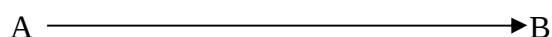


Vektor anlayışı və vektorlar üzərində əməllər.

1. Vektor haqqında ilkin anlayış.
2. Vektor bərabərliyi kollonarlığı komplanarlığı.
3. Vek-in toplanması və xassələri
4. Vek-in çıxılması
5. Vek-in ədədə vurulması və xassələri.

Vektor əsas riyazi kəmiyyət kimi elmin bir çox sahələrində tətbiq olunur. Vektor anlayışından riyaziyyatın bütün sahələrində habelə dəqiqliklə hesablamalar asanlaşmaq üçün geniş tətbiq olunur. Elementlər fizika kursundan məlumdur ki, bir neçə fiziki kəmiyyət. Məsələn, lempador, zaman parça-ın uzunluğu, sahə, həcm, kütlə, və s. Skalyar, bir neçə digər kəmiyyət. Məsələn: güc, qüvvə, təcil, sürət, vektorial kəmiyyət adlanır. Skalyar kəmiyyət bir ədədi qiyməti ilə, vektorial kəmiyyət bir ədədi qiyməti ilə, vektorial kəmiyyət, həm ədədi, həm də istiqaməti ilə bütün vektorial kəmiyyət bir həndəsi vahid olan sıxılmış uzunluğu və istiqaməti rəyin olunmaz paranun kəmiyyəti ilə verəcəyin belə ki, parçanın uzunluğu vektorial kəmiyyətin ədədi qiymətinə bərabər olan, istiqaməti isə vektorial kəmiyyət istiqaməti ilə üst-üstə düşsün. Uzunluğu və istiqaməti ilə təyin olunan parçanı vektor adlandıracağıq. Vektor hesablamaların əsasını 19 – cu əsrin ortaların irlandiya, Kamirtan, Alman Qrasman qoymuşlar sadə meal olaraq istiqamətlənmiş düz xətt parçasını göstərmək olar.



A- başlanğıc, B son nöqtəsi adlanır. Beləliklə vektor öz başlanğıcından sonuna yönəlir. $\overrightarrow{AB}$ vektoru belə işarə olunur. Yəni A ilə B birləşdirən istiqamətlik düz xətt parçası ilə bir bəzən $\overline{\chi}$, $\vec{b}$ işarə adlanır. Vektor uzunluğu dedikdə düz xətt parçasının uzunluğu nəzərdə tutulur. $|\overrightarrow{AB}|$ belə işarə olunur.

Tərif:

Həm modulları, həm də istiqaməti eyni olan vektorlara bərabər vektor deyilir.

Bərabər vektorları belə də başa düşmək olar. İki vektor o vaxt bərabər vektor adlanır.

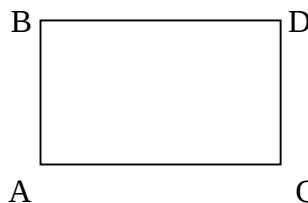
- 1) vektorlar uzunluqları bərabər olur.
- 2) Vektorlar paralel yəni, onlar 1 düz xətt və ya paralel düz xətlər üzərində olsun.
- 3) Vektor bir istiqamətdə olsunlar. İstiqamətliliyi bu şəkildə də göstərilir $\overrightarrow{AB} \varpi \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{CD}$ vektor cəbrində o vektorlara da baxılır bu vektorun uzunluğu və istiqaməti olmur, yəni 0 olur. 0 vektorunun belə işarə edirlər: $\vec{0}$ məsələn nöqtələri göstərə bilərik. Bunun sıfır vektoru bərabər vektor hesab edilir. Bu vektorun başlanğıcı ilə sonu üst-üstə düşür. Ədədlərin bərabərliyindən olan iki xassəsini vektorlarda tətbiq edə bilərik:

- 1) $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \vec{a}$
- 2) $\vec{a} = \vec{b}, \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$

Tərif.

İki vektor uzunluğu bərabər istiqaməti qarşılıqlı əks olarsa, belə vektor qarşılıqlı əks vektora deyilir. Qarşılıqlı əks vektor birini $\vec{a}$ ilə işarə məsələn: Paraleloqramın iki tərəfini

$$\overrightarrow{AB} \varpi \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB} \downarrow \uparrow \overrightarrow{DC}$$



Qeyd edək ki, vektorun radiusları onun əməllərindən üzərindəki nöqtələrə yönəldilmiş vektor kimi baxsaq bunların bərabər olmayan vektor olduğunu görmək olar. Hər hansı $\vec{a}$ vektorunu və ixtiyarı O nöqtəsinə gəlirik 0-dan uzunluğu və işıqlıq $\vec{a}$ vektoruna eyni olan vektor ayırırıq. Bu halda $\vec{a}$ vektor 0 nöqtəsinə köçürülmüşdür deyirlər.

Əgər bir neçə vektor bir nöqtəyə köçürdükdə bu vektor bir düz xəttin üzərində yerləşərsə belə vektor – a kollinear vektor deyilir. Əgər $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektor paralel vektor kimi verilərsə onda bu vektor kollinear vektorlardır. Qeyd edək ki, qarşılıqlı əks vektor kollinear vektor misaldır.

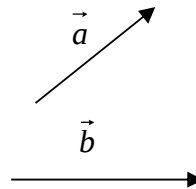
Tərif:

Eyni bir düz xətt və paralel düz xətlər üzərində yerləşən vektora kollinear vektor deyilir.

- 1) 0 vektoru ixtiyari vektorla kollineardır.
- 2) Vektor öz – özlüyü ilə həmişə kollineardır.
- 3) Vektorlar kollineardırsa onda onlardan birini digərindən hər hansı ədədə vurması ilə almaq olar.

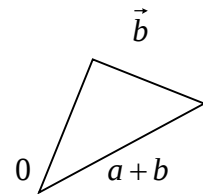
Bəzən praktikada vektor toplanması əməlini yerinə yetirmək zərurəti qarşısına çıxır. Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektoru verilmişdir.

Bu Vektorların toplanması



Qaydası belədir. Hər hansı 0 nöqtəsi götürülsün. Bu nöqtədən $\vec{a}$ vektorunu onun ucundan isə $\vec{b}$ vektorunu ayırıq 0 nöqtəsini $\vec{b}$ vektorunun son üç nöqtəsi ilə birləşdirən vektor $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının cəmi deyilir. Vektorların toplanmasının bu qaydasına üçbucaq qaydası deyilir. Vektor toplanmasının üçbucaq qaydası ilə bərabər onunla eynigüclü olan paraleloqram qaydasından da istifadə olunur.

Paraleloqramın qaydası.



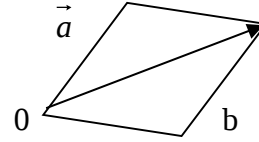
Hər iki vektor 0 nöqtəsinə köçürülür. Bu vektorlar üzərində paralel qurulur. Bu paraleloqramın nöqtəsindən axan diaqonalı üzrə yerləşən vektor $\vec{a}$ və $\vec{b}$ - in cəmi olur.

Vektor toplanması aşağıdakı xassə var:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (kommutativlik, yerdəyişmə)
- 2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (assosiativlik, qruplaşdırar)

$$3) \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$4) \vec{a} + \vec{a} = \vec{0}, \quad \vec{a}^{-1} = -\vec{a}$$



Tərif:

İki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının fərqi elə 3-cü $\vec{x}$ vektoruna deyilir ki, onu $\vec{b}$ ilə topladıqda $\vec{a}$ vektoru alınsın. İki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları ortaq başlanğıca gətirilibsə onların fərqi, çıxılanın ($\vec{b}$ -in) sonundan azalanın sonuna ($\vec{a}$ -in) yönəlmiş vektordur.

Tərif:

$\vec{a}$ vektorunun 2 ədədin hasili $|\vec{a}|$ vektorun modulu ilə 2 ədədinin modulu deyilir. Yəni $|2 \cdot \vec{a}| = |2| \cdot |\vec{a}|$ Ümumiyyətlə vektor ədədə vurduqda vektor alınır.

Yəni $\vec{b} = 2 \cdot \vec{a}$ burada aşağıdakı hal minium

$$1) \alpha > 0 \text{ onda } \alpha \text{ elə } b \text{ eyni istiqamət } \vec{a} \text{ və } \vec{b}$$

$$2) \alpha < 0 \text{ olanda əks istiqamətli } \vec{a} \text{ və } \vec{b}$$

$$3) \alpha = 1 \text{ olanda } \vec{a} = \vec{b}$$

Vektorunun ədədə vurulmasının aşağıdakı xassələri vardır:

$$1) 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$2) \alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$$

$$3) (\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$$

$$4) \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$$

Vektor fəza və vektor alt fəza

Vektorların xətti asılılığı, vektorların koordinatları, iki vektor skalyar hasili.

Plan

- 1) Vektor fəza və vektor alt fəza
- 2) Vektorların xətti asılılığı və xassələri
- 3) Vektorun vurulmuş bazisdə koordinatlar və xassələri
- 4) Orta normal bazis
- 5) İki vektorların skalyar hasili və xassələri

Fərz edək ki, $\{v = \vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{x}, \vec{y}_m\}$ vektorlar bir çoxluğu verilmişdir. Bu çoxluğun elementləri əsasında $f^v: v \times v \rightarrow v$, $\phi: v \times \kappa \rightarrow v$ müəyyən oluna bilər. Yəni ixtiyari iki vektorları $f^+(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$, $\phi(\alpha \vec{a}) = \alpha \cdot \vec{a}$

Tərif 3.

Vektorları çoxluğunun vektor toplanması və ədədə vurulması əməlləri təyin olunubsa və bu əməllər aşağıdakı 8 xassəni ödəyirsə onda v vektor çoxluğuna vektor fəza deyilir.

- 1) $a + b - c = a$
- 2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- 4) $a + a^{-1} = 0$ $a^{-1} = -\vec{a}$
- 5) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- 6) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$
- 7) $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$
- 8) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$

1-8 xassəsinə vektor fəzanın aksiomları deyilir. Əgər $L = \{\vec{a}, \vec{b}, \dots\} \subset \mathcal{V}$ çoxluğu verilmişdirsə L çox da əməllər təyin olunmuşdursa və bu vektor fəzanın xassəni ödəyirsə onda L çoxluğuna vektor alt fəza deyilir. Xətti və ya vektor fəzada riyaziyyatın bütün sahələrində istifadə olunur. Fərz edək ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_k \in \mathcal{V}$

vektorlar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n \in \kappa$ və həqiqi ədədi verilmişdir. $S = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k$ (1) cəminə verilmiş vektorların xətti kombinasiyası deyilir.

Tərif:

$\alpha_1, \alpha_{2m}, \alpha_k$ ədədlərindən heç olmasa biri 0-dan fərqli olduqda (1) cəmi 0-a bərabər olarsa, onda $\overline{a_1}, \overline{a_{2m}}, \overline{a_k}$ vektor xətti asılı olmayan vektor deyilir. Tərifə görə $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_{2m} \overline{a_{2m}} + \alpha_k \overline{a_k} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_{2m} = \dots = 0$

Tərif:

Xətli vektor fəzada xətti asılı olmayan vektorların maksimal sistemində fəzanın bazisi deyilir və $B = (\overline{l_1}, \overline{l_2}, \dots, \overline{l_k})$ kimi işarə olunur. Bazis vektorunun sayına fəzanın olausu deyilir. Xətti asılı və asılı olmayan vektorun aşağı xassə var.

Xassə 1:

$\overline{a_1}, \overline{a_{2m}}, \overline{a_n}$ vektorlar sisteminin xətti asılılığı məlumdursa onda bu sistemin xətti asılılığı məlumdursa onda bu sistemin vektorlarından birini qalanları vasitəsi ilə istifadə etmək olar.

İsbatı:

Vektorial xətti asılılığına görə kombinasiya 0-a bərabərdir.

$$\begin{cases} \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_{2m} \overline{a_{2m}} + \alpha_k \overline{a_k} = 0 \\ \alpha_1^2 + \alpha_{2m}^2 + \alpha_k^2 \neq 0 \end{cases}$$

Deməli $\alpha_1, \alpha_{2m}, \alpha_k$ ədədlərindən heç olmasa 1-i 0-dan fərqlidir. Məs Fərz edək ki,

$\alpha_1 \neq 0$. $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_{2m} \overline{a_{2m}} + \alpha_k \overline{a_k} = \overline{0} (*)$ ərabərliyini aşağıdakı kimi çevirmək

$$\alpha_1 \overline{a_1} = -\alpha_{2m} \overline{a_{2m}} - \alpha_k \overline{a_k}$$

$$\overline{a_1} = -\frac{\alpha_{2m}}{\alpha_1} \overline{a_{2m}} - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \overline{a_k}$$

$$-\frac{\alpha_{2m}}{\alpha_1} = \beta_2, -\frac{\alpha_k}{\alpha_1} = \beta_k, -\frac{\alpha_k}{\alpha_1} = \beta_n$$

$$\overline{a_1} = \beta_2 \overline{a_{2m}} + \beta_k \overline{a_k} \text{ olar.}$$

Xassə 2. $\overline{a_1}, \overline{a_{2m}}, \overline{a_k}$ vektorlar sistemi xətti asılı deyilsə bu sistemdə $\overline{0}$ vektor yoxdur. Yəni xətti asılı olmayan vektor sisteminə $\overline{0}$ vektor daxil deyil.

Xassə 3. İki vektorun xətti asılı olması üçün onları $\overline{a} = A \overline{b}$ şəklində göztərilməsi zəruri və kafi şərtidir.

İsbati. Zəruri. Vektorların xətti asılılığına görə $\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} = \bar{0}$

$$\begin{cases} \alpha \bar{a} = -\beta \bar{b}, \bar{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \bar{b}, -\frac{\beta}{\alpha} = \lambda, \bar{a} = \lambda \bar{b} \\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \end{cases}$$

Kafilik fərz edək ki, $\bar{a} = \lambda \bar{b}$ göstərilir, $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorunun xətti asılıdır.

$$-\bar{a} + \lambda \bar{b} = 0. \quad -1 \cdot \bar{a} + \lambda \cdot \bar{b} = 0 \quad -1 \neq 0$$

Deməli $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları xətti asılıdır. Fərz edək ki, 9 vektor fəzada bazis $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ kimi verilmişdir. İxtiyari $\bar{a}$ vektorunun bazis vektorları üzrə

$$\forall \bar{a} \in V, \quad \bar{a} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3 \quad \text{bazis vektoru üzrə ayrılır.}$$

Tərif: Vektorun bazis vektorların üzrə ayrılışının əmsallarına vektor həmin bazisdə koordinatları deyilir.

$$\bar{a} \geq \{a_1; a_2; a_3\} \quad \text{kimi şəər olunur.}$$

Bazis vektorun koordinatlarını yazaq

$$\bar{e}_1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 \Rightarrow \bar{e}_1(1; 0; 0)$$

$$\bar{e}_2 = 0 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 \Rightarrow \bar{e}_2(0; 1; 0)$$

$$\bar{e}_3 = 0 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3 \Rightarrow \bar{e}_3(0; 0; 1).$$

Vektorun koordinatlarının aşağı xassələri var.

1) Koordinatları ilə verilməsi vektoru topladıqda və ya çıxdıqda onların

$$\text{uyğun koordinatları toplanır və ya çıxılır. Yəni; } \overline{\bar{a} + \bar{b}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) + (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$$

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3) \quad \text{olur.}$$

Xassə 2.

Vektoru ədəd vurduqda onun koordinatları həmin ədədə vururlar. Yəni ki,

$$(\alpha \cdot \bar{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3))$$

Xassə 3.

Eyni bazisdə verilmiş iki vektorun kollinearlığı üçün zəruri və kafi isə onların uyğun koordinatlarını eyni əmsalla mütənasibdir.

Bazis vektorları cüt-cüt ortoqonal (perpendikulyar) olarsa, onda belə bazis ortoqonal bazis deyilir. Bazis vektorları cüt-cüt ortoqonal olarsa və vahid

uzunluqlu olarsa, onda belə bazisdə ortonormal bazis deyilir və $B(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ kimi işarə olunur. Deməli $\bar{i} \perp \bar{j}, \bar{i} \perp \bar{k}, \bar{j} \perp \bar{k} \quad |\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$. ortonormal bazisdən istifadə edərək hesablamaları asanlaşdırmaq olur. Fərz edək ki, düzbucaqlı paraleldə ortonormal bazis seçilmişdir.

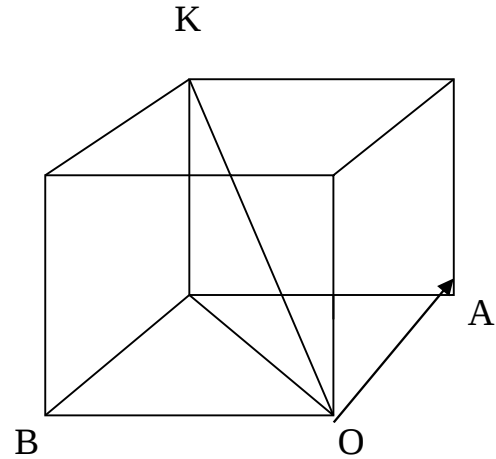
$$\bar{a} = \overline{OK}$$

$$\overline{OA} = a_1 \bar{i}$$

$$\overline{OB} = a_2 \bar{j}$$

$$\overline{OC} = a_3 \bar{k}.$$

olsun.



$$|\overline{OA}| = a_1$$

$$|\overline{OB}| = a_2$$

$$|\overline{OC}| = a_3$$

$$\overline{K, K} = \overline{OC}$$

$$|\overline{K, K}| = a_3$$

Üçbucaq βOKK_1 -dən $\overline{OK}^2 = \overline{OK}_1^2 + \overline{K_1K}^2$ βOBK_1 - dən $\overline{OK}_1 = \overline{OB} + \overline{BK}_1$

$$\overline{OK}_1 = \overline{OA}$$

$$\overline{OK}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\overline{OK}_1^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$\bar{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Deməli ortonormal bazislər vektorunun kvadratı onun koordinatının kvadrları cəminə bərabərdir.

İki vektorların skalyar hasili.

Tərif: İki vektor skalyar hasili bu vektorların uzunluqları ilə onlar arasındakı bucağın kəsişmə hasilinə bərabərdir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasilini $(\vec{a}:\vec{b})$ və ya $\vec{a}\cdot\vec{b}$ kimi işarə edir. Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektoru arasındakı bucaq φ olarsa, onda $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ (2).

Bu tərifə ekvivalent olan başqa tərifdə verə bilərki bunun üçün $\vec{a}$ vektoru ilə təyin olunmuş $\vec{b}$ vektorunu ox üzərində proyeksiyası anlayışından istifadə olunur. $\vec{b}$ vektorunun $\vec{a}$ vektorunun üzərindəki proyeksiyasını $\text{Pr}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi$

Bunu iki bərabərliyində nəzərə alsaq $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\text{Pr}_{\vec{a}}\vec{b}$ yazı bilər.

Aydınır ki, burada $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorunun sollarını dəyişə bilərki və belə yazı bilər: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Tərif.

İki vektor skalyar hasili bu vektordan 1-ci təyin olunur uzunluğu ilə digər vektorun bu vektor üzərindəki proyeksiyası hasilə bərabərdir.

Teorem.

İki vektor ortoqonal olması üçün onların skalyar hasilinin 0-ra bərabər olması zəruri və kafi şərtidir.

İsbatı.

Zərurilik: Fərz edək ki; $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektoru ortoqonalıdır. Göstərir ki, bu vektorun skalyar 0-ra bərabər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ arasındakı bucaq φ ilə işarə edək, o zaman

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \varphi = \frac{\Delta}{2} \quad \cos \varphi = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Kafilik: Tutaq ki, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ göstərək ki, $\vec{a} \perp \vec{b}$ əvvəlcə trivial hala baxaq. Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorunun biri $\vec{0}$ vektor. Bilirik ki, $\vec{0}$ vektorunun istiqaməti təyin olunmadığından istənilən ortoqonal ola bilər. İndi fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektoru 0-dan fərqlidir. $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$. $|\vec{a}| > 0, |\vec{b}| > 0$.

(2) bərabərliyinə baxsaq burdan alınır ki, bu şərtlər daxilində $\cos \varphi = 0$. Buda

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \text{ deməkdir:}$$

Skalyar hasilin aşağıdakı xassəsi var:

1) Yerdəyişmə xassəsi: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2) İsbatı: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos(\vec{b} \wedge \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2) $\vec{a}$ vektorunun $\vec{a}$ ilə skalyar hasilı uzunluğunun kvadratına bərabərdir.

əvəzinə skalyar kvadrat deyilir: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, |\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2}$

3) Skalyar hasildə vektor heç olmasa biri sıfır olduqda sual hasil 0-ra bərabərdir.

4) Skalyar hasil ədədi vuruğa nəzərən qruplara qanununa malikdir.
 $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda(\vec{a}) \cdot \vec{b}$

6) Skalyar hasildə paylanma qanunu ödənilir. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c})$

Teorem:

Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektoru koordinatları ilə verilərsə, yəni $\vec{a}$ -nın koodinatları $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ verilsə onda onların sual hasilinə uyğun koordinatın hasiləri cəminə bərabərdir.

İsbatı: $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorunun $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bazisində ayrılışları aşağıdakı kimidir.

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})$$

$$\left. \begin{array}{lll} \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 & \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 & \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 & \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 & \vec{k} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 & \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 & \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

(3) bərabər nəzərə alsaq onda $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorunun arasındakı bucaq aşağıdakı kimi hesab.

$$(2) \text{ düsturuna görə yazarıq } \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (4)$$

(4) bərabər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorunun arasındakından bucağın hesab düsturu.

Müstəvidə affin və düz bucaqlı koordinat sistemi. Parçanın müəyyən nisbətdə bölünməsi. Polyar koordinat sistemi.

Plan.

- 1) Müstəvidə affin koordinat sistemi nöqtənin və vektorun koordinatları.
- 2) Parçanın müəyyən nisbətdə bölünməsi:
- 3) Müstəvidə düzbucaqlı koordinat sistemi və metrik məsələlər.
- 4) Polyar koordinat sistemi haqqında anlayış.
- 5) Polyar və dekart koordinat sistemi arasında əlaqə.

Üçü bir düz xətt üzərində olmayan $O_1E_1E_2$ nöqtələrini götürək $\overline{OE_1} = \bar{e}_1$ $\overline{OE_2} = \bar{e}_2$ işarə edək. Alınan $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ sisteminə müstəvidə ümumi affin koordinatının sistem (reper) deyilir və $R(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ işarə olunur. Burada O koordinatı başlanğıcı, $\bar{e}_1$ və $\bar{e}_2$ isə bazis vektorları adlanır. Reper verildikdə.

Reper verildikdə müstəvidə vaxtyarı vektor fiqurun istiqaməti müəyyənləşdirmək olur. Müstəvidən ixtiyari M nöqtəsini götürək $\overline{OM}$ vektoruna M nöqtəsinin radiusu vektoru deyilir.

$$M M_x // \overline{OE_2} \quad MM_g // \overline{OE_1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OM}_x = x \cdot \bar{e}_1 \\ \overline{OM}_g = y \cdot \bar{e}_2 \end{array} \right\} (1) \quad \text{Kolleneirlıq şərti.}$$

$OM_g MM_x$ paraleloqramında

$$\overline{OM} = \overline{OM}_x + \overline{OM}_g$$

$$(1) \text{ ifadəsini nəzərə alsaq } \overline{OM} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$$

(2) bərabərliyindən x və y ədədlərinə M nöqtəsinin və ya $\overline{OM}$ vektorlarının R reperindəki koordinatları deyilir və $M(x, y)$.

$\overline{OM} = (x, y)$ kimi işarə olunur. Burada x-ə absis y-ə ordinat deyilir. x oxuna absis oxu, y oxuna isə ordinat oxu deyilir. Göstərmək olar ki, (2) ifadəsi iştirak edən x və y ədədləri yeganədir.

$$\text{Fərz edək ki, } \overline{OM} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 \quad \overline{OM} = x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2 \quad (x - x_1)\bar{e}_1 + (y - y_1)\bar{e}_2 = 0$$

$$x - x_1 = 0 \quad y - y_1 = 0 \quad x = x_1 \quad y = y_1$$

yəni verilmiş reperdə nöqtənin və vektorun koordinatı yeganədir. Bu koordinatı tapmaq üçün nöqtədən oxlara paralellər çəkilərək M_x və M_y nöqtələri təyin edilir.

Misal: P (3:-2)

Qeyd edək ki, (2) bərabər x və y ədədləri $x \neq 0, y \neq 0$ olduqda nöqtə. 1-ci, 2-ci, 3-cü, 4-cü rüblərin birində olur.

$X=0, y=0$ $M=0$ olanda nöqtə koordinatın başlanğıcı ilə üst-üstə olur.

$X=0, y \neq 0$ $M \in oy$ olanda nöqtə ox oxunun üzərində olur.

Fərz edək ki, $R (0: e_2) A (x_1; x_2) B (x_2; y_2)$ nöqtələri verilmişdir. $\overline{AB}$ vektorunun koordinatlarını tapaq. Bilirih ki,

$$\overline{OA} = (x_1; y_1)$$

$$\overline{OB} = (x_2; y_2)$$

$$bOAB \Rightarrow \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

Vektorunun koordinatı 2-cidən başlayaraq onun üç nöqtənin koordinatları fərqi bərabərdir.

Fərz edək ki, R reperində $[MN]$ parçası verilmişdir. Burada $M \neq N$

$K \in [MN]$ K nöqtəsi götürək $M (x_1; y_1)$, $K(xy)$ olsun.

Verilənlərə görə K nöqtəsi MN parçasının λ nisbətində bölür. Tələb edilir ki, M və N -nin koordinatları verilir və λ ədədi verildikdə K nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

$\overline{OM}, \overline{OM}, \overline{ON}$ vektorunu çəkək.

$$\overline{OM} = \bar{r}_1$$

$$\overline{OK} = \bar{r}$$

$$\overline{ON} = \bar{r}_2$$

ilə işarə edək. Burada $\overline{MK} = \bar{r} - \bar{r}_1$ $\overline{KN} = \bar{r}_2 - \bar{r}$ $\overline{MK}$ və $\overline{KN}$ vektorunun kollineardır. Onda $\overline{MK} = \overline{KN}$ yazmaq olar.

$$\bar{r} - \bar{r}_1 = (\bar{r}_2 - \bar{r}), \quad \bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda \bar{r}_2 - \lambda \bar{r} \quad (3) \quad (1 + \lambda) \bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda \bar{r}_2$$

Burada $1 + \lambda \neq 0$ əks halda əgər $1 + \lambda = 0$ onda $\lambda = -1$ onda $\overline{MK} = -\overline{KN}$ $\overline{MK} + \overline{KN} = 0$
 $\overline{MN} = 0 \Rightarrow m = N$ bu isə bizim şərtimizə ziddir.

(3) ifadəsi bölən nöqtənin radius vektorlarını üç nöqtələrin radiusu vektorları ilə riyazi ifadəsi. (3) ifadəsini ordinatlarda yazsaq $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ (4)

(4) düsturuna parçanın λ nisbətində bölən nöqtənin koordinatlarının hesablanması düsturu deyilir. (4) düsturunda $\lambda = 1$ olarsa, $\overline{MK} = \overline{KN}$ K nöqtəsi MN parçasına orta nöqtəsi olur və orta nöqtənin koordinatlarının hesablanması düsturu olar.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (5)$$

3.Ümumi affin koordinat sistemində e_1 və e_2 vektorun ortoqonal və orta (vahid uzunluqlu) vektorlar olarsa belə koordinat sistemə düzbucaqlı dekart koordinat sistemi deyilir. $R(O, \bar{i}, \bar{j})$ kimi işarə olunur. Burada $i + j \quad |\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$

Ordonormal noar sistemi hesablama məsələlərini sadələr. Fərz edək ki. Bizə iki A və B nöqtələri verilmişdir. A ($x_1; y_1$) B ($x_2; y_2$) A və B nöqtələri arasındakı məsafəni tapmaq. $P(A_1B) = |\overline{AB}| \quad P(A_1B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (6)

(6) düsturu müstəvidə iki nöqtə arasındakı məsafə düsturu deyilir.

4.Müstəvi üzərində müəyyən məsələlərin həllində dekart koordinat sistemi ilə yanaşı polyar koordinat sistemi adlanan sistemdən istifadə etmək əlverişli olur. Fərz edək ki, müstəvi üzərində hər hansı bir nöqtə qeyd olunub və bu nöqtədən $\bar{i}$ vektoru ayrılmışdır. $\bar{i}$ vektoru vahid vektordur. $|\bar{i}| = 1$.

O nöqtəsi və $\bar{i}$ vektorundan ibarət cütlüyə müstəvi üzərində polyar koordinat sistemi deyilir. $(O, \bar{i})$ və $\overline{oi}$ kimi işarə olunur. O nöqtəsinə polyus nöqtəsi, o nöqtəsindən keçən və üzərində müsbət istiqamət $\bar{i}$ vektoru ilə təyin olunan OP düz xəttinə polyar ox deyilir. Fərz edək ki, müstəvi üzərində $\overline{OI}$ polyar koordinatları sistemi və M nöqtəsi verilmişdir verilmişdir. $\overline{OM}$ vektorunun uzunluğunun M nöqtəsinin polyar radiusu və ya 1-ci polyar koordinatı deyilir və r ilə işarə olunur. OM radius vektorunun OP polyar oxla əmələ gətirdiyi φ

bucağına M nöqtəsinin polyar bucağı və ya 2-ci polyar koordinatı deyilir. r, φ cütünü M nöqtəsinin polyar koordinatları adlanır və $M(r; \varphi)$ kimi işarə olunur. Əgər M nöqtəsi polyar ox üzərində olarsa, onda onun polyar bucağı 0-ra bərabər olar. Xüsusi halda M nöqtəsi 0 polyas nöqtəsi ilə üst-üstə düşərsə, onda bu nöqtənin polyası radiusu 0-ra bərabər olur, polyar qeyri-müəyyən olur. Qeyd edək ki, hər bir nöqtə üçün polyar radius yeganə şəkildə təyin olunur, polyar bucağı isə çoxqiymətli təyin olunur.

5. Nöqtənin polyar və dekart koordinatları arasındakı münasibətə baxaq.

Fərz edək ki, müstəvi üzərində $\overline{O_i}$ polyar koordinat sistemi verilmişdir. Bu polyar koordinat sistemində düzbucaqlı dekart koordinat sistemini aşağıdakı şəkildə yerləşdirmək elə edək ki, düzbucaqlı koordinat sisteminin koordinat başlanğıcı O polyar nöqtəsi ilə, absis oxu isə polyar oxu ilə üst-üstə düşsün.

Hər hansı M nöqtəsi götürək M nöqtəsinin düzbucaqlı koordinat sistemindəki $M(x; y)$, polyar koordinat sistemindəki koordinatları $M(r; \varphi)$.

$$B O M M_x \text{ düzbucaqlı üçbucağına görə } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (1)$$

(1) düsturlarına görə M nöqtəsinin polyar koordinatları məlum olarsa onun dekart koordinatlarını təyin edə bilərik.

(1) düsturlarından aşağıdakını almaq olar. $x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{tg } \varphi = \frac{y}{x} \\ (2) \end{matrix}$$

(2) düsturlarına əsasən alırıq ki, nöqtənin dekart koordinatları məlum olarsa onun polyar koordinatlarını almaq olar.

Müstəvi üzərində affin və düzbucaqlı koord sistemlərinin çevrilməsi.

Plan

- 1) Müstəvinin orientasiyası
- 2) Müstəvidə affin koordinat sisteminin çevrilməsi
- 3) Koordinat sisteminin çevrilməsi xüsusi halları.
- 4) Düzbucaqlı dekart koordinat sisteminin çevrilməsi.

Müstəvinin oriyentasiya anlayışını vermək üçün əvvəlcə müstəviyə paralel olan və müstəvinin vektorlar sisteminin müəyyən etdiyi alt fazanın orienlasiyası ilə tanış olaq. Bilirik, müstəvinin vektorlar çoxluğu komplanar vektorlardır və bu vektorlar 2 ölçülü vektor fəza əmələ gətirir. Bu vektor fəza 3 ölçülü vektor fəzanın alt fəzası olub. Vektor alt fəzanın L ilə işarə edək. Bilirik ki, kollinear olmayan iki vektor bu fəzanın bazisi ola bilər. Deməli L alt vektor fəzanın bazislər çoxluğu sonsuz çoxluqdur. Bu çoxluğu B ilə işarə edirik. Fərk edək ki; $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ B bazis çoxluğu olan götürülən bazislərdir, onda aşağıdakını yazı bilərik.

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = a_{11}\vec{a}_1 + a_{12}\vec{a}_2 \\ \vec{b}_2 = a_{21}\vec{a}_1 + a_{22}\vec{a}_2 \end{cases} \quad (1)$$

(1) ayrılışında iştirak edən əmsallardan düzəldilən $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matrisinə A

bazisindən B bazisini determinantı $|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |A|B$ (3)

Başqa sözlə A -dan B bazisinə keçid matrisinin determinantı (3) şəklində hesablanır. A və B bazisdə olduqlarından onları müəyyən edən vektorlar kollinear deyil. Yəni bu vektorun koordinatları mütənasib deyil. Onda alırıq ki, A/B olur. Onda $A/B > 0$, $A/B < 0$ olur. Əgər bazisindən B keçid matrisinin determinantı müsbət olarsa, onda A və B bazisləri eyni n oriantasiyalı bazislər adlanır.

Bazislərin eyni oriyentasiyalı olduğunu Δ belə işarə edəcəyik. Asanlıqla aşağıdakı xassələrin doğruluğunu göstərmək olar.

$$1) A|B = 1$$

$$2) A|B, B|C \text{ olarsa, onda } A|B \cdot B|C = A|C$$

Bu xassənin doğruluğunu matrislər hasilinin determinantı haqqında teorem alınır.

$$3) A|B \cdot B|A = 1$$

İndi Δ münasibətlərinin aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

1) Δ münasibəti reflaksivlik münasibətinə malikdir. ABA

2) Simmetrik xassəsi. $A \Delta B \Rightarrow B \Delta A$

3) tranzitivlik xassəsi. $A \Delta B, B \Delta C \Rightarrow A \Delta C$.

Əgər Δ münasibəti bu 3 şərti ödəyirsə, onda ona ekvivalentlik münasibəti deyilir. Δ ekvivalentlik münasibətlərinin köməyi ilə B bazislər çoxluğunu siniflərə ayıra bilərik. Bu siniflərin sayı 2 olur. Δ münasibətinin köməyi ilə təyin oluna ekvivalent bazislər bu siniflərə daxil olur. Həmçinin qeyd edə bilərik ki, L alt fəzasında götürülən hər bir bazis bu alt fəzanın bazislər çoxluğunu 2 sinifə ayırır. Bu bazislər eyni ariantasiyalı olanlar 1 sinifə, müxtəlif ariantasiyalı olar. O biri sinifə daxil olur. B / Δ münasibətinə görə faktor çoxluğunun hər bir elementlərinə 2 alt fəzasının ariantasiyası deyilir. Əgər bu ariantasiyada hər hansı birini götürüb müsbət ariantasiya kimi qəbul etsək, onda digər ariantasiya mənfi ariantasiya qəbul olunur. Əgər müsbət üzərində kollinear olmayan müəyyən nizamlı götürülən $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ bazisi verilən əgər bu bazis vektorunun hər hansı O nöqtəsindən ayırısaq bu zaman $\bar{e}_1$ vektorunun $\bar{e}_2$ vektorunun üzərinə düşməsi üçün lazım olan hərəkət saat əksi istiqamətində olarsa, onda deyirlər ki, $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ bazisi müsbət ariantasiyalı olur. Əksinə, əgər $\bar{e}_1$ vektorunun $\bar{e}_2$ vektoru üzərinə düşməsi üçün lazım olan hərəkət saat əqrəbi istiqamətində olarsa, onda belə bazis mənfi ariantasiyalı halında olur. Əgər müstəvini vektorlar çoxluğu alt fəzası ariantasiyalı alınmış alt fəza olarsa onda belə müstəvidə oriantasiyalanmış müstəvidə adlanır.

2. Fərz edək ki, müstəvidə $O(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ və $O^1(\bar{e}_1^1, \bar{e}_2^1)$ affın koordinat sistemləri verilmişdir. Hər hansı M nöqtəsi götürək M nöqtəsini 1-ci koordinat sisteminə nəzərən koordinatları $M(x, y)$, 2-ci (x^1, y^1) olsun. 1-ci koordinatları sistemdən 2-ci koordinat sisteminə keçdikdə M nöqtəsinin koordinatı necə dəyişdiyi öyrənərək fərz edək ki, aşağıdakı ayrılış doğrudur. $\bar{e}_1^1 = c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2$ $\bar{e}_2^1 = c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2$

O nöqtəsinin 1-ci reperə görə koordinatlarını $O^1(x, y)$ olsun, onda

$$\overrightarrow{OO^1} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$$

$$\Delta OMO^1 - da$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^1} + \overrightarrow{O^1M}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$$

$$\overrightarrow{O^1M} = x^1\bar{e}_1^1 + y^1\bar{e}_2^1 = x^1(c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2) + y^1(c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2) = (c_{11}x^1 + c_{12}y^1)\bar{e}_1 + (c_{21}x^1 + c_{22}y^1)\bar{e}_2$$

alırıq.

Buradan aşağıdakını alırıq.

$$\begin{cases} x = c_{11}x^1 + c_{12}y^1 + x \\ y = c_{21}x^1 + c_{22}y^1 + y \end{cases} \quad (3)$$

Deməli aldıq ki, $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ koordinat sistemindən $(O^1, \bar{e}_1^1, \bar{e}_2^1)$ koordinat sistemindən keçəndə M nöqtəsini köhnə (x, y) koordinatı onun yeni (x^1, y^1) koordinatları arasında (3) münasibəti var.

Biz öyrəndik ki, affın koordinatı nisbətinin çevrilməsi düsturların 3 şəklində. Aşağıdakı xüsusi halları qeyd edir.

1) Koordinatlar sisteminin çevrilməsində koordinat başlanğıcı dəyişir, koordinat oxları dəyişmir.

Buna koordinat sisteminin paralel köçürülməsi deyilir.

$$\begin{cases} x = x^1 + x_0 \\ y = y^1 + y_0 \end{cases} \quad (4)$$

2) Koordinat sisteminin çevrilməsi zaman koordinat başlanğıcı dəyişmir, koordinat oxla istiqaməti dəyişir . Buna koordinat sisteminin döndərilməsi deyilir. Bu halda (3) düsturları

$$\begin{cases} x = c_{11}x^1 + c_{12}y^1 \\ y = c_{21}x^1 + c_{22}y^1 \end{cases} \quad (3) \text{ bu halda olur.}$$

(3) düsturlarından iştirak edək, $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ ədədləri yeni koordinat vektorlarının köhnə koordinat sisteminə nəzərən koordinatdır.

Yəni, $\vec{e}^1 = (c_{11}; c_{21}), \vec{e}^2 = (c_{12}; c_{22})$

4. Düzbucaqlı koordinat sisteminin çevrilməsi ilə tanış olaq. Fərz edək ki, müstəvi üzərində $(0_1 \bar{i} \bar{j}), (0_1^1 \bar{i}^1 \bar{j}^1)$ koordinat sistemləri verilib. M nöqtəsinin $(0_1 \bar{i} \bar{j})$ sistemindəki koordinatları (x_1, y_1) , $(0_1^1 \bar{i}^1 \bar{j}^1)$ sistemindəki koordinatları isə (x^1, y^1) olsun. Bilirih ki, düzbucaqlı koordinat sistemi affin koordinat sisteminin xüsusi halıdır. Odur ki, affin koordinat sisteminin çevrilməsi düsturları burada da öz gücündə qalır. Yəni; $x = a_{11}x^1 + a_{12}y^1 + x_0, y = a_{21}x^1 + a_{22}y^1 + y_0, (1)$

bu zaman $\bar{i}^1 = a_{11}\bar{i} + a_{12}\bar{j}, \bar{j}^1 = a_{21}\bar{i} + a_{22}\bar{j} (2)$

verilən koordinat sistemi düzbucaqlı olduğu üçün (1) düsturlarına daxil olan $a_{iy} (i_1 y = 1, 2)$ əmsallarını $\bar{i} \wedge \bar{j} = \varphi$ bucağı vasitəsilə ifadə etmək olar. Doğurdanda

əgər, (12) münasibətinin hər bir bərabərliyinin hər tərəfini $\bar{i}_1 \bar{j}$ vektorlarına skalyar vuresaq onda alarıq.

$$\begin{cases} \bar{i} \cdot \bar{i}^1 = a_{11}\bar{i} \cdot \bar{i} + a_{12}\bar{j} \cdot \bar{i} \\ \bar{i} \cdot \bar{j}^1 = a_{21}\bar{i} \cdot \bar{i} + a_{22}\bar{j} \cdot \bar{i} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{j} \cdot \bar{i}^1 = a_{11}\bar{i} \cdot \bar{j} + a_{12}\bar{j} \cdot \bar{j} \\ \bar{j} \cdot \bar{j}^1 = a_{21}\bar{i} \cdot \bar{j} + a_{22}\bar{j} \cdot \bar{j} \end{cases}$$

Buradan alırıq ki,
$$\begin{cases} a_{11} = \cos(\bar{i} \wedge \bar{i}^1) & a_{12} = \cos(\bar{j} \wedge \bar{i}^1) \\ a_{21} = \cos(\bar{i} \wedge \bar{j}^1) & a_{22} = \cos(\bar{j} \wedge \bar{j}^1) \end{cases}$$

Fərz edək ki, bu koordinat sistemləri eyni azientasiyalıdır.

$$(\bar{i} \wedge \bar{i}^1) = \varphi, (\bar{j} \wedge \bar{j}^1) = \varphi, (\bar{i} \wedge \bar{j}) = \cos(\frac{\delta}{2} - \varphi) = \sin \varphi, (\bar{i} \wedge \bar{j}^1) = \cos(\frac{\delta}{2} + \varphi) = -\sin \varphi$$

Bu qiymətləri (1) düsturlarında nəzərə alsaq,

$$x = x^1 \cos \varphi + Ey^1 \sin \varphi + x_0, y = x^1 \sin \varphi + Ey^1 \cos \varphi + y_0 \quad (3)$$

Deməli (3) düsturu düzbucaq koordinat sisteminə çevrilməsi düsturu olur.

Düz xətlərə aid metrik və afin məsələlər. Məktəb riyaziyyat kursunun məsələləri həllinə düz xətt tənliklərinin tətbiqi.

- Plan.
1. Nöqtədən düz xəttə qədər məsafənin hesablanması.
 2. İki düz xətt arasındakı bucağın hesablanması.
 3. Düz xəttə aid əsas məsələlər
 4. Düz xətt tənliklərinə orta məktəb həndəsə məsələlərinə tətbiqləri.

1. Nöqtədən düz xəttə qədər məsafənin hesablanması.

$\vec{n} \neq \vec{o}$ vektoru d düz xəttinə o zaman perpendikulyar olur ki, o, düz xəttin ixtiyari istiqamətverici vektoruna perpendikulyar olsun. Düz xəttə perpendikulyar olan ∞ sayda vektor vardır. Doğrudan da, əgər $\vec{n} \perp d \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{a}$ olarsa, $2\vec{n} \perp \vec{a}$, $-5\vec{n} \perp \vec{a}$, $\lambda \cdot \vec{n} \perp \vec{a}$, $\lambda \in J$ olar.

Göstərək ki, düzbucaqlı koordinat sistemində $\vec{n}(A, B)$ vektoru $Ax + By + C = 0$ düz xəttinin normal vektorudur.

Doğrudan da, $\vec{a}(-B, A) \parallel d$ olarsa, $\vec{n}\vec{a} = -A \cdot B + B \cdot A = 0 \Rightarrow \vec{n}\vec{d} = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{a}$
Normal vektor anlayışından istifadə edərək nöqtədən düz xəttinə qədər məsafəni təyin edək. $(0, \vec{i}, \vec{j})$ sistemində $M_0(x_0, y_0) \notin d$, $d: Ax + By + C = 0$ düz xəttini götürək. Nöqtədən düz xəttə qədər məsafə həmin nöqtədən düz xəttə endirilən perpendikulyarın uzunluğuna deyilir.

$$(M_0 M_1) \perp d, \quad M_1 \in d, \quad |\overline{M_0 M_1}| = \rho(M_0, d) \text{ olar.}$$

$$\vec{n}(A, B) \perp d \Rightarrow \overline{M_0 M_1} = \lambda \cdot \vec{n} \Leftarrow |\overline{M_0 M_1}| = |\vec{n}| \cdot |\lambda|$$

$$\rho(M_0, d) = |\vec{n}| \cdot |\lambda|; \quad \lambda \text{ -nı təyin edək.}$$

$$M_0 \vec{M}_1 \cdot \vec{n} = \lambda \cdot \vec{n}^2, \quad |\lambda| \cdot \vec{n}^2 = |\overline{M_0 M_1} \cdot \vec{n}|, \quad \rho(M_0, d) = \frac{|\overline{M_0 M} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$\overline{M_1 M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1); \quad \vec{n}(x, y), \quad M_0(x_0, y_0), \quad \vec{n}(A, B)$$

$$\vec{n} \cdot \overline{M_1 M_0} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)$$

$$M_1 \in d \Rightarrow Ax_1 + By_1 + C = 0 \Rightarrow Ax_1 + By_1 = -C$$

$$\text{Yerinə yazsaq: } |\vec{n} \cdot \overline{M_1 M_0}| = |\vec{n} \cdot \overline{M_0 M_1}| = |Ax_0 + By_0 + C| \quad \rho(M_0, d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$Ax + By + C = 0$ düz xəttinin tənliyində hər bir həddi $\pm \sqrt{A^2 + B^2}$ bölsək

$$\frac{Ax}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad \text{alarıq “}\pm\text{” işarəsi elə seçilir ki, C- lə əks}$$

işarəli olsun, yəni $\frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = -p \quad (p > 0)$ ilə işarə edək. Onda yuxarıdakı tənliyi

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0 \text{ şəklində yazmaq olar. Burada } \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \varphi,$$

$\frac{B}{\pm \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \sin \varphi$ kimi işarə olunub. Sonuncu tənliyə düz xəttin kanonik tənliyi

deyilir. p-nin həndəsi mənası, koordinat başlanğıcından düz xəttə endirilən perpendikulyarın uzunluğu, $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ həmin normalın istiqamətverici vektorudur.

Misal 1. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ -də düz xətt $3x-4y-2=0$ şəklində verilib.

$$\rho(O, d) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5} \cdot \rho(O, d) = \frac{2}{5} \text{ uzun.vah.}$$

2. İki düz xətt arasındakı bucağın hesablanması.

$d_1 \neq d_2$, $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$ düz xətləri kəsişərək 4 bucaq əmələ gətirir. Əgər biri məlum olarsa o birini tapmaq olar, çünki $\hat{1} = \hat{3}$, $\hat{2} = \hat{4}$, $\hat{1} + \hat{2} = \pi$. Oriyentasiyanmış müstəvidə seçilən oriyentasiyaya müvafiq olaraq iki düz xətt arasındakı oriyentasiyanmış bucağı təyin edək.

$$d_1 \parallel \vec{a}, \quad d_2 \parallel \vec{b}, \quad d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \vec{a}(-B_1, A_1), \quad \vec{b}(-B_2, A_2).$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\operatorname{tg}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\sin(\vec{a} \wedge \vec{b})}{\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$$

Əgər düz xətt bucaq əmsalı ilə verilsə,

$$d_1: y = k_1 x + b, \quad d_2: y = k_2 x + b, \quad \vec{d}(1, k_1), \vec{b}(1, k_2)$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{1 + k_1 k_2}{\sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 + k_2^2}} \quad \sin(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 + k_2^2}}$$

$$\operatorname{tg}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \text{ Bu düsturlardan istifadə edərək düz xətlərin paralellik və}$$

perpendikulyarlığının şərtlərini yazaq.

$$1) d_1 \parallel d_2 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ, 180^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 \text{ və ya}$$

$$2) d_1 \perp d_2 \Rightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = 90^\circ, 270^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}(\vec{a} \wedge \vec{b}) \rightarrow \infty \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1} \text{ və ya}$$

$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ yazılır və $\lambda : \mu$ və ya $\mu : \lambda$ düz xəttin M_0 -dan keçməsi şərtindən tapılır, sonra yerinə yazılır.

Misal 1. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sistemində $d_1: x + 2 = 0$, $d_2: 3x - 3y + 5 = 0$ düz xətləri arasındakı bucağı təyin etməli.

$A_1 = 1$, $B_1 = 0$, $A_2 = 3$, $B_2 = -3$ olduğundan

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 \cdot (-3) - 0}{1 \cdot 3 + 0} = \frac{-3}{+3} = -1, \quad \operatorname{tg} \varphi = -1, \quad \varphi = -45^\circ$$

Misal 2. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ -də $d_1: \frac{1}{3}x + 5 = y$, $d_2: \sqrt{3}x + 7 = y$, $(d_1 \wedge d_2) = ?$

$k_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad k_2 = \sqrt{3}$ olduğunu bilərək bucağı təyin etmək olar.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{9 - \sqrt{3}}{3(1 + \sqrt{3})} = \frac{(9 - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}{-6} = \frac{5\sqrt{3}}{3} - 2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{5\sqrt{3}}{3} - 2, \quad \varphi = \varphi_0$$

3. Müstəvidə düz xəttə aid əsas məsələlər.

Ümumi şəkildə düz xəttə aid elə məsələlərə baxaq ki, koordinat metodu ilə həll etmək olar.

Məsələ 1. $Ax + By + C = 0$ düz xəttinə paralel və $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən düz xətt tənliyini yazmalı.

Həlli. Yönləldici vektor $\vec{a} = (-B, A)$ olduğundan $\vec{d} = [M_0, \vec{a}]$ və ya

$$\frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A} \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad \text{Şəkil}$$

Məsələ 2. Paralel olmayan düz xətt kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını tapmalı.

Həlli. $d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tənliyinin II-ni $-B_1$ -ə vurub tərəf- tərəfə toplasaq

$$\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \text{ anoloji } \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad \text{tapılır.}$$

Məsələ 3. Verilmiş $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən və verilmiş iki düz xəttin kəsişmə nöqtəsindən keçən düz xətt tənliyini yazmalı.

Həlli. I yol. Düz xəttlərin kəsişmə nöqtəsi məsələ 2-dəki kimi tapılır və həmin nöqtə ilə M_0 -dan keçən düz xətt tənliyini yazılır.

II yol. Verilmiş düz xəttin dəstə tənliyi $\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$

Məsələ 4. $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən və $\vec{n}(A, B)$ -yə perpendikulyar olan düz xətt tənliyini yazmalı.

Həlli. $\forall M(x, y) \in d$ isə $\overrightarrow{M_0M} \parallel d \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \vec{n} = 0$ olar.

Buradan $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ alınır.

Məsələ 5. $Ax + By + C = 0$ düz xəttinə perpendikulyar və $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən düz xəttin tənliyini yazmalı.

Həlli. I düz xəttinin yönləldici vektoru axtarılan düz xəttin normal vektorudur, yəni $\vec{a}(-B, A) \perp d, \forall M(x, y) \in d$ olarsa,

$$\overrightarrow{M_0M} \vec{a} = 0; -B(x - x_0) + A(y - y_0) = 0$$

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0); \frac{B}{A} = \operatorname{tg} \varphi = k$$

$$y - y_0 = k(x - x_0), y - y_0 = \operatorname{tg} \varphi (x - x_0)$$

4. Düz xətt tənliklərinin orta məktəb həndəsə məsələlərinə tətbiqləri.

Orta məktəbin həndəsə kursunun bir çox teoremləri, təklif və məsələlərinin həllinə düz xətt tənlikləri və koordinat metodu geniş tətbiq olunur. Bir neçə məsələlərə baxaq.

Məsələ 1. Trapesiyanın oturacaqlarının orta nöqtələrindən keçən düz xəttin yan tərəflərin kəsişmə nöqtəsindən keçdiyini isbat etməli.

Həlli. ABCD- verilən trapesiyadır. $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ afin sistemini elə seçək ki, $A(0,0), D(1,0), B(\alpha,1)$ olsun. Onda, $M(\frac{1}{2},0), N(\frac{\alpha}{2},1), C(\alpha,1)$ olar.

$$(AB): x = 0, \quad (CD): x - (\alpha - 1)y - 1 = 0, \quad (MN): x + \frac{1-\alpha}{2}y - \frac{1}{2} = 0$$

əvvəlki iki tənliyi həll edərək E-nin koordinatlarını tapaq. $E(0, \frac{1}{1-\alpha})$. Yoxlasaq görək ki, bu koordinat (MN)-in tənliyini ödəyir,

$$0 + \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{İsbat olundu.}$$

Məsələ 2. Üçbucağın hündürlükləri üzrə olan üç düz xətt bir nöqtədə kəşir. İsbat etməli.

Şəkil

Həlli. $(C_1, \vec{i}, \vec{j})$ sistemini elə seçək ki, $A(\alpha,0), B(\beta,0), C(0,\gamma)$ olsun. İki hündürlüyün kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarının III hündürlüyün tənliyini ödədiyini yoxlayaq.

Hündürlüklər: $(CC_1) \perp (AB), (AA_1) \perp (BC), (BB_1) \perp (AC)$

$$(CC_1): x = 0 \quad \overrightarrow{BC}(-\beta, \gamma) \perp (AA_1) \cdot (AA_1) \ni A(\alpha,0).$$

$$\text{Onun tənliyi } (AA_1): \beta(x - \alpha) - \gamma y = 0, \quad \beta x - \gamma y - \alpha\beta = 0$$

$$(BB_1) \perp \overrightarrow{AC}(-\alpha, \gamma), \quad B \in (BB_1), \quad (BB_1): \alpha x - \gamma y - \alpha\beta = 0.$$

(AA_1) və (CC_1) -in tənliyini həll edərək $M(0, \frac{-\alpha\beta}{\gamma})$ tapılır. Bu koordinatlar (BB_1) -in tənliyini ödəyir. İsbat olundu.

Məsələ 3. Rombun tərəfləri a və b-dir. Onun qarşı tərəfləri arasındakı məsafəni təyin etməli.

Həlli. ABCD romb, $O = (AC) \cap (BD), (0, \vec{i}, \vec{j})$ -ni elə seçək ki,

$$A(-\frac{a}{2}, 0), B(0, \frac{b}{2}), C(\frac{a}{2}, 0), D(0, -\frac{b}{2})$$

olsun. (BC)-nin tənliyi $\frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} = 1, (BC): 2xb + 2ay - ab = 0. A(-\frac{a}{2}, 0)$ - dan bu düz xəttə qədər məsafəni təyin etməliyik.

$$\rho = \rho(A, (BC)) = \frac{\left| -2b\frac{a}{2} - ab \right|}{\sqrt{4a^2 + 4b^2}} = \frac{2ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \rho = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ olar.}$$

Müstəvinin oxşarlıq çevrilməsi və onun analitik ifadəsi, Homotetiya, xassələri və oxşarlıq çevrilməsinin ayrılığı.

Plan: 1.Müstəvinin oxşarlıq çevrilməsi.

2.Homotetiya və xassələri.

3.Oxşarlıq çevrilməsinin ayrılığı.

4.Oxşarlıq çevrilməsinin koordinatlarla ifadəsi.

5.Müstəvinin oxşarlıq çevrilmələri qrupu.

6.Oxşarlıq çevrilmələrinin alt qrupları.

§1.Müstəvinin oxşarlıq çevrilməsi. $f: \pi \rightarrow \pi$ müstəvi çevrilməsini götürək.

$\kappa > 0$, $\kappa \in R_+^*$ həqiqi ədəd olsun (müsbət həqiqi ədəd). $\forall AB \in \pi$, $f(B) = B'$, $f(A) = A'$ olduqda $A'B' = \kappa \cdot AB$ və ya $\rho(A', B') = \kappa \cdot \rho(A, B)$ olarsa f çevrilməsi κ əmsallı oxşarlıq çevrilməsi adlanır. Tərifindən görünür ki,

1. $A = B$ olduqda $\rho(A, B) = 0$, $A'B' = \kappa \cdot AB = 0$, yəni $\rho(A', B') = 0 \Rightarrow A' = B'$ olur.

2. $A \neq B$ olduqda $AB \neq 0$, $A'B' = \kappa \cdot AB = 0 \Rightarrow A' \neq B'$ olur, yəni κ əmsallı oxşarlıq həm inyektiv, həm də suryektiv, deməli biyektiv çevrilmədir.

3. $\kappa > 0$ olduqda $0 < \kappa < 1$ olarsa yəni bu zaman fiqurun ölçüləri qısalır.

4. $\kappa = 1$ olduqda $A'B' = AB$, yəni bu zaman uyğun parçaların uzunluqları dəyişmir, deməli hərəkət çevrilməsi $\kappa = 1$ əmsalı oxşarlıq çevrilməsidir.

5. $\kappa > 1$ olduqda $A'B' = \kappa \cdot AB > AB$ olur, yəni bu zaman uyğun parçaların uzunluqları böyüyür.

§ 2 Homotetiya və xassələri. Müstəvidə M_0 nöqtəsi götürək və elə

$h: \pi \rightarrow \pi$ çevrilməsinə baxaq ki $h(M_0) = M$, $\forall M \neq M_0$, $h(M) = M'$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in R$ həqiqi ədəd olduqda $\overrightarrow{M_0 M^1} = \lambda \cdot \overrightarrow{M_0 M}$ ödənərsə h çevrilməsi M_0 mərkəzli homotetiya çevrilməsi adlanır.

Bu zaman M_0 - homotetiya mərkəzi, λ - homotetiya əmsalı, M və M' homotetik uyğun cut nöqtələr adlanır. Göstərmək olar ki, homotetiya oxşarlıq çevrilməsinin xüsusi halıdır. Doğrudan da əgər $N \neq M$, $N \neq M_0$, $h(N) = N^1$ olarsa, onda $\overrightarrow{M_0 N^1} = \lambda \overrightarrow{M_0 N}$, $h(M) = M' = \lambda \cdot \overrightarrow{M_0 M}$

tərəf-tərəfə çıxsaq $\overrightarrow{M^1 N^1} = \lambda \cdot \overrightarrow{M N}$ və ya $|M^1 N^1| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{M N}|$ olar

$|\lambda| > 0$, odur ki, hər bir λ əmsalı homotetiyaya $|\lambda|$ əmsalı oxşarlıq çevrilməsi uyğun olur. $\lambda = 1$ olduqda $M_0 \overrightarrow{M^1} = M_0 \overrightarrow{M} \Rightarrow M = M^1$ yəni $\lambda = 1$ əmsalı homotetiya müstəvinin nöqtələrini tərpənməz saxlayır.

$\lambda = -1$ olduqda $M_0 \overrightarrow{M^1} = M_0 \overrightarrow{M}$, yəni $\lambda = -1$ əmsalı homotetiya M_0 mərkəzli simmetriya çevrilməsidir. $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -1$ olduqda homotetiya iki nöqtə arasındakı məsafəni dəyişir və hərəkətdən fərqli oxşarlıq çevrilməsidir. Müstəvidə $(O_1 E_1, E_2)$ reperində O nöqtəsini homotetiya mərkəzi götürsək $M \neq O$, $M(\chi, \gamma)$ nöqtəsi $\overrightarrow{OM'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM}$, $M'(\chi', \gamma)$ nöqtəsinə çevrilər. Onda

$\overrightarrow{OM} = (\chi, \gamma)$, $\overrightarrow{OM'} = (\chi', \gamma')$ olarsa, $\chi' = \lambda\chi$, $\gamma' = \lambda\gamma$ O mərkəzli homotetiyanın koordinatlarla ifadəsi olar.

İndi homotetiyanın xassələrini verək

1⁰. $\lambda \neq 1$ əmsallı homotetiya homotetiya mərkəzindən keçən düz xətti özünə, homotetiya mərkəzindən keçməyən düz xətti özünə paralel düz xəttə çevirir.

Fəzz edək $d: Ax + By + C = 0$ düz xətti h homotetiya ilə çevrilir. Onda tənlikdə $x = \frac{x'}{\lambda}$, $y = \frac{y'}{\lambda}$ qiymətlərini yerinə yassaq $Ax' + By' + C\lambda = 0$ alarıq.

Əgər $O \in d \Rightarrow C = 0$ və $(d'): Ax' + By' = 0$, $d = d'$ $O \in d \Rightarrow C \neq 0$ və $d' \parallel d$ olar.

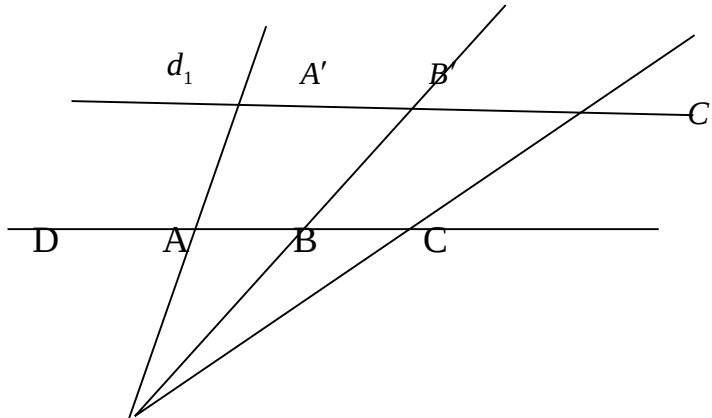
2⁰. Homotetiya bir düz xəttin üç nöqtəsinin sadə nisbətini dəyişmir.

$A, B, C \in d$, $A', B', C' \in d'$ $\mu(ABC)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x, y)$, $C(x_2, y_2)$, $(A, B, C) = \lambda$ olarsa,

$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ $(A, B, C) \xrightarrow{h} (A', B', C')$ $\mu = (AC, B)$, $\mu' = (A'C', B')$ olsun.

$\overrightarrow{AB} = \mu \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'B'} = \mu' \cdot \overrightarrow{B'C'}$

$\overrightarrow{A'B'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC} \Rightarrow \mu = \mu' (AC, B) = (A'C', B')$

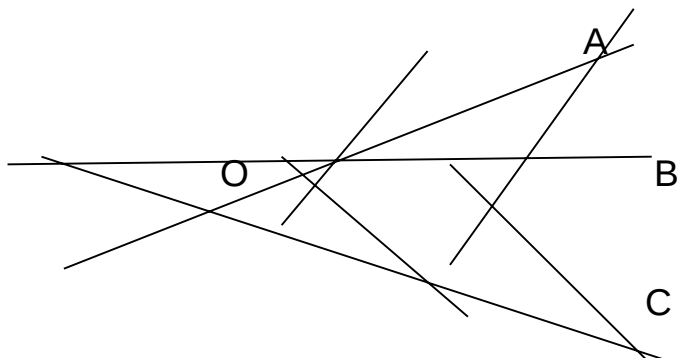


3°. Homotetiya bucağı özünə bərabər bucağa çevirir. $\angle ABC \hat{=} \angle A'B'C'$ ($\overrightarrow{A'B'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}$) $\Rightarrow [(A'B') \parallel (AB), (B'C') \parallel (BC)]$,
yəni bucağın tərəfləri cüt-cüt paraleldirlər, yəni $\angle ABC = \angle A'B'C'$

A'

B

C'



4°. Homotetiya müstəvinin oriyentasiyasını saxlayır. $R = (A, B, C)$ ixtiyari reperdir. $\lambda \neq 0$, $h: R \rightarrow R'$, $h: (A, B, C) \rightarrow (A', B', C')$ $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{A'C'}$ R-dən R' -ə keçid $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 > 0$ determinantı ilə aparılır. $\lambda^2 > 0$ $R \omega R'$ olar.

§3. Oxşarlıq çevrilməsinin ayrılışı. Oxşarlıq çevrilməsinin iki çevrilmənin, yəni homotetiya ilə hərəkətin hasilinə ayırmaq olduğunu göstərək.

Teorem: p çevrilməsi k əmsallı oxşarlıq, h isə k əmsallı M_0 mərkəzli homotetiya olduqda elə yeganə g hərəkət çevrilməsi var ki, oxşarlıq çevrilməsi homotetiya ilə hərəkətin hasilinə bərabər olur: $p = hg$.

İsbatı: p çevrilməsi k əmsallı oxşarlıq olduğundan $\forall M, N$ nöqtələri üçün $p(M) = M'$, $p(N) = N'$, $M'N' = k \cdot MN$ olar.

h çevrilməsi k əmsallı mərkəzli homotetiyadır, onda h^{-1} , $\frac{1}{k}$ əmsallı homotetiya olar, yəni $h^{-1}(M') = M''$, $h^{-1}(N') = N''$ onda $MN = \frac{1}{k} \cdot M'N'$ olar. Müqayisə etsək $MN = M''N''$ alarıq. Bu isə o deməkdir ki, $g(M) = M''$, $g(N) = N''$ hərəkət çevrilməsidir. Beləliklə, alarıq $(p(M) = M', h^{-1}(M') = M'') \Rightarrow h^{-1}(p(N)) = N''$ və $MN = M''N''$. $h^{-1}p = g$ və ya $p = hg$.

Teorem isbat olundu.

Göstərmək olar ki, $p = hg$ -ni ödəyən g hərəkət çevrilməsi yeganədir.

Əgər $p = hg$ olarsa $g = g_1 = h^{-1}p$ olardı.

§4. Oxşarlıq çevrilməsinin koordinatlarla ifadəsi. Yuxarıda gördük ki, homotetiya hərəkət çevrilməsinin bütün xassələrini ödəyir. İndi isbat etdik ki, oxşarlıq hərəkətlə homotetiyanın hasilinə bərabərdir.

Deməli, oxşarlıq çevrilməsi

- düz xətti düz xəttə çevirir,
- paralel düz xətləri paralel düz xətlərə çevirir,
- yarımmüstəvinini yarımmüstəviyə çevirir,
- düz xətt üzərindəki üç nöqtənin sadə nisbətini dəyişmir,

- parçanı parçaya çevirir,
- şüanı şüaya çevirir,
- bucağı özünə bərabər bucağa çevirir,
- perependikulyar düz xətləri perependikulyar düz xətlərə çevirir,
- müstəvinin oriyentasiyasını ya saxlayır(əgər g 1-ci növ hərəkətdirsə) ya da dəyişir (g 2-ci növ hərəkət çevrilməsidirsə) 1-ci halda 1-ci növ oxşarlıq, 2-ci halda 2-ci növ oxşarlıq çevrilməsi adlanır.

İndi oxşarlıq çevrilməsinin koordinatlarla ifadəsini yazaq: $(O, \vec{i}, \vec{j})$ koordinat sistemini götürək. H-homotetiyası $\kappa > 0$ əmsallı, O-mərkəzli olarsa $h(M) = \tilde{M}$, $M(x, y)$, $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ olsun. Onda $\tilde{x} = \kappa x$, $\tilde{y} = \kappa y$ olar. g hərəkət çevrilməsi $g = (\tilde{M}) = M'$, $M'(x', y')$ olduqda $\begin{cases} x' = \tilde{x} \cos \varphi - \tilde{y} \sin \varphi + x_0 \\ y' = \tilde{x} \sin \varphi + \tilde{y} \cos \varphi + y_0 \end{cases}$ onda

$x' = \kappa(x \cos \varphi - y \sin \varphi) + x_0$ alırıq. $\varepsilon = +1$ olduqda p-1-ci növ, $\varepsilon = -1$ olduqda p-
 $y' = \kappa(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + y_0$

2-ci növ oxşarlıq çevrilməsi olar.

Teorem: İsbat etmək olar ki, hər bir fərqli hərəkətdən oxşarlıq çevrilməsinin bir tərpənməz nöqtəsi vardır.

İsbatı: $\begin{cases} (\kappa \cos \varphi - 1)x - \varepsilon \kappa \sin \varphi y + x_0 \\ \kappa \sin \varphi x + (\varepsilon \kappa \cos \varphi - 1)y + y_0 \end{cases}$ sisteminin determinanı

$\varepsilon = 1$ olarsa $\delta = (\kappa - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi$, $\varepsilon = -1$ olarsa $\delta = 1 - \kappa^2$, $\kappa \neq 1$ onda $\delta \neq 0$. Teorem isbat olunur.

Nəticə: Birdən çox tərpənməz nöqtəsi olan və ya heç tərpənməz nöqtəsi olmayan oxşarlıq çevrilməsi hərəkət çevrilməsidir. Bu teoremdən istifadə edərək oxşarlıq çevrilməsini təsnif etmək olar.

1-ci növ oxşarlıq çevrilmələri:

- 1.Homotetiya
- 2.Mərkəzi oxşar dönmələr
- 3.Paralel köçürmə

2-ci növ oxşarlıq çevrilmələri:

1. Ox simmetriyası
2. Mərkəzi-oxşar simmetriya
3. Sürüşməli simmetriya.

§5. Müstəvinin oxşarlıq çevrilmələri qrupu.

Fərz edək $P = \{f_1, f_2, \dots, p_1, p_2, \dots\}$ oxşarlıq çevrilmələri çoxluğudur. Əvvəlcə göstərək ki, P-də əməl təyin edilib. $f_1, f_2 \in P$ iki oxşarlıq çevrilməsidir. $f_1 - \kappa_1$ əmsallı $\kappa_1 > 0$, $f_2 - \kappa_2$ əmsallıdır

$f_1(M) = M'$, $f_1(N) = N'$, $M'N' = \kappa_1 \cdot M'N'$. $f_2(M') = M''$, $f_2(N') = N''$, $M''N'' = \kappa_2 = M'N'$.

$$f_2(f_1(M)) = M'', \quad f_2(f_1(N)) = N''. \quad M'N' = k_1 \cdot MN, \quad M''N'' = \kappa_2 \cdot M'N' = k_2(\kappa_1 MN), \\ M''N'' = (\kappa_1 \cdot \kappa_2)MN, \quad \kappa_2 \cdot \kappa_1 > 0.$$

Deməli, $f_2 \cdot f_1$ -oxşarlıq çevrilməsidir. $\kappa_2 \cdot \kappa_1 \in P$ yəni, P -də cəbri əməl təyin olunub. $p \in P$, $p - k$ əmsallıdırsa $\kappa > 0$, $\frac{1}{k} > 0$, $\frac{1}{k}$ əmsallı oxşarlıq p -nin p^{-1} tərsi olan oxşarlıq çevrilməsidir, yəni $p \in P_0$ olduqda $p^{-1} \in P$, $k = 1$ olduqda $p^0 - 1$ əmsallı oxşarlıq olur, yəni $p^0 \in P$. Deməli, P çoxluğu qrup əmələ gətirir. Bu qrupa oxşarlıq çevrilmələri qrupu deyilir.

Oxşarlıq çevrilməsi bucağı özünə bərabər bucağa çevirir, bucaq ölçüsü oxşarlıq çevrilmələri qrupunun əsas invariantlarıdır. Oxşarlıq çevrilmələri qrupunun alt qruplarına baxaq.

§6.Oxşarlıq çevrilmələrinin alt qrupları.

1. $k=1$ olduqda oxşarlıq çevrilməsi hərəkət çevrilməsinə çevrilir. Odur ki, hərəkət çevrilmələri qrupu oxşarlıq çevrilmələri qrupunun alt qrupudur, yəni $D \subset P$.

2.1-ci növ oxşarlıq çevrilmələri də qrup əmələ gətirdiyini yoxlamaq olar, deməli $P_1 \subset P$ olar.

3. M_0 mərkəzli homotetiya çevrilmələri çoxluğu $P(M_0)$ ilə işarə edək. Əgər M_0 nöqtəsini düzbucaqlı koordinat sisteminin koordinat başlanğıcı kimi götürsək onda $M_0 \neq M$ nöqtəsi üçün homotetiya koordinatlarla $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, $\lambda \neq 0$ kimi ifadə olunur. Əgər $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ olarsa $h_1(M_1) = M_1'$, $h_2(M_1') = M_1''$ olduqda

$$\overrightarrow{M_0M_1'} = \lambda_1 \overrightarrow{M_0M_1}, \quad \overrightarrow{M_0M_1''} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{M_0M_1'}, \quad \overrightarrow{M_0M_0''} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{M_0M_1'} = \lambda_2(\lambda_1 \cdot \overrightarrow{M_0M_1}) = (\lambda_2, \lambda_1) \overrightarrow{M_0M_1}, \\ \overrightarrow{M_0M_1''} = (\lambda_2, \lambda_1) \overrightarrow{M_0M_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{M_0M_1} \quad (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0) \Rightarrow \lambda \neq 0. \quad \text{Yəni,} \quad h_1, h_2 \in P(M_0)$$

olduqda $h_2 \cdot h_1 \in P(M_0)$ $h \in P(M_0)$, $h^{-1} \in P(M_0)$ olar. $h^{-1}, \frac{1}{k}$ əmsallı M_0 mərkəzli homotetiyadır. Deməli, $P(M_0)$ homotetiyalar çoxluğu qrupu əmələ gətirir və $P(M_0) \subset P$ olar.

4. Fərz edək H bütün paralel köçürmə və homotetiyalar çoxluğudur. $f_1 \in H_1$, $f_2 \in H$ olduqda $f_2 \cdot f_1 \in H$ olar. Çünki, f_1 -1-ci növ, f_2 -2-ci növ oxşarlıq çevrilmə tiplidir. Belə çevrilmələr qrup əmələ gətirdiyini göstərmək çətin deyil. Həqiqətən, $f_1 \in H$, $f_2 \in H$ olduğu üçün hər biri 1-ci növ oxşarlıq çevrilməsidir. f_1, f_2 mərkəzi- dönmə oxşarlıq çevrilməsi deyildir, belə ki, mərkəzi- dönmə oxşarlıq çevrilməsində hər bir a düz xətti elə a' düz xəttinə çevrilir ki, düz xəttinə paralel olur və ya üst-üstə düşür. Deməli, $f_2 \cdot f_1$ - homotetiya, ya da paralel köçürmə çevrilməsidir, yəni $f_2 \cdot f_1 \in H$. Həm də $f_2 \in H$ olduqda $f^{-1} \in H$. Odur ki, H qrup əmələ gətirir. $H \subset P$ alt qrupdur. Bu qrupun invariantı düz xətin müstəvidə yönəldicisidir. İndi fiqurların oxşarlıq münasibətini izah edək.

Tərif: F və F' fiqurları o zaman oxşar fiqurlar adlanırlar ki, oxşarlıq çevrilməsi ilə biri digərinə çevrilmiş olsun, yəni $p \in P, p(F) = F' \Rightarrow F \approx F'$ adlanır.

$F \sim F, F \sim F' \Rightarrow F' \sim F, (F \sim F', F' \sim F'') = F \sim F''$ Bu göstərir ki, oxşarlıq münasibəti ekvivalentlik münasibətidir.

İki fiqurun oxşarlığını müəyyən etmək üçün onların birini digərinə çevirən oxşarlıq çevrilməsinin varlığını göstərmək lazımdır.

Təklif 1. İki $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \rightarrow \left(\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}', \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \right)$

Orta məktəbdə bucaqların bərabərliyi oxşarlığın tərfi kimi götürülür.

Təklif 2. Eksentrisitetləri bərabər iki ellips oxşardırlar.

İsbatı: $(O, E_1, E_2), (O', E'_1, E'_2)$ reperində $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^{12}}{a^{12}} + \frac{y^{12}}{b^{12}} = 1$ ellips götürək. $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}, \frac{b^1}{a^1} = \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}; f_2$ - homotetiyası, O' mərkəzli $\frac{a'}{a}$ əmsallı

homotetiyada $x' = \frac{a'}{a}x, y' = \frac{a'}{a}y$ və ya

$$x = \frac{a}{a'}x', y = \frac{b}{b'}y', \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{f} \frac{x^{12}}{a^{12}} + \frac{y^{12}}{b^{12}} = 1.$$

Təklif 3. İki hiperbolanın eksentrisitetləri bərabədirsə, oxşardırlar. Məlumdur ki, iki bərabərtərəfli hiperbolanın eksentrisitetləri eynidir. Deməli, bərabərtərəfli $\forall$ iki hiperbola oxşardırlar.

Təklif 4. İki parabola həmişə oxşardırlar. $(O, E_1, E_2), (O', E'_1, E'_2)$ ortonormal reperlərində $y^2 = 2px$ və $y^{12} = 2p'x'$ parabolaları verilir. $\gamma \sim \gamma'$ olduğunu isbat edək. $g: (O, E_1, E_2) \rightarrow (O', E'_1, E'_2) \Rightarrow \gamma \xrightarrow{g} \gamma_1, \gamma_1 - R' - \text{d} \Rightarrow y^2 = 2px$ tənliyinə malikdir. $h: (O, E_1, E_2) \rightarrow (O', E'_1, E'_2)$ homotetiyası, O' - mərkəzli, $\lambda = \frac{p'}{p}, x' = \frac{p'}{p}x, y' = \frac{p'}{p}y$ olar. $hg: \gamma \rightarrow \gamma'$ olar. Deməli, həqiqətən $\forall$ iki parabola oxşardırlar.

Müstəvidə afin çevrilmə və onun analitik ifadəsi. Müstəvinin afin çevrilmələr qrupu və onun alt qrupları. Həndəsi çevrilmələrin məktəb həndəsə məsələlərinə tətbiqləri.

- Plan:** 1.Müstəvinin afin çevrilməsi.
2.Afin çevrilmənin koordinatlarla ifadəsi.
3.Müstəvinin afin çevrilmələr qrupu.
4.Afin çevrilmələrin alt qrupları.
5.Həndəsi çevrilmələrin məktəb həndəsə məsələlərinə tətbiqləri.

. §1..Müstəvinin afin çevrilməsi .

Tərif: $f : \pi \rightarrow \pi$ çevrilməsi zamanı bir düz xətt üzərindəki üç nöqtə bir düz xətt üzərindəki üç nöqtəyə çevrilərsə və bu zaman üç nöqtənin sadə nisbəti dəyişməsə belə çevrilmə müstəvinin afin çevrilməsi adlanır. $M_1, M_2, M_3 \in d, f(M_\alpha) = M'_\alpha \in d', f(d) = d'$ olmaqla $(M_1, M_2, M_3) = (M'_1, M'_2, M'_3)$ ödənərsə f -afin çevrilmə olur. Aydındır ki, $f(M_\alpha) = M_\alpha$ olduqda eyniyyət çevrilməsi və oxşarlıq çevrilməsi, həm də hərəkət çevrilməsi zamanı düz xətt düz xəttə çevrilir və kollinear üç nöqtənin sadə nisbəti dəyişmir, deməli eyniyyət, oxşarlıq və hərəkət çevrilmələri afin çevrilməyə misal ola bilər. Afin çevrilmələrin bir xassəsini verək.

Lemma: Əgər f_1 və f_2 afin çevrilmələri A və B nöqtələrini uyğun olaraq A' və B' kimi iki eyni nöqtəyə çevrilərsə, onda (AB) -nin ixtiyarı M nöqtəsini də eyni nöqtəyə çevirir.

Yəni, $f_1(A) = f_2(A)$ və $f_1(B) = f_2(B)$ olarsa, $\forall M \in (AB)$ olduqda $f_1(M) = f_2(M)$ olar. Doğurdan da $A, B \in (AB) = d$ olsun. $f_1(A) = A', f_1(B) = B', f_1(d) = (A'B') = d', f_2(A) = A', f_2(B) = B', f_2(d) = (A'B') = d'. \forall M \in d$ olarsa, əgər $f_1(M) = M', f_2(M) = M''$ olarsa, onda f_1 afin çevrilmə olduğundan $(AB, M) = (A'B', M')$ və f_2 afin çevrilmə olduğundan $(AB, M) = (A'B', M'')$ olar. Onda hər iki bərabərlikdən $(A'B', M') = (A'B', M'')$ alırıq. Bundan da $M_1 = M''$ yəni $f_1(M) = f_2(M)$ olar.

Teorem: (Afin çevrilmənin əlaməti) Müstəvidə hər hansı iki $R = (A, B, C)$ və $R' = (A', B', C')$ afin reper verildikdə bu reperlərin birini digərinə çevirən elə yeganə f afin çevrilməsi vardır ki, bu çevrilmə zamanı müstəvinin ixtiyari M nöqtəsinin R reperindəki koordinatları, $f(M) = M'$ nöqtəsinin R' reperindəki uyğun koordinatlarına bərabər olur.

İsbatı: Əvvəlcə R reperini R' -ə çevirən afin çevrilmənin olduğunu isbat edək. Müstəvinin ixtiyari M nöqtəsini götürək. M -in R -dəki koordinatları $M_R(x, y)$ olsun. x və y ədədlərinə görə R' -də müəyyən edilən nöqtəni $M'_R(x, y)$ kimi işarə edək. Deməli, bununla müstəvinin $\forall M \in \pi$ M' nöqtəsi müəyyən edilir. Bu inikas qarşılıqlı birqiymətlidir. Həm də $A(0,0) \xrightarrow{f} A'(0,0), B(1,0) \xrightarrow{f} B'(1,0), C(0,1) \xrightarrow{f} C'(0,1)$ yəni, $R \xrightarrow{f} R'$ olur.

İndi göstərək ki, yaradılan f çevrilməsi afin çevrilmədir. R reperində bir düz xətt üzərində $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$ üç nöqtə götürək. f inikasında bunların obrazları $M_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) olar. $\lambda = (M_1, M_2, M_3)$ olarsa, bu nöqtələr

bir düz xəttə aid olduqları üçün $x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ olar. R' -də M'_α -in koordinatları da bu münasibətləri ödədiyi üçün, alarıq ki, M'_3 nöqtəsi $[M'_1, M'_2]$ parçasını λ nisbətində bölür, yəni $(M'_1 M'_2, M'_3) = \lambda$. Beləliklə nöqtələri də bir düz xəttə aiddirlər və $(M_1 M_2, M_3) = (M'_1 M'_2, M'_3)$. yəni, f-afin çevrilmədir.

İndi f-in yeganəliyini isbat edək. Fərz edək f-dən başqa f' afin çevrilməsi də var ki, $f'(R) = R'$, $f'(A) = A'$, $f'(B) = B'$, $f'(C) = C'$ olur. $f \neq f'$ olduğundan elə M nöqtəsi var ki, $f(M) = M'$, $f'(M) = M''$, $M'' \neq M'$ olur. M nöqtəsindən elə düz xətt keçirək ki, (AB) və (AC)-ni müxtəlif N və M nöqtələrində kəssin.

$\left[\begin{array}{l} f(A) = A', f(B) = B', f(N) = N' \\ f'(A) = A', f'(B) = B', f'(N) = N' \end{array} \right] \Rightarrow f(N) = f'(N)$ olar. Həm də

$\left[\begin{array}{l} f(A) = A', f(C) = C' \\ f'(A) = A', f'(C) = C' \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(P) = P' \\ f'(P) = P' \end{array} \right] \Rightarrow f(P) = f'(P)$ olar. Deməli,

$\left[\begin{array}{l} f(N) = N', f(P) = P', f(M) = M' \\ f'(N) = N', f'(P) = P', f'(M) = M'' \end{array} \right] \Rightarrow f(M) = f'(M)$ olar. Bununlada alarıq ki,

$f(M) = f'(M) \Rightarrow f = f'$ olar. Teorem tamamilə isbat olunur. Bu teoremdən istifadə edərək göstərmək olar ki,

-afin çevrilmə reperi reperə çevirir,

-afin çevrilmə düz xətti düz xəttə, paralel düz xətləri paralel düz xətlərə, yarımüstəvini yarımüstəviyə, şüanı şüaya, parçanı parçaya və bucağı bucağa çevirir.

-hər bir afin çevrilmə müstəvidə oriyentasiyanı ya saxlayır, ya da tərsinə dəyişir.

Doğurdan da $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ və $R' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ kimi iki afin reper götürək. R' -in bazis vektorları R-də $\vec{e}'_1 = (c_{11}, c_{21})$, $\vec{e}'_2 = (c_{12}, c_{22})$ olarsa R-dən R' -ə keçid

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \Delta > 0 \Rightarrow R \omega R', \Delta < 0 \Rightarrow R \overline{\omega} R'$$

Afin çevrilmə müstəvi oriyentasiyasını dəyişmirsə 1-ci növ, dəyişirsə 2-ci növ adlanır. $\Delta > 0$ olduqda 1-ci növ $\Delta < 0$ olduqda 2-ci növ afin çevrilmə olur.

§2. Afin çevrilmənin koordinatlarla ifadəsi.

Müstəvidə $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ afin koordinat sistemi götürək. Onun f afin çevrilməsi zamanı obrazı $R' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ olsun. $O'_R(x_0, y_0)$, $\vec{e}'_1 = (c_{11}, c_{21})$, $\vec{e}'_2 = (c_{12}, c_{22})$ olsun. $\forall M$ nöqtəsi, $f(M) = M'$ olar. M' -in R' -də koordinatları $M'_{R'} = (x, y)$ və M' -in R-də koordinatları $M' = (x', y')$ olsun. Onda koordinat sisteminin çevrilməsinə əsasən $OM'O'$ -dən

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} \quad (x', y')_R = (x_0, y_0)_R + (x, y)_{R'} = (x_0, y_0)_R + (x, y) \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + x_0 \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + y_0 \end{cases} \quad \vec{e}'_1 \neq \lambda \vec{e}'_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \Delta \neq 0$$

$\Delta \neq 0$ şərti daxilində yuxarıdakı sistem afin çevrilmənin koordinatlarla ifadəsidir.

Göstərmək olar ki, əgər yuxarıdakı sistem və $\Delta \neq 0$ şərti verilmişsə belə çevrilmə afin çevrilmədir. Doğurdan da $R = (O, E_1, E_2)$ -nin obrazı belə olar: $O(0,0)$,

$E_1(1,0), E_2(0,1)$ onda $O'(x_0, y_0), E'_1(c_{11} + x_0, c_{21} + y_0), E'_2(c_{12} + x_0, c_{22} + y_0)$ olar. Bu nöqtələr reper müəyyən edir. Doğrudan da $\vec{e}'_1 = O_1\vec{E}'_1 = (c_{11}, c_{21}), \vec{e}'_2 = O_1\vec{E}'_2 = (c_{12}, c_{22})$ vektorları xətti asılı deyirlər, çünki verilənə görə $\Delta \neq 0 \Rightarrow c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0 \Rightarrow \frac{c_{11}}{c_{12}} \neq \frac{c_{21}}{c_{22}}$ Deməli f çevrilməsi R -i R' -ə çevirir. Əgər bu

çevrilmənin koordinatlarla ifadəsini yazsaq $O'(x_0, y_0), \vec{e}'_1(c_{11}, c_{21}), \vec{e}'_2(c_{12}, c_{22})$ -ni nəzərə alsaq yuxarıdakı analitik ifadəni alarıq.

$\Delta > 0$ ($\Delta < 0$) olduqda $R \omega R'$ ($R \varpi R'$) olur və 1-ci (və ya 2-ci) növ afin çevrilmə alınır.

§3. Müstəvinin afin çevrilmələr qrupu.

Müstəvinin bütün afin çevrilmələri çoxluğunu $A = \{f, g, h, \dots\}$ ilə işarə edək. Əvvəlcə göstərək ki, A çoxluğunda əməl təyin etmək olar. $f_1, f_2 \in A$ götürək. $f_1(d) = d', f_2(d') = d''$ onda

$f_2(f_1(d)) = d'', f_1(M'_\alpha) = M'_\alpha, f_2(M'_\alpha) = M''_\alpha, M_\alpha \in d, M'_\alpha \in d', M''_\alpha \in d''$
 $(M_1, M_2, M_3) = (M'_1, M'_2, M'_3), (M'_1, M'_2, M'_3) = (M''_1, M''_2, M''_3).$ Onda
 $(M_1, M_2, M_3) = (M''_1, M''_2, M''_3)$ olar. Deməli, $f_2 f_1 \in A$ olur. $f \in A$ olduqda $f(d) = d', f^{-1}(d') = d, f^{-1}(M'_\alpha) = M_\alpha, f^{-1} \in A$ olar. Beləliklə A qrup əmələ gətirir.

Bu müstəvinin afin çevrilmələri qrupu adlanır. yuxarıda gördük ki, P-oxşarlıq çevrilmələri D-hərəkət çevrilmələri çoxluğu A -nın alt çoxluqlarıdır, yəni $P \subset A, D \subset A$. Odur ki, oxşarlıq çevrilmələri qrupu, hərəkət çevrilmələri qrupu, afin çevrilmələri qrupunun alt qruplarıdır.

A_1 (A -1-ci növ afin çevrilmələri qrupu, $A(M_0) - M_0$ - nöqtəsini tərpənməz saxlayan afin çevrilmələri qrupu, mərkəzi-afin çevrilmələr qrupu) $A(a)$ -a düz xəttini tərpənməz saxlayan afin çevrilmələr qrupu A -nın qruplarıdır.

İndi afin-ekvivalentlik haqqında bəzi nəzəri məlumatları verək.

İndi F_1 və F_2 fiquru afin və ya A -ekvivalent adlanırlar, əgər $F \subset A$ olduqda $f(F_1) = F_2$ olsun, onda F_1 kimi yazılır.

Deməli, afin ekvivalentlik ekvivalentlik münasibətidir. A ekvivalentlik haqda aşağıdakı təkliflər vardır.

Teorem1: İki $ABCD$ və $A'B'C'D'$ dördbucaqlıya yalnız və yalnız onda A -ekvivalent olurlar ki, $(AC, E) = (A'C', E')$ və $(BD, E) = (B'D', E')$ olsun. Burada $(AC) \cap (BD) = E, (A'C') \cap (B'D') = E'$ kimi işarə olunub.

İsbatı: $F = ABCD \xrightarrow{f} A'B'C'D' = F'$ Onda, elə $f \in A$ var ki, $f(F) = F'$ və $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C', f(D) = D'$. Onda $(AC) \xrightarrow{f} (A'C'), (BD) \xrightarrow{f} (B'D')$ odur ki, $(AC) \cap (BD) = E \xrightarrow{f} E' = (A'C') \cap (B'D')$. Afin çevrilmədə üç nöqtənin nisbəti dəyişmir, deməli $(AC, E) = (A'C', E'), (BD, E) = (B'D', E')$ olar.

Tərsinə $ABCD$ və $A'B'C'D'$ dördbucaqlılarında $(AC, E) = (A'C', E')$ və $(BD, E) = (B'D', E')$ ödənilir. Elə f afin çevrilməsinə baxaq ki,

$f : (A, B, C) \rightarrow (A', B', C')$ olsun. $R(A, B, C) \rightarrow R'(A', B', C')$ verilənə görə $(AC, E) = (A'C', E')$ yəni, $E \in (AC), f(E) = E', f(BE) = (B'E')$ və $(BD, E) = (B'D', E')$ olduğundan $f(D) = D'$ olur. Yəni $(ABCD) \xrightarrow{f} (A'B'C'D')$

Teorem2: İxtiyari iki ellips afin ekvivalentdirlər. γ və γ' iki ellips olsun. Böyük oxlar A_1A_2 və $A'_1A'_2$ olsun. ω və ω' çevrilmələri $[A_1A_2]$ və $[A'_1A'_2]$ diametrləri üzərində qurulmuşlar.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

$\omega: x^2 + y^2 = a^2, \quad \omega': x'^2 + y'^2 = a'^2 \quad y' = \frac{b}{a}y, \quad x = x'$ Afin çevrilməsi ilə $\omega \rightarrow \gamma$ ellipsinə çevirir. Yəni $f_1(\omega) = \gamma_1, f_2(\omega') = \gamma_2, f_3$ oxşarlıq çevrilməsi ω çevrəsini ω' çevrilməsinə çevirir. Onda $f_3(\omega) = \omega'$ Beləliklə $f = f_2 f_3 f_1^{-1}$ afin çevrilməsi γ -nı γ' -ə çevirir. Bu qayda ilə isbat etmək olar ki,

Teorem3: İxtiyari iki hiperbola afin ekvivalentdirlər.

Teorem4: Hər bir afin çevrilmə zamanı iki tərtibli xətt iki tərtibli xəttə çevrilir, bu zaman ixtiyari iki eyni tipə mənsub iki tərtibli xəttlər afin ekvivalentdirlər, müxtəlif tipə mənsub iki tərtibli xəttlər afin ekvivalent deyillər

Doğrudan da 1.2.3.5. 7.9 tiplərə baxaq 1.2.3.5 aydındır. Fərz edək γ əyrisi iki kəsişən düz xəttədən ibarətdir. $\gamma: (AB) \cap (CD), \gamma': (A'B') \cap (C'D') \quad R = (A, B, C), R' = (A', B', C')$ kimi iki afin reper götürək. $f: R \rightarrow R'$ afin çevrilməsi zamanı $A \underline{f} A', B \underline{f} B', C \underline{f} C' \quad (AB) \underline{f} (A'B'), (AC) \underline{f} (A'C')$. Həmin qayda ilə γ iki paralel düz xətt olan hala və ya 9 cu ; γ -üst -üstə düşən düz xətt olan hala baxmaq olar. Eyni tiplər ekvivalentdir.

Müxtəlif tipə mənsub olan əyrilər qeyri-ekvivalent olduğunu göstərək. Afin çevrilmə qarşılıqlı-birqiymətli olduğundan, afin çevrilmə zamanı əyrilərin
-həqiqi nöqtələri həqiqi nöqtələrinə,
-xəyali nöqtələri xəyali nöqtələrinə,
-əyrinin mərkəzləri əyrinin mərkəzlərinə çevrilir.

Həmdə koordinat sistemini əlverişli qaydada seçməklə əyrinin bir repərdəki tənliyi uyğun repərdə əyrinin obrazını tənliyi ilə eyni olur, deməli müxtəlif tipli əyrilərin xarakteristikaları da müxtəlif olur, yəni afin ekvivalent olmurlar.

§ 5. Həndəsi çevrilmələri məktəb həndəsə məsələlərinə tətbiqləri.

Müstəvi çevrilmələrini həndəsə məsələlərinin həllinə tətbiqi nümunələrinə baxaq.

Məsələ 1. a düz xətti və bu düz xəttin bir hərifində iki A və B nöqtələri verilmişdi. İsbat etməli ki, bu düz xətt üzərində yeganə M_0 nöqtəsi var ki, düz xəttin digər nöqtələri üçün $AM_0 + BM_0 < AM + BM$ şərtini ödəyir.

Həlli: a düz xəttinə nəzərən s simmetriya çevrilməsinə baxaq $S(A) = A_1, S(B) = B_1, (A_1A) \cap (B_1B) = M_0 \in a$ tələb edilən nöqtə olar. Doğrudan da $S(B) = B$ olduğu üçün $BM_0 = B_1M_0, A_1M_0, B_1$ bir düz xətt üzərində olduğundan $AM_0 + M_0B = AB$ olar. $M_0 \neq M, M \in D$ olarsa, $AM + MB = AM + MB_1$ alarıq $\triangle AMB_1$ -dən $AB < AM + MB_1 = AM + MB. \quad A = AM_0 + M_0B < AM + MB$

Məsələnin şərtini ödəyən M_0 nöqtəsi birdir. Çünki, $(AB_1) \cap a = M_0$ nöqtəsi yeganədir.

Məsələ2. M müxtəlif tərəfli $\triangle ABC$ -nin medianlarının kəsişmə nöqtəsidir H ortosentir O-xaricə çəkilməmiş çevrənin mərkəzi olarsa $(OH, M) = \frac{1}{2}$ olduğunu sübut etməli.

Həlli: AA_1, BB_1, CC_1 -medianlar, $(AH_1), (BH_2), (CH_3)$ hündürlüklərdir. M – medianların kəsişmə nöqtəsidir. h_0 –homotetiyası, M mərkəzli və $\lambda = -\frac{1}{2}$ əmsallı olarsa $A_1 = h_0(A)$, $B_1 = h_0(B)$, $C_1 = h_0(C)$ odur ki, üçbucağın tərəflərinə endirilən perpendikulyarlar orta perpendikulyarlara çevrilər, yəni $O = h_0(H)$ yəni $\overrightarrow{MO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MH}$ olar. İsbat olundu.

Məsələ 3. İxtiyari ABCD tirapesiyasında yan tərəflərin S kəsişmə nöqtəsi, diaqonalların kəsişdiyi M nöqtəsi və oturacaqların O_1, O_2 orta nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşir.

Həlli: $R = (A, C, D)$ və $R' = (B, D, C)$ kimi iki afin götürək. Bu reperlər

$f: R \rightarrow R', f: \begin{bmatrix} A & \xrightarrow{f} B \\ C & \xrightarrow{f} D \\ D & \xrightarrow{f} C \end{bmatrix}$ inikasını yaradar. Onda

$(AC) \xrightarrow{f} (BD), (AC) \cap (BD) = M \leftrightarrow M. (AD) \cap (BC) = S, (SM) \xrightarrow{f} (SM), SS \xrightarrow{f} S.$

$[AB] \xrightarrow{f} [BA] \Rightarrow E \xrightarrow{f} E, [DC] \xrightarrow{f} [CD] \Rightarrow F \xrightarrow{f} F$ Deməli bu, çevrilməyə

$(MS) \xrightarrow{f} (MS)$ olar və $E, F \in (MS)$ olar.

İsbat olundu.

Ellips,hiperbola və parabolanın kanonik tənlikləri, direktrisləri. Hiperbolanın asimptotları.
İki tərtibli xətlərin polyar tənlikləri.

Plan.

- 1.Ellips,onun kanonik tənliyi və xassələri.
- 2.Hiperbola, onun kanonik tənliyi və xassələri.
- 3.Parabola və onun kanonik tənliyi və xassələri.
- 4.Hiperbolanın direktrisləri və direktorial xassə.
- 5.İki tərtibli əyrilərin polyar tənlikləri .

§1.Ellips,onun kanonik tənliyi və xassələri.

Tərif. Fokslar adlanan iki nöqtədən məsafələri cəmi sabit olub, bu sabit fokslar arasındakı məsafədən böyük olan nöqtələr çoxluğuna ellips deyilir.

F_1 və F_2 fokus nöqtələri olarsa, $F_1F_2=2C$ ilə işarə edək . $0 \in [F_1F_2]$, $OF_1=OF_2=C$ olsun. $(0, i, j)$ sistemini elə seçək ki, $i \in [OF_1]$, $j \perp (F_1F_2)$ olsun. Bu sistemdə

$F_1(C,0)$, $F_2(-C,0)$ olar. $\forall M(x,y) \in Y$ olsa, Tərifə görə

$$F_1M + F_2M = \text{const} = 2a$$

$2a > 2c$ ellipsin tərifini ifadə edir.

$a > c$ götürüb $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ -nı sadə şəkllə salaq.

$a^2 - c^2 = b^2 > 0$ ilə əvəz etsək $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1) ellipsin tərifini ödəyən tənlik olar. Bu zaman $F_1M =$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x, \quad F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x$$

M-nöqtəsinin fokalradius vektorları adlanırlar.

$F_1=F_2$ olarsa $C=0$ və (1)-dən $a=b$ alınır. $x^2+y^2=a^2$ çevrə tənliyidir. Yəni çevrə ellipsin xüsusi halıdır.

Ellipsin xassələrini verək.

1°. Ellips 2 tərtibli əyridir, x və y iki dərəcəli olduğuna görə .

2°. (1) -dən $x^2 \leq a^2$, $y^2 \leq b^2$ olduğu üçün $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ yəni ellipsin nöqtələri dörd bucaqlı nın daxilində yerləşir.

3°. Ellips simmetrik əyridir, yəni $M(x,y) \in Y$ old.

$M^1(-x,-y) \in Y$ - 0-ya nəzərən simmetrik

$M^{11}(-x,y) \in Y$ - (0y) -ə nəzərən simmetrik

$M^{111}(x,-y) \in Y$ - (0x) - ə nəzərən simmetrik

(0x) və (0y) simmetriya oxları, 0 –simmetriyanın mərkəzidir.

4°. $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ ellipsin təpələri , yəni oxlarla kəsişmə nöqtələridir.

$$(0x) \cap Y = \{A_1, A_2\}, (0y) \cap Y = \{B_1, B_2\}$$

$2a$ və $2b$ onun oxları, a və b y / oxları , həm də $a > b$ olur.

5°. $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ədədinə ellipsin eksentrisiteti deyilir. $C = \varepsilon a$. $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \varepsilon^2 a^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$. $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

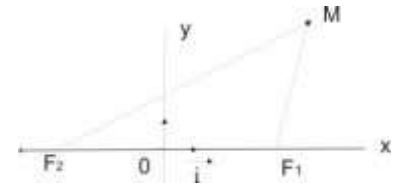
Buradan görünür ki, $c=0$ olduqda $b=a$, $\varepsilon = 0$ $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < \dots < \varepsilon_e$ olduqda ellips çevrədən daha çox meyl edir.

6°. $X = a \cos t$, $y = b \sin t$ ellipsin parametrik tənlikləri adlanır. Bu tənliklərdən istifadə edərək pərgar və xətkəşin köməyi ilə ellips nöqtələrini qurmaq olar.

$M_1(a \cos t, a \sin t)$, $M_2(b \cos t, b \sin t)$

$$M(a \cos t, b \sin t) \frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 t}{b^2} = 1 \Rightarrow M \in Y$$

7°. $X = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ düz xətləri ellipsin direktrisləri deyilir.



d_1 direktrisi F_1 -fokusuna uyğun, d_2 direktrisi F_2 -fokusuna uyğun adlanır. Göstərmək olar

$$\text{ki, } \frac{\rho(M, d_1)}{\rho(M, F_1)} = \frac{\rho(M, d_2)}{\rho(M, F_2)} = \varepsilon. \text{ Doğrudan da } \rho(M, d_1) = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right|$$

$$\rho(M, F_1) = a - \frac{c}{a}x = a - \varepsilon x \text{ olduğuna görə.}$$

2. Hiperbola, onun kanonik tənliyi və xassələri.

Tərif. Fokus adlanan iki nöqtədən məsafələri fərqlərinin mütləq qiyməti sabit olub bu sabit fokuslar arasındakı məsafədən kiçik olan nöqtələr çoxluğuna hiperbola deyilir.

F_1 və F_2 fokus nöqtələri olarsa, $F_1F_2 = 2c$ ilə işarə edək və $O \in [F_1F_2]$, $OF_1 = OF_2$ qəbul

edək. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sistemini elə seçək ki, $\vec{i} \parallel \overrightarrow{OF_1}$, $\vec{j} \perp (F_1F_2)$ olsun. $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ fokal məsafələrdir.

$$\forall M(x, y) \in \gamma \text{ olarsa, tərifə görə } \begin{cases} |F_1M - F_2M| = 2a \\ 2a < 2c \end{cases} \text{ kimi yazmaq olar. } F_1(c, 0), F_2(-c, 0) \text{ yazılar. } a < c$$

olduqda $\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a$ tənliyini $b^2 = c^2 - a^2$ əvəzləməsi ilə birlikdə

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = t$ şəklinə gətirmək olar. Bu zaman $r_1 = F_1M = \left| \frac{c}{a}x - a \right|$, $F_2M = r_2 = \left| \frac{c}{a}x + a \right|$ kimi təyin olunur.

$$x > 0 \text{ olduqda, } r_1 = \frac{c}{a}x - a, r_2 = \frac{c}{a}x + a;$$

$$x < 0 \text{ olduqda, } r_1 = -\frac{c}{a}x + a, r_2 = -\frac{c}{a}x - a \text{ olar. Hər iki halda } |r_1 - r_2| = 2a \text{ alınır.}$$

Hiperbolanın xassələrinin (1) kanonik tənliyinin köməyi ilə almağa çalışaq.

1⁰. Hiperbola ikitərtibli əyridir, çünki tənlik x -ə və y -ə görə iki dərəcəlidir.

2⁰. Hiperbola simmetrik əyridir. Çünki $M(x, y) \in \gamma$ olduqda;

$$M'(-x, -y) \in \gamma - \text{yəni } O\text{-ya nəzərən simmetrik,}$$

$$M''(-x, y) \in \gamma - \text{yəni } (OY)\text{-ə nəzərən simmetrik,}$$

$$M'''(x, -y) \in \gamma - \text{yəni } (OX)\text{-ə nəzərən simmetrikdir.}$$

Hiperbolanın koordinat başlanğıcına nəzərən və koordinat oxlarına nəzərən simmetriyaları vardır.

3⁰. Hiperbola (OX) oxu ilə $(ox) \cap \gamma = \{A_1(a, 0), A_2(-a, 0)\}$ iki həqiqi nöqtədə (oy) oxu ilə

$B_1(0, b), B_2(0, -b)$ xəyali nöqtələrdə kəsişir. (OX) - həqiqi ox, (OY) - xəyali oxdur. (A_1A_2) - həqiqi, (B_1B_2) - xəyali oxlar adlanır.

4⁰. 0-dan keçən düz xətlə hiperbolanın kəsişmə nöqtələrini müəyyən edək.

$$y = kx, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x^2(b^2 - k^2a^2) = a^2b^2 \quad b^2 - k^2a^2 > 0 \text{ olarsa}$$

$$d \cap \gamma = \{M_1, M_2\}, \quad M_{1,2} \left(\frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}, \quad \frac{\pm kab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} \right)$$

İki tərtibli xəttin ümumi tənliyi, asimptotik

istiqaməti, toxunanı, mərkəzi, diametri və
onun təyini.

Plan:

1. İki tərtibli xətt və onun düz xətlə kəsişməsi.
2. İki tərtibli xəttin asimptotik istiqaməti.
3. İki tərtibli xəttin mərkəzi.
4. İki tərtibli xəttin toxunanı.
5. İki tərtibli xəttin diametri.
6. Verilmiş istiqamətlə qoşma olan diametrin tənliyinin qurulması və xassələri.

§1. İki tərtibli xətt və onun düz xətlə kəsişməsi.

$R = (0, P_1, P_2)$ sistemində $M(X, Y)$ nöqtəsinin koordinatları

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (1)$$

tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğuna 2 tərtibli əyri deyilir. $a_{11}, a_{12} = a_{21}, a_{22}$ 2 dərəcəli hədd əmsalları, $a_{10} = a_{01}, a_{20} = a_{02}$ bir dərəcəli hədd əmsalları, a_{00} – sərbəst hədd adlanır. Belə işarələr qəbul edək.

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00}$$

$$F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{10}, \quad F_2(x, y) = a_{12}x + a_{22}y + a_{20}$$

$$F_0(x, y) = a_{10}x + a_{20}y + a_{00} \quad \text{Onda } F(x, y) = xF_1(x, y) + yF_2(x, y) + F_0(x, y) = 0 \text{ olar.}$$

Misal kimi, ellipsi, hiperbola və parabolunu göstərmək olar. Ellipsdə: $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$, $a_{10} = a_{20} = 0$, $a_{00} = -1$. Parabolada: $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, $a_{10} = 2p$, $a_{00} = 0$. və s.

(1) əyrisinin d düz xətti ilə kəsişməsinə baxaq. $d: x = x_0 + p_1 t, y = y_0 + P_2 t$ (1) də yerinə yazaq:

$$a_{11}(x_0 + p_1 t)^2 + 2a_{12}(x_0 + p_1 t)(y_0 + P_2 t) + a_{22}(y_0 + P_2 t)^2 + 2a_{10}(x_0 + p_1 t) + 2a_{20}(y_0 + P_2 t) + a_{00} = 0, \quad \text{sadələşdirsək}$$

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \quad (2)$$

alırıq. Burada $P = a_{11}P_1^2 + 2a_{12}P_1P_2 + a_{22}P_2^2$

$$Q = F_1(x_0, y_0)P_1 + F_2(x_0, y_0)P_2 = a_{11}x_0P_1 + a_{12}(x_0P_2 + y_0P_1) + a_{21}y_0P_2 + a_{10}P_1 + a_{20}P_2$$

$$R = F_0(x_0, y_0) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00}.$$

t-yə görə tənliyin həlləri sayı d $\cap \gamma$ -nin nöqtələrə sayını verir. Aşağıdakı hallar var.

$Q \neq 0$ olduqda 2 kvadrat tənliyin həlləri belədir.

1) $\Delta = Q^2 - PR > 0$ olduqda $\gamma \cap d = \{M_1, M_2\}$, M_i – həqiqi müxtəlif

2) $\Delta = Q^2 - PR = 0 \Rightarrow \gamma \cap d = \{M_1, M_2\}$, M_1, M_2 həqiqi

3) $\Delta = Q^2 - PR < 0 \Rightarrow \gamma \cap d = \{M_1, M_2\}$, M_i – xəyali qoşma

$P = 0$ olduqda (2) $\Rightarrow 2Qt + R = 0$

a) $Q \neq 0 \Rightarrow t = t_1 = \frac{R}{2Q}$ bir həqiqi nöqtə

b) $(Q = 0, R \neq 0) \Rightarrow d \cap \gamma = \emptyset$ kəs. nöqtəsi yoxdur.

v) $(Q = 0, R = 0) \Rightarrow d \cap \gamma$ sonsuz sayda kəsişmə nöqtəsi.

Beləliklə, iki tərtibli əyri $P \neq 0$ olduqda düz xətlə iki həqiqi müxtəlif, iki həqiqi eyni və ya iki xəyali qoşma nöqtələrdə kəsişər.

$P = 0$ olduqda ya bir həqiqi nöqtədə kəsişər, ya heç kəsişməz, ya da düz xəttin bütün nöqtələri əyri üzərində yerləşər.

§2. İki tərtibli xəttin asimptotik istiqaməti.

P -nin ifadəsindən görünür ki, o yalnız $P(P_1, P_2)$ // d vektorunun koordinatlarından asılıdır. $P = 0$ olduqda d düz xətti γ əyrisini birdən artıq olmayan sayda nöqtədə kəsir ($P = Q = R = 0$ halı trivialdır). Bu halda P -nin istiqamətinə əyrinin asimptotik istiqaməti deyilir. Onun tənliyi $a_{11}P^2 + 2a_{12}P_1P_2 + a_{22}P_2^2 = 0$ olar.

$a_{22} \neq 0$ olarsa $P_1 \neq 0$ olur. Əgər $P_1 = 0$ olsa onda $\vec{P}_2 = \vec{0}$ və $P = 0$ alınardı, lakin $P \neq 0$ $\frac{P_2}{P_1} = k$ ilə işarə edək. Onda $a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0$ alarıq. Buradan

$$k_{1,2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{\delta}}{a_{22}}, \quad \delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$\Rightarrow$

$a_{22} = 0 \Rightarrow a_{11}P_1^2 + 2a_{12}P_1P_2 = 0, P_1 = 0 \Rightarrow P(0, 1), a_{11}P_1 + 2a_{12}P_2 = P, P_2(-2a_{12}, a_{11})$ olar.

Aşağıdakı hall olar. 1) $\delta < 0 \Rightarrow k_1, k_2$ həqiqi olur, 2 asimptotik istiqamət vardır.

2) $\delta > 0 \Rightarrow k_1, k_2$ xəyali olur, asimptotik istiqamət yoxdur.

3) $\delta = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$ bir həqiqi asimptotik istiqamət vardır.

Beləliklə isbat etmiş oluruq:

$\delta > 0$ olduqda iki tərtibli əyrinin 2 həqiqi asimptotik istiqaməti, $\delta = 0$ olduqda bir həqiqi asimptotik istiqaməti var, $\delta < 0$ olduqda əyrinin həqiqi asimptotik istiqaməti yoxdur. Məsələn:

Ellips üçün: $a_{11}=\frac{1}{a^2}$, $a_{22}=\frac{1}{b^2}$, $\delta = -\frac{1}{a^2 b^2} < 0$ ellipsin asimptotik istiqaməti yoxdur.

Hiperbola üçün: $a_{11}=\frac{1}{a^2}$, $a_{22}=-\frac{1}{b^2}$, $\delta=\frac{1}{a^2 b^2} > 0$. hiperbolanın iki asimptotik

istiqaməti, həm də iki asimptotu vardır.

Parabola üçün: $a_{11}=0, a_{22}=1, \delta=0$. Yəni parabolanın bir asimptotik istiqaməti var.

§3. İki tərtibli əyrinin mərkəzi.

γ əyrisi (1) tənliyi $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ tənliyi ilə və $P(P_1P_2)$ verildikdə $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinin əyrinin P -yə paralel vətərinin orta nöqtəsi olması üçün $P_1 \cdot F_1(x_0, y_0) + P_2 \cdot F_2(x_0, y_0) = 0$ ödənməsi həm zəruri həm də kifayətdir.

$\vec{P} - y_0 //$ olan və M_0 -dan keçən l düz xətinin tənliyi $x = x_0 + P_1 t, y = y_0 + P_2 t$ olar.

Fərz edək $l \cap \gamma = \{M_1, M_2\}$, $M_1 - t_1, M_2 - t_2$ parametrlə uyğundur, yəni

$M_1(x_0 + P_1 t_1, y_0 + P_2 t_1), M_2(x_0 + P_1 t_2, y_0 + P_2 t_2)$ olar. $[M_1, M_2]$ -nin orta nöqtəsi o vaxt M_0 olur ki, $t_1 + t_2 = 0$ və tərsinə $t_1 + t_2 = 0$ olduqda M_0 $[M_1, M_2]$ -nin orta nöqtəsidir. D/x -lə əyrinin kəsişmə tənliyindən Viyet teoreminə əsasən $Q = P_1 F_1 + P_2 F_2 = 0$ alınır və təklif isbat olunur.

Teorem. $C(x_0, y_0)$ nöqtəsinin iki tərtibliyi əyrinin mərkəzi olması üçün x_0 və y_0 -in $a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0$

$a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0$ sistemini ödəməsi zəruri və kifayətdir.

Zərurilik. $C(x_0, y_0)$ əyrinin mərkəzidir $\Rightarrow C$ -dən keçən hər bir vətər C -də yarı bölünür. Onda yuxarıdakı təklifə əsasən $F_1(x_0, y_0) P_1 + F_2(x_0, y_0) P_2 = 0$ ödənməlidir. Buradan $F_1(x_0, y_0) = 0$

$F_2(x_0, y_0) = 0$ olur.

Kafilik. $C(x_0, y_0)$ yux. sist. ödəyir, onun mərkəz olduğunu isbat edək. Koor. başl. C nöqt. köçürək, onda $x = x + x_0, y = y + y_0$, yəni sistemdə

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}^1x + 2a_{20}^1y + a_{00}^1 = 0$$

$$a_{10}^1 = F_1(x_0, y_0), a_{20}^1 = F_2(x_0, y_0), a_{00}^1 = F(x_0, y_0)$$

$C(x_0, y_0)$ verilmiş sistemi ödədiyindən $a_{10}^1 = a_{20}^1 = 0$

Onda $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{00}^1 = 0$ alırıq. $\Rightarrow C$ əyrinin simmetriya mərkəzidir. Doğrudan da $M(x, y) \in \gamma$ olduqda $M_1(-x, -y) \in \gamma$ olur.

Buradan alınır:

Nəticə: Koordinat başlanğıcının əyrinin simmetriya mərkəzi olması üçün

$$a_{10}=a_{20}=0 \text{ ödənməlidir.}$$

Əyrinin mərkəzinin olması üçün yuxarıdakı sistemin həlli olmalıdır. Həll yeganə olduqda əyrinin yeganə mərkəzi (əyri mərkəzli əyri olur) var, sistemin həlli olmadıqda əyri mərkəzsiz əyri olur, sistemin sonsuz sayda həlli olduqda əyrinin mərkəzləri çoxluğu düz xətt əmələ gətirir.

§4. İki tərtibli əyrinin toxunması.

Düz xətt əyrini iki üst-üstə düşən nöqtədə kəsərsə onda həmin düz xətt əyriyə toxunan düz xətt adlanır.

Əyrinin adi nöqtəsində onun yeganə toxunanı olduğunu isbat edək. Fərz edək Y əyrisi (1) tənliyi ilə $x \cdot F_1(x,y) + y \cdot F_2(x,y) + F_0(x,y) = 0$ tənliyi ilə verilmişdir.

$M_0(x_0, y_0) \in Y$ olsun. Onda $F_0(x_0, y_0) = 0$. $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ tənliyində $R = F_0(x_0, y_0)$ olduğundan $Pt^2 + 2Qt = 0$ alırıq. Buradan $t(Pt + 2Q) = 0$. $t_1 = 0$

$Pt + 2Q = 0$, $P \neq 0$, $t_2 = -\frac{2Q}{P}$, $t_1 = t_2 = 0$ olması üçün $Q = 0$ olmalıdır. Yuxarıdakı işarələrdən istifadə etsək $Q = P_1 \cdot F_1(x_0, y_0) + P_2 \cdot F_2(x_0, y_0) = 0$ alarıq. M_0 adi nöqtə olduğundan F_1 və F_2 eyni zamanda "0" deyildir. Onda $P_1 : P_2 = F_2(x_0, y_0) : -F_1(x_0, y_0)$ olar. $M_0(x_0, y_0)$ -dan keçib P -yə // d/x -in tənliyi $\frac{x-x_0}{F_2(x_0, y_0)}$
 $= \frac{y-y_0}{-F_1(x_0, y_0)}$ və ya

$$(x-x_0) F_1(x_0, y_0) + (y-y_0) F_2(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow x \cdot F_1(x_0, y_0) + y \cdot F_2(x_0, y_0) - x_0 F_1(x_0, y_0) -$$

$-y_0 F_2(x_0, y_0) = 0 - x_0 \cdot F_1 - y_0 \cdot F_2 = -F_0$ olduğuna görə $x \cdot F_1 + y \cdot F_2 + F_0 = 0$ tənliyini alırıq.

Misal : 1) Ellipsin $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində toxunmanı: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

2) hiperbola üçün : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

3) parabola üçün $yy_0 = P(x+x_0)$ olar.

§5. İki tərtibli xəttin diametri.

$R = (0, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ afin koor.sistemində Y əyrisi $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = F(x,y) = 0$ şəklində verilib $\Rightarrow \forall P \Rightarrow (P_1, P_2) \neq 0$ vektorunu seçək və $\vec{P}$ -yə // olan vəterlərin orta nöqtələri çoxluğunu müəyyən edək. Yuxarıda isbat etmişik ki, $M(x, \vec{y})$ nöqtəsi P -yə // olan vəterin orta

nöqtəsi olması üçün $(a_{11}x+a_{12}\tilde{y}+a_{10})P_1+(a_{12}x+a_{22}\tilde{y}+a_{20})P_2=0$ şərti ödənməlidir. x və $\tilde{y}$ -ni x və y ilə işarə etmək olar. Onda $(a_{11}P_1+a_{12}P_2)x+(a_{12}P_1+a_{22}P_2)y+a_{10}P_1+a_{20}P_2=0$ alarıq. $P \neq 0$ olduğundan $(a_{11}P_1+a_{12}P_2)P_1+(a_{12}P_1+a_{22}P_2)P_2 \neq 0$

Buradan $a_{11}P_1+a_{12}P_2$ və $a_{12}P_1+a_{22}P_2$ ədədləri eyni zamanda sıfır deyillər. Deməli yuxardakı tənlikdə x və y -in əmsalları eyni zamanda sıfır deyillər. (t) düz xətt tənliyidir. Beləliklə isbat edirik ki,

Teorem. Əyrinin asimptotik istiqamətlərində olmayan $P(\vec{P}_1, P_2)$ vektoruna paralel vətərlərin orta nöqtələri çoxluğa düz xətt verir. Həmin düz xəttə əyrinin diametri deyilir.

Deməli $\vec{P}-y_0 \parallel$ olan vətərlərin orta nöqtələri çoxluğu

$(a_{11}P_1+a_{12}P_2)x+(a_{12}P_1+a_{22}P_2)y+a_{10}P_1+a_{20}P_2=0$ diametrin tənliyidir. Bu diametr P vektoruna və ya istiqamətinə qoşma diametr adlanır.

§6. Diametrin xassələri

Xassə1. Əgər Y əyrisinin mərkəzləri varsa, onda hər bir mərkəz ixtiyari diametr üzərindədir. Doğrudan da, $C(x_0, y_0)$ - mərkəzdirsə və ixtiyari diametirdisə, onda mərkəzin koordinatları $F_1(x_0, y_0) = F_2(x_0, y_0) = 0$ şərtini ödəyirlər. Diametrin tənliyi $P_1 * F_1 + P_2 * F_2 = 0$

Xassə2. Mərkəzli əyrinin mərkəzindən keçən və asimptotik istiqamətdə olmayan hər bir düz xətt əyrinin diametridir.

Həqiqətən $\vec{P}(P_1, P_2)$ və $a_{11}P_1^2 + 2a_{12}P_1P_2 + a_{22}P_2^2 \neq 0$ olarsa, $C(x_0, y_0)$ - mərkəzdirsə, onda $P(a_{12}P_1 + a_{22}P_2, -a_{11}P_1 - a_{12}P_2)$ vektoru istiqamətində C dən keçən hər bir

$$\frac{X - X_0}{a_{12}P_1 + a_{22}P_2} = \frac{Y - Y_0}{-a_{11}P_1 - a_{12}P_2} \text{ düz xətti diametri müəyyən edir.}$$

Xassə3. Mərkəzsiz əyrinin hər bir diametri asimptotik istiqamətə malikdir. d- mərkəzsiz əyrinin $\forall$ diametri olsun. Həmin diametrin tənliyi (D) tənliyidir. Onda d-nin istiqamətverici vektoru $q(-a_{21}P_1 - a_{22}P_2, a_{11}P_1 + a_{12}P_2)$ olar, həm də q asimptotik istiqamətə malikdir. Onda $a_{11}P_1 + a_{12}P_2 = -a_{21}P_1 - a_{22}P_2 = 0 \Rightarrow P = 0$

İki diametrin qoşmalılıq şərti, baş istiqamətlər.

Ümumi tənliyin kanonik şəklə gətirilməsi.

Plan:1. İki diametrin qoşmalılıq şərti.

2.Baş istiqamət, istiqamətin baş istiqamət olması şərti.

3.İki tərtibli əyrilərin təsnifi.

4. Ümumi tənliyin kanonik şəklə gətirilməsi.

§1. İki diametrin qoşmalılıq şərti.

Tərif: İki tərtibli əyrinin iki diametrinin biri o biri ilə qoşma olan vektora paralel vətərlərin orta nöqtələri çoxludursa, qoşma diametrlər adlanırlar.

Fərz edək mərkəzli γ əyrisini d_1 və d_2 kimi iki diametri verilmişdir. d_1 - diametri $\vec{p}(p_1, p_2)$ vektoru ilə d_2 diametri isə $\vec{q}(q_1, q_2)$ vektoru ilə qoşmadır. Əgər $d_2 \parallel \vec{p}$ olarsa, $\vec{q} \parallel d_1$ olar. Deməli, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem: Əgər d_1 diametri d_2 -yə paralel olan vətərlərin orta nöqtələri çoxludursa, onda d_2 diametri də d_1 paralel olan vətərlərin orta nöqtələri çoxluğu olar.

İsbatı: d_1 qoşmadır $\vec{p}$ ilə və d_2 qoşmadır. $\vec{q} \parallel \vec{p}$. Əgər $d_2 \parallel \vec{p}$ olarsa $\vec{q} \parallel d_1$ olar. $d_2 \parallel \vec{p}$ olduqda $\vec{q} \parallel d_1$ olduğunu isbat edək. $\vec{q}$ ilə qoşma diametrin tənliyi $(a_{11}x + a_{12}y + a_{10})q_1 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{20})q_2 = 0$ olar. $\vec{p}(p_1, p_2) \parallel d_2$ olduğu üçün, bu tənlikdən d_2 tənliyini $(a_{11}q_1 + a_{22}q_2)x + (a_{12}q_1 + a_{22}q_2)y + (a_{10}q_1 + a_{20}q_2) = 0$ kimi yazmaq olar.

Vektorun düz xəttə paralellik şərtinə əsasən $(a_{11}q_1 + a_{12}q_2) : p_2 = (a_{12}q_1 + a_{22}q_2) : p_1$ olar. Çevirsək $(a_{11}q_1 + a_{12}q_2)p_1 + (a_{12}q_1 + a_{12}q_2)p_2 = 0$ $a_{11}p_1q_1 + a_{12}(p_1q_2 + p_2q_1) + a_{22}p_2q_2 = 0$ və ya $(a_{11}p_1 + a_{12}p_2)q_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)q_2 = 0$ Buradan $\frac{-(a_{21}p_1 + a_{22}p_2)}{q_1} = \frac{a_{11}p_1 + a_{22}p_2}{q_2}$ (*)

Əgər d_1 qoşma diametrin tənliyi $(a_{11}x + a_{12}y + a_{10})q_1 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{20})q_2 = 0$ və ya $(a_{11}p_1 + a_{22}p_2)x + (a_{12}x + a_{22}y)y + (a_{10}p_1 + a_{20}p_2) = 0$ kimi yazılsa, onda (*) münasibəti göstərir ki, $\vec{q} \parallel d_1$ yəni teorem isbat olunur. Bu teoremin tərsi də doğrudur, yəni əgər $\vec{q} \parallel d_1 \Rightarrow d_2 \parallel \vec{p}$ alınar. İkisini birləşdirsək $\vec{p} \parallel d_1$ qoşma və $\vec{q} \parallel d_2$ qoşmadırsa, $\vec{q} \parallel d_1 \Leftrightarrow d_2 \parallel \vec{p}$ zəruri və kafi şərti olar. Beləliklə alırıq ki, mərkəzli əyrinin iki diamerindən biri o birinə paralel olan vətərlərin orta nöqtələrindən keçirsə, onlar qoşma diametirlərdir.

Təklif: Göstərmək olar ki, iki diametrin qoşmalılığı həndəsi mənə daşıyır, yəni koordinat sisteminin seçilməsindən asılı deyildir.

a)əyri mərkəzlidirsə, onda qoşmalılıq şərti $a_{11}p_1q_1 + a_{12}(p_1q_2 + p_2q_1) + a_{22}p_2q_2 = 0$ və ya $(a_{11}p_1 + a_{12}p_2)q_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)q_2 = 0$ şərtini ödəyir. Yəni, (p_1, p_2) -nin verilməsi ilə (q_1, q_2) yeganə qaydada təyin edilə bilər.

b) $\vec{p}(p_1, p_2)$ asimptotik istiqamət olarsa, yəni $a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0$ tənliyi ödənirsə $\Delta \neq 0$ olduqda $(a_{11}p_1 + a_{12}p_2)p_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)p_2 = 0$ şərtinə görə $a_{11}p_1 + a_{12}p_2$, $a_{21}p_1 + a_{22}p_2$ ədədləri eyni zamanda sıfır olmazlar, çünki $\vec{p} \neq 0$ odur ki, qoşmalılıq şərtini ödəyən bütün $\vec{q}(q_1, q_2)$ vektorları cüt-cüt kollinearlıqlar və bir ölçülü alt vektor alt fəza əmələ gətirilir. Həmin alt fəza $\vec{p}$ vektoruna // olan vektorlardır. $\vec{p}$ ilə qoşma olan və $\vec{q}$ fərqli istiqamət olmaz. Əgər $\Delta = 0$ olarsa $a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = 0$, $a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = 0$ ədədləri eyni zamanda sıfır olurlar. Onda $0 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 = 0$ qoşmalılıq şərti kimi olar və $\forall \vec{q}$ vektoru qoşmalılıq şərtini ödəyir. Bu zamanda da $\vec{p}$ və $\vec{q}$ qoşma olurlar.

§2. Baş istiqamət, iki istiqamətin baş istiqamət olması şərti.

Əgər ikitərtibli əyriyə nəzərən hər hansı istiqamət özünə perpendikulyar olan istiqamətlə qoşma olarsa, baş istiqamət adlanır. Başqa sözlə öz qoşma istiqamətinə perpendikulyar istiqamət baş istiqamətdir.

Qoşmalılıq qarşılıqlı olduğundan baş istiqamət perpendikulyar olan istiqamətin özü də baş istiqamətdir.

$(0, \vec{i}, \vec{j})$ Sistemində $\vec{p}(p_1, p_2)$ baş istiqamət vektorudur. Onda $\vec{p} \perp \vec{q}$ və $\vec{p}$ qoşma $\vec{q}$ olmalıdır. Yəni, 1) $p_1q_1 + p_2q_2 = 0$

2) $a_{11}p_1q_1 + a_{12}(p_1q_2 + p_2q_1) + a_{22}p_2q_2 = 0$ ödənməlidir. (1)-i nəzərə alsaq $a_{11}p_1p_2 + a_{12}(p_1p_1 - p_2p_2) + a_{22}p_2p_1 = 0$ buradan da $a_{11}(p_1^2 - p_2^2) + (a_{22} - a_{11})p_2p_1 = 0$ alınır. Bu tənlik baş istiqamətlərin müəyyən edilməsinə imkan yaradır. Aşağıdakı hallara baxaq: 1) $a_{12} \neq 0$, $p_1 \neq 0$

olarsa $\vec{p} \neq 0$ $k = \frac{p_2}{p_1}$ işarə etsək

$$k^2a_{12} + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0, \quad k_{1,2} = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}, \quad k_1 \cdot k_2 = -1$$

Buradan alınır ki, γ əyrisinə nəzərən yalnız iki baş istiqamət vardır.

2) $a_{12} = 0$, $a_{22} - a_{11} \neq 0$ onda tənlik belə olar. $(a_{22} - a_{11})p_2p_1 = 0$, $p_1 \cdot p_2 = 0$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$ Bu halda da γ əyrisinə nəzərən yalnız 2 baş istiqamət var.

3) $a_{12} = 0$, $a_{22} - a_{11} = 0$ onda $\forall \vec{p}(p_1, p_2) \neq \vec{0}$ vektorunun istiqaməti baş istiqamət olar. Bu halda əyri çevrə olar. (həqiqi, xəyali və ya 0 radiuslu) İsbat etdik ki, teorem doğrudur. Hər bir iki tərtibli əyriyə nəzərən yalnız iki baş istiqamət vardır. Çevrəyə nəzərən isə müstəvinin hər bir istiqaməti baş istiqamət olar.

Tərif: Baş istiqamət qoşma olan dimetri baş dimatri adlanır və ya dimaetr özü ilə qoşma olan istiqamətə $\perp$ olarsa baş dimatri adlanır.

§3. İki tərtibli əyrilərin təsnifi.

Əyrinin təsnifi nə deməkdir? Əyrini təsnif etmək üçün əvvəlcə koordinat sistemini əlverişli qaydada seçməklə tənlik sadə şəkllə gətirilir və sonra onun tipi müəyən edilir. İndi γ əyrisini ümumi şəkildə verildikdə onu sadə şəkllə gətirməyə çalışaq. γ əyrisi $(0, \vec{i}, \vec{j})$ sistemində $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ kimi verilib. $(0, \vec{i}, \vec{j})$ sistemini elə seçək ki, yeni sistemdə $\vec{i}'$, deməli həm də $\vec{j}'$ baş istiqamətdə olsunlar. Yeni sistemdə tənlik ştriklərlə yazılır. $\vec{j}$ baş istiqamət olduğundan yuxarıdakı qoşmalıq şərtindən $a_{12}' = 0$ alınır. Onda tənlik $a_{11}'(x')^2 + a_{22}'(y') + 2a_{10}'x' + 2a_{20}'y' + a_{00} = 0$ olar. Sonra O' başlanğıcı elə seçilir ki koordinat başlanğıcını O' -ə // köçürdükdə tənlik sadələşir. Bu zaman belə hallar olar.

a) əyri mərkəzlidir: onda // köçürməklə $(0, \vec{i}', \vec{j}')$ sistemində əyri $a_{11}'(x')^2 + a_{22}'(y') + a_{00}' = 0$ şəkllə düşər. $a_{11}' \cdot a_{22}' \neq 0$ İki hal olar. 1) $a_{00}' \neq 0 \Rightarrow \frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{B} = 1$ $A = -\frac{a_{00}'}{a_{11}'}$, $B = -\frac{a_{00}'}{a_{22}'}$ Əmsalların müxtəlif qiymətlərində

alırıq. $A \geq 0$ Fərz edək

1a) $A > 0$, $B > 0$ – ellips,

1b) $A > 0$, $B < 0$ – hiperbola

1v) $A < 0$, $B < 0$ – xəyali ellips

2) $a_{00}' = 0$ olarsa tənlik $\frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{B} = 0$ olar. Hallar.

2a) $B < 0$ tənlik iki kəsişən düz xətlə verilir.

$(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 0$ $a = \sqrt{A}$, $b = \sqrt{-B}$ 2b) $B > 0$ onda iki xəyali düz xətt $O(0,0)$

yeganə həqiqi nöqtə olur. $\frac{x}{a} + i\frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} - i\frac{y}{b} = 0$

b) əyri çox mərkəzlidir. Onda O nöqtəsini O' mərkəzlərin birinə

çöçürək. Onda $y'^2 + c = 0$, $c = \frac{a_{00}'}{a_{22}'}$ kimi işarə olunub.

1) $c < 0$ olarsa $c = -a^2$ işarə etsək $(y-a)(y+a) = 0$ iki // düz xətt alınır.

2) $c > 0$ iki xəyali düz xətt parçalanır.

3) $c = 0$ İki həqiqi üst-üstə düşən düz xətt

v) əyrinin mərkəzi yoxdur. O' Nöqtəsini baş diametrin O' nöqtəsinə // köçürək. Onda əyri yalnız bir baş diametrə malik olar. Bu diametr $(0, \vec{i}')$ ilə eyni olar. $\vec{i}'$ asimptotik istiqamət olduğundan $a_{11}' = 0$ $a_{20}' = 0$ olar çünki

absis oxu baş diametrdır. Onda tənlik $(0, \vec{i}, \vec{j})$ sistemində $a_{22}' y'^2 + 2a_{10}' x' + a_{00} = 0$ həm də $a_{11}' \neq 0$ olar. $y' = 0$ olduqda $x = -\frac{a_{00}'}{2a_{10}'}$, və

kəsişmə nöqtəsi $(-\frac{a_{00}'}{2a_{10}'}, 0)$ olar. O' həmin nöqtəyə köçürsək tənlik

$$a_{22}' y'^2 + 2a_{10}' x' = 0 \quad y'^2 = 2px', \quad p = -\frac{a_{10}'}{a_{22}'}, \quad \text{əyrinintipləri belə olar.}$$

§4. İki tərtibli əyri tənliyinin kanonik şəkə gətirilməsi.

Əyri tənliyinin kanonik şəkə gətirilməsi aşağıdakı sxem üzrə aparılır.

1) Xarakteristik tənliyin kökləri

$$\text{tapılır} \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - a_{12}^2 = 0$$

$$2) \vec{i}'(\cos \alpha, \sin \alpha) \quad \vec{j}'(-\sin \alpha, \cos \alpha) \quad \sin \alpha = \frac{tg \alpha}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}, \quad tg \alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \quad 3) \text{ düsturundan istifadə edərək}$$

$$a_{10}' = a_{10} \cos \alpha + a_{20} \sin \alpha, \quad a_{20}' = -a_{10} \sin \alpha + a_{20} \cos \alpha \quad a_{20}' = a_{20} \quad \text{hesablanılır.}$$

4) Koordinat başlanğıcı O'-ə köçürülür

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_{10}' x' + 2a_{20}' y' + a_{00}' = 0 \quad O' \left(-\frac{a_{10}'}{\lambda_1}, -\frac{a_{20}'}{\lambda_2} \right) \text{-yə // köçürülür.}$$

5) $(0, \vec{i}, \vec{j}), (0', \vec{i}', \vec{j}')$ sistemləri qurulur və əyrinin sonuncu sistemdə kqnonik tənliyi və qrafiki qurulur.

Misal 1. $5x^2 + 5y^2 + 8xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 8 = 0$ tənliyini sadələşdirməli.

Həlli: 1) Xarakteristik tənliyini yazaq:

$$\lambda^2 - (5+5)\lambda + 5*5 - 16 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 9$$

2) $\vec{i}', \vec{j}'$ koordinantlarını hesablayaq.

$$tg \alpha = \frac{1-5}{4} = -1, \quad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \alpha = 45^\circ \quad \vec{i}' \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \vec{j}' \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$3) \quad a_{10}' = a_{10} \cos \alpha + a_{20} \sin \alpha = -1, \quad a_{20}' = -a_{10} \sin \alpha + a_{20} \cos \alpha = 0 \quad \text{Tənlik} \\ x'^2 + 9y'^2 - 2x' - 8 = 0 \quad \text{şəklinə düşər.}$$

4) $\Delta = 1 * 9 \neq 0$ olduğundan mərkəzli əyridir. O'(1,0) // köçürmə

$$\text{düsturu } x' = X + 1, \quad y' = Y \text{ odur ki, } x^2 + 9y^2 - 9 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Misal 2 $2y^2 + 4x - 8y + 9 = 0$ tənliyini sadələşdirməli. $a_{12} = 0$ olduğundan $\vec{i}'$ $\vec{j}'$ baş istiqamətlərdir. $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases}$ sisteminin $\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y - 4 = 0 \\ 0 \cdot x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$ həlli yoxdur. Baş diametr $\vec{i}'$ ilə qoşmadır. Onun tənliyi $2y - 4 = 0$ və ya $y = 2$ olduqda $x = -\frac{1}{4}$, $(-\frac{1}{4}, 2)$ parabolun tənliyi $y^2 - 2x = 0$ tənliyi $y^2 + 2x = 0$ alırıq.

Misal 3. $4x^2 - 4xy + y^2 - 15 = 0$

1) $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$

2) $\tan \alpha = \frac{4}{2-0} = 2$, $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\vec{i}'\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{j}'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

3) $a_{10}' = a_{10} \cos \alpha + a_{20} \sin \alpha = 0$ $a_{20}' = 0$ $(0', \vec{i}', \vec{j}')$ Sistemində əyrinin tənliyi $5y'^2 - 15 = 0$ və ya $y'^2 - 3 = 0$ $y' - \sqrt{3} = 0$, $y' + \sqrt{3} = 0$ əgər əyri iki düz xəttə parçalanmışsa onu sadəcə vuruqlarına ayıraraq tənlikləri yazırlar.

Misal 4. $\lambda x^2 - xy - 2y^2 + 5x - 5y = 0$ Bu tənliyi belə çevirək:

$(x^2 + 2xy + 5x) - (\lambda y + 2y^2 + 5y) = 0 \Rightarrow x(x + 2y + 5) - y(\lambda y + 2y^2 + 5y) = 0 \Rightarrow (x + 2y + 5)(x - y) = 0 \Rightarrow$
 $d_1 : x - y = 0$, $d_2 : x + 2y + 5 = 0$ əyri iki düz xəttə parçalanır.

Fəzada afin və düzbucaqlı koordinat sistemləri nöqtənin və vektorun koordinantları. Parçanın bölünmə düsturları. İki nöqtə arasındakı məsafə və metrik dusturlar.

Plan:

1. Fəzada afin koordinat sistemi, nöqtənin və vektorun koordinantları.
2. Parçanın bölünmə düsturları.
3. Düzbucaqlı koordinat sistemi və burada metrik məsələlər (məsafə, skaliyar hasil və vektorlar arasındakı bucaq).

§1. Fəzada afin koordinat sistemi. nöqtənin və vektorun koordinantları.

Fəzada koordinat sisteminə, mustəvidə öyrəndiyimiz koordinat sisteminə analogi olaraq baxılır. Qeyd edək ki, fəzada koordinat sistemi anlayışını verərkən 3 ölçülü vektor fəzanın bəzi elementlərindən istifadə olunur.

Fərz edək ki, fəzada hər hansı O nöqtəsi qeyd olunub və e_1, e_2, e_3 vektorları bu fəzanın 3 ölçülü vektorlar fəzasının bazisidir. O nöqtəsi və e_1, e_2, e_3

vektorlarından ibarət olan 4-lüyə fəzada ümumi afin koordinat

sistemi və ya afin reper deyilir. Bəzən, fəzada ümumi

afin koordinat sistemi bir müstəvi üzərində olmayan nizamlı

(O, E_1, E_2, E_3) kimi dörd nöqtənin vasitəsilə də verilir, belə ki, bu nöqtələrdən heç bir üçü bir düz xətt üzərində yerləşmir.

$R = (O, E_1, E_2, E_3)$. Deməli, $\overrightarrow{OE_\alpha} = \vec{e}_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$ olarsa yuxarıdakı sistem və

tərsinə alına bilər. Burada, O nöqtəsi koordinat başlanğıcı,

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorları bazis vektorları, (E_1, E_2, E_3) nöqtələri isə bazis nöqtələri

adlanırlar. $\vec{e}_1$ vektoru istiqamətində olan OE_1 oxu absis oxu və yaxud OX

oxu, $\vec{e}_2$ vektoru istiqamətində olan OE_2 oxu ordinat oxu və ya OY oxu,

$\vec{e}_3$ vektoru istiqamətində olan OE_3 oxu aplikat oxu və ya OZ oxu adlanır.

$(O, \vec{e}_1) = (ox)$, $(O, \vec{e}_2) = (oy)$, $(O, \vec{e}_3) = (oz)$ -koordinat oxları adlanır.

$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = (oxy)$, $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_3) = (oxz)$, $(O, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (oyz)$ müstəviləri koordinat

müstəviləri adlanır. Bu qayda ilə təyin olunan koordinat sistemini $Oxyz$ və

ya $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ kimi işarə edirlər.

Fərz edək ki, fəzada $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ afin koordinat sistemi verilmişdir. Bu

sistemdə $\forall M$ nöqtəsi götürək. $\overrightarrow{OM}$ – vektoruna M nöqtəsinin radius

vektoru deyilir. Bilirik ki, e_1, e_2, e_3 vektorları fəzanın bazis vektorlarıdır, deməli

$(\overrightarrow{OM}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vektorlar sistemi xətti asılıdır, odur ki, OM vektorunun bazis

vektorları üzrə ayırmaq mümkündür və bu ayrılış yeğənədir.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad (1)$$

(1) ayrılışında iştirak edən x, y, z əmsallarına M nöqtəsinin koordinantları deyilir və $M(x, y, z)$ kimi işarə olunur. Burada x, M nöqtəsinin 1-ci

koordinatı və ya absisi; y, 2-ci koordinatı və ya ordinatı; z, 3-cü koordinatı və ya aplikatı adlanır. Bu dediklərimizdən aydın olur ki, fəzada nöqtənin koordinatları nizamlanmış x, y, z ədədlər üçlüyündən ibarətdir, yəni, fəzada $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ afin koordinat sistemi verildikdə (E_3) fəzasının nöqtələrinə

qarşı $R \times R \times R = R^3$ həqiqi ədədlərin dekart kubunun elementləri arasında biektiv inikas yaranır, yəni, $f: \vec{E}_3 \rightarrow R \times R \times R$ inikası biektivdir, f^{-1}

-də hər həqiqi nizamlı üçlüyə qarşı yeganə nöqtə müəyyənləşdirir. $M(x, y, z)$ -

olarsa, $\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ olur. $z = 0 \Rightarrow OM = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \Rightarrow M \in (oxy),$

$y = 0 \Rightarrow \vec{OM} = x\vec{e}_1 + z\vec{e}_3 \Rightarrow M \in (oxz),$ $x = 0 \Rightarrow \vec{OM} = y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \Rightarrow M \in (oyz)$

$x = y = 0 \Rightarrow \vec{OM} = z\vec{e}_3 \Rightarrow M \in (oz),$

$x = z = 0 \Rightarrow \vec{OM} = y\vec{e}_2 \Rightarrow M \in (oy),$

$y = z = 0 \Rightarrow \vec{OM} = x\vec{e}_1 \Rightarrow M \in (ox),$

$x = y = z = 0 \Rightarrow \vec{OM} = \vec{O} \Rightarrow M = 0, M(0, 0, 0)$ olar.

.(1) ayrılışından istifadə edərək nöqtəni fəzada asanlıqla qurmaq olar.

Fərz edək ki, $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ afin koordinat sistemində koordinatları ilə verilmiş $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsini qurmaq lazımdır.

Əvvəlcə Ox oxu üzərində $OM = x_0\vec{e}_1$ şərti ilə təyin

olunan M_1 nöqtəsini qeyd edirik. M_1 nöqtəsindən

$M_1M_2 = y_0\vec{e}_2$ şərti ilə təyin olunan M_2 nöqtəsini quraq.

Sonra $M_2M_0 = z_0\vec{e}_3$ şərti ilə təyin olunan M_0 nöqtəsini

quraq. Hökm edirik ki, M_0 nöqtəsi tələb edilən nöqtədir. Doğrudan da asanlıqla görmək olar ki,

$$\vec{OM}_0 = \vec{OM}_1 + \vec{M}_1\vec{M}_2 + \vec{M}_2\vec{M}_0$$

$$\vec{OM}_0 = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3$$

Bu o deməkdir ki, qurulan M_0 nöqtəsinin koordinatları (x_0, y_0, z_0) -dir. $OM_1M_2M_0$ sınıq xətti M_0 nöqtəsi üçün koordinat sınıq xətti adlanır. Nöqtələrin qurulmasında koordinat sınıq xəttindən istifadə etmək əlverişlidir.

Misal: $A(3, 4, 2), B(-1, 3, 4)$, nöqtələrini $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sistemində qurmalı.

A-nı qurmaq üçün $\vec{OA}_1 = 3\vec{e}_1, \vec{A}_1\vec{A}_2 = 4\vec{e}_2, \vec{A}_2\vec{A} = 2\vec{e}_3$ vektorlarını, yəni, OA_1A_2A

sınıq xəttini quraq. B-ni qurmaq üçün

$\vec{OB}_1 = -\vec{e}_1, \vec{B}_1\vec{B}_2 = 3\vec{e}_2, \vec{B}_2\vec{B} = 4\vec{e}_3$ vektorlarını,

yəni, OB_1B_2B sınıq xəttini quraq,

İndi isə fəzada $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ afin koordinat sistemində verilən $M(x_1, y_1, z_1)$ və $N(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələrinin müəyyən etdiyi $\vec{MN}$ vektorunun koordinatlarını müəyyən edək.

$$\vec{OM} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$$

$$\vec{ON} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$$

$$\Delta OMN \rightarrow \vec{MN} = \vec{MO} + \vec{ON} = \vec{ON} - \vec{OM}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= x_2 \overrightarrow{e_1} + y_2 \overrightarrow{e_2} + z_2 \overrightarrow{e_3} - x_1 \overrightarrow{e_1} - y_1 \overrightarrow{e_2} - z_1 \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{MN} &= (x_2 - x_1) \overrightarrow{e_1} + (y_2 - y_1) \overrightarrow{e_2} + (z_2 - z_1) \overrightarrow{e_3} \quad \text{Yəni,} \\ \overrightarrow{MN} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad (2) \text{ olar.}\end{aligned}$$

Deməli, uc nöqtələrinin koordinatları verilmiş vektorun koordinatları, uc nöqtələrinin uyğun koordinatları fərqi bərabərdir.

Misal: $P(3, -2, 4)$, $Q(1, 5, 0)$ olarsa,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1 - 3, 5 + 2, 0 - 4) \quad \overrightarrow{PQ} = (-2, 7, -4)$$

§2. Parçanın bölünmə düsturları.

Fərz edək ki, fəzada $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ afin koordinat sistemində $M(x_1, y_1, z_1)$ və $N(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri verilmişdir. $M \neq N$. Müstəvidə olduğu kimi fəzada da əgər

$$\overrightarrow{MK} = \lambda \overrightarrow{KN} \quad (3)$$

olarsa, onda deyirik ki, K nöqtəsi $[MN]$ parçasını λ nisbətində bölür. yəni. $(MN, K) = \lambda$, burada λ -bölmə əmsalıdır. K nöqtəsinin koordinatlarını M və N nöqtələrinin koordinatları ilə ifadə edək.

Tutaq ki, K nöqtəsinin koordinatları (x, y, z) -dir.

Vektorlar üzərində əməllərə görə

$$\Delta OMK \rightarrow \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM}$$

$$\Delta ONK \rightarrow \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OK}$$

Bunu (3) bərabərliyində nəzərə alsaq $\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM} = \lambda(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OK})$ və ya $\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OM} + \lambda \overrightarrow{ON}}{1 + \lambda}$ alırıq. Aldığımız ifadəni koordinatlarda yazsaq

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (4)$$

(4) düsturlarına parçanı λ nisbətində bölən nöqtənin koordinatlarının hesablanması düsturları deyilir.

Müstəvidə olduğu kimi burada da göstərə bilərik ki, $\lambda \neq 1$ Əgər $\lambda \neq 1$ olarsa, onda (3) bərabərliyinə görə $\overrightarrow{MK} = -\overrightarrow{KN} \Rightarrow \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{0} \Rightarrow M \equiv N$ olar. Bu isə ola bilməz.

Həmçinin qeyd edək ki, $\lambda > 0$ olarsa, $\overrightarrow{MK} \uparrow \uparrow \overrightarrow{KN}$. Bu o deməkdir ki, K nöqtəsi

$[MN]$ parçasının daxilindədir. $\lambda < 0$ olarsa $\overrightarrow{MK} \uparrow \downarrow \overrightarrow{KN}$ olur, deməli K nöqtəsi $[MN]$ parçasının xaricindədir. Xüsusi halda, $\lambda = 1$ olarsa K nöqtəsi $[MN]$ parçasının orta nöqtəsi olar və (4) düsturları aşağıdakı şəkllə düşər.

$$x_{or} = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_{or} = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_{or} = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (5)$$

Nəticədə alırıq ki, parçanın orta nöqtəsinin koordinatları (5) düsturları ilə hesablanır.

§3. Fəzada düzbucaqlı koordinat sistemi və burada metrik məsələlər.

Fəzada $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ afin koordinat sistemində $e_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ koordinat vektorları ortonormal bazis müəyyən edərsə, yəni, $\vec{e}_1\vec{e}_2 = \vec{e}_1\vec{e}_3 = \vec{e}_2\vec{e}_3 = 0$ və $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ olarsa, onda belə sistem düzbucaqlı dekart koordinat sistemi adlanır. Düzbucaqlı dekart koordinat sistemini $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ kimi işarə olunur. Tərifə görə $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

Düzbucaqlı dekart koordinat sistemi, afin koordinat sisteminin xüsusi halı olduğundan afin koordinat sistemi üçün qeyd etdiyimiz məsələlər düzbucaqlı koordinat sistemində də öz gücündə qalır. Lakin düzbucaqlı koordinat sistemində bəzi məsələlər çox sadə yerinə yetirilir.

Düzbucaqlı sistemdə metrik məsələlərə baxaq:

1. Tutaq ki, Oijk düzbucaqlı dekart koordinat sistemində $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri verilmişdir. Bu nöqtələr arasındakı məsafəni $d(M_1, M_2)$ və ya $\rho(M_1, \vec{I}_2)$ kimi işarə edək. Bilirik ki, $\vec{M}_1\vec{I}_2$ vektorunun koordinatları $\vec{M}_1\vec{I}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ kimi hesablanır.

Aydınır ki, $\rho(M_1, \vec{I}_2) = |\vec{M}_1\vec{M}_2|$. Digər tərəfdən bilirik ki, ortonormal bazisdə koordinatları ilə verilmiş vektorun uzunluğu, onun koordinatlarının kvadratları

cəminin kvadrat kökünə bərabərdir. yəni,

$$|\vec{M}_1\vec{M}_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

Onda alırıq ki,

$$\rho(M_1, M_2)_2 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (6)$$

Aldıq ki, düzbucaqlı dekart koordinat sistemində koordinatları ilə verilmiş iki nöqtə arasındakı məsafə (6) düsturu ilə hesablanır.

2. Tutaq ki, Oijk düzbucaqlı dekart koordinat sistemində $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ vektorları verilmişdir. Bu vektorlar arasındakı bucağı hesablayaq. Bilirik ki, vektorlar arasındakı bucaq

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \alpha = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad (7)$$

düsturu ilə hesablanır. Verilən koordinat sistemi ortonormal olduğu üçün $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ olur. Bu ifadələri (7)-də yerinə yazaq.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (8)$$

Fəzada koordinat sisteminin çevrilməsi və fəzanın oriyentasiyası. Tənlik və bərabərsizliklərin, birləşmələrin və sistemlərin həndəsi izahı.

Plan: 1. Fəzada üç vektorun konplanarlıq şərti.

2. Fəzanın oriyentasiyası.

3. Fəzada koordinat sisteminin çevrilməsi.

4. Fəzada koordinat metodunun tənlik və bərabərsizliklərin izahına tətbiqi.

§1. Fəzada üç vektorun konplanarlıq şərti.

Bu şərt aşağıdakı terminlə ifadə olunur. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorları $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$, $c(c_1, c_2, c_3)$ koordinantları ilə verilib.

Teorem: Üç vektorun konplanarlığı üçün onların hər hansı bazisdəki koordinantlarından düzəldilmiş determinantının sıfır olması zəruri və kafidir.

İsbatı: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ konplanardılar, yəni $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$

$$\text{koordinantlarda } \begin{cases} \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{b}_1 + \gamma\vec{c}_1 = 0 \\ \alpha\vec{a}_2 + \beta\vec{b}_2 + \gamma\vec{c}_2 = 0 \\ \alpha\vec{a}_3 + \beta\vec{b}_3 + \gamma\vec{c}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ determinantın xassəsinə əsasən

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0 \Rightarrow \text{deməli,}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorları xətti asılıdırlar.

§2. Fəzanın oriyentasiyası.

Fəzanın oriyentasiyası müstəvinin oriyentasiyasına analogi verilir. $\forall(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sistemi xətti asılı deyilsə fəzada bazis əmələ gətirir. Deməli, fəzada ∞ sayda bazis vardır. $B_1(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, $B_2(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ iki bazis olsun. B_2 –nin vektorları üzrə ayırsaq belə olar.

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = c_{11}\vec{a}_1 + c_{12}\vec{a}_2 + c_{13}\vec{a}_3 \\ \vec{b}_2 = c_{21}\vec{a}_1 + c_{22}\vec{a}_2 + c_{23}\vec{a}_3 \\ \vec{b}_3 = c_{31}\vec{a}_1 + c_{32}\vec{a}_2 + c_{33}\vec{a}_3 \end{cases} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad \text{C-matrisinin sütunları}$$

$(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ –ün koordinantlarıdır. C-matrisi B_1 bazisindən B_2 bazisinə

$$\text{keçid matrisidir və } B_2 = C B_1 \text{ kimi yazılır. } \det C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \quad \text{ədədi } B_1$$

–dən B_2 –yə keçid matrisinin determinantıdır. B_2 bazis olduğundan $\det C \neq 0$ keçid matrisi determinantının xassələri.

1. $B_1 = B_2$ olarsa, $C=E$, $\det C=1$
2. $B_2 = C B_1$, $B_3 = D B_2$ olsa,
 $B_3 = (D \cdot C) B_1$, $B_3 = F B_1$, $F = DC$, $\det C = \det D \cdot \det C$
3. $B_2 = C B_1$, $B_1 = C^* B_2$, $\det C \cdot \det C^* = 1$

Əgər bütün bazislər çoxluğu $B = \{B_1, B_2, \dots\}$ ilə işarə etsək onda iki B_1 və B_2 bazisi δ münsibətində olsun o zaman ki,

$B_1 \delta B_2$, $B_2 = C B_1$, $\det C > 0$ yəni $B_1 \delta B_2 \Rightarrow \det C > 0$ δ -münasibəti 1-3 xassələrini ödəyir. Yəni ekvivalentlik münsibətidir. $\det C \neq 0 \Rightarrow$ ya $\det C > 0$ ya da $\det C < 0$, $\det C > 0 \Rightarrow B_1 \omega B_2$, $\det C < 0 \Rightarrow B_1 \bar{\omega} B_2$. $B/\delta = \{k_1, k_2\}$, k_1 və k_2 bazislərin oriyentasiyası adlanır. Biri sol və ya münsibətdirsə, o biri sağ və ya mənfi oriyentasiya adlanır.

§3. Fəzada koordinat sisteminin çevrilməsi.

Fəzada bazislər çox sayda olduğu kimi çox sayda da afin koordinat sistemi vardır. Eyni nöqtə müxtəlif sistemlərdə müxtəlif koordinantlara malik olurlar, koordinat sisteminin çevrilməsi dedikdə eyni nöqtənin müxtəlif sistemlərdəki koordinantları arasındakı əlaqə düsturunun müəyyən edilməsi başa düşülür.

$R = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ və $R' = (0', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ kimi iki koordinat sistemini götürək.

$$O'_R(x_0, y_0, z_0), M_R(x, y, z), M_{R'}(x', y', z'), \vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}, \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix}, \vec{e}'_3 = \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix}$$

olsun. $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$, $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3 + x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 + z'\vec{e}'_3$

$$\begin{cases} x = x_0 + c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' \\ y = y_0 + c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' \\ z = z_0 + c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' \end{cases} \quad \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \det C \neq 0$$

Xüsusi halları:

$$1. \quad 0 \neq 0', \quad \vec{e}_i = \vec{e}'_i, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \quad \text{Başlangıç dəyişir, bazis vektorlar}$$

dəyişmir. Buna koordinat sisteminin paralel köçürməsi deyilir.

$$2. \quad 0 = 0', \quad B_2 = C B_1, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad x_0 = y_0 = z_0 = 0 \quad \text{Başlangıç dəyişmir}$$

bazis vektorları dəyişir. Buna koordinat oxlarının döndərilməsi deyilir.

3. $0 \neq 0'$, $B_2 = C B_1$, hər ikisi dəyişir. Koordinat sisteminin çevrilməsinin ümumi halı adlanır.

b) Bazislər ortonormaldır.

B_1 və B_2 bazisləri ortonormal olan halda $R = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ və $R' = (0', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ koordinat sistemləri alınır. $B_1(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ -dən $B_2(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ -ə keçid matrisi C matrisi olur, lakin matrisin elementləri onun ortoqanallıq şərtini ödəyirlər. Yəni, bu zaman matrisin sütun elementləri $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ vektorunun koordinantları olduğundan, yəni $\vec{i}' = (c_{11}, c_{21}, c_{31})$, $\vec{j}' = (c_{12}, c_{22}, c_{32})$, $\vec{k}' = (c_{13}, c_{23}, c_{33})$ olduğundan onların kvadratları

cəmi 1-ə bərabərdir, yəni
$$\begin{cases} c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1 \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1 \\ c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1 \end{cases} \quad \text{həm də } \vec{i}'\vec{j}' = \vec{i}'\vec{k}' = \vec{j}'\vec{k}' = 0$$

şərtlərini ödəyir. Yəni,
$$\begin{cases} c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0 \\ c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0 \\ c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} = 0 \end{cases} \quad \text{olar. Həm də}$$

$c_{11} = \cos(\vec{i}' \wedge \vec{j}')$, $c_{22} = \cos(\vec{j}' \wedge \vec{j})$, $c_{23} = \cos(\vec{k}' \wedge \vec{i})$, $c_{31} = \cos(\vec{i}' \wedge \vec{k})$, $c_{32} = \cos(\vec{j}' \wedge \vec{k})$, $c_{33} = \cos(\vec{k}' \wedge \vec{k})$

Deməli, ortonormal koordinat sisteminin çevrilməsi zamanı keçid matrisinin elementləri və ya əmsallar üzərinə 7 şərt qoyulur. Yuxarıdakı altı şərti ödəyən matris ortoqanal matris adlanır. Ortoqanal matrisi müəyyən edən əlamətlərdən biri də onun özü ilə tərsinin hasilinin vahid matris verməsidir.

Yəni $C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta > 0$, $R \phi R'$, $R \bar{\phi} R'$ olur.

§4. Fəzada tənlik və bərabərsizliklər, onların sistemləri və birləşmələrinin həndəsi izahı. Fəzada koordinant metodunun tətbiqləri.

a) Əvvəlcə fəzada fiqurun təyini anlayışını verək. $R = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ afin

koordinat sistemini götürək. R-də ϕ fiqurun müəyyən edən şərtlərə onun tənliyi deyilir. Məs: R-də $z=0$ ödəyən nöqtələr (oxy) müstəvisini verir. $z=0$ (oxy) müstəvisinin tənliyi adlanır. $z > 0$ (oxy) müstəvisindən yuxarı yarımfəzanın nöqtələridir, yəni elə nöqtələr çoxluğu ki, $(0,0,1)$ nöqtəsi

daxildir. Fərz edək
$$\begin{cases} F_1(x, y, z) \leq 0 \\ F_2(x, y, z) \leq 0 \\ F_3(x, y, z) \leq 0 \end{cases} \quad \text{sistemi verilmişdir. Burada } \vee$$

işarəsi $= 0, > 0, < 0, \geq 0, \leq 0, \neq 0$ işarələrindən birini əvəz edir.

–fiqurun, - fiqurun, - fiqurun müəyyən edirsə sistem fiqurun müəyyən edər.

İndi birləşməyə baxaq:

Birləşməsində $F_1(x, y, z) \vee 0 - \phi_1$ – fiqurunun, $F_2(x, y, z) \vee 0 - \phi_2$ – fiqurunun, $F_3(x, y, z) \vee 0 - \phi_{31}$ – fiqurunun müəyyən edərsə, sistem $F = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_3$ fiqurunun müəyyən edər. İndi birləşməyə baxaq:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) \vee 0 \\ f_2(x, y, z) \vee 0 \\ f_3(x, y, z) \vee 0 \end{cases}$$
 birləşməsində fiqurunun $f_1(x, y, z) \vee 0 - \Gamma_1$ – fiqurunun, $f_2(x, y, z) \vee 0 - \Gamma_2$ – fiqurunun, $f_t(x, y, z) \vee 0 - \Gamma_t$ – fiqurunun müəyyən edərsə, birləşmə $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_t$ fiqurunun müəyyən edər.

Məsələn: 1. Fəzada 1 kvadratındakı nöqtələr çoxluğunu $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases}$

sistemi müəyyən edir. Bu fiqur $\phi_1\{x > 0\} \cap \phi_2\{y > 0\} \cap \phi_3\{z > 0\} = \phi$ -dir.

2. 3 kvadratından başqa qalan nöqtələr çoxluğunu

$\Gamma_1\{x \leq 0\} \cup \Gamma_2\{y \geq 0\} \cup \Gamma_3\{z \leq 0\} = \Gamma$ olar. 3 Kvadratinin özü isə $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ z > 0 \end{cases}$

sistemi ilə ifadə olunur.

b) İndi kvadrat metodunun tətbiqinə baxaq.

Fəzada kvadrat metodunu ilə tədqiqat apardıqda ən əvvəl şəth tənliklərinə baxılır. Φ səthini müəyyən edən şərt onun tənliyidir. Xüsusi halda sfera tənliyinə baxaq. Sfera fəzada M_0 nöqtəsindən eyni uzaqlıqda yerləşən nöqtələr çoxluğuudur. $R = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Sistemində $C(a, b, c)$ – mərkəz, $M(x, y, z)$ – sferanın hər hansı nöqtəsi olarsa, $CM = r$ sferanın tənliyidir. Buradan $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = r^2$ və ya

$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax - 2By - 2Cz + D = 0$ sferanın ümumi tənliyidir.

$C = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$, $r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}}{2}$ olar. $r > 0$, $r = 0$, $r < 0$

hallarına baxılır. Koordinant metodunu məsələlər həllinə tətbiq edək.

Məsələ1. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ –də $A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$

$C(x_3, y_3, z_3)$ olarsa ağırlıq mərkəzinin koordinantlarını tapmalı. M-ağırlıq mərkəzi isə

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \Rightarrow M(x, y, z), \quad x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \quad \text{olar.}$$

Məsələ2. İsbat etməli ki, tetraedrin qarşı tillərini birləşdirən parçalar bir nöqtədə kəsişir və yarı bölünürlər $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$ olarsa

$O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ orta nöqtələr $[OA]$ və

$[BC]$ $D_1(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $D_2(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $M_1 = MD_2$ olarsa $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $[OB]$ və

$[AC]$, $E_1(0, \frac{1}{2}, 0)$ $E_2(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ $M = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ $[OC]$ və $[AB]$ -nin orta nöqtələr

$F_1(0, 0, \frac{1}{2})$ $F_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ Deməli, $(D_1D_2) \cap (E_1E_2) \cap (F_1F_2) = M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

Məsələ3. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralepiped verilir. $\Delta A_1 B D$ və $\Delta B_1 D_1 C$ -nin

ağırlıq mərkəzləri M və N -dir. İsbat etməli ki, $M, N \in [AC]$ və

$AM = MN = NC$ -dir.

$(\vec{0}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ elə seçək ki, $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{AD} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{e}_3$ onda

$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$ $C(1,1,0)$ $D(0,1,0)$ $A_1(0,0,1)$ $B_1(1,0,1)$ $C_1(1,1,1)$ $D_1(0,1,1)$ $M(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ $N(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

$\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NC} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ İsbat olunur.

İki vektorun vektorial hasili , vektorial hasilin xassələri və tətbiqləri.

Plan:

- 1.Vektorların vektorial hasilinin tərifi.
- 2.Vektorial hasilə aid teoremlər.
- 3.Vektorial hasilin koordinatlarda ifadəsi.
- 4.Vektorial hasilin xassələri.
- 5.Vektorial hasilin tətbiqləri .
- 6.Məsələ həlli.

P-1.Tərif . İki vektorun vektorial hasili elə $\vec{c}$ vektoruna deyilir ki, bu vektor aşağıdakı 3 şərti ödəsin.

- 1) $\vec{c}$ vektorunun uzunluğu $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının uzunluqları ilə onlar arasındakı bucağın sinusuna bərabərdir.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi \quad (1)$$

- 2) $\vec{c}$ vektoru $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının hər birinə perpendikulyar olsun və ya ortoqonal olsun, yəni, $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$

- 3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ vektorlar üçlüyü $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ üçlüyü ilə eyni oriyentasiyalı olsun.

Vektorial hasil $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ kimi işarə olunur.

Vektorların vektorial hasili də vektorların skaliar hasili kimi mexanikada yaranmışdır. Əgər $\vec{b}$, M nöqtəsindəki qüvvədirsə və $\vec{a}$ vektoru isə O nöqtəsindən M nöqtəsinə gedərsə, onda $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ vektoru O nöqtəsinə nəzərən $\vec{b}$ qüvvəsinin momenti olur. Deməli mexanikada qüvvənin momenti vektorial hasilə təyin olunur.

P-2. Teorem 1. İki vektorun kollinear olması üçün zəruri və kafi şərt bu vektorların vektorial hasilinin sıfıra bərabər olmasıdır.

İsbatı. (Zərurilik) . Zərurilik vektorların vektorial hasilinin tərifindən alınır. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ kollinear vektorlar olduqda onlar arasındakı bucaq 0° -olur və $\sin 0^\circ = 0$ olduğundan (1) bərabərliyi sıfıra çevrilir.

Kafilik . Tutaq ki, $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektorial hasili sıfır vektora bərabərdir $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$. İsbat edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardır. Əvvəlcə trivalını qeyd edək, onda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından biri sıfır vektor olmalıdır. (sıfır vektorunun istiqaməti təyin olunmadığından, onu $\forall$ vektorla kollinear vektor kimi hesab etmək olar.) Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının hər ikisi sıfırdan fərqlidirsə, $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$ onda $|\vec{a}| > 0, |\vec{b}| > 0$, onda $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ bərabərliyindən və (1) bərabərliyindən alırıq ki, $\sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0^\circ$. Buradan alınır ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardır. Teorem isbat olundu.

Əgər $\vec{a} \perp \vec{b}$ onda $\sin \varphi = 90^\circ = 1$

Teorem 2 . $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektorial hasilin uzunluğu (modulu) $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın S sahəsinə bərabərdir.

$|\vec{a}, \vec{b}| = S_{\text{paralel}}$ belə ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ kollinear olmurlar.

İsbatı. Aydındır ki, paraleloqramın sahəsi onun oturacağı

ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir, yəni, $S_{par} = |\vec{a}| \cdot h$, $h = |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ olduğunu nəzərə alsaq onda alarıq ki, $S_{par} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$. (1) bərabərliyi ilə müqayisə etsək $|\vec{a}, \vec{b}| = S_{par}$ alınır.

P-3. İndi vektorial hasilin dekart koordinatlarda ifadəsinə baxaq.

Teorem. Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları öz düzbucaqlı dekart koordinatları ilə verilərsə, $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ onda onların vektorial hasilini koordinatlarda aşağıdakı şəkildə yazılır.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\} \quad (2)$$

(2)–ni belə də yazı bilərik.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (2)'$$

İsbatı: Fərz edək ki, $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ və $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ vektorları verilmişdir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bazis vektorları üzrə ayrılışı aşağıdakı kimi olar.
 $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$, $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$

İndi vektorial hasilini hesablayaq:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 [\vec{i}, \vec{i}] + y_1 x_2 [\vec{j}, \vec{i}] + z_1 x_2 [\vec{k}, \vec{i}] +$$

$$x_1 y_2 [\vec{i}, \vec{j}] + y_1 y_2 [\vec{j}, \vec{j}] + z_1 y_2 [\vec{k}, \vec{j}] + x_1 z_2 [\vec{i}, \vec{k}] + y_1 z_2 [\vec{j}, \vec{k}] + z_1 z_2 [\vec{k}, \vec{k}]$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazis vektorlarının vektorial hasilini üçün vektorlar cütü hesab edək. Məlumdur ki, bu bazis vektorları qarşılıqlı ortoqonaldırlar. Onların uzunluqları 1-ə bərabərdir, onlar sağ üçlük əmələ gətirir.

$$\left. \begin{aligned} [\vec{i}, \vec{i}] &= 0, & [\vec{j}, \vec{i}] &= -\vec{k}, & [\vec{k}, \vec{i}] &= \vec{j} \\ [\vec{i}, \vec{j}] &= \vec{k}, & [\vec{j}, \vec{j}] &= 0, & [\vec{k}, \vec{j}] &= -\vec{i} \\ [\vec{i}, \vec{k}] &= -\vec{j}, & [\vec{j}, \vec{k}] &= \vec{i}, & [\vec{k}, \vec{k}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Bunları nəzərə alsaq:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}$$

alarıq. Bu isə (2) və ya (2) ifadəsinin açılışıdır.

Nəticə. Əgər $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ vektorları kolleniardırsa, onda onların koordinatları mütənasib olmalıdır.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

İsbatı. Əgər $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$ onda

$$1) [a \ b]_x = 0 \Rightarrow y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0 \qquad 2) [a \ b]_y = 0 \Rightarrow x_1 z_2 - x_2 z_1 = 0$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

$$3) [a \ b]_z = 0$$

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Buradan alarıq $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ - yəni vektorlar kolleanardırlar.

P-4. Vektorial hasilin aşağıdakı xassələri vardır.

Xassə 1. Vektorial hasildə vuruqların yerini dəyişsək, vektorial hasil yalnız işarəsini dəyişər, yəni, $[a, b] = -[b, a]$

$$\bar{a} = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k} = \bar{a}(x_1, y_1, z_1)$$

İsbatı. Fərz edək ki, $\bar{b} = x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k} = \bar{b}(x_2, y_2, z_2)$

vektorları verilmişdir. Bilirik ki, $[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$. Determinantın xassəsinə görə

iki sütunun (2 sətirin) yerini dəyişdikdə determinant yalnız işarəsini dəyişər, yəni,

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = [\bar{b}, \bar{a}]. \text{ Bu da 1 xassəsinin doğruluğunu göstərir.}$$

Xassə 2. Vektorial hasil ədədi vuruğa nəzərən bircinslilik xassəsinə malikdir.

$$[(\alpha \bar{a}) \bar{b}] = \alpha [\bar{a} \bar{b}]$$

İsbatı.

$$[(\alpha \bar{a}) \bar{b}] = |\alpha \bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \varphi = \alpha |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \varphi$$

$$\alpha \cdot [\bar{a} \bar{b}] = \alpha \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \varphi, \qquad \text{buradan alınır ki,}$$

$[(\alpha \bar{a}) \bar{b}] = \alpha [\bar{a} \bar{b}]$ Xassə 3. Vektorial hasil paylanma xassəsinə malikdir, yəni,

$$[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]$$

Xassə 4.

$$[\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}]$$

P-5. İndi vektorial hasilin tətbiqləri ilə tanış olaq.

Vektorial hasil ən çox sahələrin hesablanmasında yəni Δ -ğın və paraleloqramın sahələrinin hesablanmasında tətbiq olunur. Fərz edək ki, ABC üçbucağının təpə nöqtələri $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ öz koordinatları ilə verilmişdir. (düzbucaqlı Dekart koordinat sistemində). ABC üçbucağının sahəsini hesablayaq.

Vektorial hasilin tərifində I şərtədən məlumdur ki, $[\overline{AB}, \overline{AC}]$ vektorunun uzunluğu ədədi qiymətcə bu vektorlar üzərində qurulmuş ABDC paraleloqramının sahəsinə bərabərdir və deməli,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]| \quad (4)$$

$\overline{AB}$ və $\overline{AC}$ vektorlarının koordinatlarını hesablayaq.

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

$$\overline{AC} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$$

Onda bu vektorların vektorial hasilini aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Bu qiymətləri (4) –də nəzərə alsaq.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2} \quad (6)$$

(6) düsturu təpələrinin koordinatları ilə verilmiş üçbucağın sahəsinin hesablanması düsturudur.

Xüsusi halda, əgər

$$\Delta \in (XOY) \text{ olarsa, onda } S_{\Delta ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta \in (XOZ) \text{ olarsa, onda } S_{\Delta ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & z_2 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta \in (YOZ) \text{ olarsa, onda } S_{\Delta ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & z_2 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ olar.}$$

P-6. Məsələ1. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları $\varphi = \frac{\pi}{6}$ bucağı əmələ gətirir. $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 5$ olduğunu bilərək. $[\vec{a}, \vec{b}]$ -ni hesablayın.

$$\text{Həlli. } [\vec{a}, \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = 6 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ = 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 15$$

Məsələ2. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyardır. $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ olduğunu bilərək hesablayın.

Həlli.

$$\begin{aligned} 1) [(a+b)(a-b)] &= [\vec{a} \times \vec{a}] - [\vec{a} \times \vec{b}] + [\vec{b} \times \vec{a}] - [\vec{b} \times \vec{b}] = \\ &= [2 \cdot (\vec{b} \times \vec{a})] = 2[\vec{b} \times \vec{a}] = 2 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) [(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})] &= [3\vec{a} \times \vec{a}] - 6[\vec{a} \times \vec{b}] - [\vec{b} \times \vec{a}] + 2[\vec{b} \times \vec{b}] = -5 \cdot [\vec{a} \times \vec{b}] = \\ &= 5 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 90^\circ = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60 \end{aligned}$$

Məsələ 3. $\vec{a} = \{2, -2, 1\}$ və $\vec{b} = \{2, 3, 6\}$ vektorunun əmələ gətirdiyi bucağın sinusunu hesablayın

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{225 + 100 + 100} = \sqrt{425}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3, |\vec{b}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$$

$$\sin \varphi = \frac{[\vec{a}, \vec{b}]}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{5\sqrt{17}}{21}$$

Üç vektorun qarışıq hasili və onun xassələri, tətbiqləri.

Plan.

1. Vektorlar üçlüyünün oriyentasiyası.
2. Üç vektorun qarışıq hasili və onun həndəsi mənası.
3. Qarışıq hasilin koordinatlarda ifadəsi.
4. Qarışıq hasilin xassələri.
5. Qarışıq hasilin tətbiqləri.

P-1. Vektorlar üçlüyünün oriyentasiyası anlayışı ilə tanış olaq:

Tutaq ki, müəyyən ardıcılıqla komplanar olmayan üç vektor verilmişdir.

Belə verilmiş üç vektor heyəti vektor üçlüyü adlanır. Verilən vektorları bir nöqtəyə köçürdükdə iki vəziyyətdən biri alınır.

a) c vektorunun ucundan a və b vektorlarına baxdıqda, a vektorunu b vektoru üzərinə salmaq üçün kiçik bucaq qədər fırlanma saat əqrəbinin hərəkətinin əksinə olur. Şəkil (a)

b) c vektorunun ucundan a və b vektorlarına baxdıqda a vektorunu b vektorunun üzərinə salmaq üçün kiçik bucaq qədər fırlanma saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətindədir. Şəkil (b)

Aydındır ki, vektorlar üçlüyü verildikdə bu hallardan ancaq biri ola bilər.

Bu iki vəziyyətin hər biri bu vektorların oriyentasiyası adlanır. a) sağ oriyentasiya

b) sol oriyentasiya adlanır.

Oriyentasiya – məişətdə, coğrafiyada, kartoqrafiyada və müxtəlif elim sahələrində fizikada, kimyada, həndəsədə və s. istifadə olunsa da, sırf riyazi termindir. Oriyentasiya – sözünün mənası yönləndirmə, istiqamətləndirmədir. Müstəvidə olduğu kimi fəzada da iki oriyentasiya vardır. Sağ oriyentasiya – müsbət oriyentasiya, sol oriyentasiya isə mənfi oriyentasiya adlanır.

Burada aşağıdakı təklifləri vermək olar:

1) üçlüyün iki vektorunu sabit saxlayıb, 3-nü ortaq başlanğıc nöqtəsi ətrafında fırladaq. Bu halda fırlanan vektor digər iki vektor müstəvisindən bir tərəfdə qalarsa, üçlüyün oriyentasiyası dəyişmir, fırlanaraq müstəvinin digər tərəfinə keçərsə, üçlüyün oriyentasiyası dəyişir.

2) Üçlüyə daxil olan vektorların dairəvi yerdəyişməsində oriyentasiya dəyişməz. –dən –ya keçmək dairəvi yerdəyişməsi adlanır. Hər iki üçlük eyni oriyentasiyalı olur.

3) Vektorlar üzərində dairəvi olmayan hər hansı başqa yerdəyişmə üçlüyün oriyentasiyasını dəyişir. Məsələn, üçlüyündə və vektorlarının yerlərini dəyişsək üçlüyünü alırıq, bu yerdəyişmə dairəvi deyil. Bu üçlüklər müxtəlif oriyentasiyalı olurlar.

4) Üçlüyün müstəvi güzgüdə əksi müxtəlif oriyentasiyalı üçlük olur.

P-2 .Tərif : Tutaq ki, a, b, c vektorları verilmişdir. İki a və b vektorlarının vektorial hasilinin üçüncüyə, yəni, c -yə skalyar hasilinə bu vektorların qarışıq hasilı deyilir. Nəticədə qarışıq hasil ədəddir.

Üç vektorun qarışıq hasilı simvolik olaraq $[a, b]c$ və ya $a \cdot b \cdot c$ ilə işarə olunur.

Burada 3 hal ola bilər: $[a, b] \cdot c > 0$ olarsa, onda a, b, c vektor üçlüyü sağ müsbət oriyentasiyalı, $[a, b] \cdot c < 0$ olarsa, sol mənfi oriyentasiyalı, $[a, b] \cdot c = 0$ olarsa, a, b, c vektorları komplanar olar

İndi isə üç vektorun qarışıq hasilinin həndəsi mənasını aydınlaşdıraraq.

Fərz edək ki, a, b, c vektorlar üçlüyünün oriyentasiyası sağ oriyentasiyalıdır. Bu vektorlar üzərində qurulan paralelipedin oturacağının sahəsini, yəni a və b vektorları üzərində qurulan paraleloqramın sahəsini S ilə, paralelipedin C təpəsindən oturmaq müstəvisinə endirilən perpendikulyarın uzunluğunu h ilə və paralelipedin həcmi v ilə işarə edək.

Teorem: Fəzada 3 vektorun qarışıq hasilinin mütləq qiyməti bu vektorlar üzərində qurulmuş paralelipedin həcminə bərabərdir. Yəni, $V = |[a, b] \cdot c|$

İsbatı :

P-3. Qarışıq hasilin koordinatlarda ifadəsi öyrənək : Fərz edək ki, Dekart koordinat sistemində a, b, c vektorları koordinatları ilə verilmişdir.

$$a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3) .$$

Vektorial hasilin koordinatlarında ifadəsindən məlumdur ki,

Məlumdur ki, vektorlar koordinatlarla verilsə, onda skalyar hasil eyniadlı koordinatların hasiləri cəminə bərabərdir. Onda :

Bunu 3 tərtibli determinant şəklində yazsaq, alarıq:

Bu bərabərlik üç vektorun qarışıq hasilinin koordinatlarda ifadəsi olur.

P-4. Qarışıq hasilin xassələri ilə tanış olaq.

Xassə 1. Qarışıq hasildə əgər vektorlardan hər hansı ikisi kolleniear olarsa, onda qarışıq hasil sıfır olar.

Xassə 2. Qarışıq hasildə vektorlardan hər hansı biri “0” olarsa onda qarışıq hasil sıfıra bərabər olar.

İsbatı: Tutaq ki, qarışıq hasildə vektorlardan biri məsələn $a=0$ Onda qarışıq hasilin koordinatlarla ifadəsini yazsaq, bu determinantın 1-ci sətir elementlərinin hamısının “0” olduğundan həmin determinant “0”-a bərabər olar. Yəni :

Xassə 3.Qarışıq hasil bircinslilik xassəsinə malikdir: Yəni

İsbatı :

Doğrudan da determinantın məlum xassəsinə görə determinantın sətir və ya sütun elementləri müəyyən bir ədədinə vurularsa , onda determinantın özü həmin ədədə vurulmuş olar, və yaxud determinantın sətir və ya sütunundakı ortağ vuruğu determinant qarşısına çıxarmaq olar.

Xassə 4.Qarışıq hasil hər bir vuruğa nəzərən paylama (distributivlik) xassələrinə malikdir.

İsbatı: Doğrudan da determinantın məlum xassələrindən məlumdur ki, determinantın hər hansı sətir və ya sütunu 2 elementin cəmi şəklində verilərsə , onda bu determinantı 2 determinantın cəmi şəklində vermək olar: Həqiqətən də :

Xassə 5.Qarışıq hasildə a, b, c vektorları komplanar olarsa , onda $[a, b] \cdot c = 0$ olar.

Doğrudan da, üç vektorun qarışıq hasil $[a, b] \cdot c$ bu vektorları üzərində qurulmuş paralelipedin həcminə bərabərdir, əgər a, b, c vektor üçlüyü sağ oriyentasiyalıdırsa onda qarışıq hasil “+”, əgər bu vektorlar üçlüyü sol oriyentasiyalıdırsa onda qarışıq hasil “-“ işarəli olur. Əgər bu vektorlar komplanar olarsa , onda qarışıq hasil sıfır olur. Deməli $[a, b] \cdot c = 0$ şərti yalnız o zaman olur ki, a, b, c vektorları komplanar olsun.

Digər tərəfdən əgər bu vektorlar komplanar olarsa , onda onlar xətti asılı olar. Xətti asılı vektorlardan birini digərlərinin vəstəsilə ifadə etmək mümkün olduğundan qarışıq hasilin koordinatlarında ifadəsi 3 tərtibli determinantın 2 sətir və ya sütunu eyni olar, onda determinant “0” olar.

Xassə 6.Qarışıq hasildə vuruqların dairəvi yerdəyişməsində qarışıq hasil dəyişməz.

İsbatı. a, b, c vektorlar üçlüyündə dairəvi yerdəyişmə etsək: alarıq

Məlumdur ki, bu üçlüklərin oriyentasiyası eyni olur, onda bunların qarışıq hasilərini də eyni işarəli olur. Digər tərəfdən qarışıq hasilələrinin müxtəlif qiymətləri eyni bir paralelipedin həcmi ifadə edir. Deməli bu qarışıq hasilər həm işarəcə , həm də mütləq qiymətcə eynidir.

Xassə 7 .Qarışıq hasildə vuruqlarının dairəvi olmayan başqa yerdəyişmələrində qarışıq hasilin ancaq işarəsi dəyişir.

6-ci və 7-ci xassələrini determinantların xassələrinə görə belə aydınlaşdırmaq olar: çünki determinantın nömrəli sətirlərini eyni nömrəli sütunlarıyla əvəz etdikdə determinantın qiyməti dəyişmir. O biri xassələrinə görə determinantın hər hansı 2 sətirinin və 2 sütununun yerini dəyişdikdə determinant qiymətini əksinə dəyişir.

P-5. İndi isə qarışıq hasilin tətbiqlərinə baxaq

Fərz edək ki, təpələri
nöqtələrində olan $ABCD$ tetraedri verilir. Bu tetraedrin həcmi hesablayaq .
Məlumdur ki, tetraedrin həcmi onun təpələri üzərində qurulan paralelipedin
həcmi bərabərdir.

vektorunun koordinatlarını tapmaq:

Bunu (1) –də nəzərə alıb ,bu bərabərliyi koordinatlarda yazsaq , qarışıq hasilin
koordinatlarında 3 tərtibli determinant olduğunu nəzərə alsaq , onda:

Bu bərabərlik təpə nöqtələrini ilə verildikdə tetraedrin həcmi hesablanması
düsturudur. Burada biz paralelipedin həcmi düsturunu da yazma bilərik:

Fəzada düz xəttin müxtəlif tənlikləri. Düz xəttlərin qarşılıqlı vəziyyəti və iki düz xətt arasındakı bucaq.

Plan: 1. Fəzada düz xəttin müxtəlif tənlikləri.

2. Düz xəttlərin qarşılıqlı vəziyyəti.

3. Fəzada iki düz xətt arasındakı bucaq düsturu.

4. Fəzada düz xəttə aid metrik və afin məsələlər.

&1. Fəzada düz xəttin müxtəlif tənlikləri.

$d \subset E_3$ fəzada hər hansı düz xəttir. $\forall \vec{a} \neq \vec{0}$ vektoru $\vec{a} \parallel d$ olarsa, istiqamətverici və ya yönəldici vektor adlanır. Əgər $\vec{a} \parallel d \Rightarrow \lambda \neq 0, \lambda \vec{a} \parallel d$ olar, yəni $\vec{a}$ ilə kollinear olan vektorların hansı d -nin yönəldici vektoru kimi götürmək olar. Bu vektorlar birölçülü alt vektor fəza əmələ gətirirlər. $L(\vec{a})$.

d -düz xətti bir nöqtəsi və yönəldici vektoru ilə tamamilə təyin oluna bilər. $d = [M_0, \vec{P}]$.

Aşağıdakı hallarda düz xəttin tənliyini yazaq.

1⁰. Düz xəttin kanonik tənliyi.

Fəzada $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ümumi afin reperində $M_0(x_0, y_0, z_0) \in d$ və $\vec{P}(P_1, P_2, P_3) \parallel d$ götürərək. $M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{P}$ olsun.

$M(x, y, z)$ olarsa, $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \parallel \vec{P}$, onda

$$\frac{x - x_0}{P_1} = \frac{y - y_0}{P_2} = \frac{z - z_0}{P_3} \quad (1)$$

Düz xəttin tənliyidir. Məs. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{1}$

Xüsusi hallara baxaq:

a) $P_1=0, P_2 \neq 0, P_3 \neq 0$, onda $x - x_0 = 0, \frac{y - y_0}{P_2} = \frac{z - z_0}{P_3}$

b) $P_2 = 0, P_1 \neq 0, P_3 \neq 0 \Rightarrow \frac{x - x_0}{P_1} = \frac{z - z_0}{P_3}, y - y_0 = 0$

v) $P_3 = 0, P_1 \neq 0, P_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{x - x_0}{P_1} = \frac{y - y_0}{P_2}, z - z_0 = 0$

2⁰. İki nöqtədən keçən düz xətt tənliyi.

Fəzada afin koordinat sistemində $M_1 \neq M_2, M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri verilmişdir. Onda $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel d$ olar. Belə düz xətt bəzən (M_1M_2) kimi işarə

olunur: $d = [M_1, \overrightarrow{M_1M_2}] = [M_2, \overrightarrow{M_1M_2}] \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Fərz edək

$x_2 - x_1 \neq 0, y_2 - y_1 \neq 0, z_2 - z_1 \neq 0$. Onda (1) tənliyinə əsasən $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ və ya

$$\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1} \quad (2) \text{ olar. İki nöqtədən keçən düz xətt}$$

tənliyidir. $M_3 \in (M_1, M_2); M_3(x_3, y_3, z_3)$ olarsa (2)-yə əsasən $\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \quad (3)$

şərti üç nöqtənin bir düz xətt üzərində yerləşmə şərtidir.

3⁰. Düz xəttin parametrik tənliyi.

Ümumi afin koordinat sistemində $d = [M_0, \vec{P}]; M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ olsun. $\overrightarrow{M_0M} \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{P}$ olsun.

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \vec{P}(P_1, P_2, P_3)$ olarsa,

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda P_1, \\ y - y_0 = \lambda P_2, \\ z - z_0 = \lambda P_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda P_1, \\ y = y_0 + \lambda P_2, \\ z = z_0 + \lambda P_3 \end{cases} \quad (3)$$

$\lambda \in R$ -parametr adlanır.(3)-düz xəttin parametrik tənliyi adlanır.

4⁰.Düz xəttin iki müstəvinin kəsişmə xətti kimi verilməsi.

Fərz edək $d = \sigma_1 \cap \sigma_2$. $\sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

olsun. $\sigma_1 \cap \sigma_2$ olduğundan $\text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$. Fərz edək, $\vec{P} \notin d$. $\vec{P}(P_1, P_2, P_3)$ olsun.

$$\begin{cases} d \subset \sigma_1 \Rightarrow d \parallel \sigma_1 \\ d \subset \sigma_2 \Rightarrow d \parallel \sigma_2 \end{cases} \text{ olar.}$$

Vektorun müstəviyə paralellik şərtinə əsasən $\begin{cases} A_1P_1 + B_1P_2 + C_1P_3 = 0 \\ A_2P_1 + B_2P_2 + C_2P_3 = 0 \end{cases}$ olar. Buradan

$$\frac{P_1}{\Delta_1} = \frac{P_2}{\Delta_2} = \frac{P_3}{\Delta_3}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \text{Odur}$$

ki, $\vec{P} \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$ olar. Əgər $M_0(x_0, y_0, z_0) \in d$ olarsa

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 \end{cases} \text{ sistemini ödəyər. Onda d-nin tənliyi}$$

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \quad (4) \text{ kimi yazılır.}$$

Misal. $\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ 2x + y - z + 6 = 0 \end{cases}$ sistemi ilə təyin olunan d düz xəttinin kanonik tənliyini yazmalı.

$$\text{Həlli. } \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-1} \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 = 0, x = 0 \text{ deyərək } \begin{cases} -y + 2z - 3 = 0 \\ y - z + 6 = 0 \end{cases} \text{ tənliyindən } z = -3, y = -9$$

tapılır. $M_0(0, -9, -3)$ olur.

$$A_1=1, B_1=-1, C_1=2, A_2=2, B_2=1, C_2=-1 \text{ olduğundan } \vec{P} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, 5, 3) \text{ olur}$$

$$\text{və tənlik } \frac{x}{-1} = \frac{y+9}{5} = \frac{z+3}{3} \text{ şəklində yazılır.}$$

&2.Düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyəti.

Fəzada $d_1 = [M_1, \vec{P}]$ və $d_2 = [M_2, \vec{q}]$ kimi iki düz xətt götürək. $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{P}, \vec{q}$ vektorları komplanar ola və olmaya bilər.

1) $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{P}, \vec{q}$ -komplanar deyillər. Onda d_1 və d_2 çarpaz düz xəttlər adlanırlar, şərti $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{P}, \vec{q}) \neq 0$ olmasıdır.

2) $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{P}, \vec{q}$ vektorları komplanar, yəni bir müstəvi üzərində yerləşirlər, onda d_1 və d_2 düz xəttləri, eyni bir σ müstəvisi üzərində olurlar. $d_1, d_2 \subset \sigma$. Müstəvidə iki düz xətt üç növ qarşılıqlı vəziyyətdə olurlar.

a) Düz xətlər bir müstəvi üzərindədirlər, yəni $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{P}, \vec{q}) = 0$ və $\vec{P} \neq \lambda \vec{q}$ şərti var. Onda $d_1 \cap d_2 = M_0$ olar.

b) Düz xətlər bir müstəvi üzərindədirlər, lakin $\vec{P} = \lambda \vec{q}, \overrightarrow{M_1M_2} \neq t\vec{P}$ onda $d_1 \parallel d_2$, $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ olar.

v) Düz xətlər bir müstəvi üzərindədirlər, həm də $\vec{P} = \lambda \vec{q}, \overrightarrow{M_1M_2} \neq t\vec{P}$, onda düz xətlər üst-üstə düşürlər, $d_1 = d_2$ olur.

Misal 1. $(d_1) \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{2}$ və $(d_2) \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1}$ düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyətini müəyyən etməli.

$$M_1(2, -1, 4), M_2(-1, 2, -3), \vec{P}(1, 3, 2), \vec{q}(-1, 2, -1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-3, 3, -7).$$

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{P}, \vec{q}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 - 6 - 14 - 21 + 3 + 12 \neq 0$$

Deməli düz xətlər kəpəzdir.

Misal 2. $(d_1) \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$ və $(d_2) \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-8}{4}$

$$M_1(2, -1, -1), M_2(5, 2, 8), \vec{P}(1, 2, 3), \vec{q}(2, 1, 4)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3, 3, 7).$$

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{P}, \vec{q}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 18 + 7 - 28 - 9 - 12 = 0$$

$$\vec{P}(1, 2, 3) \neq \lambda \vec{q}(2, 1, 4)$$

Deməli $d_1 \cap d_2 = M_0$ olar. $M_0(3, 1, 4)$ olar.

&3. Fəzada iki düz xətt arasındakı bucaq düsturünün çıxarılması və tətbiqi.

Düz bucaqlı koordinat sistemində paralel olmayan $d_1 = [M_1, \vec{P}]$, $d_2 = [M_2, \vec{q}]$ kimi iki düz xətt götürək. Fəzanın hər hansı A nöqtəsindən d_1 və d_2 -yə paralel d_1' və d_2' düz xətlərini götürək. d_1' və d_2' kəsişərək 1, 2, 3, 4 bucaqlarını əmələ gətirirlər. Bu bucaqların hər biri d_1 və d_2 arasındakı bucaq adlanır. Bunların biri məlumdursa, obirlərini təyin etmək mümkündür, çünki, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4 = 2\pi$.

Bu bucaqların biri $\vec{P}$ və $\vec{q}$ arasındakı bucaqdır, onda $\cos \varphi = \frac{\vec{P} \cdot \vec{q}}{|\vec{P}| |\vec{q}|}$, $\varphi = \angle 1$ olar.

$$d_1 \perp d_2 \Rightarrow \varphi = 90^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \vec{P} \cdot \vec{q} = 0.$$

İstiqamətverici vektoru ortoqonal olan kəpəz düz xətlər də ortoqonal adlanırlar.

Misal. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{2}$ (d_1), $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ (d_2)

$$\varphi = (d_1 \wedge d_2) = (\vec{P} \wedge \vec{q}), \vec{P}(3, 4, 2), \vec{q}(2, 1, 2)$$

$$\cos \varphi = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{14}{\sqrt{29} \sqrt{9}} = \frac{14}{3\sqrt{29}}$$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (-4, 2, -1), \vec{P}(3, 4, 2), \vec{q} = (2, 1, 2)$ olduqda,

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -32 + 8 - 3 + 8 + 8 - 12 \neq 0. \text{Deməli } d_1 \text{ və } d_2 \text{ çarpaz düz xəttlərdir. Çarpaz düz xəttlər}$$

arasındakı bucaq $\cos \varphi = \frac{14}{3\sqrt{29}}$ - dur.

&4. Fəzada düz xəttə aid metrik və afin məsələlər.

Məsələlərə baxaq. Bu məsələlər metrik və ya afin xarakterlidirlər.

Məsələ 1. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsindən verilmiş iki çarpaz düz xəttə perpendikulyar olan düz xətt tənliyini yazmalı.

$$(d_1): \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}, (d_2): \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}$$

Verilən çarpaz düz xəttlərdir. $\vec{a}(a_1, a_2, a_3) // d_1, \vec{b}(b_1, b_2, b_3) // d_2$.

$\vec{P} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ vektoru d_1 və d_2 -yə $\perp$ olar və axtarılan d düz xəttinin yönəldicisidir.

$$\text{Onda } (d): \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ olar.}$$

Məsələ 2. M nöqtəsindən $d = [M_0, \vec{P}]$ düz xəttinə qədər məsafəni təyin etməli.

$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{P}$ ayırsaq, $\rho(M, d)$ məsafəsi ΔM_0MM_1 -in hündürlüyü olar. Onda

$$S_{\Delta M_0MM_1} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{M_0M}, \vec{P}] \right| = \frac{1}{2} h \left| \overrightarrow{M_0M_1} \right|$$

$$h = \rho(M, d) = \frac{\left| [\overrightarrow{M_0M}, \vec{P}] \right|}{\left| \vec{P} \right|};$$

Məsələ 3. İki çarpaz düz xətt arasındakı məsafəni təyin etməli.

σ_1 müstəvisi d_1 -dən keçir və d_2 -yə paraleldir, σ_2 -müstəvisi d_2 -dən keçir d_1 -ə paraleldir. Onda aydındır ki, $\rho(d_1, d_2) = \rho(\sigma_1, \sigma_2)$ olar. Bu məsafəni hesablamaq üçün $M_1 N_1 P_1 Q_1 M_2 N_2 P_2 Q_2$

paralelopipedini quraq. Onda həcm $V_{par} = \left| (\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{P}, \vec{q}) \right|$ olar.

$$V_{par} = S_{otr} \rho(d_1, d_2) S_{otr} = S_{M_1N_1P_1Q_1} \left| (\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{P}, \vec{q}) \right| = \rho(d_1, d_2) \left| [\vec{P}, \vec{q}] \right|$$

$$S_{otr} = \left| [\vec{P}, \vec{q}] \right|$$

$$\rho(d_1, d_2) = \frac{\left| [\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{P}, \vec{q}] \right|}{\left| [\vec{P}, \vec{q}] \right|}.$$

Fəzada düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti, düz xətlər və müstəvilər bağılısı. Düz xətt və müstəvi tənliklərinin məktəb həndəsə məsələlərinə tətbiqi.

- Plan: 1. Fəzada müstəvi ilə düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti.
 2. Fəzada müstəvi ilə düz xətt arasındakı bucaq.
 3. Fəzada düz xətlər və müstəvilər bağılısı.
 4. Düz xətt və müstəvi tənliklərinin məktəb həndəsə məsələlərinə tətbiqləri.

§1. Fəzada müstəvi ilə düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti.

Fəzada $d = [M_0, \vec{p}]$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ düz xətti və σ müstəvisi ümumi tənliyi ilə $Ax + By + Cz + D = 0$ kimi verilib. Bunların qarşılıqlı vəziyyətini tənliklərinin ortaq həllinin varlığı ilə araşdıraraq d-nin tənliyini parametrik şəkildə $x = x_0 + p_1 t$, $y = y_0 + p_2 t$, $z = z_0 + p_3 t$, kimi yazmaq və bunları σ -nın tənliyində nəzərə almaq:

$$A(x_0 + p_1 t) + B(y_0 + p_2 t) + C(z_0 + p_3 t) + D = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t(Ap_1 + Bp_2 + Cp_3) = 0.$$

t-yə görə tənliyinin həllini araşdıraraq:

1) $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 \neq 0$. Onda $t = t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3}$ olur və tənliyinin yeganə həlli olur.

$$\text{Yəni } d \cap \sigma = \{M_1(x_1, y_1, z_1)\} \quad \begin{cases} x_1 = x_0 + p_1 t_0 \\ y_1 = y_0 + p_2 t_0 \\ z_1 = z_0 + p_3 t_0 \end{cases} \text{ olur.}$$

Bu halda $\vec{p} \neq \sigma$ olarsa, düz xətt müstəvi ilə yeganə nöqtədə kəşişir.

2) $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$, $\omega = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$. Onda tənlik $t \cdot 0 + \omega = 0$, $\omega = 0$ şəklinə düşür və bu halda tənliyin həlli toxdur, yəni $d \cap \sigma = \emptyset$.

$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \Rightarrow \vec{p} \parallel \sigma$ deməli, bu halda düz xətt müstəviyə paralel olmaqla ortaq nöqtəyə malik deyil.

3) $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$, $\omega = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, onda tənlik $0 \cdot t + 0 = 0$ şəklinə düşür və bu halda tənliyin sonsuz sayda həlli olur, yəni $\forall t \in \mathbb{R}$ tənliyi ödəyir, başqa sözlə düz xətlə müstəvi sonsuz sayda nöqtədə kəşişirlər, və ya $d \subset \sigma$ olur.

Beləliklə düz xətt və müstəvi üç növ qarşılıqlı vəziyyətdə olurlar: bir nöqtədə kəşişirlər, kəşişmirlər və paralel olurlar, üst-üstə düşürlər.

Misal: $x + 3y - 4z + 1 = 0$ müstəvisi ilə $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{1}$ düz xətdin qarşılıqlı vəziyyətini təyin edin. $x = 3t$, $y = 1 + 4t$, $z = 2 + t$ olduğundan $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \neq 0$ olduğundan $d \cap \sigma = \{M_0\}$ nöqtəsini tapmaq: $3t + 3 + 12t - 8 - 4t + 1 = 0$, $11t = \frac{4}{11}$; $t = \frac{4}{11}$

$M_0(1\frac{1}{11}, 2\frac{5}{11}, 2\frac{4}{11})$ olar.

§2. Fəzada müstəvi ilə düz xətt arasındakı bucaq.

Fəzada düz xətlə müstəvi kəşişdikdə onlar arasında bucaq əmələ gəlir. Həmin bucağı təyin etmək: Əgər, $d \perp \sigma$ olarsa, $(\sigma \wedge d) = 90^\circ, 270^\circ$ olar. Fərs etmək d ilə σ arasındakı bucaq düz bucaq deyildir.

- $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, $\vec{n} \perp \sigma$, $\vec{n}(A, B, C)$

Düz bucaqlı kordinant sistemində

$\varphi = (\vec{n} \wedge \vec{p})$ olarsa,

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|} = \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$$

Əgər σ üzərində d -nin proyeksiyası d' olarsa və $(\vec{d} \wedge \vec{d}') = 0$ isə $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ və ya $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$ olar. Bu hallar $\theta - \pi$ itti və ya kor olması ilə alınır. Beləliklə, ya $\sin \varphi = \cos \theta$ ($\cos \theta > 0$ isə), ya da $\sin \varphi = -\cos \theta$ ($\cos \theta < 0$ isə), hər iki halı birləşdirsək $\sin \varphi = |\cos \theta|$ almar. Düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq d düz xətt ilə onun σ üzərindəki d' proyeksiyası arasındakı iti bucağa deyilir. Bu bucaq

$$\sin \varphi = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$$

Düsturu ilə hesablanır. Əgər $d \perp \sigma$ olarsa, $\vec{p} = \lambda \vec{n}$ olar. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olar, çünki $|\vec{p} * \vec{n}| = |\vec{p}| * |\vec{n}|$, $\sin \varphi = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ alınar.

§3. Fəzada düz xətlər və müstəvilər bağılısı.

Fəzada əvvəlcə müstəvilər dəstəsinə baxaq. bir düz xətt üzərində kəsişən müstəvilər müstəvilər dəstəsi adlanır. Əgər $\sigma_1 \cap \sigma_2 = d$ olarsa, onda oxu d olan dəstə $\pi(d)$ ilə işarə olunur. $\sigma_i: A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ ($i=1,2$) $\sigma_1 \cap \sigma_2 = d$.

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2 \quad d \parallel \vec{p} \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \text{ olar.}$$

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in d$ olarsa $M_0 \in \sigma_i$ olduğundan $A_i x_0 + B_i y_0 + C_i z_0 + D_i = 0 \quad \forall \sigma \in \pi(d)$ Olarsa $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$ və $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

$$\text{Buradan} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = \alpha A_1 + \beta A_2 \\ B = \alpha B_1 + \beta B_2 \\ C = \alpha C_1 + \beta C_2 \end{cases}$$

$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) \Rightarrow D = \alpha D_1 + \beta D_2. \quad A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$
 $\alpha(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$ Dəstə tənliyidir.

$\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, λ, μ - cütü $\sigma \in \pi(d)$ müstəvisini verir.

Eyni müstəviyə paralel olan müstəvilərə *paralel müstəvilər dəstəsi* deyilir, onun tənliyi $Ax + By + Cz + D_0 = 0$ D_0 - dəyişdikcə dəstənin ayrı-ayrı müstəviləri alınır.

İndi müstəvilər bağılısını izah edək.

M_0 - nöqtəsindən keçən müstəvilər çoxluğuna müstəvilər bağılısı deyilir və $Z(M_0)$ ilə işarələnir. $Z(M_0)$ M_0 - mərkəzinin verilməsi ilə müəyyən olunur.

$D = [M_0, \vec{a}]$ düz xətdi verilsə $\sigma = [M_0, \overrightarrow{M_0 M_1}, \vec{a}] \in Z(M_0)$ olur və s. $R = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ reperində $Z(M_0)$ $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\sigma \in Z(M_0)$ isə

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ olar. $M_1 \neq M_0$, $(M_1, M_0) = d_1$ düz xətdi müəyyən edir.

Hər bir $\pi(d_1) \subset Z(M_0)$. Deməli, $\forall M_0 \in d$ düz xəttinin müəyyən etdiyi $\pi(d)$ müstəvilər dəstəsi $Z(M_0)$ -a daxil olur.

$R = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ reperində $\forall \sigma \in Z(M_0)$ üçün $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ ödənilir. Tərəf-tərəfə çıxsaq $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ (*) olar.

$$M_0 = \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3, \quad \begin{cases} A_\alpha x + B_\alpha y + C_\alpha z + D_\alpha = 0 \\ \alpha = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3. \quad \sigma_1 - \vec{n}_1, \sigma_2 - \vec{n}_2, \sigma_3 - \vec{n}_3, \sigma - \vec{n} \text{ normal vektorları}$$

isə $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ xətdi asılı deyil. $\vec{n} = \alpha \vec{n}_1 + \beta \vec{n}_2 + \gamma \vec{n}_3$ olar. Eləcə də $A_\alpha x_0 + B_\alpha y_0 + C_\alpha z_0 + D_\alpha = 0$ (*) - da yerinə yazsaq və sonuncunu nəzərə alsaq

$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) +$
 $\beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0$ olar. $\alpha:\beta:\gamma$
müxtəlif qiymətli müstəvilər bağlısı alınır.

Fəzada hərəkət və oxşarlıq çevrilmələri, tipləri, ayrılışı, qurru kordinatlarla ifadəsi.

- Plan: 1. Fəzada hərəkət çevrilməsi və misallar.
2. Hərəkət çevrilməsinin əlaməti.
3. Hərəkət çevrilməsinin növləri və invariantları.
4. Hərəkət çevrilməsinin təsnifi.

§1. Fəzada hərəkət çevrilməsi və misallar.

Tərif. $f: \pi \rightarrow \pi$ çevrilməsi zamanı $\forall \alpha$ nöqtə arasındakı məsafə dəyişməzsə bu çevirmə hərəkət çevrilməsi adlanır.

$A, B \in E_3$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $AB = A'B'$ olduqda f - hərəkət çevrilməsidir.

Misallar göstərək.

1. $f^0(M) = M$ eynilik çevrilməsidir, onda $M \neq N$ $f(N) = N$ olarsa, $MN = MN$, yəni f^0 - pərəkətdir.

2. $f: \pi \rightarrow \pi$ zaman $f(M) = M'$, $f(N) = N'$ və $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{N'N'} = \vec{P}$ olarsa, ($\vec{P} \neq \vec{0}$ verilmiş vektor) $\vec{P}$ vektoru istiqamətində paralel köçürmə adlanır. $MM'N'N$ paraleloqram olduğundan $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ olar, yəni $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{M'N'}|$ hərəkətdir.

3. $O \in E_3$ və $f: \pi \rightarrow \pi$ zamanı $O \neq M \rightarrow M'$ və $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$ olarsa O -ya nəzərən simetriya çevrilməsi adlanır. Onda $N \neq M$ olarsa, $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{ON'}$ və $\triangle OMN$ və $\triangle OM'N'$ -dən $M'N = N'$ adlanır. Deməli O -ya nəzərən simetriya çevrilməsi hərəkət çevrilməsidir.

4. $O \in E_3$ müstəvisini götürək. Elə $f: \pi \rightarrow \pi$ çevrilməsinə baxaq ki, $f(M) = M'$ olduqda (MM') perpendikulyar σ $\rho(M\sigma) = \rho(M'\sigma)$ ödənsin. Bu çevirmə σ müstəvisinə nəzərən simmetriya çevrilməsi adlanır. Göstərək ki, bu çevirmə hərəkətdir. Əgər $N \neq M$ olarsa $f(N) = N'$ onda $MM_0 = M_0M'$, $NN_0 = N_0N'$, $M_0N_0 = ML = M'L'$ olduğu üçün $\triangle MNL$ və $\triangle M'N'L'$ -dən $MN = M'N'$ alınar. Bunu başqa yollada isbat etmək olardı. $(0, i, j, k)$ -ni elə seçək ki, i (paralel) σ , j (paralel) σ olsun. Onda $M(x, y, z)$ isə $M'(x_1, y_1, z_1)$, $z_1 = -z$ olar. $N'(x_2, y_2, -z_2)$ olar və

$$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$$

Deməli, $MN = M'N'$ alınır, müstəviyə nəzərən simmetriya hərəkət çevrilməsidir.

Fəzada müstəvi tənlikləri.

Plan:

- 1.Müstəvinin müxtəlif tənlikləri.
 - 2.Müstəvinin ümumi tənliyi və araşdırılması.
 - 3.Vektorun müstəviyə paralellik şərti.
 - 4.Nöqtədən müstəviyə qədər məsafə.
 - 5.İki müstəvi arasında bucaq.
 - 6.Müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti.
-

1.Fəzada əsas həndəsi obyektlər dedikdə nöqtə,düz xətt,müstəvi,səth və fiqurlar başa düşülür.Müstəvi ilə tanış olaq.

Hələ Evklid müstəviyə belə bir tərif vermişdir.

T ə r i f-Müstəvi elədir ki,onun yalnız eni və uzunluğu vardır və ya müstəvi,üzərindəki bütün düz xətlərə nəzərən eyni uzunluqdadır.

Müasir nöqtəyi nəzərdən müstəviyə belə tərif verilir.

T ə r i f-Müstəvi,bir nöqtəsi və ikiölçülü alt vektor fəzası ilə təyin olunan fiqurdur.

Müstəvini σ ilə işarə edəcəyik.

Fərz edək ki,fəzada hər hansı bir müstəvi verilib.Bu müstəviyə paralel olan vektorlar çoxluğunu L ilə işarə edək.Aşkardır ki,bu çoxluq komplanar vektorlar çoxluğuudur və bu çoxluq ikiölçülü fəza müəyyən edir.Bilirik ki,bu çoxluğa daxil olan müəyyən nizamlı götürülən kollinear olmayan istənilən iki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları $\vec{a}, \vec{b} \in L$ bu fəzanın bazisi olacaq.Ona görə bunu $L(\vec{a}, \vec{b})$ ilə işarə edək. $L(\vec{a}, \vec{b})$ alt fəzasına σ müstəvisinin istiqamətverici alt fəzası deyilir.Fərz edək ki,istiqamətverici alt vektor fəzası $L(\vec{a}, \vec{b})$ olan σ müstəvisi üzərində $M_0 \in \sigma$ nöqtəsi qeyd olunub və $\vec{a}, \vec{b}$ vektorları $L(\vec{a}, \vec{b})$ alt fəzasının bazis vektorlarıdır.Bu vektorları M_0 nöqtəsindən ayıraq. σ müstəvisi üzərində $\forall M \in \sigma$ nöqtəsi götürək,onda $M_0M, \vec{a}, \vec{b}$ vektorları komplanar vektorlar adlanır.Onda elə u, v ədədləri var ki,

$$M_0M = u\vec{a} + v\vec{b} \quad (1)$$

olur.Burada u, v -parametrlərdir. İstiqamətverici alt vektor fəzası $L(\vec{a}, \vec{b})$ olan və M_0 nöqtəsindən keçən σ müstəvisi üzərində olan istənilən $M \in \sigma$ nöqtəsi üçün (1) münasibəti ödənilir.Aşkardır ki, bu müstəvi üzərində olmayan heç bir nöqtə (1) münasibətini ödəmir.(1) tənliyi σ müstəvisinin vektor-parametrik tənliyi adlanır və $\sigma = [M_0, \vec{a}, \vec{b}]$ kimi işarə olunur.

Tutaq ki,fəzada hər hansı $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ koordinat sistemi verilib.Bu sistemdə $M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olsun. $\forall M \in \sigma$ nöqtəsinin koordinatlarını (x, y, z) kimi işarə edək.Onda yazı bilərik:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

Həmçinin (1) münasibətini koordinatlarda yazı bilərik:

$$\begin{cases} x - x_0 = ua_1 + vb_1 \\ y - y_0 = ua_2 + vb_2 \\ z - z_0 = ua_3 + vb_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ua_1 + vb_1 + x_0 \\ y = ua_2 + vb_2 + y_0 \\ z = ua_3 + vb_3 + z_0 \end{cases} \quad (2)$$

Deməli aldıq ki, $\sigma = [M_o, \vec{a}, \vec{b}]$ müstəvisi üzərində olan hər bir M nöqtəsinin x, y, z koordinatları (2) tənliyini ödəyir. (2) tənliyi müstəvinin parametrik tənliyi adlanır. Burada, u, v -parametrlər, x_0, y_0, z_0 -müstəvi üzərində qeyd olunmuş nöqtənin koordinatları, $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$ isə uyğun olaraq $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarının koordinatlarıdır. x, y, z -isə müstəvi üzərində götürülən ixtiyari nöqtənin koordinatlarıdır.

Biz qeyd etdik ki.əgər $M_o(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsindən keçən və σ müstəvisinə paralel olan $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ və $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorları verilərsə, onda $\forall M(x, y, z) \in \sigma$ nöqtəsi üçün $\overrightarrow{M_oM}, \vec{a}, \vec{b}$ vektorları komplanar olur. Əgər koordinatları ilə verilən vektorların komplanarlıq şərtindən istifadə etsək alarıq:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Aldıq ki, $\sigma = [M_o, \vec{a}, \vec{b}]$ müstəvisi üzərində olan hər bir M nöqtəsinin x, y, z koordinatları (3) tənliyini ödəyir. (3) tənliyi müstəvinin parametrsiz tənliyi adlanır.

İndi isə üç nöqtədən keçən müstəvi tənliyini nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, fəzada $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ koordinat sistemi verilib. Bu sistemdə bir düz xətt üzərində olmayan $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ nöqtələrini götürək. Bu nöqtələrdən keçən müstəvinin tənliyini tapaq. Aşkardır ki, $\sigma = [M_1, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}]$ olur və $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ vektorları komplanardır. Əgər M nöqtəsinin koordinatlarını x, y, z kimi işarə etsək, onda alarıq:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}, \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$$

Bunlar komplanar vektorlar olduğuna görə

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

(4)tənliyi koordinatları ilə verilən üç nöqtədən keçən müstəvinin tənliyidir.

Xüsusi halda əgər M_1, M_2, M_3 nöqtələri σ müstəvisinin uyğun olaraq Ox, Oy, Oz oxlarını kəsdiyi nöqtələr olarsa, $M_1(a, 0, 0), M_2(0, b, 0), M_3(0, 0, c)$ olur. (4) tənliyindən istifadə etsək alarıq.

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-a) \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 0 & -a \\ c & -a \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bcx - abc + acy + abz = 0$$

Buradan da alırıq ki, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (5)

(5) tənliyi müstəvinin parçalarla tənliyi adlanır. Burada, a, b, c - müstəvinin uyğun olaraq Ox, Oy, Oz oxlarından ayırdığı parçalardır. Bu tənlikdən müstəvilərin qurulmasında geniş istifadə olunur.

2. Bilirik ki, müstəvinin parametrsiz tənliyi (3) şəklindədir.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Bu determinantı birinci sətir elementlərinə nəzərən açsaq, onda alırıq:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} (x-x_0) + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} (y-y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (z-z_0) = 0 \quad (6)$$

Aşağıdakı kimi işarələr qəbul edək:

$$A = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) \quad (7)$$

Onda (6)-nı aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (8)$$

Deməli aldıq ki, σ müstəvisi (8) tənliyi ilə müəyyən olunur. Qeyd edək ki, işarələmələrdən aydındır ki, A, B, C əmsallarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidir. Çünki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolinear deyil.

Əksinə, göstərə bilərik ki, x, y, z dəyişənlərindən asılı (8) şəklində birdərəcəli bir tənlik verilibsə, onda bu tənlik, fəzada bir müstəvi təyin edir. (8) tənliyinə müstəvinin ümumi tənliyi deyilir.

Fərz edək ki, fəzada $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ koordinat sistemində (8) ümumi tənliyi ilə müəyyən olunan σ müstəvisi verilmişdir. Bu tənliyin köməyi ilə σ müstəvisinin verilən koordinat sistemə nəzərən (yəni, koordinat başlanğıcına, koordinat oxlarına və koordinat müstəvilərinə) vəziyyətini təyin edə bilərik. Bu zaman aşağıdakı hallar ola bilər.

Tutaq ki, (8) tənliyində

$$1) D=0, \text{ yəni } Ax+By+Cz=0 \quad (1')$$

Bu halda müstəvi koordinat başlanğıcından keçir, çünki, koordinat başlanğıcının koordinatları (1') tənliyini ödəyir: $A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$

$$2) A=0, \text{ yəni, } By+Cz+D=0 \quad (2') . \quad \text{Bu halda } \sigma // O_x .$$

Xüsusi halda $A=D=0$ olarsa, $Bx+Cz=0 \quad (3')$. Bu halda $O_x \in \sigma$ olur.

$$3) B=0, \text{ yəni, } Ax+Cz+D=0 \quad (4') . \text{Bu halda } \sigma // O_y$$

Xüsusi halda $B=D=0$ olarsa, $Ax+Cz=0$ (5') olur. Bu halda $Oy \in \sigma$ olur.

4) $C=0$, yəni, $Ax+By+D=0$ (6'). Bu halda $\sigma \parallel Oz$

Xüsusi halda $C=D=0$ olarsa, $Ax+By=0$ (7') olur. Bu halda $Oz \in \sigma$ olur.

Bu dediklərimizdən istifadə edərək (8) tənliyi ilə verilən σ müstəvisinin koordinat müstəvilərinə nəzərən vəziyyətini müəyyən edə bilərik.

1) $A=B=0$ olarsa $Cz+D=0$ (8') Bu halda $\sigma \parallel Oxy$

Xüsusi halda $A=B=D=0$ olarsa, $z=0$ (9') olur. Bu halda $\sigma \equiv Oxy$

2) $A=C=0$ olarsa, $By+D=0$ (10') olur. Bu halda $\sigma \parallel Oxz$

Xüsusi halda $A=C=D=0$ olarsa, $y=0$ (11') olur. Bu halda $\sigma \equiv Oxz$

3) $B=C=0$ olarsa, $Ax+D=0$ (12') olur. Bu halda $\sigma \parallel Oyz$

Xüsusi halda $B=C=D=0$ olarsa, $x=0$ (13') olur. Bu halda $\sigma \equiv Oyz$

(1')-(13') tənliklərinə müstəvinin natamam tənlikləri deyilir.

3. Fərz edək ki, fəzada $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ koordinat sistemində

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

tənliyi ilə müəyyən olunan σ müstəvisi verilmişdir.

L e m m a: $\vec{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$ vektorunun (1) tənliyi ilə verilən σ müstəvisinə paralel olması üçün zəruri və kafi şərt

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \quad (2)$$

şərtinin ödənilməsidir.

İ s b a t : Tutaq ki, $\vec{p} \parallel \sigma$, (2) şərtinin doğruluğunu göstərək. Müstəvi üzərində hər hansı bir $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nöqtəsi götürək. $\vec{p}$ vektorunu M_1 nöqtəsindən ayıraq. $\vec{p} \parallel \sigma \Rightarrow \exists M_2(x_2, y_2, z_2) \in \sigma$ nöqtəsi var ki, $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{p}$ olar. $\overrightarrow{M_1M_2} \in \sigma$

olmasından çıxır ki,

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0 \end{aligned}$$

Tərəf-tərəfə çıxaraq: $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$

$p_1 = x_2 - x_1, p_2 = y_2 - y_1, p_3 = z_2 - z_1$ olmasından alırıq ki, (2) şərti ödənilir.

Əksinə, göstərə bilərik ki, əgər (2) şərti ödənilirsə, $\vec{p} \parallel \sigma$ olur. σ müstəvisi üzərində hər hansı bir $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nöqtəsi götürək. $\vec{p}$ vektorunu M_1

nöqtəsindən ayıraq. $M_2(x_2, y_2, z_2)$ alırıq ki,

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= x_2 - x_1 \\ p_2 &= y_2 - y_1 \\ p_3 &= z_2 - z_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - p_1 \\ y_1 = y_2 - p_2 \\ z_1 = z_2 - p_3 \end{cases}$$

Alırıq ki, $0 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = Ax_2 + By_2 + Cz_2 - (Ap_1 + Bp_2 + Cp_3) + D$

Buradan alırıq ki, $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$, yəni, $M_2 \in \sigma$ olur. Deməli, $\vec{p} \parallel \sigma$ olar.

4. T ə r i f-Verilmiş müstəviyə perpendikulyar olan sıfırdan fərqli olan hər bir vektora müstəvinin normal vektoru deyilir. $\vec{n} \neq \vec{0}, \vec{n} \perp \sigma$

Aydındır ki, sonsuz sayda normal vektor var, bu vektorlar bir-birindən müəyyən bir uzunluq ilə fərqlənir. Tutaq ki, fəzada hər hansı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ ortonormal koordinat sistemi verilib. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsindən keçən və normal vektoru $\vec{n} = (A, B, C)$ olan σ müstəvisinin tənliyini yazaq.

Əgər ixtiyari $M(x, y, z) \in \sigma$ nöqtəsi götürsək, onda aşkardır ki, $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ vektoru $\vec{n}$ vektoruna perpendikulyar olur, yəni, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Bu tənlik, bir nöqtəsinə və normal vektoruna görə müstəvi tənliyi olur. Əgər düzbucaqlı dekart koordinat sistemində $Ax + By + Cz + D = 0$ (1) tənliyi ilə müəyyən olunan σ müstəvisi verilərsə, onda göstərə bilərik ki, $\vec{n} = (A, B, C)$ vektoru bu müstəvinin normal vektorudur.

Fərz edək ki, fəzada $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ ortonormal koordinat sistemində ümumi tənliyi ilə $\sigma : Ax + By + Cz + D = 0$ müstəvisi və koordinatları ilə $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nöqtəsi verilib. Bu nöqtədən σ müstəvisinə qədər olan $d(M_1, \sigma)$ məsafəsini hesablayaq. Aşkardır ki, bu məsafə, yəni, M_1 -dən $\overrightarrow{M_0M_1}$ perpendikulyarının boyuna bərabərdir, yəni, $\overrightarrow{M_0M_1}$ vektorunun uzunluğuna bərabərdir. Yuxarıda öyrəndik ki, (1) tənliyi ilə verilən σ müstəvisinin normal vektoru $\vec{n} = (A, B, C)$ -dir. M_0 nöqtəsinin koordinatları da (x_0, y_0, z_0) -dir. Onda

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (2)$$

Bu halda $\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$ vektoru ilə $\vec{n}$ vektoru kollinear olur.

$$\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{M_0M_1}| |\vec{n}| \cos(\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \vec{n}) = |\overrightarrow{M_0M_1}| |\vec{n}|$$

$$\text{Buradan alırıq ki, } d(M, \sigma) = \left| \overrightarrow{M_0M_1} \right| = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad (3)$$

(3) münasibətinin sağ tərəfinə daxil olan skalyar hasili hesablayaq.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n} &= A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = \\ &= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \end{aligned}$$

$$\text{Nəticədə alırıq ki, } d(M_1, \sigma) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (4)$$

5. Fərz edək ki, fəzada $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ ortonormal koordinat sistemində tənlikləri ilə

$$\sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

müstəviləri verilmişdir. Bu müstəvilər müəyyən bir düz xətt boyunca kəsişirlər və bu kəsişmədən iki üzlü bucaqlar alınır. σ_1, σ_2 müstəvilərinin əmələ gətirdiyi ikiüzlü bucağın xətti bucağına bu müstəvilər arasındakı bucaq deyilir. $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ vektorları uyğun olaraq σ_1, σ_2 müstəvilərinin normal vektorlarıdır. Onda $(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2)$ bucağı φ -yə bərabər olur. (1) və (2) tənlikləri ilə verilən müstəvilər arasındakı bucağı aşağıdakı kimi hesablaya bilərik.

$$\cos \varphi = \cos(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \quad (3)$$

(3)düsturunı koordinatlarda yazsaq,alarıq:

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

(4)düsturu tənlikləri ilə verilən iki müstəvi arasındakı bucağın hesablanması düsturudur.

Xüsusi halda $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$ olarsa ,onda $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olur.