, onda birinci dəfə götürüldükdən sonra $(x-1)l$ olar. Qaba

yenidən $1 l$ su tökdükdən sonra $x l$ qarışıq alınır, onda bir litrdə $\frac{x-1}{x} l$

qliserin olar. İkinci götürmədən sonra qabda $x-1 - \frac{x-1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} l$,

bir litr qarışıqda isə $\frac{(x-1)^2}{x^2} l$ qliserin qalar. Üçüncü götürmədən

sonra qabdakı qliserinin həcmi $\frac{(x-1)^2}{x} - \frac{(x-1)^2}{x^2} = \frac{(x-1)^3}{x^2}$ olar. Bu

isə şərtə görə $\frac{1}{8}x l$ təşkil edir. Beləliklə,

$$\frac{(x-1)^3}{x^2} = \frac{1}{8}x \Rightarrow \left(\frac{x-1}{x}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2. \quad 2 \text{ l-i } 7:1$$

nisbətində bölüb qabda $\frac{7}{4}l$ su və $\frac{1}{4}l$ qliserin qaldığını tapırıq.

Məsələ 160-da əsas çətinlik nə şərti anlamaq, nə də tənliyin qurulmasıdır. Məsələnin paradoksalığı ondan ibarətdir ki, daxil edilən məchullardan birini ümumiyyətlə, axtarmaq lazım deyil, çünki məchulların qiymətlərini tapmaq deyil, onların arasındakı nisbətinin hansı ədədlə verildiyini müəyyənləşdirmək tələb olunur. Burada necə köməkçi dəyişən daxil etməkdən və həllin gedişində onlardan neçəsinin lazım olacağından qorxmadan daima əsas məqsədi nəzərdə tutmaq və ona doğru getmək olduqca mühümdür.

160. Eskalatorda pilləkanların sayını göstərən köməkçi a məchulunu daxil edək. Birinci və ikinci sərnışinlərin sürətləri $\mathcal{G}_1$ pilləkən/dəq, $\mathcal{G}_2$ pilləkən/dəq, esklatorun sürəti isə u olsun. Eskalatorda onun hərəkəti və hərəkətin əksi istiqamətində yerdəyişmə, tamamilə çayın axını və onun əksinə hərəkətlə analojidir. Şərtə görə esklator enmələ işləyir. Deməli, birinci və ikinci sərnışin $\frac{a}{\mathcal{G}_1 + u}$ dəq və $\frac{a}{\mathcal{G}_2 + a}$ dəq.

aşağı düşmüşdür. Onların hər biri uyğun olaraq $\frac{a\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_1 + u}$ və $\frac{a\mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_2 + u}$

pilləkən sayır. Şərtədən alınır ki, sonuncu kəmiyyəti $\frac{\mathcal{G}_2(\mathcal{G}_1 + u)}{\mathcal{G}_1(\mathcal{G}_2 + u)} = \frac{3}{2}$ (1)

tənliylə əlaqələndirmək olar. İkinci sərnışin yuxarıya $\frac{a}{\mathcal{G}_2 - u}$ dəqiqəyə

qalxır və $\frac{u\mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_2 - u}$ pilləkən sayır. Bu isə məsələnin şərtinə görə

$$\frac{a\mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_2 - u} - \frac{a\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_1 + u} = a \text{ və ya } \frac{\mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_2 - u} - \frac{\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_1 + u} = 1 \quad (2) \text{ tənliyinə gəlir. (1) və}$$

(2) tənliklərindən g_1, g_2 və u -nu tapmaq mümkün deyil, lakin buna ehtiyac da yoxdur, axı məsələdə $\frac{a}{g_2 - u} : \frac{a}{g_2 + u}$ nisbətini tapmaq tələb

olunur. Bu nisbət $\frac{g_2 + u}{g_2 - u} = \frac{\frac{g_2}{u} + 1}{\frac{g_2}{u} - 1}$ kəsrinə bərabərdir. Həmin kəsri

tapmaq üçün $S = \frac{g_2}{u}$ kəmiyyətini bilmək kifayətdir. Daha bir $t = \frac{g_1}{u}$

dəyişən daxil edib (1) tənliyini $\frac{S(t+1)}{t(S+1)} = \frac{3}{2}$ (1'), (2) tənliyini

$\frac{S}{S-1} - \frac{t}{t+1}$ (2') şəklinə gətirib $S=3$ tapırıq, onda axtarılan kəmiyyət

$$\frac{\frac{g_2}{u} + 1}{\frac{g_2}{u} - 1} = 2 \text{ olur.}$$

Sonrakı iki məsələdə (161, 162) şagirdlər 155 məsələnin həllindən əvvəl göstərdiyimiz dördüncü çətinlikdə – qurulmuş tənlik və ya bərabərsizliyin həlli ilə qarşılaşırlar. Məsələn, 161-də dörd məchullu iki tənliklər sistemi qurulur. Bu sistem qeyri-müəyyəndir, lakin iki məchulu qalan ikisi vasitəsilə ifadə etməklə, məsələnin sualının cavabını tapmaq olar. Məsələ 162-də münasiblik üçün dörd x, y, a, b məchulu daxil edilir və üç tənliklər sistemi qurulur. Bu halda məchulların hər birini deyil, ax və by hasillərini tapmaq həlli yerinə yetirilməsinə kömək edir.

161. Boruların hər birinin məhsuldarlığını x, y, z, u ilə işarə edib

$$\begin{cases} 12(x + y + z) = 15(y + u) \\ 15(y + u) = 20(x + z + u) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + 4z - 5u = 0 \\ 4x - 3y + 4z + u = 0 \end{cases} \quad \text{tənliklər}$$

sisteminə alırıq.

Bu sistemindən asanlıqla $x = 2u - z$ və $y = 3u$ tapılır. Bundan sonra məsələnin sualına cavab vermək olar. Doğrudan da axtarılan

$$\text{vaxtı } t \text{ dəq. ilə işarə edib } t = \frac{15(y+u)}{x+y+z+u} = \frac{15 \cdot 4u}{6u} = 10 \text{ (dəq)}$$

tapırıq.

162. Fərz edək ki, mağazın x vahiddən I növ malı a min manata, y vahiddən II növ malı isə b min manata almışdır. Onda bütünlükdə I növ mal mağazınə ax min manata, II növ isə by min manata başa gəlmişdir və beləliklə, $ax + by = 4500$. Bütün mal II növün qiymətinə satılarsa, onda o $b(x+y)$ min manata satılmış olar, şərtə görə $b(x+y) = 4000$. I növün qiymətinə bütün mal $a(x+y) = 4800$ min

$$\text{manata satılmış olar. Beləliklə, } \begin{cases} ax + by = 4500 \\ bx + by = 4000 \\ ax + ay = 4800 \end{cases} \text{ tənliklər sistemi}$$

alınır. Birinci tənlikdən ikincini, üçüncüdən birincini çıxıb $(a-b)x = 500$, $(a-b)y = 300$ tənliklərini alırıq. Alınmış birinci

$$\text{tənliyi ikinciye bölüb } \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{5}x \text{ tapırıq. } ax + ay = 4800$$

$$\text{tənliyindən } ax + \frac{3}{5}ax = 4800, \quad \frac{8}{5}ax = 4800, \quad ax = 3000, \\ by = 4500 - 3000 = 1500.$$

163. Lazımı tarix $\overline{ab} \cdot \overline{cd} \cdot \overline{efgh}$ şəkildə olmalıdır. Burada $l = 2$ hesab edərək axtarılan tarixi müəyyən etməliyik. Ayın $\overline{cd}$ nömrü 11 və 12 -dən fərqlidir, odur ki, yazılışında 0 olmalıdır. Beləliklə, $f > 2$, $g > 2$, $h > 2$ bərabərsizlikləri alınır və $\overline{efgh} = 2345$. Aşkardır ki, $\overline{cd} \geq 06$ və $\overline{cd} = 06$ isə, onda $\overline{ab} = 17$. Beləliklə, axtarılan tarix 17.06.2345 dir.

Artıq bir sıra mətinli məsələlərin (1-3; 13-14; 29-33; 76-79; 88; 98; 128; 132; 155-161) tənlik qurmaqla həllinə və bununla əlaqədar çətinliklərə baxdıq. Göründüyü kimi mətinli məsələləri həll etmək üçün onu riyazi dilə çeviririk, başqa sözlə onun riyazi modelini qururuq. Məktəbdə şagirdlərə riyazi modelləşdirmə qabiliyyətinə sahib olmağı öyrətmək (hətta, deyək ki, sadə şəkildə belə) mühüm təlim əhəmiyyətli

məsələdir. Lakin bu təlimin müvəffəqiyyətlə getdiyini demək olmaz. Xüsusilə, məlumdur ki, şagirdlər mətinli məsələləri cəbri metodla həllində çətinlik çəkirlər (155-161 məsələlərin həllindən əvvəl belə çətinlikdən dördünü göstəririk). Müvəffəqiyyətsizliyin səbəblərindən biri də mətinli məsələlərin cəbri yolla düzgün olmayan ardıcılıqda öyrədilməsidir, məhz onun riyazi dilə doğru olmayan qaydada çevrilməsidir.

Ümumiyyətlə bir dildən digərinə keçmə necə tamamlanır? Bəzən bu

sinxron⁷ baş verir. Çevirmə üçün sadə mətni oxuyurlar (və ya eşidirlər) və dərhal

onu başqa dildə izah edirlər. Məhz riyaziyyat müəllimi məktəb kursundan onun üçün sadə olan mətnləri belə çevirirlər. O, dərhal görür ki, məhz x qəbul etmək müvəffəqdir, nəyi x -lə ifadə etmək lazımdır, tənlik necə olmalıdır. Məktəblilər üçün sadə olan məsələləri o məhz belə həll edir. Ancaq təsadüf edilən çətin məsələlərin həlli ilə əlaqədar nəyi x -lə işarə etməli? Hansı məchul kəmiyyəti x -lə ifadə etmək lazımdır? Tənliyi və ya bərabərsizliyi necə qurmalı? 155-161 məsələlərin həlli ilə əlaqədar bu suallara cavab vermişik.

164. Şagirdlərin standart olmayan məsələlər həllində çətinlik çəkdiqləri haqqında metodik ədəbiyyatda çox söhbət gedir. Məktəbdə şagirdlər əsasən standart məsələləri həll edirlər, sinifdə yaradıcılıq işinə demək olar ki, vaxt qalmır. Maraqlı məşğələləri vasitəsilə bu geriliyi aradan qaldırmaq olar, lakin burada, şagirdlərin hamısı iştirak etmir. Elə standart çalışmalar var ki, onu nəzəri materialdan azacıq istifadə etməklə müəyyən standart priyomlara asanlıqla həll etmək olar. Bunun üçün əlavə vaxta da ehtiyac yoxdur, birbaşa dərsin özündə belə priyomları şagirdlərə çatdırmaq olar. Onu da qeyd edək ki, şagirdləri hər hansı priyomla tanış etdikdən sonra vaxtaşırı ondan istifadəyə dair tapşırıqlar vermək lazımdır. Təqdim edilən tənliyi standart yolla həll etmək istəsək, başqa sözlə ortaq məxrəcə gətirsək onda dörd dərəcəli

⁷ Sinxronizasiya, sinxronlaşdırma (dövrü surətdə dəyişən iki və ya bir neçə hadisənin vaxtca uyğulaşdırılması, onların başlanıb qurtarmasının bir vaxta salınması, onların dəyişməsində tam müvazilik yaradılması)

$x^4 + 6x^3 + 11x^2 - 42x - 63 = 0$ tənliyini alırıq. Bu tənliyin şagirdlərə məlum qayda ilə həlli müvəffəqiyyətsiz olardı. Əvvəlcədən deyək ki, onun rəşional kökü yoxdur. Odur ki, şagirdlərin az istifadə etdikləri tam kvadrat ayırma priyomundan istifadə məqsədəuyğundur. Verilmiş tənliyin sol tərəfindən asanlıqla tam kvadrat ayırmaq olar.

Bunun üçün tənliyin hər iki tərəfindən $2x \cdot \frac{3x}{3+x}$ ifadəsini çıxmaq

lazımdır. Onda $\left(x - \frac{3x}{3+x}\right)^2 = 7 - \frac{6x^2}{3+x}$ tənliyini və buradan

$\left(\frac{x^2}{3+x}\right)^2 = 7 - \frac{6x^2}{3+x}$ alırıq. $\frac{x^2}{3+x} = t$ əvəz edib $t^2 + 6t - 7 = 0$ kvadrat

tənliyindən $\frac{x^2}{3+x} = -7$ və $\frac{x^2}{3+x} = 1$. Birinci tənliyin həqiqi kökü

yoxdur, ikincidən isə $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ alınır.

165. Əvvəlki məsələdə istifadə etdiyimiz tam kvadrat ayırma priyomundan istifadə etmək məqsədəuyğundur. Tənliyin sol tərəfindəki ifadə 1 daxildir. Odur ki, əsas triqonometrik eynilikdən istifadə etmək olar. $x^2 + 2x \sin xy + \sin^2 xy + \cos^2 xy = 0$. İlk üç həddin cəmi tam kvadrat ifadədir: $(x + \sin xy)^2 + \cos^2 xy = 0$. Tənliyin sol tərəfindəki

ifadələrin kvadratlari cəmi $\begin{cases} x + \sin xy = 0 \\ \cos xy = 0 \end{cases}$ olduqda sıfıra bərabər olar.

$\cos xy = 0$ isə onda $\sin xy = \pm 1$. Odur ki, alınmış tənliklər sistemi iki

$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ \cos xy = 0 \end{cases}$ və ya $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ \cos xy = 0 \end{cases}$ sistemləri ilə birgüclüdür.

$x = 1, y = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$ və $x = -1, y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ədədlər

cütləri bu sistemlərin həlləridir.

166. Sınıf şəraitində həllin 6 üsulunu araşdırmaq olar.

I (Ənənəvi həll).

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + z^3 - 3x^2y -$

$$-3xy^2 - 3xyz = [(x+y)^3 + z^3] - 3xyz(x+y+z) = (x+y+z)[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2] - 3xy(x+y+z) = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

II (Dəyişənin əvəz edilməsi metodu). $x + y + z = t$ olsun, onda $z = t - (x + y)$ və

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= x^3 + y^3 + [t - (x + y)]^3 - 3xy[t - (x + y)] = x^3 + y^3 + \\ &+ t^3 - 3t^2(x + y) + 3t(x + y)^2 - (x + y)^3 - 3xyt + 3(x + y)xy = [x^3 + y^3 - (x + y)^3 + 3xy(x + y)] + \\ &+ t[t^2 - 3t(x + y) + 3(x + y)^2 - 3xy]. \end{aligned}$$

Birinci mötərizədəki çoxhədli sıfıra bərabərdir, Odur ki, $f(x, y, z)$ çoxhədlişi $t[t^2 - 3t(x + y) + 3(x + y)^2 - 3xy] =$ şəklinə düşür

$$\begin{aligned} &= t[t^2 - 2t(x + y) + (x + y)^2 - t(x + y) + 2(x + y)^2 - 3xy] = t[t - (x + y)^2 - t(x + y) + 2(x + y)^2 - 3xy] = \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz). \end{aligned}$$

III ($f(x, y, z)$ çoxhədlisinin simmetrikliliyinə əsaslanan həll).

Qüvvətlərin cəmi $S_3 = x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1 S_2 - \sigma_2 S_1 + \sigma_3 S_0$, burada $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$, $\sigma_3 = xyz$ - elementar simmetrik çoxhədlilərdir. Odur ki,

$$\begin{aligned} f_3(x, y, z) &= S_3 - 3\sigma_3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + xz)(x + y + z) + 3\sigma_3 - 3\sigma_3 = \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz). \end{aligned}$$

IV (qeyri-müəyyən əmsallar metodu ilə həll). Asanlıqla görmək olar ki, x yerində $-(y + z)$ yazdıqda $f_3(x, y, z)$ çoxhədlişi sıfıra bərabər olur, bu isə o deməkdir ki, $f_3(x, y, z)$ çoxhədlişi $(x + y + z)$ -ə bölünür, yəni $f_3(x, y, z) = (x + y + z)[a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + xz + yz)]$ $(x + y + z)$ -ə bölünür, burada a, b - qeyri-müəyyən əmsallardır. $x = 0, y = 1, z = 2$ olduqda $5a + 2b = 3$; $x = 0, y = 1, z = 1$ olduqda $2a + b = 1$. Onda $a = 1, b = -1$ və $f_3(x, y, z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$.

V (Çoxhədlinin bucaqlı bölünməsinə əsaslanan həll) $f_3(x, y, z)$ çoxhədlişi $x + y + z$ bölündüyündən onda x -i dəyişən y, z isə qeyd edərək bu bölməni yerinə yetirək. Bu ümumiliyi pozmur, çünki y və z -in ixtiyari qiymətlərini qeyd etmək olar.

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{x + y + z}$$

$$\frac{\begin{array}{l} -x^3 + x^2y + x^2z \\ -x^2(y+z) - 3xyz + y^3 + z^3 \\ -x^2(y+z) - x(y+z)^2 \\ x[(y+z)^2 - 3yz] + y^3 + z^3 \\ x[(y+z)^2 - 3yz] + (y+z)^2 - 3yz(y+z) \end{array}}{0}$$

Buradan $f_3(x, y, z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$

VI (Üç ədəd cəminin kubu düsturuna əsaslanan həll).
 $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + xy^2 + y^2z + z^2x + zx^2) + 6xyz$

$$\begin{aligned} f_3(x, y, z) &= (x + y + z)^3 - 9xyz - 3(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2) = (x + y + z)^3 - \\ &- 3[(x^2y + xy^2 + xyz) + (y^2z + yz^2 + xyz) + (z^2x + zx^2 + xyz)] = (x + y + z)^3 - \\ &- 3[xy(x + y + z) + yz(x + y + z) + zx(x + y + z)] = (x + y + z)[(x + y + z)^2 - 3xy - 3yz - 3zx] = \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz). \end{aligned}$$

167. Bərabərsizliyin hər tərəfini $\frac{|x-4|+|x-1|}{|x-3|+|x-2|}$ -yə vursaq onunla

eynigüclü

bərabərsizlik

alınar:

$$\begin{aligned} \frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} &< \frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|} \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2 - (x-1)^2}{(x-3)^2 - (x-2)^2} < \\ &< \frac{(|x-3|+|x-2|)(|x-4|+|x-1|)}{|x-4|(|x-3|+|x-2|)} \Leftrightarrow \quad (\text{çünkü } |x-4|+|x-1| \neq 0 \quad \vee \vee) \\ |x-3|+|x-2| &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{-3(2x-5)}{-(2x-5)} < \frac{|x-4|+|x-1|}{|x-4|} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|x-4| < |x-4|+|x-1| \\ x \neq \frac{5}{2}; 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-8)^2 < (x-1)^2 \\ x \neq \frac{5}{2}; 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-9)(x-7) < 0 \\ x \neq \frac{5}{2}; 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 7. \\ x \neq 4 \end{cases}$$

168. Fərz edək ki, əvvəlki məhlulun miqdarı – y ; ondakı duzun

miqdarı isə x -dir. Onda şərtə görə
$$\begin{cases} \frac{x}{y-1} = \frac{x}{y} + 0,05 \\ \frac{3x}{y+38} = \frac{x}{y} \end{cases} \quad \text{tənliklər sistemini}$$

alarıq. Buradan $y=19$, $x=17,1$. Beləliklə, $\frac{x}{y} = 0,9$.

169. $\log_2 \frac{x+3}{5} + \log_2 \frac{5}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x+3}{5} = \log_2 \left(\frac{x+1}{5} \cdot 2 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 2(x+1) \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

170. $\cos 0,2x - \cos 0,8x + \cos 0,6x = 1 \Leftrightarrow (1 + \cos 0,8x) - (\cos 0,6x + \cos 0,2x) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2 \cos^2 0,4x - 2 \cos 0,4x \cdot \cos 0,2x = 0 \Leftrightarrow \cos 0,4x (\cos 0,4x - \cos 0,2x) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos 0,4x \cdot \sin 0,3x = 0 \quad (\sin \alpha = 0 \text{ isə } \sin 3\alpha = 0 \text{ olduğundan})$
 $\Leftrightarrow 0,4x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad 0,3x = \pi k, \text{ burada}$

$$n, k \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi}{2}n \\ x = \frac{10\pi}{3}k \end{cases}$$

171. $|x| = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm(2 - x) \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x = 1 \\ 0 = -2 \end{bmatrix} \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

172. $\cos 3x + \sin x \cdot \sin 2x = 0 \Leftrightarrow (\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x) + \sin x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, n, k \in Z. \end{cases}$

173. Birinci briqadada x fəhlə olarsa, birinci sahədə işin həcmi vahid qəbul etsək, onda məsələnin şərti

$$\begin{cases} \frac{1}{x} < \frac{x}{x+10} \\ x \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+10 < 2 \\ x \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 10 \\ x \in N \end{cases} \text{ sistemilə birgüclüdür. Bu sistem isə}$$

$x=11$ ən kiçik qiymətində ödənilir.

174. $(26 + 15\sqrt{3})^x - 5(7 + 4\sqrt{3})^x + 6(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 5 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{3x} -$
 $- 5(2 + \sqrt{3})^{2x} + 6(2 + \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 5. \quad y = (2 + \sqrt{3})^x > 0 \text{ işarə edək:}$

$$y^3 - 5y^2 + 6y + \frac{1}{y} = 5 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 - 5 \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = 0 \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 5\left(y + \frac{1}{y}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{y} - 1\right)\left(y + \frac{1}{y} - 4\right) = 0 \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} = 4 \Leftrightarrow y = 2 \pm \sqrt{3} \quad (\text{çünkü } y + \frac{1}{y} \geq 2)$$

İndi x-ə qayıdaq: $(2 + \sqrt{3})^x = (2 + \sqrt{3})^{\pm 1} \Leftrightarrow x = \pm 1$.

175.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - 10x \\ z = 8 - 7x \\ x^2 + 2(12 - 10x) + (8 - 7x)^2 = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x - \frac{44}{25}\right) = 0 \\ y = 12 - 10x \\ z = 8 - 7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ x = 44/25 \\ y = 28/5 \\ z = 108/5 \end{cases}$$

$$176. \quad \sqrt{2 - \frac{2}{x+1}} < \sqrt{2 + \frac{2}{x}} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x}{x+1}} < \sqrt{4 \cdot \frac{x+1}{2x}} + 1 \quad \cdot \quad y = \sqrt{\frac{2x}{x+1}} \geq 0$$

işarə edək; onda $y < 2 \cdot \frac{1}{y} + 1 \Leftrightarrow \frac{y^2 - y - 2}{y} < 0 \Leftrightarrow \frac{(y+1)(y-2)}{y} < 0 \Leftrightarrow 0 < y < 2$

x-ə qayıdaq: $0 < \sqrt{\frac{2x}{x+1}} < 2 \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} > 0 \\ \frac{x+2}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \end{cases}$

177. Uyğun olaraq x,y,z kq A,B,C metalı götürülsə, onda

məsələnin şərti $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 0,2x + 0,5y + 0,3z = 2,5 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 2y \geq 0 \\ z = 5 - 3y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ sistemilə

eynigüclü olar. Odur ki, xəlitədə β metalının miqdarı $0,3x + 0,2y + 0,4z = 0,3(5 + 2y) + 0,2y + 0,4(5 - 3y) = 3,5 - 0,4y$ olar,

burada $0 \leq y \leq \frac{5}{3}$ və $0, \quad y = \frac{5}{3}, x = 5 + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{3}, z = 5 - 3 \cdot \frac{5}{3} = 0$

olduqda minimaldır.

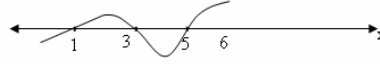
178. Ədədi silsilənin birinci həddi və fərqi a_1, d olarsa, onda

məsələnin şərti $\begin{cases} (a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d) \\ a_1 + d \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d(d - a_1) = 0 \\ a_1 + d \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ d = a_1 \\ a_1 \neq 0 \end{cases}$ sistemi ilə

eynigüclüdür. Bu şərtlə axtarılan ortaq vuruq $q = \frac{a_1 + d}{a_1}$, onda $q = 1$

və ya $q = 2$ -dir.

$$179. \log_x^2 < \log_{6-x}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} < \frac{1}{\log_2 (6-x)} \Leftrightarrow \frac{\log_2 (6-x) - \log_2 x}{\log_2 x \log_2 (6-x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(6-x)-x}{(x-1)((6-x)-1)} < 0 \\ 0 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$


Şəkil 33.

(Çünki $\log_2 a - \log_2 b$ və

$\log_2 a$ ifadələri uyğun olaraq $a-b$ və $a-1$ ilə eyni işarəlidir)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{(x-1)(x-5)} < 0 \\ 0 < x < 6 \end{cases} \text{ (Şəkil 33)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 5 \\ 0 < x < 1 \end{cases}.$$

$$180. |x-2|x + \frac{1}{2} \geq \left| (-x+2) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \right| = \frac{5}{2} \text{ olduğundan } b = \frac{1}{2} \text{ olduqda}$$

$f(x) = |x-2| + b|2x+1| = |x-2| + 2b\left|x + \frac{1}{2}\right|$ funksiyasının qiymətlər oblastına

$\frac{5}{2}$ -dən kiçik ədəd daxil deyil, $b = -\frac{1}{2}$ olduqda isə

$$|x-2| - \left|x + \frac{1}{2}\right| \leq \left| (x-2) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right| = \frac{5}{2} \text{ olduğundan } b = -\frac{1}{2} \text{ olduqda } \frac{5}{2} -$$

dən böyük ədəd daxil deyil ($|a|-|b| \leq |a-b| \leq |a|+|b|$ bərabərsizliyinə görə).

Odur ki, yalnız $a = \frac{5}{2}$ olduqda $f(x) = a$ tənliyinin həmişə, başqa

sözlə b-in ixtiyari qiymətində həlli vardır.

$$181. x \leq \frac{8x-2}{x+5} \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{x+5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x+5} \leq 0.$$

$$x \in (-\infty; -5) \cup [1; 2]$$



(Şəkil 34).

Şəkil 34.

$$182. \log_{a-6,5}^{(x^2+1)} = \log_{a-6,5}^{(a-5)x} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 + 1 = (a-5)x \\ a-6,5 > 0 \\ a-6,5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (a-5)x + 1 \\ a > 6,5 \\ a \neq 7,5 \end{cases}$$

Sonuncu sistemdəki kvadrat tənliyin yalnız və yalnız $D = (a-5)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |a-5| > 2 \Leftrightarrow a \in (-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$ sistemdə a -nın üzərinə qoyulan əlavə şərti nəzərə alaraq $a \in (7; 7,5) \cup (7,5; +\infty)$ cavabına gəlirik.

183. Koordinat sistemi daxil edək: O – koordinat başlanğıcı, meteoroloji stansiya, x oxu qərbdən şərqə istiqamət, y oxu cənubdakı şimala istiqamət (Şəkil 35).

Qasırğa $y = kx + b$ düz xətti üzrə hərəkət edir, odur ki,

$$\begin{cases} 24 = k(-5) + b \\ 20 = k\left(-\frac{10}{3}\right) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{12}{5} \\ b = 12 \end{cases}$$

$y = -\frac{12}{5}x + 12$ düz xətti koordinat

oxlarını $A(0; 12)$ və $B(5; 0)$ nöqtələrində kəsir. Qasırğadan meteoroloji stansiyaya qədər ən qısa məsafə OAB üçbucağının OH hündürlüyüdür.

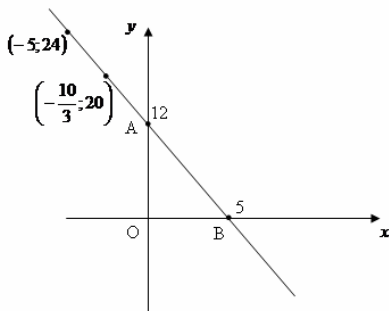
$$OH = \frac{2S(OAB)}{AB} = \frac{12 \cdot 5}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{60}{13}.$$

184.

$$|2x+8| - |x-5| = 12 \Leftrightarrow 2|x+4| - (x-5) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \leq 0 \\ x-5 \leq 0 \\ -2x-8+x-5=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x = -25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ x-5 \leq 0 \\ 2x+8+x-5=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x \leq 5 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -25 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ x-5 > 0 \\ 2x+8-x+5=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x = 1 \end{cases}$$



Şəkil 35

185. Oxy müstəvisinin hər bir rübündə $|x|$ və $|y|$ modulları eyni qiymətli açılır, odur ki, $2|x| + |y| - 2 = 0$ tənliyi bu rüblərdə düz xətt

parçalarını müəyyən edir. Koordinat oxları üzərində tənliyi $A(0; 2)$, $B(1; 0)$, $C(0; -2)$ və $D(-1; 0)$ nöqtələri ödəyir. Beləliklə, bütün müstəvidə bu tənlik ABCD rombunu verir (Şəkil 36).

$g(x, y, a) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2$ tənliyi mərkəzi O koordinat başlanğıcında və radiusu $|a|$ -ya bərabər olan çevrənin tənliyidir. $a > 0$ parametrinin ən kiçik qiyməti, rom-
bun və çevrənin dörd ortaq nöqtəsi
olduğu, rom-
bun daxilinə çəkilmiş
çevrənin radiusuna bərabər olan a_0 -
dir (Şəkil 36).

$$a_0 = \frac{2S(OAB)}{AB} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$f(x, y) \leq 0$ bərabərsizliyi rom-
bun daxilini (sərhədləri ilə birlikdə),

$f(x, y) \geq 0$ - bərabərsizliyi rom-
bun xaricini (sərhədləri ilə birlikdə),

$g(x, y, a_0) < 0$ - bərabərsizliyi çevrənin daxilini, $g(x, y, a_0) > 0$

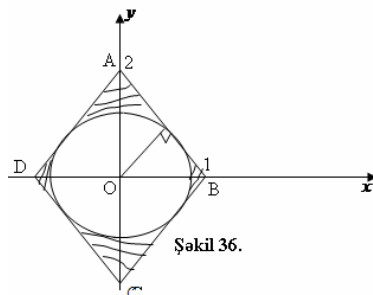
bərabərsizliyi çevrənin xaricini verir. Odur ki, $\frac{f(x, y)}{g(x, y, a_0)} \leq 0$

bərabərsizliyi rom-
bun daxilində yerləşən nöqtələr (sərhədləri ilə
birlikdə), lakin çevrənin xaricində, çoxluğunu təyin edir. Bu çoxluğun
daxildə yerləşən hissəsi xətlənmişdir (Şəkil 36). Onun sahəsi

$$S(\text{romb}) - S(\text{daire}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \pi a_0^2 = 4 - \frac{4}{5} \pi \text{-dir.}$$

186.

$$4x \sin 3x = 3x + |x| \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} x > 0 \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \sin 3x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} x > 0 \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ 3x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \\ (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}, k < 0 \end{cases}$$



187. Sahələrdən birinin sahəsi saha vahidi, traktorlar isə sahələri uyğun olaraq x, y, z saata şumlasınlar. Onda məsələnin şərtinə görə

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \\ x + 2 = z \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \cdot 7 \frac{1}{5} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ z = x + 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{36} \end{cases} \quad \text{tənliklər sisteminin}$$

alırıq.

Onda

$$5x^2 - 74x - 96 = 0 \Rightarrow (x - 16) \left(x + \frac{6}{5}\right) = 0 \Rightarrow x = 16, y = 48, z = 18.$$

Traktorların məhsuldarlığı isə uyğun olaraq $\frac{1}{16}, \frac{1}{48}, \frac{1}{18}$ sahə saat olar.

Bir sahədən digərinə keçmə yoxdursa, onda bir sahədə bir, digərində isə iki traktor işləyir, həm də iş bir traktor öz sahəsini qurtarandan tez, başqa sözlə 16 saatdan tez baş vermir.

Bir sahədən digərinə keçmənin olması fərz edilərsə, onda bunun nəticəsində “itgi” aşağıdakı şərtlərdə minimal ola bilər: 1) cəmiyi bir keçid olmuşdur və onu məhsuldarlığı ən az olan, yəni ikinci traktor yerinə yetirir. 2) Traktorların üçü də işi eyni zamanda qurtarır (bu o deməkdir ki, onların dayanma saati olmayıb). İkinci traktor birinci ilə t saat bir sahədə işlədikdə, sonra isə üçüncü ilə S saatda qurtaran başqa sahəyə keçdikdə bu şərt ödənilir:

$$\frac{1}{16} \left(t + S + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{48} t = \frac{1}{18} \left(t + S + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{18} S \Leftrightarrow \frac{1}{144} \left(t + S + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{48} (S - t) \Leftrightarrow t + S + \frac{2}{3} = 3(S - t) \Leftrightarrow S = 2t + \frac{1}{3}, \text{ odur ki,}$$

$$\frac{1}{16} (3t + 1) + \frac{1}{48} t = 1 \Leftrightarrow 10t = 45 \Leftrightarrow t = \frac{9}{2}, \text{ işə sərf olunan ümumi vaxt isə}$$

$$t + S + \frac{2}{3} = 3t + 1 = \frac{29}{2} = 14 \frac{1}{2} \text{ olar ki, bu da 16-dan kiçikdir.}$$

188.

$$2 + \log_{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \frac{x+4}{x+1} \geq \log_{(x^2 - 2x - 3)} \left(\frac{x+4}{x+1}\right)^2 \Leftrightarrow 2 + \log_{(x^2 - 2x - 3)} \left(\frac{x+4}{x+1}\right)^2 \geq 2 \log_{(x^2 - 2x - 3)} |x^2 - 2x - 2| \Leftrightarrow 1 + \log_{x^2 - 2x - 3} \frac{x+4}{x+1} \geq$$

$$\geq \log_{\left(\frac{x^2-2x-2}{x^2-2x-3}\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(x-3)(x+4)}{x+1} - |x^2-2x-2| \geq 0 \\ \frac{(x^2-2x-3)-1}{(x^2-2x-3)-1} \geq 0 \\ (x+1)(x-3) > 0 (\Rightarrow x^2-2x-2 > 0, x+1 \neq 0) \\ (x-3)(x+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-3)(x+4)-(x^2-2x-2)}{x+1} \geq 0 \\ x > 3 \\ x < -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-\frac{3}{10}}{\left[x-(1+\sqrt{5})\right]\left[x-(1-\sqrt{5})\right]} \geq 0 \\ x > 3 \\ x < -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{10}{3} \\ 3 < x < 1+\sqrt{5} \end{cases}$$

189.

$$|x^2-3x|=2x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x=\pm(2x-4) \\ 2x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4=0 \\ x^2-x-4=0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-4)=0 \\ x=\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

190. Birinci ildə əhali $x\%$ artmışdırsa, onda ikinci ildə $(x+1)\%$, iki ildə isə $(x+5,2)\%$ artmışdır. Onda

$$\frac{100+x}{100} \cdot \frac{100+(x+1)}{100} = \frac{100+(x+5,2)}{100} \Rightarrow (x+100)(x+101)=100(x+105,2) \Rightarrow x^2+101x-420=0 \Rightarrow (x-4)(x+105)=0 \Rightarrow x=4$$

191.

$$\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+2} > \frac{1}{2x+3} \Leftrightarrow \frac{5x^2+14x+11}{(x-1)(x+2)(2x+3)} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -2 < x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

192.

$$\sqrt{11-8\cos^2 x-4\sin x \cos x}=3\sin x+\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x+\cos x \geq 0 \\ 11-8\cos^4 x-4\sin x \cos x=(3\sin x+\cos x)^2 \end{cases}$$

sistemin tənliyi aşağıdakılarla eynigüclüdür:

$$11-8\cos^4 x-2\sin 2x=9(1-\cos^2 x)+3\sin 2x+\cos^2 x \Leftrightarrow 2+8\cos^2 x(1-\cos^2 x)-5\sin 2x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x-5\sin 2x+2=0 \Leftrightarrow \left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)(\sin 2x-2)=0 \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$$

193. Birinci məhluldan x / götürsək, onda ikinci məhluldan $(30-x)$ / götürmək lazımdır. Onda $0,005x + 0,02(30-x) = 0,015 \cdot 30$ tənliyini

və buradan
$$x = \frac{0,02 \cdot 30 - 0,015 \cdot 30}{0,02 - 0,005} = \frac{5 \cdot 30}{15} = 10, \quad 30-10=20 \text{ l alırıq.}$$

194.
$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{2 - \log_2 x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2 - y + y + 2y^2 - 4y}{y(2 - y)} \leq 0,$$

burada $y = \log_2 x$, $\Leftrightarrow \frac{(y-1)^2}{y(y-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0 \\ y = 1 \\ y > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x = 2 \\ x > 4 \end{cases}$

195.
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \end{cases}$$

$\operatorname{tg} x = t$ əvəz edib sistemin ikinci tənliyini həll edərək:

$$t + \frac{1-t}{1+t} = 1 \Leftrightarrow \frac{(t^2-1)+(1-t)}{t+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{t(t-1)}{t+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, n, k \in Z \end{cases}.$$

Onda $y = \frac{\pi}{4} - \pi n, y = -\pi k$ alırıq.

196. Məsələ
$$\begin{cases} (2a-1)x^2 + 6ax + 1 = 0 \\ ax^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$
 sisteminin birgəliyinə

gəlir.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 - x + 1 + ax^2 - x^2 + 6ax + x = 0 \\ ax^2 - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x^2 + (6a+1)x = 0 \\ ax^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

Buradan

$$\begin{cases} x = -\frac{6a+1}{a-1} \\ a\left(\frac{6a+1}{a-1}\right)^2 + \frac{6a+1}{a-1} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6a+1}{a-1} \\ 36a^3 + 19a - 6a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6a+1}{a-1} \\ a\left(a - \frac{2}{9}\right)\left(a + \frac{3}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

alırıq. Bu sonuncu bərabərlik isə $a = 0$, $a = \frac{2}{9}$ və $a = -\frac{3}{4}$ olduqda ödənilir.

197. Birinci və ikinci ərintidə lazım olan miqdarı uyğun olaraq x , y ilə işarə edək. Onda birinci və ikinci metalların ərintilərdəki miqdarı

uyğun olaraq $\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}y$ və $\frac{2}{3}x + \frac{5}{9}y$ olar. Nəticədə $\frac{\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}y}{\frac{2}{3}x + \frac{5}{9}y} = \frac{2}{3}$

tənliyini və buradan $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ alırıq. Beləliklə, $\frac{y}{x+y} = \frac{3}{5} = 60\%$

198. a) $MQO: x \in (-4; 0) \vee (0; 4)$.

$\frac{x+1}{5-x} > 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-5} < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 5, x \in (2; 4)$ b)

$MQO: (x < -4) \vee (x > 4), 0 < \frac{x+1}{5-x} < 1$ - bu bərabərsizliyin həlli

mümkün qiymətlər oblastına daxil deyil. Nəticədə alırıq ki, bərabərsizliyin yeganə tam həlli $x=3$ –dür.

$$199. 16^{\log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{7}}} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{4} \log_{\sqrt{2}} 7} = 2^{2 \log_a 7} = 2^{\log_2 49} = 49.$$

$$200. \left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = \left(\frac{9}{2}\right)^{x-6} \Rightarrow \left(\frac{2}{9}\right)^{3x-3} = 1 \Rightarrow 3x-3=0 \Rightarrow x=1.$$

201.

$$\begin{cases} x^{y+1} = 27 \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y+1) \log_3 x = 3 \\ (2y-5) \log_3 x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}; \quad xy = 6$$

202. $\alpha = \arccos \frac{3}{5}$ olduğundan, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Onda $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ və

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. Kotangens üçün ikiqat argument düsturuna görə

$$3 \operatorname{ctg} 2\alpha = 3 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{3 \left(1 - \frac{16}{9} \right)}{2 \cdot \frac{4}{3}} = -\frac{7}{8} = -0,875.$$

203.

$$\sqrt{x^2 - 3x + \frac{9}{4}} - \sqrt{x^2 - 8x + 16} = 1,5 \Leftrightarrow \left| x - \frac{3}{2} \right| - |x - 4| = \frac{3}{2}.$$

Moduldan azad etdikdə üç həll alınır:

a) $x < \frac{3}{2}$ - həll yoxdur

b) $\frac{3}{2} < x \leq 4$; $x - \frac{3}{2} + x - 4 = \frac{3}{2}$; $2x = 7$; $x = 3,5$

c) $x > 4$ - həll yoxdur.

204.

$$\frac{9}{\pi} \arccos 200^0 = \frac{9}{\pi} \arccos(-20^0) = \frac{9}{\pi} \left(\pi - \arccos \frac{\pi}{9} \right) = \frac{9}{\pi} \left(\pi - \frac{\pi}{9} \right) = 8$$

205.
$$-\cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos 5x \quad ;$$

$$\cos \left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) = 0;$$

$$x_1 = 50^0 + 120^0 n, n \in Z \quad ; \quad x_2 = 30^0 + \frac{360^0}{7} \cdot k, k \in Z \quad . \quad k = 0$$

olduqda ən kiçik müsbət kök 30^0 -dir.

206. Birinci və ikinci piyadaların sürətləri uyğun olaraq $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ olsun. Məsələnin şərtinə görə məsafəni $3\mathcal{G}_1 + 3\mathcal{G}_2 = S$ düsturu ilə ifadə

edə bilərik. Piyadaların sürətləri isə $\vartheta_1 = \frac{S}{t}$, $\vartheta_2 = \frac{S}{t-2,5}$ olar. Bunları məsafə düsturunda yerinə yazıb, birinci piyadanın bütün yola sərf etdiyi vaxtı (t) tapırıq: $\frac{3S}{t} + \frac{3S}{t-2,5} = S$, $t^2 - 8,5t + 7,5 = 0$, $t = 7,5$ saat.

207. Verilmiş tənliyi $6 \cdot 3^x - \frac{5}{81} \cdot 3^{2x} = 81$ şəkildə yazmaq olar.

3^x -ə nəzərən bu kvadrat tənliyin ən böyük kökü 81-dir, odur ki, $3^x = 81$, $x = 4$.

208. Verilmiş tənliyi belə yazmaq olar: $\log_3 (\log_3 x)^{-\frac{1}{2}} = \log_3 \left(\log_3 \sqrt[3]{\frac{x}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}$. Buradan $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$ kvadrat tənliyi alınır. $\log_3 x > 0$ olduğundan $\log_3 x = 2$, $x = 9$, $\log_3 x = -1$ isə lazım deyil.

209. Kvadrat mötərizə içərisindəki ifadələri sadələşdirək:

$$\frac{\frac{x}{8y^3} + \frac{1}{4y^2}}{x^2 + 2xy + 2y^2} - \frac{\frac{x}{8y^3} - \frac{1}{4y^2}}{x^2 - 2xy + 2y^2} = \frac{1}{8y^3} \left[\frac{(x+2y)(x^2 - 2xy + 2y^2) - (x-2y)(x^2 + 2xy + 2y^2)}{(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{x^4 + 4y^4} \quad (1); \quad \frac{1}{4y^2(x^2 - 2y^2)} - \frac{1}{4y^2(x^2 + 2y^2)} = \frac{1}{x^4 - 4y^4} \quad (2).$$

(1) və (2) kəsrlərin hər ikisini 11-ə vurub $11 \left(\frac{1}{x^4 + 4y^4} + \frac{1}{x^4 - 4y^4} \right) = \frac{22x^4}{x^8 - 16y^8}$ alırıq, burada $x = \sqrt[4]{2}$ və $y = \sqrt[8]{3}$ yazıb, sadə çevirmələrdən sonra ifadənin -1 olduğunu tapırıq.

210. $t = \sqrt[4]{x^3 + 80}$ əvəz edək. Tərifə görə $t \geq 0$. Onda alınmış yeni $t^2 + t - 6 = 0$ tənliyinin kökləri 2 və -3 olar. Beləliklə, $\sqrt[4]{x^3 + 80} = 2$, $x = -4$.

211. Yeni məchul $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ daxil edək. Onda $4t^2 - 12t + 5 = 0$

tənliyini alırıq. Onun kökləri $\frac{1}{2}$ və $\frac{5}{2}$ -dir. Verilmiş tənliyin ən böyük kökü 1-ə bərabərdir.

212. $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$;

$9 - 2^x = 2^3 \cdot 2^{-x} \Rightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$. Buradan $2^x = 1$ və $2^x = 8$. Onda ən böyük kök $x=3$ -dir.

213. $\sin 3x = \cos x - \sin x$; $\sin 3x + \sin x = \cos x$;
 $2 \sin 2x \cos x - \cos x = 0$, $\cos x = 0 \Rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ \cdot n$, $n \in Z$;
 $\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^m \cdot 15^\circ + 180^\circ \cdot m$, $m \in Z$. Verilmiş tənliyin ən kiçik müsbət kökü $m=0$ olduqda $x = 15^\circ$ -dir.

214. Mürəkkəb faiz düsturuna görə $10000 \cdot (1 + 0,1)^n = 14641$;
 $(1,1)^n = 1,4641$; $n = 4$ (il).

215. Şərtə görə $a_1 + a_2 + a_3 = 87$, $3a_1 + 3d = 87$, $a_1 + d = 29$. Digər tərəfdən $a_1 + 2d + 5 = 2a_1 + d \Rightarrow d = a_1 - 5$. Nəticədə $a_1 = 17$ alırıq.

216. $\frac{x+y}{x-2y} = \frac{2}{3}$ bərabərliyindən $3(x+y) = 2(x-2y)$, buradan $x = -7y$ alınır. Onda

$$\frac{xy - y^2}{2x^2 + 2xy + 3y^2} = \frac{-7y^2 - y^2}{2 \cdot (-7y^2) + 5 \cdot (-7y) \cdot y + 3y^2} = \frac{-8y^2}{98y^2 - 35y^2 + 3y^2} = -\frac{4}{33}$$

217. $x > 0$ üçün təyin olunmuş verilən tənlik $7^{\frac{2}{\sqrt{x}}} = 7$ tənliyi ilə eynigüclüdür, bu isə $\sqrt{x} = 2$ ilə eynigüclüdür, onda $x=4$.

218. Məsələnin şərtinə görə verilmiş funksiya l arın qrafiklərinin orta q nöqtəsi yoxdur, deməli $\begin{cases} y = 2ax + 1 \\ y = (a - 6)x^2 - 2 \end{cases}$ sisteminin həlli yoxdur. a -nın hansı qiymətlərində $(a - 6)x^2 - 2ax - 3 = 0$ tənliyinin

həqiqi kökü olmadığını, yəni $D < 0$ olduğunu tapaq:
 $D = (2a)^2 - 4 \cdot (a - 6) \cdot (-3) = 4a^2 + 12a - 72$

$$a^2 + 3a - 18 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > -6 \\ a < 3 \end{cases}. \text{Cavab: } (-6; 3)$$

219. Ayrılıqda hər bir kombayının bütün sahənin qarğıdalısını yığmağa sərf etdiyi vaxtları uyğun olaraq x s və y s. İlə işarə edək. Qarğıdalı sahəsini 1 qəbul edək. Onda birinci və ikinci kombayn bir

saatda uyğun olaraq sahənin $\frac{1}{x}$ və $\frac{1}{y}$ hissəsini yığar. İki kombayn

birlikdə bir saatda sahənin $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ hissəsini, 6 saatda isə $6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

hissəni –yəni bütün işi qurtararlar. Odur ki, $6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$ tənliyini

alırıq. 4,5 s-da birinci kombayn işin $4,5 \cdot \frac{1}{x}$ hissəsini, ikinci isə 2 s-da

bu işin $2 \cdot \frac{1}{y}$ hissəsini yerinə yetirər.

Məsələnin şərtinə görə onlar bu halda bütün sahənin 50% qarğıdalısını yığarlar, buradan alınır ki, $\frac{4,5}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2}$. Beləliklə,

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1 \\ \frac{4,5}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ tənliklər sistemini və buradan } \begin{cases} x = 15(s) \\ y = 10(s) \end{cases} \text{ alırıq.}$$

Beləliklə, birinci və ikinci kombaynlar ayrılıqda işləməklə bütün sahənin qarğıdalısını uyğun olaraq 15 s və 10 s-da yığa bilirlər.

220. $y = 4^{-x}$ - yeni dəyişən daxil edək. Onda $y^2 - 2,25y + 0,5 = 0$ və buradan $4^{-x} = 2$, $x = -\frac{1}{2}$, $4^{-x} = \frac{1}{4}$, $x = 1$ alırıq.

$$\begin{aligned}
 221. \quad & \cos(\pi + 2\alpha) = -\cos 2\alpha \quad ; \\
 & -\cos 2\alpha = \frac{2}{3}; 1 - \cos 2\alpha = 1 + \frac{2}{3}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \\
 & \frac{5}{6}; \quad \sin^4 \alpha = \frac{25}{36}; \quad 18 \sin^4 \alpha = 12,5.
 \end{aligned}$$

222. İkinci quşçuluq fabrikindən göndərilən yumurtaların sayını x ilə, bu yumurtaların birinin orta kütləsini isə y ilə işarə edək. Onda ikinci quşçuluq fabrikindən alınan yumurtaların ümumi kütləsi xy olar. Birinci quşçuluq fabrikindən yumurtaların sayı ikincidən göndərilənlərin sayından 12% azdır, yəni $o, x - 0,12x = 0,88x$ -dir. Şərtə görə birinci quşçuluq fabrikindən göndərilən bir yumurtanın kütləsi y -in 7,5%-i qədər çoxdur, yəni $y + 0,075y = 1,075y$ -dir. Onda birinci quşçuluq fabrikindən alınan yumurtaların kütləsi $0,88x \cdot 1,075y = 0,946xy$ olar. xy kəmiyyəti $0,946xy$ kəmiyyətindən $0,054xy$ çoxdur. $0,054x$ kəmiyyəti $0,946xy$ -in neçə faizi (0,1 dəqiqliklə) olduğunu tapırıq: $\frac{0,054xy}{0,946xy} 100\% \approx 5,7\%$.

223. Məsələnin şərtinə görə x -in $\log_{0,5}^{\sqrt{x-1}} - \log_{0,25}^{(x^2-5x+4)} \leq 0,5$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərini tapmaq lazımdır. Göstərilən

$$\text{bərabərsizlik} \quad \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \\ \log_{0,5}^{(x-1)} - \log_{0,5}^{(x^2-5x+4)} \leq \log_{0,5}^{0,5} \end{cases} \quad \text{sistemilə}$$

eynigüclüdür. Buradan

$$\begin{cases} x > 4 \\ \log_{0,5}^{\frac{x-1}{x^2-5x+4}} \leq \log_{0,5}^{0,5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ \frac{x-1}{x^2-5x+4} \geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 4 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \leq 6$$

alıraq.

224. $\sqrt[n]{n!}$ ifadəsi $2, 3, \dots, n-1, \sqrt{n}, \sqrt{n}$ ədədlərinin həndəsi ortasıdır, onun ədədi ortası isə $\frac{2+3+\dots+(n-1)+2\sqrt{n}}{n} = \frac{(1+2+3+\dots+n)-1-n+2\sqrt{n}}{n} = \frac{n+1}{2} - \frac{(\sqrt{n}-1)^2}{n}$ -dir.

225.

$$\sqrt[8]{\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2}-2x\right)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[8]{\frac{2\cos^2 2x}{2\sin^2 2x}} = -\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2x} \Leftrightarrow \left(\sqrt[8]{\operatorname{ctg}^2 2x}\right)^3 = -\operatorname{ctg} 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg}^6 2x = \operatorname{ctg}^8 2x \\ -\operatorname{ctg} 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg}^6 (2x) = 1 \\ \operatorname{ctg} 2x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} 2x = 0 \\ \operatorname{ctg} 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, x_2 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, k, n \in \mathbb{Z}.$$

226.

$$\begin{cases} 2^{x+2} = \frac{49}{4}x^2 + 4 \\ 2^{x+2} - 4 \leq x^2(14 - 2^{x+2})2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+2} - 4 = \frac{49}{4}x^2 \\ 49x^2 \leq x^2(14 - 2^{x+2})2^{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(2^{x+2} - 7)^2 \leq 0 \\ 2^{x+2} = \frac{49}{4}x^2 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2^2 = 4 \\ 2^{x+2} = 7 \\ 7 = \frac{49}{4}x^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_2 7 - 2 \\ x = \pm \frac{2}{7}\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

227. Şərtə görə $x, y, z > 0$, $\lg x \neq \lg y$ və hər iki loqarifmə eyni bir t ədədinə

$$\begin{aligned} \text{bərabərdir: } t &= \frac{\frac{2}{3}\lg x + \frac{1}{3}\lg y - \lg z}{5\lg x + 2\lg y + \lg z} = \frac{\frac{1}{2}\lg x + \frac{1}{2}\lg y - \lg z}{2\lg x + 5\lg y + \lg z} = \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\lg x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\lg y}{(5-2)\lg x + (2-5)\lg y} = \frac{\frac{1}{6}(\lg x - \lg y)}{3(\lg x - \lg y)} = \frac{1}{18}, \quad \text{çünki} \end{aligned}$$

$$t = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ bərabərliyindən } t = \frac{a-c}{b-d} \text{ bərabərliyi alınır.}$$

228. n həddi olan silsilənin ortaq vuruğu q olarsa, onda n tək olduqda

$$\begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{40}{27} \\ \frac{1+q^n}{1+q} = \frac{20}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27(1-q^n) = 40(1-q) \\ 27(1+q^n) = 20(1+q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{3}{10} \\ 27(1-q^n) = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{3}{10} \\ q^n = -\frac{1}{27} \end{cases}$$

alınır, bu isə mümkün deyil. Odur ki, n cütdür və

$$\begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{40}{27} \\ \frac{1-q^n}{1+q} = \frac{20}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27(1-q^n) = 40(1-q) \\ 27(1-q^n) = 20(1+q) \end{cases} \Rightarrow 0 = 20 - 60q \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

229.

$$\sin 14x = \cos 4x - \sin 6x \Leftrightarrow 2 \sin 10x \cdot \cos 4x = \cos 4x \Leftrightarrow \cos 4x \left(\sin 10x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ 10x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in N \end{cases} . \quad x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n ,$$

$$x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{10} k, n, k \in N .$$

230.

$$2^{2x-5} - 4^{x-2} = 32^{\frac{2x}{5}} - 66 \Leftrightarrow 2^{2x-5} - 2^{2x-4} - 2^{2x} = 66 \Leftrightarrow 2^{2x-5}(1-2-32) = -66 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^{2x-5} = 2 \Leftrightarrow 2x-5 = 1 \Leftrightarrow x = 3 .$$

231.

$$2 \log_4(x+1) - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-5) < 3 \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(x-5) < 3 \Leftrightarrow \{\log_2(x+1) + \\ + \log_2(x-5) < \log_2 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 8 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [x - (2 + \sqrt{17})][x - (2 - \sqrt{17})] < 0 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < x < 2 + \sqrt{17} ,$$

çünkü $\sqrt{17} > 4$.

$$232. \quad \begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3}-|3y-1|=0 \\ 4\sqrt{9y^2-6y+1}+\sqrt{x^2-4x+3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2-6y+1=0 \\ x^2-4x+3=0 \\ \sqrt{x^2+2x-3}=|3y-1| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3y-1)^2=0 \\ (x-3)(x-1)=0 \\ \sqrt{(x+3)(x-1)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3} \\ x=1 \end{cases}$$

233.

$$\sin x - \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x - (\sin 2x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in Z \end{cases}$$

234.

$$\sqrt{x+2}\sqrt{2x+1}=x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-14=0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{2} \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{65}}{2},$$

çünkü $\sqrt{65} > 8$.

235.

$$\frac{2}{\log_3(x+1)} \leq \frac{1}{\log_9(x+5)} \Leftrightarrow \frac{2}{\log_3(x+1)} - \frac{2}{\log_3(x-5)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3(x+5) - \log_3(x+1)}{\log_3(x+1) \cdot \log_3(x+5)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+5) - (x+1)}{(x+1-1)(x+5-1)} \\ x > -1 \end{cases}.$$

Çünkü $\log_3 a - \log_3 b$ və $a - b$ ifadələri habelə $a, b > 0$ üçün $\log_3 a$

və $a - 1$ ifadələri eyni işarəlidir. Onda $\begin{cases} \frac{4}{x(x+4)} \leq 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0$

alırıq.

236. Sistemin birinci tənliyini həll edib

$$\frac{y}{x} + \frac{3x}{y} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\frac{y}{x} + 3 = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{y}{x} - 3\right)\left(\frac{y}{x} - 1\right) = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ y = x \\ y \neq 0 \end{cases}$$

alırıq.

237. İki hala baxmaqla verilən sistemə qayıdaq:

1)

$$\begin{cases} y = 3x \\ \sqrt{3x} - \sqrt{2x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \neq 0 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} y = x \\ \sqrt{x} - \sqrt{2x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \neq 0 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{(1 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} \end{cases}$$

Sonuncu tənliyin sol tərəfi müsbət, sağ tərəfi isə mənfi olduğundan bu halda həll yoxdur.

237.

$$\cos 2x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow (\cos x - a)(\cos x + a + 1) = 0 \text{ tənliyinin } [0; 2\pi) \text{ aralığında yalnız}$$

$$\text{və yalnız } \begin{cases} a = \pm 1 \\ |a + 1| > 1 \\ a + 1 = \pm 1 \\ |a| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases} \text{ olduqda bir kökü vardır.}$$

$$238. \cos 7x + \cos 3x + 2 \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 2 \cos 5x \cos 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \left(\cos 5x - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ 5x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n \\ x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi}{5} k, n, k \in Z \end{cases}$$

239.

$$\left| 2 - \frac{1}{x-4} \right| < 3 \Leftrightarrow \left(2 - \frac{1}{x-4} \right)^2 < 3^2 \Leftrightarrow \left(5 - \frac{1}{x-4} \right) \left(1 + \frac{1}{x+4} \right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{21}{5} \right) (x-3)}{(x-4)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{21}{5} \\ x < 3 \end{cases}$$

240.

$$\begin{cases} \frac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21 \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \frac{18}{3^{2-y}} = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^y = 7 \\ 10 \cdot 2^x - 3^y = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 3 \\ 3^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 3 \\ y = \log_3 2 \end{cases}$$

241.

$$\sqrt{\frac{4}{x-2} + 1} = \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x-2} + 1 = \frac{1}{(x-2)^2} \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + 4(x-2) - 1 = 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$$

242. İsbat etmək üçün $\sqrt{x-3} = x+2$ tənliyinə baxmaq lazımdır.

Buradan alınan $x^2 + 3x + 7 = 0$ kvadrat tənliyinin diskriminantı sıfırdan kiçik olduğundan onun həqiqi kökü yoxdur. Bu o deməkdir ki, verilmiş funksiyaların qrafikləri kəsişmir.

243. Verilmiş tənliyi $\sin x(x+2) = 0$ şəkildə yazmaq olar.

Buradan $\sin x = 0$, $x+2 = 0$ və $x = -2$, $x = \pi k$, $k \in Z$ alırıq.

$$244. \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4-x > 0 \\ \log_3^{(4-x)} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 4 \\ x \neq 3 \end{cases} \text{ Deməli cavab } [1; 3] \cup (3; 4).$$

245. $y = 3^x$ olsun ($y > 0$), onda verilmiş tənlik $y^2 - 2(3b - 2)y + 5b^2 - 4b = 0$ (1) şəklinə düşər. Məsələnin tələbinin ödənilməsi üçün (1) tənliyinin iki müsbət kökü olmalıdır. Bu isə D diskriminantı müsbət olduqda mümkündür. Lakin $\frac{D}{4} = 4(b - 1)^2$, yəni $b = 1$ -dən fərqli bütün b üçün $D > 0$ (1) tənliyinin köklərini $y = (3b - 2) \pm (2b - 2)$ və ya $y_1 = 5b - 4$, $y_2 = b$ şəkildə yazmaq olar. y_1 və y_2 -in qiymətləri $\begin{cases} 5b - 4 \\ b > 0 \end{cases}$ sistemini ödəməlidir. Bu sistemi həll edib və $b = 1$ kənar etməklə $0,8 < b < 1$ alırıq.

246. $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3 - x)}$ tənliyini yazaraq və onu $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$ şəklinə gətirək, burada $3 - x > 0$. Onda $\begin{cases} 9 - 2^x = 2^{3-x} \\ x < 3 \end{cases}$ (1) sistmini alırıq. $2^x = t$ ($t > 0$) işarə edib (1) tənliyini $t^2 - 9t + 8 = 0$ şəklinə gətirə bilərik. Buradan $t_1 = 8$, $t_2 = 1$. Onda $2^x = 8$ və ya $2^x = 1$ alırıq. Beləliklə, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$. Lakin $x = 3$ bərabərliyi $x < 3$ şərtini ödəmir. Yoxlama ilə müəyyən edirik ki, $x = 0$ əsas tənliyi ödəyir. Deməli axtarılan nöqtə $(0; 3)$ dir.

$$247. \text{ Verilmiş bərabərsizlik } \begin{cases} x^2 - 8x + 15 \leq 0 \\ x^2 - 8x + 15 < x - 3 \\ x^2 - 8x + 15 < 0 \\ -x^2 + 8x - 15 < x - 3 \end{cases} \text{ ilə}$$

birgüclüdür. Birinci sistemdən $5 \leq x < 6$, ikinci sistemdən isə $4 < x < 5$ alırıq. Bunların birləşməsi isə $4 < x < 6$ dir.

248. Kəsr $\frac{a}{b}$ olsun. Onda surət və məxrəcini kiçiltməkdən sonra o,

$\frac{a-0,85a}{b-0,25b} = \frac{0,15a}{0,75b} = 0,2 \frac{a}{b}$ şəklinə düşər. Kəsr $0,8 \frac{a}{b}$ qədər azalmışdır.

$$\begin{cases} \frac{a}{b} - 100\% \\ 0,8 \frac{a}{b} - x\% \end{cases} \text{ tənəsübünü quraq. Onda } x=80\% \text{ alırıq. Deməli kəsr}$$

80% azalmışdır.

249. Bu ədədlər a_1, a_2, a_3 olsun. Şərtə görə $S_3 = 189$ və $a_1 = 3a_3$. Odur ki,

$$\begin{cases} \frac{(a_1 + a_3) \cdot 3}{2} = 189 \\ a_1 = 3a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 = 126 \\ a_1 = 3a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 31,5 \\ a_3 = 94,5 \end{cases} \cdot \text{Sonuncu}$$

sistemin birinci tənliyinin həlli yoxdur. İkinci tənliyin həlli isə

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{11\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ dir. Alınmış}$$

qiymətiləri dərəcə ilə ifadə edək: $\begin{cases} x = 105^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 165^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ Ən

kiçik müsbət həll $n=0$ olduqda alınır. Bu $x = 105^\circ$ -dir.

251. Bərabərsizliyi $-4 < 5x - 8 < 4 \Leftrightarrow 4 < 5x < 12 \Leftrightarrow 0,8 < x < 2,4$ şəkildə yazmaq olar. Bərabərsizliyi ödəyən tam ədədlər $x=1$ və $x=2$ dir.

252. x və y dəyişənləri daxil olan tam kvadratları ayırıraq:

$$(x-5)^2 - 25 + (y+2)^2 - 4 + 29 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$$

253. Tənliyin sol tərəfində tam kvadrat ayırıraq:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = p^2 - 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = p^2 - 1 \Leftrightarrow \sin^2 2x = 2(2 - p^2) \cdot$$

Sonuncu tənliyin $0 \leq 2 \cdot (2-p)^2 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 \leq 2 \\ p^2 \geq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow p \in [-\sqrt{2}; -\sqrt{1,5}] \cup [\sqrt{1,5}; \sqrt{2}]$.

(1) tənliyinin həlli $\begin{cases} \sin 2x = \sqrt{2(2-p^2)} \\ \sin 2x = -\sqrt{2 \cdot (2-p^2)} \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \pm \arcsin \sqrt{2(2-p^2)} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \pm 0,5 \arcsin \sqrt{2(2-p^2)} + 0,5\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad . \text{ Deməli,}$$

$$p \in [-\sqrt{2}; -\sqrt{1,5}] \cup [\sqrt{1,5}; \sqrt{2}] \quad \text{olduqda}$$

$x = \pm 0,5 \arcsin \sqrt{2(2-p^2)} + 0,5\pi n, n \in \mathbb{Z}$ p-nin qalan qiymətlərində həll yoxdur.

254. Birinci qrupdakı tənliklər sistemlərinin həlli (2; -5), ikincinininki isə (3; 1) dir.

255.

$$\frac{\sin 10^\circ + (\sin 50^\circ + \sin 10^\circ)}{2 \sin 80^\circ - 2 \cos 30^\circ \cdot \sin 50^\circ} = \frac{\sin 10^\circ + 2 \sin 30^\circ \cos 20^\circ}{2 \sin 80^\circ - \sin 80^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{\sin 10^\circ + \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ - \sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{2 \sin 40^\circ \cdot \cos 30^\circ}{2 \cos 50^\circ \cdot \sin 30^\circ} = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}, \text{ çünki } \sin 40^\circ = \cos 50^\circ.$$

256.

$$2x^2 + \sqrt{2x^3} - x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x(2x + \sqrt{2x} - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + \sqrt{2x} - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Qeyd edək ki, $x=0$ həldir, $\sqrt{2x} = t$, burada $t \geq 0$, işarə etdikdən sonra $t^2 + t - 1 \geq 0$, buradan $t \geq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, yəni $x \geq \frac{3-\sqrt{5}}{4}$. Deməli,

cavab $\{0\} \cup \left[\frac{3-\sqrt{5}}{4}; +\infty \right)$ -dir.

257. $\log_2 x = y$ olsun, burada $y > 0$, onda

$$\begin{cases} y > 0 \\ y^2 = 7 - 6y \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ alırıq.}$$

258. Verilmiş bərabərsizlik

$$\begin{cases} |2x^2 - 7x| \leq 2x^2 + 7x + 7 \\ |2x^2 - 7x| \geq -2x^2 - 7x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 - 7x - 7 \leq 2x^2 = 7x \leq 2x^2 + 7x + 7 \\ 2x^2 - 7x \geq -2x^2 - 7x - 1 \\ 2x^2 - 7x \leq 2x^2 + 7x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x \geq -7 \\ 4x^2 \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \\ 14x \geq -1 \end{cases}$$

ilə eynigüclüdür.

$$259. \text{ Məsələnin şərtini } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 \\ a_1 + a_3 = 2a_2 \\ b_1 + b_3 = 2b_2 \\ (a_1 + b_1) \cdot (a_3 + b_3) = (a_2 + b_2)^2 \end{cases} \quad \text{şəkildə}$$

yazaq. İkinci və üçüncü tənliklərdən $a_1 + a_3$ və $b_1 + b_3$ qiymətlərini birinci tənlikdə yerinə yazıb $a_2 = b_2$ alırıq. Münasiblik üçün $c = a_2 = b_2$ işarə edib əsas sistemin nəticəsinə baxaq:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + b_1 + b_3 = (a_1 + b_1) + (a_3 + b_3) = 4c \\ (a_1 + b_1)(a_3 + b_3) = 4c^2 \end{cases} \quad . \text{ Buradan alınır ki,}$$

$a_1 + b_1$, $a_3 + b_3$ ədədləri $t^2 - 4ct + 4c^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2c$ tənliyinin həllidir. Yəni $a_1 + b_1 = a_3 + b_3 = 2c$. Əsas sistemin ikinci və üçüncü tənlikləri ilə müqayisədən alınır ki, $a_1 = b_3, a_3 = b_1$.

260. Sadəlik üçün $u = 3x - 1$ işarə edək, üstdəki ifadəni ədədi və həndəsi ortalar arasındakı münasibətin tətbiqi ilə qiymətləndirək:

$$|A| = \left| \frac{3x-1}{9x^2-6x+5} \right| = \left| \frac{u}{u^2+4} \right| = \frac{1}{2 \left| \frac{u}{2} + \frac{2}{u} \right|} \leq \frac{1}{4}, \quad \text{habelə bərabərlik}$$

işarəsi $u = \pm 2$ olduqda alınır. Qeyd edək ki, qiymətləndirmə $u \neq 0$ olduqda alındı, lakin onun $u = 0$ olduqda da doğruluğunu asanlıqla yoxlamaq olar. Beləliklə, $-\frac{1}{4} \leq A \leq \frac{1}{4}$, odur ki, $c \leq 7^4 < d$

bərabərsizliyi $c \leq 7^{\frac{1}{4}}$ və $d > 7^{\frac{1}{4}}$ olduqda x -in bütün qiymətlərində ödənilir.

261. “Ceep”, “Mercedes” və “Volqa” maşınlarının sürətləri uyğun olaraq u, v, t axtarılan məsafə isə x olsun. Onda ixtiyari iki maşının

görüşə qədər keçdiyi məsafələrin nisbəti onların sürətlərinin nisbətinə

bərabər olduğundan $\frac{x+18}{x-18} = \frac{u}{9}$, $\frac{x-25}{x+25} = \frac{t}{u}$ və $\frac{x+8}{x-8} = \frac{v}{t}$ alırıq. Bu

tənlikləri tərəf-tərəfə vurub $\frac{(x+18)(x-25)(x+8)}{(x-18)(x+25)(x-8)} = \frac{u}{9} \cdot \frac{t}{u} \cdot \frac{v}{t} = 1$ və

buradan

$$(x+18)(x-25)(x+8) = (x-18)(x+25)(x-8) \quad \text{və} \quad \text{ya}$$

$x^2 = 3600$ tənliyinin iki kökündən məsələnin şərtini $x=60$ km ödəyir.

262.

$$3x-2|x-2| = 3\sqrt{3x+18} - 2|\sqrt{3x+18} - 2| \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt{3x+18}), f(x) = 3x-2|x-2| = \begin{cases} t+4, & t \geq 2 \\ 5t-4, & t \leq 2 \end{cases}$$

f funksiyası $[2; \infty)$ və $(-\infty; 2]$ şüalarının hər birində, deməli bütün ədəd düz xəttində artır. Odur ki, verilmiş tənlik

$$x = \sqrt{3x+18} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x+18 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x+3) = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$$

tənliyi ilə eynigüclüdür.

$$263. \begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0 \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{bərabərsizliklər sisteminin hər}$$

bir bərabərsizliyinin həlli parça, şüa(başlangıcı olan), kəsişməyən iki şüanın birləşməsi, düz xətt, nöqtə və ya boş çoxluq ola bilər. Odur ki, yalnız iki halda sistemin yeganə həlli ola bilər:

I. Bərabərsizliklərdən birinin həlli yalnız bir nöqtədir, yəni ya 1)

$$\begin{cases} a^2 - (a-1)(a+4) = 0 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}, \quad \text{onda}$$

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 16 \leq 0 \\ 4x^2 + 14x + 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{alınır.} \quad \text{Yaxud} \quad 2)$$

$$\begin{cases} (a+1)^2 - a(a+1) = 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1, \quad \text{onda}$$

$$\begin{cases} -2x^2 - 2x + 3 \leq 0 \\ -x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

II. Hər iki bərabərsizliyin həlləri çoxluğunun ortaq sərhəd nöqtəsi

vardır, yəni $\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0 \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$
sisteminin həlli vardır, buradan ya 3)

$$a \cdot 9 - 2(a+1)3 + a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{4}, \quad \text{onda}$$

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 21 \leq 0 \\ 5x^2 + 18x + 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x+7) \leq 0 \\ (x+3)\left(x + \frac{3}{5}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leq x \leq -3 \quad \text{yaxud}$$

$$4) \quad a + 2(a+1) + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}, \quad \text{onda}$$

$$\begin{cases} -7x^2 - 6x + 13 \leq 0 \\ -3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x + \frac{7}{3}\right) \geq 0 \\ (x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Nəticədə alırıq ki, məsələnin tələbini yalnız və yalnız $a = -\frac{3}{4}, \frac{4}{3}$ qiymətləri ödəyir.

264.

$$26^x + 27 \geq 9(6 - \sqrt{10})^x + 3(6 + \sqrt{10})^x \Leftrightarrow (ab)^x + 27 - 9a^x - 3b^x \geq 0$$

,

$$a = 6 - \sqrt{10}, b = 6 + \sqrt{10} \Leftrightarrow (a^x - 3)(b^x - 9) \geq 0 \Leftrightarrow (x - \log_a 3)(x - \log_b 9) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \log_a 3, \\ x \leq \log_b 9 \end{cases} \quad \text{burada}$$

çünki $\log_a 3 > \log_3 3 = \log_9 9 > \log_b 9$.

a və b -in qiymətlərini yerinə yazmaqla bərabərsizliyin həllini $(-\infty; \log_{6+\sqrt{10}}^9] \cup [\log_{6-\sqrt{10}}^3; \infty)$ şəkildə yazı bilərik.

$$265. \log_2(2x^2 + 4x), \log_2(8 - x^2 - 19x) \text{ və } \log_2\left(x^2 - 15x + 7\frac{1}{2}\right)$$

ədədləri aşağıdakı hallarda bərabəryanlı üçbucağın tərəflərinin uzunluqları ola bilər:

1)

$$\begin{cases} 2x^2 + 4x = 8 - x^2 - 19x \\ 2\log_2(2x^2 + 4x) > \log_2\left(x^2 - 15x + 7\frac{1}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \\ (2x^2 + 4x)^2 > x^2 - 15x + 7\frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow x = -8, \\ 2x^2 + 4x > 0 \end{cases}$$

çünkü $(2 \cdot 64 - 4 \cdot 8)^2 > 64 + 15 \cdot 8 + 7\frac{1}{2}$ və $\left(2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{3}\right)^2 < \frac{1}{9} - 15 \cdot \frac{1}{3} + 7\frac{1}{2}$;

$$2) \begin{cases} 2x^2 + 4x = x^2 - 15x + 7\frac{1}{2} \\ 2\log_2(2x^2 + 4x) > \log_2(8 - x^2 - 19x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 19x = 7\frac{1}{2} \\ 8 - x^2 - 19x > 1 \end{cases} \text{ - həll}$$

yoxdur;

$$3) \begin{cases} 8 - x^2 - 19x = x^2 - 15x + 7\frac{1}{2} \\ 2\log_2(8 - x^2 - 19x) > \log_2(2x^2 + 4x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4x = \frac{1}{2} \\ 2x^2 + 4x > 1 \end{cases} \text{ - həll}$$

yoxdur. Deməli, $x = -8$ məsələnin şərtini ödəyir.

266. Axtarılan üçrəqəmli ədəd $\overline{xyz}$ olarsa, onda məsələnin şərti $100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2 + 517 \Leftrightarrow (x - 50)^2 + (y - 5)^2 + z(z - 1) = 2008$ bərabərliyi ilə eynigüclüdür. y və z -in 0-dan 9-a qədər müsbət tam qiymətləri üçün $(y - 5)^2$ və $z(z - 1)$ ifadələrinin mümkün qiymətləri cədvəlini tərtib edək.

y, z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(y - 5)^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$z(z - 1)$	0	0	2	6	12	20	30	42	56	72

Görün ki,

$$45^2 > 2008 \geq (x - 50)^2 = 2008 - (y - 5)^2 - z(z - 1) \geq 2008 - 25 - 72 = 1909 > 43^2,$$

$$\text{buradan } |x - 50| = 44, x = 6 \text{ və } (y - 5)^2 + z(z - 1) = 2008 - 44^2 = 72.$$

Həmin cədvəldən alınır ki, sonuncu tənlik aşağıdakı sistemlərin birliyi ilə eynigüclüdür.

$$\left[\begin{cases} (y-5)^2 = 16 \\ z(z-1) = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \text{ ya } y = 9 \\ z = 8 \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} (y-5)^2 = 0 \\ z(z-1) = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ z = 9 \end{cases} \right.$$

Deməli, axtarılan üçrəqəmli ədədlər 618, 659, 698-dir.

267. Ədədi silsilənin birinci həddi a_1 , hədlər fərqi d olsun. Ədədi silsilənin ilk n həddinin $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ cəmi düsturundan

istifadə etməklə məsələnin şərtinə görə $\begin{cases} 3a_1 + 3d = 27 \\ 5a_1 + 10d = 80 \end{cases}$ tənliklər

sistemi alırıq. Buradan $a_1 = 2, d = 7$. S_n -in həmin ifadəsi üçün indi

n -dən asılı $2n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 7 = 486 \Leftrightarrow 7n^2 - 3n - 972 = 0$ tənliyini

alırıq. $n \in N$ olduğunu nəzərə almaqla yeganə $n=12$ qiymətini tapırıq.

268. Sistemi $\begin{cases} 6 \sin x = -2 \cos y \\ 6 \cos x = 2 \sin y + 7 \end{cases}$ şəkildə yazaq. Sistemin hər bir

tənliyini kvadrata yüksəldib nəticəni toplayıb

$36 \sin^2 x + 36 \cos^2 x = 4 \cos^2 y + 4 \sin^2 y + 28 \sin y + 49 \Leftrightarrow 36 = 4 + 28 \sin y + 49$,

buradan $\sin y = -\frac{17}{28}$ alırıq. Onda sistemin ikinci tənliyindən

$\cos x = -\frac{27}{28}$ tapırıq. Bu bərabərliklərdən $x = \begin{cases} \arccos \frac{27}{28} + 2\pi m \\ -\arccos \frac{27}{28} + 2\pi m \end{cases}$,

$y = \begin{cases} \arcsin\left(-\frac{17}{28}\right) + 2\pi n \\ \pi - \arcsin\left(-\frac{17}{28}\right) + 2\pi n \end{cases} \quad m, n \in Z$ alınır.

Kvadrata yüksəltmə nəticəsində kənar həllər alınır. Cavabı almaq üçün, bilmək lazımdır ki, yalnız $\sin x$ və $\cos y$ -in müxtəlif işarəli olduqları $(x; y)$ cütləri uyğundur. Beləliklə,

$$x = \arccos \frac{27}{28} + 2\pi n$$

$$y = \pi - \arcsin \left(-\frac{17}{28} \right) + 2\pi n$$

$$\begin{cases} x = -\arccos \frac{27}{28} + 2\pi n \\ y = \arcsin \left(-\frac{17}{28} \right) + 2\pi n \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{cütlərini alırıq.}$$

269. $\log_3 x = u$, $5^y = v$ olsun. Onda sistem

$$\begin{cases} \frac{10}{9} = -2u \\ u + 9 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{5}{9} \\ 9^2 - 49 - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{şəklinə düşər. Kvadrat tənliyin kökləri}$$

$$g_1 = -1, g_2 = 5 \text{ dir. } g > 0 \text{ olduğunu nəzərə alıb sistemin } \begin{cases} u = -1 \\ g = 5 \end{cases}$$

$$\text{yəni } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 1 \end{cases} \text{ yeganə həllini alırıq.}$$

270. Birinci həddi a_1 , hədlər fərqi d olan ədədi silsilənin ümumi həddi $a_n = a_1 + (n-1)d$ olsun. Bu silsilənin bütün hədləri natural ədəd olduğundan d fərqi tam ədəddir. Məsələnin şərtinə görə

$$\begin{cases} S_4 = 56 \\ 67 < a_{12} < 74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = 56 \\ 67 < a_1 + 11d < 74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 28 - 3d \\ 67 < \frac{28 - 3d}{2} + 11d < 74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 28 - 3d \\ \frac{106}{19} < d < \frac{120}{19} \end{cases}$$

$$\text{Buradan } \begin{cases} a_1 = 5 \\ d = 6 \end{cases}, \text{ odur ki, } a_{20} = 5 + 19 \cdot 6 = 119.$$

271. Bərabərsizliyin sağ və sol tərəfi müsbət olduğundan, kvadrata yüksəltmək olar.

$$|x^2 - 8x + 15| \leq |15 - x^2| \Leftrightarrow (x^2 - 8x + 15) \leq (15 - x^2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [x^2 - 8x + 15 - (15 - x^2)] [x^2 - 8x + 15 - (15 - x^2)] \leq 0 \Leftrightarrow x(x - 4)(4x - 15) \geq 0 \Leftrightarrow \left[0; \frac{15}{4}\right] \cup [4; \infty)$$

272. Fərz edək ki, birinci və ikinci səhm paketləri uyğun olaraq x , y min manata alınmışdır. Onda

$$\begin{cases} 1,28(x + y) = 7680 \\ 1,4x + 1,2y = 7680 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 600 \\ 1,4x + 1,2y = 7680 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2400 \\ y = 3600 \end{cases}$$

Deməli, birinci və ikinci paketlər uyğun olaraq 2 mil.400 min manat və 3 mil.600 min manat olmuşdur.

273.

$$\sqrt{7}(\sin x + \sin 3x) - 6 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{7} \sin 2x \cos x - 6 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(\sqrt{7} \cos x - 3) = 0 \\ \frac{3}{\sqrt{7}} > 1 \text{ olduğundan } \cos x = \frac{3}{\sqrt{7}} \text{ tənliyinin həlli yoxdur.}$$

$\sin 2x = 0$ tənliyi $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$ həllini verir.

274. Aşağıdakı eynigüclü keçiddən istifadə edirik:

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases} \quad \text{və}$$

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$$

$$\text{Onda } |x^2 - 13x + 36| \geq |36 - x^2| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 13x + 36 \geq |36 - x^2| \\ x^2 - 13x + 36 \leq -|36 - x^2| \end{cases}$$

sağ tərəfdəki bərabərsizliklər sisteminin birinci bərabərsizliyi aşağıdakı kimi çevrilir:

$$|36 - x^2| \leq x^2 - 13x + 36 \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - x^2 \leq x^2 - 13x + 36 \\ 36 - x^2 \geq -x^2 + 13x - 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 13x \geq 0 \\ 13x \leq 72 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0$$

Analoji olaraq ikinci bərabərsizlikdən $|36 - x^2| \leq -x^2 + 13x - 36 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36 - x^2 \leq -x^2 + 13x - 36 \\ 36 - x^2 \geq x^2 - 13x + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x \geq 72 \\ 2x^2 - 13x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{72}{13} \leq x \leq \frac{13}{2}$$

alırıq. Alınmış bərabərsizlikləri birləşdirib $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{72}{13}; \frac{13}{2}\right]$ alırıq.

275. Birinci sahədən çuğundur yığımı planı xt, ikincidən isə yt olsun. Onda məsələnin şərtinə görə

$$\begin{cases} 0,8x + 0,85y = 328 \\ 0,82(x + y) = 328 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,8x + 0,85y = 328 \\ x + y = 400 \end{cases} \quad \text{Buradan} \quad \begin{cases} x = 240t, \\ y = 160t. \end{cases}$$

276. Kosinuslar cəmini $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ düsturu ilə çevirib

$$2 \cos x \cdot \cos 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \end{cases} \quad \text{alırıq.}$$

$$277. |a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases} \quad \text{olduğundan verilmiş tənlik} \quad \begin{cases} x^2 - 8x + 15 = 15 - x^2 \\ x^2 - 8x + 15 = x^2 - 15 \end{cases}$$

ilə eynigüclüdür. Buradan $\begin{cases} 2x^2 - 8x = 0 \\ 8x = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = 4 \\ x = \frac{15}{4} \end{cases}$

278. Fərz edək ki, birinci əşya x manata, ikinci isə y manata alınmışdır. Onda şərtə görə $\begin{cases} 1,4(x + y) = 39900 \\ 1,3x + 1,55y = 39900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 28500 \\ 1,3x + 1,55y = 39900 \end{cases}$.
Buradan $x = 17100$ (manat), $y = 11400$ (manat).

$$279. \quad 5 \cdot 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 8 \cos x (1 - \cos^2 x) \Leftrightarrow 5 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 2 \sin^2 x \cdot \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} n, n \in Z \\ x = \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi k, k \in N \end{cases} . \quad \text{Alınmış həllər}$$

çoxluğundan $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$ şərtini ödəyənləri seçmək qalır. Bu

$$x = \frac{3\pi}{2}; x = 2\pi; x = 2\pi - \arccos \frac{2}{5} \text{ -dir.}$$

$$280. \quad \arcsin \frac{6x-7}{2x-1} = 2\pi - \pi x \Leftrightarrow \arcsin f(x) = g(x), \text{ burada}$$

$$f(x) = \frac{6x-7}{2x-1} = 3 - \frac{4}{2x-1}, \text{ bu ifadə } x > \frac{1}{2} \text{ olduqda artır,}$$

$$g(x) = 2\pi - \pi x \text{ isə azalır, habelə } |g(x)| \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} .$$

$$\begin{cases} \arcsin f(x) = g(x) \\ \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \text{ sistemi verilən tənliklə eynigüclüdür,}$$

$$\arcsin f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = g\left(\frac{3}{2}\right) \text{ olduğundan, yeganə } x = \frac{3}{2} \text{ həlli vardır,}$$

$$x > \frac{3}{2} \text{ olduqda isə } \arcsin f(x) > \frac{\pi}{2} > g(x) \text{ qiymətlənməsi doğrudur.}$$

281. $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7 \Leftrightarrow (3x+2y)(x+y) = 7$ 7 ədədinin tam vuruqlardan ibarət yalnız iki ayrılışı vardır:

$$7 = 1 \cdot 7 = (-1) \cdot (-7), \text{ odur ki, } \begin{cases} 3x+2y=7 \\ x+y=1 \end{cases} \text{ və ya } \begin{cases} 3x+2y=-7 \\ x+y=-1 \end{cases},$$

habelə ikinci sistemlərin həlli birincidən alınır. Belə ki, $(5; -4)$ və $(-13; 20)$ cütlərini -1 -ə vurmaqla $(-5; 4)$ və $(13; -20)$ cütləri alınır. Beləliklə, verilmiş tənliyi $(5; -4)$, $(-13; 20)$, $(-5; 4)$, $(13; -20)$ cütləri ödəyir.

$$282. 2 + \cos 2x = 4 \cos^2 x \Leftrightarrow 2 + \cos 2x = 2 \cos 2x + 2 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}.$$

283. A və B məntəqələri arasındakı məsafə S km, B məntəqəsindən görüş yerinə qədər məsafə x (km), motosikletçinin və velosipedçinin sürətləri uyğun olaraq m (km/saat) və v (km/saat) olsun. Motosikletçi görüşə qədər $S+x$ (km) velosipedli isə $S-x$ (km) qət etmişdir və $\frac{S+x}{S-x}$ -

nisbəti $\frac{m}{v}$ nisbətinə bərabərdir. Məsələnin şərtinə görə $\frac{S + \frac{x}{3}}{S - \frac{x}{3}}$ nisbəti

$$\frac{100 - 37,5}{100} \cdot m = \frac{8}{5} \cdot \frac{m}{9} \text{ nisbətinə bərabərdir. Onda tənlik qura bilirik:}$$

$$\frac{S + \frac{x}{3}}{S - \frac{x}{3}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{S+x}{S-x} \Leftrightarrow \frac{3S+x}{3S-x} = \frac{5S+5x}{8S-8x} \Leftrightarrow (3S+x)(8S-8x) - (5S+5x)(3S-x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9S^2 - 26Sx - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 9\left(\frac{S}{x}\right)^2 - 26 \cdot \frac{S}{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{S}{x} = 3 \text{ və}$$

$$\frac{S}{x} = -\frac{1}{9} \cdot \frac{S}{x} > 0$$

$$\text{olduğundan } \frac{S}{x} = 3 \quad \text{və} \quad m = v \cdot \frac{S+x}{S-x} = 25 \cdot \frac{\frac{S}{x} + 1}{\frac{S}{x} - 1} = 25 \cdot \frac{3+1}{3-1} = 50$$

(km/saat).

284. k -nin elə tam qiymətlərini tapmaq lazımdır ki, bu qiymətlərdə

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x-2k) = \log_2 (x-2k^3-3k^2) = m, m \in \mathbb{Z} \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{1}{(x-2k)^2} = \log_2 (x-2k^3-3k^2) = m, m \in \mathbb{Z} \\ x > 2k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(x-2k)^2} = x - 2k^3 - 3k^2 = 2^m, m \in \mathbb{Z} \\ x > 2k \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{sisteminin həlli olsun.}$$

Sistemin birinci tənliyindən alınır ki, $(x - 2k)^2(x - 2k^3 - 3k^2) = 1$. k -nin tam qiymətlərində və $x > 2k$ olduqda bu bərabərlik yalnız və yalnız

$x - 2k = x - 2k^3 - 3k^2 = 1 \Rightarrow 2k = 2k^3 + 3k^2 \Leftrightarrow k(2k^2 + 3k - 2) = 0 \Leftrightarrow k = 0, -2; \frac{1}{2}$ olduqda ödənilir. Bu qiymətlərdən tam olanlar 0 və -2 -dir. Tərsinə $k=0$ və ya $k=-2$ olduqda sonuncu sistemin həlli vardır. $x = 2k + 1$ və $m = 0$ götürmək kifayətdir.

$$285. \log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(x^2-9) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 9 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$(\text{çünkü } \sqrt{31} - \sqrt{21} = \frac{31-21}{\sqrt{31} + \sqrt{21}} < \frac{10}{5,5+4,5} = 1)$$

$$\Leftrightarrow 9 < x^2 \leq 10 \Leftrightarrow 3 < |x| \leq \sqrt{10}$$

Deməli, bərabərsizliyin həlli $[-\sqrt{10}; -3) \cup (3; \sqrt{10}]$ -dur.

286.

$$|\cos x| - \sqrt{3} \sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1 \Leftrightarrow |\cos x| - \sqrt{3} \cos x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \cos x = \frac{1}{1-\sqrt{3}} \\ 0 > \cos x = -\frac{1}{1+\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{1+\sqrt{3}}; x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

287. $b = a + d$, $c = a + 2d$ olsun. Minimallaşdırılan ifadəni a və d ilə ifadə edək:

$$2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a = 2a^2 - 4(a+d)^2 - (a+2d)^2 + 4(a+d)(a+2d) + 6a = 2a^2 - 4a^2 - 8ad - 4d^2 - a^2 - 4d^2 - 4ad + 4a^2 + 12ad + 8d^2 + 6a = a^2 + 6a = (a+3)^2 - 9.$$

Sonuncu ifadə $a = -3$ olduqda -9 minimum qiymətini alır. a -nın bu

qiymətində d -ni elə seçmək olar ki, $a - c = -2d$, $c - b = d$, $2a = -6$ ədədləri həndəsi silsilə əmələ gətirər, yəni $-2d(-6) = d^2 \Leftrightarrow d^2 - 12d = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ d = 12 \end{cases}$, $d = 12$ olduqda $-2 \cdot 12 = -24$, 12 və -6 ədədləri həqiqətən həndəsi silsilə əmələ gətirir.

288. Tərs triqonometrik funksiyanın tərifinə görə $\arcsin(2^x - 7) \leq \frac{\pi}{2}$, $\arccos(5^x - 124) \geq 0$, odur ki, $4\arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) \leq 2\pi$. Digər tərəfdən $-1 \leq 2^x - 7 \leq 1 \Leftrightarrow 6 \leq 2^x \leq 8$, buradan $2 < x \leq 3$ və $\frac{6\pi}{x} \geq 2\pi$. Beləliklə, verilmiş tənlik $4\arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = 2\pi = \frac{6\pi}{x} \Leftrightarrow x = 3$ bərabərlik sistemilə eynigüclüdür.

289.

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x} = \sqrt{15} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2+8-x+2\sqrt{(x+2)(8-x)} = 15 \\ -2 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(8-x)} = 5 \Leftrightarrow 4(-x^2 + 6x + 16) = 25 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x - 39 = 0 \Leftrightarrow 3 \pm \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

290.

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+4}{4x-8} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+4}{4x-8} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{3x+4}{4x-8} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+8}{4(x-2)} \geq 0 \\ \frac{12-x}{4(x-2)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -8) \cup (2; +\infty) \\ x \in (-\infty; 2) \cup (12; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow (-\infty; -8) \cup (12; +\infty)$$

291.

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x - 3(\cos x + 2\sin x) +$$

$$+ 4 \sin x \cos x + (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x + \cos x)^2 - 3(2 \sin x + \cos x) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x + \cos x = 1 \\ 2 \sin x + \cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - \varphi) = \cos \varphi \\ \cos(x - \varphi) = \sin \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(\text{burada } \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}) \Leftrightarrow \begin{cases} x - \varphi = \pm \varphi + 2\pi n \\ x - \varphi = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\varphi + 2\pi n \\ x = 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = 2\varphi - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Sonuncu bərabərliklərdə φ -in qiymətini yerinə yazıb

$$2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi l, 2\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{2} + 2\pi m,$$

burada $n, k, l, m \in \mathbb{Z}$ alırıq.

292.

$$\log_{\sin x} (3 \sin x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \sin x - \cos 2x = 1 \\ 0 < \sin x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \\ 0 < \sin x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -2 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ 0 < \sin x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

293. Fərz edək ki, keçən il şəhərdə A əhali və uyğun olaraq $0,08A$ işsiz olmuşdur. Bu il şəhərin əhalisi $0,96A$, işsizlər isə $0,08A \cdot 1,05 = 0,084A$ olmuşdur. Onda $0,084A$ -nin $0,96A$ -nın neçə faizi olduğunu tapmaq lazımdır:

$$0,96A - 100\%$$

$$0,084A - x$$

$$x = \frac{0,084A}{0,96A} \cdot 100\% = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}\%.$$

$$294. \quad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{|x|} \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{x+x+1-2x(x+1)}{x(x+1)} \\ x < 0 \\ \frac{x-(x+1)-2x(x+1)}{x(x+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x^2 - 1 \leq 0 \\ x < 0 \\ \frac{2x^2 + 2x + 1}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 < x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

295. $ax^2 + (2a+2)x + a + 3 = 0$ tənliyinin kökləri

$$x_{1,2} = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2 - a(a+3)}}{a} = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{1-a}}{a} \quad \text{-dır.}$$

Beləliklə, $|x_2 - x_1| = \left| \frac{2\sqrt{1-a}}{a} \right| = \frac{2\sqrt{1-a}}{|a|}$. Şərtə görə

$$\frac{2\sqrt{1-a}}{|a|} > 1 \Leftrightarrow \frac{4(1-a)}{a^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{a^2 + 4a - 4}{a^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{[a - (-2 - 2\sqrt{2})][a - (-2 + 2\sqrt{2})]}{a^2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in (-2 - 2\sqrt{2}; 0) \cup (0; -2 + 2\sqrt{2})$$

296.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} = 1 &\Rightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} \right)^3 = 1 \Rightarrow \frac{2+x}{x} - 3 \left(\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} \right)^2 \times \\ &\times \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} + 3 \sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} \left(\sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} \right)^2 - \frac{2-6x}{x} = 1 \Rightarrow -3 \sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} \left(\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} \right) = -6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} = 2. \end{aligned}$$

Sonuncu tənlik $(2+x)(2-6x) = 8x^2 \Leftrightarrow 14x^2 - 10x + 4 = 0$

tənliylə eynigüclüdür. Buradan $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{7}$. Hər iki kök verilmiş tənliyi ödəyir.

297.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)} &> \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}}x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}x} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)} > \log_{x^{\frac{1}{4}}} + \log_{x^{\frac{1}{3}}} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)} > \\ &> \frac{1}{\log_{12}x} \Leftrightarrow \frac{\log_{\frac{1}{12}}x - \log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1) \log_{\frac{1}{12}}x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - (2x^2-1)}{[(2x^2-1)-1](x-1)} < 0 \\ x > 0 \\ 2x^2 - 1 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(Çünkü $\log_{\frac{1}{12}}x - \log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)$), $\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)$ və $\log_{\frac{1}{12}}x$ ifadələrinin işarələri uyğun olaraq $x - (2x^2 - 1)$, $(2x^2 - 1) - 1$ və $x - 1$ ifadələrinin işarələri ilə əksdir.

$$\text{Sonuncu sistem} \quad \begin{cases} \frac{(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{(x^2-1)(x-1)} > 0 \\ x > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-1} > 0 \\ x > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

sistemilə eynigüclüdür. Deməli, bərabərsizlik $(1; +\infty)$ -da ödənilir.

298. A məhlulunun ümumi həcmi m ilə və ondakı turşunun həcmi isə x ilə işarə edək. Bu məhlulun qatılığı (konsentrasiyası) $\frac{x}{m}$ olar. Fərz edək ki, A məhluluna y həcmi də su əlavə etməklə B məhlulu alınmışdır. Onda B məhlulunun ümumi həcmi $m+y$, onun qatılığı isə $\frac{x}{m+y}$, C məhlulunun ümumi həcmi $m+3y$, qatılığı isə $\frac{x}{m+3y}$ olar. Şərtə görə B məhlulunun qatılığı A məhlulunun qatılığının 60%-ni təşkil edir, yəni $\frac{x}{m+y} = \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{m} \Leftrightarrow \frac{y}{m} = \frac{2}{3}$. Onda B məhlulunun

qatılığıının C məhlulunun qatılığına nisbəti

$$\frac{x}{m+y} : \frac{x}{m+3y} = \frac{m+3y}{m+y} = \frac{1+3 \cdot \frac{y}{m}}{1+\frac{y}{m}} = \frac{1+3 \cdot \frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{9}{5} = 1,8 \text{ (dəfə)}.$$

299.

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x-2-\frac{1}{x-1}} = \left(\frac{5}{7}\right)^3 \Leftrightarrow x-2-\frac{1}{x-1} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 4 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{5}$$

300. $u = \frac{xy}{2}, v = 2x + y - xy$ əvəz edək. Onda

$$\begin{cases} u + \frac{5}{v} = 5 \\ \frac{5}{u} + v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5\left(1 - \frac{1}{v}\right) \\ \frac{v}{v-1} + v = 4. \end{cases} \quad \text{Sistemin ikinci tənliyi}$$

$$v^2 - 4v + 4 = 0 \Leftrightarrow v = 2 \text{ verir.}$$

Beləliklə, $\begin{cases} u = \frac{5}{2} \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{x} \\ 2x^2 - 7x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ x = \frac{5}{2} \\ y = 2 \end{cases}$

alırıq.

ƏDƏBİYYAT

1. Ümumtəhsil məktəblərinin V-XI sinifləri üçün riyaziyyat proqramı, B-2010
2. Mərdanov M.C və b., Cəbr-7, Ümumtəhsil məktəblərinin 7-ci sinifi üçün dərslik, “Çaşıoğlu”, Bakı – 2003, 335 s.
3. Mərdanov M.C və b., Cəbr-8, Ümumtəhsil məktəblərinin 8-ci sinifi üçün dərslik, “Çaşıoğlu”, Bakı – 2003, 303 s.
4. İlyas Həsənov, “Cəbr-8”. Çalışmaların hlli, Bakı, “Azər” nəşriyyatı, 2004, 454 s.
5. Mərdanov M.C və b., Cəbr-9, Ümumtəhsil məktəblərinin 9-cu sinifi üçün dərslik, “Çaşıoğlu”, Bakı – 2003, 319 s.
6. Mirzəyev S.S. və b., Cəbr -9, Məsələ və misallar, həlli ilə. “Ocaq”, poliqrafiya müəssisəsi, Bakı 2005, 335 s.
7. Quliyev Ə.A., Planimetriyanın məsələ vasitəsilə təkrarı, “Nurlan”, Bakı, 2008, 200 s.
8. Quliyev Ə.A., Riyaziyyatın tədrisində ümumiləşdirmə, Bakı, “Elm” – 2009, 452 s.
9. Quliyev Ə.A., Həndəsə məsələləri, Bakı- “Elm”, 2010, 300 s.
10. Quliyev Ə.A., Riyaziyyatın məsələ vasitəsilə təkrarı, ADPU-nun mətbəəsi, Bakı-2011.
11. Методика преподавания математики в средней школе, частная методика, Составитель В.И.Мишин, Москва, “Просвещение”, 1987.
12. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении, Издательство “Педагогика” Москва, 1972, 422 с.
13. Андронов И.К., Арифметика натуральных чисел, М., Учпедгиз, 1954.
14. Математика в школе, 1956-2002
15. Семушин А.Д. и др., Активизация мыслительной деятельности учащихся при изучении математики, М., 1978.
16. Понтрягин Л.С., Обобщение чисел, “Квант” 1985, №23.
17. Кац М., Теория вероятностей в сб: математика в современном мире, “Мир” М., 1967, 311с.
18. Мостеллер Ф. и др., Вероятность, М., 1969, 428 с.
19. Соломатин О.Д., Старинный способ решения задач на сплавы, Мвш, 1977, №1, с 12-13.

20. Шорина С.П., Обоснование старинного способа решения задач на смеси, МВШ., 1977, №6, с 77.

21. Nəsirov N.B. Dərəcəsi ikidən yüksək olmayan parametrlı tənlik və bərabərsizliklər həlli, “Pux”, Bakı №2, 2011, səh 389-393

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ	3
I FƏSİL. VII-IX siniflərdə cəbrin tədrisilə əlaqədar şagirdlərin ümumiləşdirmə qabiliyyətinin inkişaf etdirilməsi.....	5
1.1. Cəbr kursunun əsas xətləri.....	5
1.2. Ədəd anlayışı	6
1.3. Cəbr kursunda əməl anlayışının formalaşdırılması.....	12
1.4. Funksiya.....	15
1.5. Funksiyanın dövriliyi.....	21
1.6. Təqribi ədədin mütləq və nisbi xətası.....	23
1.7. Rekurent ardıcılıqlar və düsturlar.....	27
1.8. İki məchullu bir dərəcəli qeyri-müəyyən tənliklər.....	30
1.9. Qoşma vuruq.....	32
1.10. Tənliklər və bərabərsizliklər xəttinin əsas anlayışları.....	34
1.11. Dərəcəsi ikidən yüksək olmayan parametrlı tənliklər və bərabərsizliklərin ümumi həlli.....	38
1.12. Bərabərsizliklərin isbatı.....	44
1.13. Stoxastika.....	49
1.14. Kalkulyatordan istifadə etmədən hesablama.....	54
1.15. Sabit və dəyişən kəmiyyətlər.....	54
1.16. Bərabərsizliklərin intervallar metodu ilə həlli.....	55
1.17. Həndəsi silsilə.....	61
II FƏSİL. Cəbrin yekun təkrarı və ayrı-ayrı anlayışları daxil etmək üçün çalışmalar sistemi.....	62
III FƏSİL. II fəslə aid həllər, şərhlər və cavablar.....	88
Ədəbiyyat.....	229

Ə.A.Quliyev

**CƏBRİN MƏSƏLƏ VASİTƏSİLƏ
YEKUN TƏKRARI**

Bakı – “Elm” – 2012

“Elm” Redaksiya-Nəşriyyat və Poliqrafiya Mərkəzi

Direktor: *Ş. Alışanlı*
Kompüter tərtibi: *R. Əzizov*

Formatı 60x84 $\frac{1}{16}$.
Həcmi 14,75 ç.v. Tirajı 300.
Sifariş №116
Qiyməti müqavilə ilə.

“Elm” RNPM-nin mətbəəsində çap edilmişdir.
(*Bakı, İstiqlaliyyət, 8*)

