

MÖVZU 1. EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN PREDMETİ.ELEMENTAR HADİSƏLƏR FƏZASI.TƏSADÜFÜ HADİSƏLƏR VƏ ONLAR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏİLƏR

PLAN.

- 1.Ehtimal nəzəriyyəsinin predmeti.
- 2.Təsadüfə sınaqlar.
- 3.Elementar hadisələr fəzası.
- 4.Təsadüfə hadisələr üzərində əməllər.
- 4.1.Hadisələr arasında daxilolma və eynigüclülük münasibətləri.
- 4.2.Hadisələrin hasili.
- 4.3.Hadisələrin birləşməsi.
- 4.4.Hadisələrin fərqi və tamamlama əməli.
- 5.Hadisələrin tam sistemi.
- 6.Hadisələr ardıcılığının limiti.
- 7.Hadisələr cəbri və σ cəbri.

Ə D Ə B İ Y Y T S İ Y A H I S I .

- 1.Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, "Maarif nəşriyyatı", 1973.
2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çapaşloğlu, 2006.

MÖVZU 1. EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN PREDMETİ.ELEMENTAR HADİSƏLƏR FƏZASI.TƏSADÜFÜ HADİSƏLƏR VƏ ONLAR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏİLƏR

1.Ehtimal nəzəriyyəsinin predmeti.

Bu gün ehtimal nəzəriyyəsi bütün təbiət elmlərinin təməl daşı, statistika isə insan fəaliyyətinin bütün sahələrinin ayrılmaz hissəsidir".Məşhur Amerika alimi Kasın bu kəlamı ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın müasir dövrdə oynadığı rolu çox gözəl ifadə edir.Buna görə də bu elmlərin əsasları ilə tanış olmağı riyazi mədəniyyətin zəruri komponenti hesab etmək olar.

Ehtimal nəzəriyyəsi – nəzəri və tətbiqi əhəmiyyət kəsb edən riyazi elmdir.İndi elm və texnikanın elə bir sahəsi yoxdur ki, orada ehtimal-statistika üsullarından bu və ya başqa dərəcədə istifadə edilməsin.Bu cəhət həm ehtimal nəzəriyyəsinin, həm də onun tətbiq edildiyi müxtəlif elm sahələrinin (məsələn, riyaziyyat, fizika, kimya, biologiya, iqtisadiyyat, ekonometrika, tibbi elm, hərbi iş, texnika və s.) inkişafına geniş imkan vermişdir.

Son bir neçə onilliklər ərzində riyaziyyatda yeni elmi istiqamətlər meydana gəlmişdir.Bunlardan etibarlılıq, kütləvi xidmət, stoxastik proqramlaşdırma, atəş,dəniz dalğaları, meteorologiya, müşahidənin xətalı, informasiya, radiotexnika, rabitə və s. nəzəriyyələri qeyd etmək olar. Ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiq sahələri daim genişlənir və bu proses bu gün də davam edir.Konkret həyatı

məsələləri həll etməyə imkan verən bu elmi istiqamətlər ehtimal nəzəriyyəsinin inkişafına əsaslanır. İndi ehtimal nəzəriyyəsinə nəinki riyaziyyatçı, habelə mühəndis, iqtisadçı, geoloq, həkim, fizik, kimyaçı, bioloq və s. kimi müxtəlif peşə sahibləri müraciət edir.

Təbiət və cəmiyyət qanunları səbəb əlaqələrinin təzahürü formalarına görə determinik və statistik qanunlara bölünür

Məlumdur ki, riyaziyyat, başqa elm sahələrində olduğu kimi, gerçək aləmdə baş verən hadisə və proseslərin qanunlarını öyrənir. Buna klassik nümunə kimi Nyuton mexanikasını göstərmək olar. Göy cisimlərinin çoxəsrlik müşahidəsi nəticəsində onların hərəkət qanunları riyazi düsturlar şəklində verilmişdir. Mexanikanın qanunlarına əsasən Günəş sisteminin planetlərinin mövcud vəziyyətinə görə onların gələcək zamanın istənilən anına vəziyyəti praktiki olaraq birqismətli təyin edilə bilər. Eyni zamanda günəş və ay tutulmalarının tarixini əvvəlcədən söyləmək olar. Bütün bunlar determinik qanunlardır.

Bununla yanaşı makroaləmin əksər hadisələri haqqında bizim günbəgün dərinləşən və dəqiqləşən kifayət qədər biliklərimiz olmasına baxmayaraq onların keçmişi və gələcəyi haqqında dəqiq fikir söyləmək mümkün deyildir. Məsələn, iqlimin uzunmüddətli, havanın isə qısa müddətli dəyişməsi proqnozlaşdırmanın obyektini sayıla bilməz. Mikroaləmin əksər qanun və qanunauyğunluqları determinik çərçivəyə daxil edilə bilməz. Məsələn, nəzəri fizikaya görə konkret anda elektronun vəziyyəti haqqında heç nə demək mümkün olmadığı halda, onun fəzada paylanma vəziyyəti haqqında danışmaq olar. Bu cür qanunlara statistik qanunlar deyilir. Statistik qanunlara görə sistemin gələcək vəziyyəti birqismətli olaraq deyil, müəyyən ehtimalla müəyyən edilir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin mühüm tətbiq sahələrindən biri də iqtisadiyyatdır. Bu gün iqtisadi proseslərin tədqiqi və proqnozlaşdırılmasını ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan ekonometrik proqnozlaşdırma, reqressiya analizi, trend və hamarlaşdırma modelləri və bir sıra digər üsullardan istifadə etmədən təsəvvür etmək mümkün deyildir.

İqtisadiyyatın sığorta ehtiyatı, ehtiyat gücləri, Dövlət ehtiyatı və bu kimi anlayışları statistik qanunauyğunluqların mövcudluğunu təsdiq edir. Bu isə ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqini zəruri edir. Eyni zamanda qeyd etmək lazımdır ki, təsadüfsüz inkişaf mümkün deyildir. Həyatın yaranmasını, bioloji növlərin təkamülünü, bəşəriyyət tarixini, insanların yaradıcılıq fəaliyyətini, sosial-iqtisadi sistemlərin inkişafını təsadüfsüz təsəvvür etmək olmaz. Beləliklə, təsadüfün təzahürünə hadisənin artıq formalaşmış istiqamətdən müsbət (yeni elmi kəşflərin və texnologiyaların tətbiqi, istesalın təşkili və idarə edilməsinin yeni formaları və s.) və mənfi (kərtəbii fəlakətlər, avadanlığın sıradan çıxması, işçilərin xəstələnməsi, onların fiziki və psixi vəziyyəti və s.) kənarlaşma kimi baxmaq lazımdır. Bütün bunlar bilavasitə hadisənin axarının əhəmiyyətli surətdə dəyişməsinə gətirib çıxarır. Bəzət iqtisadiyyatı şəraitində xalq təsərrüfatı sahələrinin əlaqələri daha da mürəkkəbləşir. Beləliklə, dinamik sistemin inkişaf qanunauyğunluqlarına görə sosial-iqtisadi hadisələri təsvir edən qanunların statistik xarakteri güclənməlidir.

Bütün bunlar iqtisadi hadisə və proseslərin statistik analizinin bir vasitəsi kimi ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın metodlarının mənimsənilməsinə zəruru edir.

İnsan fəaliyyətinin bütün sahələrində nəticəsi təsadüfdən asılı olan, yəni nəticəsini əvvəlcədən söyləmək mümkün olmayan hadisələrə tez-tez rast gəlinir. Məsələn, sığorta edilmiş əmlakın təbii fəlakət nəticəsində sıradan çıxması təsadüfün nəticəsidir. Belə olan halda təsadüfə hadisələr haqqında əvvəlcədən nə isə söyləmək olarmı və yaxud sığorta şirkətləri öz işlərində nəyi əsas tuturlar? Məlum olur ki, sığorta edilmiş ayrıca bir obyektin gələcək taleyi haqqında heç nə söyləmək mümkün olmasa da, onların əksəriyyətinin vəziyyəti haqqında yəqinliklə çox şey demək olar.

Real gerçəklikdə baş verən hər bir hadisəni öyrənmək üçün insanlar müəyyən müşahidələr, təcrübələr, ölçmə işləri – sınaqlar aparırlar. Mümkün qədər çox aparıla bilən, praktiki olaraq qeyri-məhdud sayda təkrar edilə bilən sınaqların nəticəsinə əsasən həmin hadisənin xassələri və qanuna uyğunluğu aşkar edilir. İnsanlar bu qanunauyğunluğu öyrənməklə müəyyən dərəcədə təsadüfə hadisələri idarə etməyi, onların təsirinin nəticələrini əvvəlcədən söyləməyə və aradan qaldırmağa, hətta onlardan öz praktiki fəaliyyət sahələrində məsədyönlü şəkildə istifadə etmək imkanı əldə edirlər.

Tutaq ki, eyni şərtlər kompleksi daxilində aparılan sınaq nəticəsində hadisə baş verə və verməyə bilər. Onda təsadüfə hadisəni, hadisənin başvermə sayının aparılan sınaqların sayına nisbəti olan hadisənin tezliyi ilə xarakterizə etmək olar. Tezliyə misal olaraq müəyyən yaşayış məntəqəsində il ərzində doğulan oğlanların hissəsini, məhsul istehsalında keyfiyyətsiz məhsulun xüsusi çəkisini və s. göstərmək olar.

Coxlu sayda sınaqlardan ibarət müxtəlif seriyalarda hadisənin tezliyi müəyyən sabit ədəd ətrafında ehtizas etdikdə deyirlər ki, bu hadisənin tezliyi dayanıqlıq xassəsinə malikdir. Məsələn, oğlan doğulma hadisəsinin tezliyi bu xassəyə malikdir.

Tezlikləri dayanıqlıq xassəsinə malik olan təsadüfə hadisələrə müxtəlif bilik sahələrində o cümlədən, fizikada, biologiyada, kimyada, maşınqayırma sənayesində, atəş nəzəriyyəsində, iqtisadiyyatda və s. tez-tez təsadüf edilir.

Hadisənin təsadüfçülüüyü onun səbəbsiz olması anlamına gətirmir. Təbiət hadisələri bir-biri ilə qarşılıqlı əlaqədədirlər və bir-birilərini şərtləndirirlər. Onların birinin dəyişilməsi digərinin dəyişilməsinə səbəb olur. Gerçək aləmdə ayrıca götürülmüş heç bir hadisəni anlamaq mümkün deyildir. Əksinə istənilən hadisə onu əhatə edən hadisələrlə qarşılıqlı əlaqədə götürüldükdə onu anlamaq və əsaslandırmaq olur. Məsələn, atəş zamanı mərminin hədəfi vurması təsadüfə hadisədir və onun səbəbini əsaslandırmaq olar. Belə ki, mərminin üçüş traektoriyasına çoxlu sayda faktorlar təsir edir. Onların hər biri müxtəlif anlarda kəmiyyətə müxtəlif təsirlərə malikdirlər. Ona görə də müəyyən zaman kəsiyində onların hər birinin mərminin traektoriyasına ayrılıqda və birgə təsirini qiymətləndirmək mümkün olmur və nəticədə mərminin hədəfi vurması təsadüfün nəticəsi olur. Deməli, mərminin hədəfi vurmasına bir hadisə kimi baxdıqda, aparılan təcrübə zamanı o, baş verə də bilər, verməyə də bilər. Belə hadisənin

konkret bir təcrübə zamanı baş verməsi haqqında qabaqcadan heç nə demək mümkün olmasa da , çoxlu sayda ardıcıl aparılan təcrübələr nəticəsində onun baş verib-verməməsi haqqında bəzən müəyyən qanunauyğunluq almaq olar.

Beləliklə, ehtimal nəzəriyyəsi tezlikləri dayanıqlı olan təsadüfə hadisələri öyrənir və bu hadisələrin kütləvi təkrarında onların qanunauyğunluqlarını aşkar edir.

Qanunauyğun hadisə dedikdə münasib şəraitdə hökmən baş verən hadisə başa düşülür. Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, elə hadisələr də vardır ki, onların baş verib-verməməsi təsadüfə xarakter daşıyır. Məsələn, bir atəş zamanı atılan güllə hədəfə dəyədə bilər, dəyməyədə bilər; sığorta edilmiş əmlak təbii fəlakət nəticəsində sıradan çıxada bilər çıxmayada bilər. Belə hadisələrin qanunauyğunluğunu qabaqcadan söyləməkdə seçilən riyazi model böyük rol oynayır, yəni ehtimal nəzəriyyəsi əslində təsadüfə proseslərin riyazi modelini öyrənən riyazi elmdir. Başqa sözlə, ehtimal nəzəriyyəsi riyazi modellərdə təsadüfə hadisələrin ehtimalları arasında elə əlaqə təyin edir ki, bu əlaqələr mürəkkəb hadisələrin ehtimallarını daha sadə hadisələrin ehtimalları vasitəsilə hesablamaq imkanı verir.

Eyni şəraitdə hər hansı hadisəni öyrənmək üçün ardıcıl olaraq aparılan müşahidə və təcrübələrin nəticəsi çox zaman eyni olmur. Dəyişməyən şəraitdə eyni bir cihazla aparılan ölçmələrin nəticəsi, ümumiyyətlə müxtəlif olur. Buna görə də aparılan hər bir təcrübənin və ya müşahidənin nəticəsini əvvəlcədən söyləmək çox zaman mümkün olmur.

Təsadüfə hadisənin qanunauyğunluğunu ancaq onu eyni bir şəraitdə təkrarən çoxlu sayda müşahidə etdikdə görmək olar. Buradan belə bir nəticəyə gəlik ki, ancaq praktiki olaraq qeyri-məhdud sayda müşahidə edilə bilən hadisələri öyrənmək olar. Belə hadisələrə kütləvi hadisələr deyilir. Buna görə də ehtimal nəzəriyyəsində əsasən kütləvi hadisələr, yəni praktiki olaraq eyni şəraitdə istənilən sayda təkrar oluna bilən hadisələr öyrənilir.

Burada qeyd etmək lazımdır ki, təsadüfə hadisələri öyrənmək üçün heç də onların faktiki olaraq çoxlu sayda müşahidə etməyə lüzum yoxdur. Ən sadə hadisələrin qanunauyğunluqlarını öyrənərib və bunun əsasında müvafiq nəzəriyyəni quraraq daha mürəkkəb hadisələrin, hətta praktiki olaraq bilavasitə müşahidə edilə bilməyən, lakin prinsip etibarı ilə xəyalən çoxlu sayda müşahidə edilə bilən hadisələri nəzəri olaraq öyrənmək olar. Məsələn bir uçuş üçün nəzərdə tutulmuş kosmik gəminin layihələndirilməsi prosesində bütün vasitələrin saz işləməsinə və uçuşun müvəffəqqiyyətlə həyata keçməsinə əmin olmaq üçün üçüştü təmin edən vasitələrin etibarlılığını tədqiq etmək olar. Elmin gücü ondadır ki, bilavasitə müşahidələrdən alınan sadə müddəalara əsaslanaraq bilavasitə müşahidə aparmadan nəzəri üsullarla yeni faktları aşkara çıxarmaq və onların axarını əvvəlcədən söyləmək olar.

Hər bir hadisə kimi təsadüfə hadisələr də müəyyən səbəblər üzündən meydana çıxır. Hadisələrin ümumi əlaqələri qanununa görə ətraf aləmdə başverən bütün hadisələr qarşılıqlı əlaqədədirlər və biri digərinə təsir edir. Ona görə də müşahidə edilən hər bir hadisə qeyri -məhdud sayda digər hadisələrlə səbəb əlaqəsindədir və onların axarı qeyri - məhdud sayda amillərdən asılıdır. Qeyri-

məhdud sayda olan bu əlaqələrinin hamısını öyrənmək və onların hər birinin təsirini qiymətləndirmək ümumiyyətlə mümkün deyildir. Ona görə də bu və ya digər hadisə öyrəniləndə hadisənin axarını müəyyənəndən əsas amillərlə kifayətlənirlər və kifayət qədər çoxlu sayda ikinci dərəcəli amilləri nəzərə almırlar. Bütün bunlar isə hadisənin mahiyyətini daha dərinləndirməyə və onun qanunauyğunluğunu aşkar etməyə imkan verir. Başqa sözlə öyrənilən hadisə müvafiq sadə model ilə əvəz edilir. Bunun nəticəsində elmin istənilən qanunu öyrənilən hadisənin əsas mahiyyətini əks etdirir, lakin, o, hadisənin özündən daha bəsitdir. Heç bir qanun hadisəni hərtərəfli, onun bütün müxtəlifliyi və tamlığı ilə xarakterizə edə bilməz. Qeyri – məhdud sayda nəzərə alınmayan amillərin birgə təsiri hesabına real hadisənin qanunauyğunluqdan müşühidə edilən kənarlaşmaları təsadüfi hadisələrdir.

Hər hansı bir hadisənin qanunauyğunluğunu təcrübə olaraq müəyyən etmək üçün onu eyni bir şəraitdə təkrarən çox sayda müşahidə etmək lazımdır. Bu zaman eyni bir şərait dedikdə nəzarət edilən amillərin bütün kəmiyyət xarakteristikalarının eyni bir qiymət alması başa düşülür. Bununla belə nəzarət edilən bütün amillər müxtəlif olacaqdır. Nəticədə eyni bir hadisənin müxtəlif müşahidələrində nəzarət edilən amillərin təsiri praktiki olaraq eyni olacaqdır. Hadisənin qanunauyğunluğu elə burada aydınlaşır. Nəzarət edilə bilməyən amillərin təsiri hesabına qanunauyğunluqdan təsadüfi kənarlaşmalar isə müxtəlif müşühidələr də müxtəlif olacaqdır. Təsadüfi kənarlaşmaların konkret müşahidədə hansı qiymət alacağını prinsip etibarlı ilə əvvəlcədən söyləmək mümkün deyildir.

Ehtimal nəzəriyyəsində riyaziyyat elminin bir çox sahələrində istifadə olunan üsullardan və alınan nəticələrdən (kombinator analizdə, riyazi analizdə, cəbrdə, məntiqdə və s.) geniş istifadə olunur. Ancaq ehtimal nəzəriyyəsinin sırf özünə məxsus öyrənmə üsulları vardır. Çünki onun öyrəndiyi məsələlərin əksəriyyətində dəqiq riyazi quruluş olmur və belə məsələlərin riyazi modelini qurmaqda nəzəri ehtimal intuisiyadan istifadə oluna bilər.

Ehtimal nəzəriyyəsinin analitik üsullarının işlənilib hazırlanmasında və ümumiləşdirilməsində Muavrın (1667-1754), Laplasın (1749-1827), Qausun (1821-1894), Puassonun (1781-1840), Çebışevin (1821-1894), Markovun (1856-1922), Lyapunovun (1857-1918) böyük xidmətləri olmuşdur.

Müasir ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlar sistemi əsasında qurmağa cəhd edən S.N. Bernşteyn (1880-1948), lakin tam quran A.N. Kolmoqorov (1903-1987) olmuşdur. Bu nəzəriyyəyə inkişaf tempi verən bir sıra alimlərin, o cümlədən, Xinqinin (1894-1959), Slutskinin (1880-1948), Levinin (1886-1971) v. s. alimlərin adlarını qeyd etmək olar.

2. TƏSADÜFÜ SINAQLAR

Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biri təsadüfi (stoxastik) sınaq anlayışıdır. Nəticəsini əvvəlcədən söyləmək mümkün olmayan sınaqlara təsadüfi sınaqlar deyilir.

Praktiki və elmi fəaliyyətin müxtəlif sahələrində çoxlu sayda təkrar edilə bilən sınaqlara və müşahidələrə rast gəlinir. Bu cür hallarda sınağın nəticələrinin müəyyən xarakteristikaları hər hansı bir əlamət üzrə müşahidə edilir və yaxud

ölçülür.

Əksər hallarda bu xarakteristikalar müəyyən kəmiyyətlə ifadə edilirlər. Müəyyən hallarda isə müşahidənin nəticəsi keyfiyyət xarakteristikasına malik olur. Aydınır ki, əgər sınaq zamanı hər hansı bir obyektin rəngi müşahidə edilsə və yaxud sınaq ilə əlaqədar hadisənin baş verməsi və ya verməməsi, məhsulun keyfiyyəti müşahidə edilsə onda sınağın nəticəsi keyfiyyət xarakteristikasına malikdir. Axıncı halda şərti işarələr sistemindən istifadə etməklə sınağın nəticələrini, yəni xarakteristikaları həmişə kəmiyyətlə ifadə etmək olar.

1. Əgər sınaq zamanı zər atılırsa onda sınağın nəticəsi 1,2,...,6 rəqəmlərindən biri ilə ifadə edilir.

2. Əgər müəyyən heyvanlar qrupunun hər bir nümayəndəsinin çəkisi və uzunluğu ölçülürsə, onda müşahidənin nəticəsi 2 ədədlə ifadə edilir.

3. Əgər müəyyən zaman kəsiyində k sayda əmtənin qiyməti müşahidə edilsə, onda hər bir müşahidənin nəticəsi k sayda ədədlə ifadə edilir.

4. Əgər hər hansı rayonda doğulmuş uşağın cinsi müşahidə edilsə, onda hər bir müşahidənin nəticəsi bilavasitə kəmiyyətlə (müəyyən ədədlə) ifadə edilmir. Ancaq şərti olaraq oğlan doğulmasını “1”-lə, qız doğulması “0” ilə işarə etsək onda hər bir müşahidənin nəticəsi ədədlə ifadə ediləcəkdir.

5. Фабрикдя мямулат щяр бириндә н ядяд мямулат олан партияа иля бурахылыр. Мямулатын кейфийятинин йохланылмасы онун сырадан чыхмасы иля нятисялянир. Она эюря дя кейфийятя нязарят мягсядиля н мямулатдан тясадцфи сечмя йолу иля м сайдасы эютцрцлцр вя онларын кейфийяти йохланылыр. Сынаын нятисяси сечилмиш мямулатдан йарарсызларын сайы оласагдыр. Йарарсыз мямулатларын сайы бцтцн мямулатлар кейфийятли вя йахуд йарарсыз олдугда тйин едиля биляр. Тясвир едилян сынаг тясадцфи сынагдыр. Гейд едяк ки, мямулатын кейфийятинин йохланылмасынын бу цсулу истецсал просесиндя истифадя едилир вя сечмя цсулу адланыр.

6. Алынмыш лотерейа билетиня ойунда нязрдя тутулмуш удушлардан истянилян бири дцщя биляр. Ансаг ойунун сонуна гдяяр билетин удушлу олуб – олмамасыны мцяййян етмяк олмаз. Беяликля, лотерейа ойуну тясадцфи сынаба мисал ола биляр.

7. Инфексион хястялийин епидемийасына нятисяси бу вя йа диэяр епидемийанын ахыны олан тясадцфи сынаг кими бахыла биляр.

Bir çox hallarda müşahidə edilən hadisə o dərəcədə yaxşı öyrənilmiş olur ki, hər bir müşahidənin nəticəsini əvvəlcədən qiymətləndirmək olur. Məsələn, əgər sınaq zamanı hər hansı rəsədxanada il ərzində günəşin tutulma sayı müşahidə edilsə, onda astroloji hesablamaların köməyi ilə yaxın illər üçün il ərzində günəş tutulmalarının sayını əvvəlcədən söyləmək olar.

Oxşar mənzərəni hadisəni idarə edən qanunlar məlum olduqda və təcrübi hesablamalarda onların istifadəsi kifayət qədər sadə olduqda da söyləmək olar.

Ancaq əksər hallarda ayrı-ayrı müşahidələrin nəticələrini əvvəlcədən söyləmək üçün bizim biliklərimiz kifayət etmir. Yuxarıda baxılan 1-7 məhz bu hallara aiddir. Bu cür sınaqlara təsadüf sınaqlar deyilir.

Sınaq anlayışının çox geniş mənası vardır. Metal pulun döşəmə üzərinə atılması, müəyyən hədəfə atəş açılması, hər hansı fiziki kəmiyyətin ölçülməsi, nərd oyunu zərinin taxta üzərinə atılması və s. sınağa misaldır.

Hər bir sınaq müəyyən şərtlər və ya şərtlər kompleksi daxilində yerinə yetirilir. Sınağın aparılma şərtləri əvvəcdən məlum olur və yalnız bu şərtlər ödənildikdə sınaq aparılır. Təkrarən aparılan sınaq zamanı bu şərtlər dəyişilməz qalır.

Hər bir sınaq öz aparılma şərtləri və nəticələri ilə xarakterizə olunur. Sınağın aparılma şərtləri dəyişdikdə həmin sınaq dəyişir, başqa sınaq alınır. Tutaq ki, U təkrarən aparıla bilən (əlbəttə, eyni şərtlər daxilində) sınaqdır. U sınağının hər bir icrası zamanı alınan nəticəyə hadisə deyilir. Məsələn, U sınağı tam düzgün formada olan bir zəri çox hamar səthi olan taxta üzərinə atmaqdan ibarət olduqda hadisə olaraq

- a) "zərin 6 xalı olan üzünün yuxarı düşməsi", b) "zərin cüt sayda xalı olan üzünün yuxarı düşməsi", c) "zərin tək xalı olan üzünün yuxarı düşməsi" və s. götürmək olar.
- b) Atıcı 4 hissəyə bölünmüş hədəfə atəş açır. Bu zaman atəş sınaqdır, hədəfin müəyyən hissəsinə düşmək isə hadisədir.
- c) Qutuda rəngli şarlar vardır. Qutudan təsadüfə qaydada hər hansı şar çıxarılır. Şarın çıxarılması sınaq, şarın müəyyən rəngə malik olması isə hadisədir.

Aparılan sınaq zamanı nəzərdə tutulan hadisə baş verə də bilər, verməyə də bilər.

Sınağın hər bir icrasında hökmən baş verən hadisəyə yəqin hadisə deyilir. Sınağın heç bir icrasında baş verməyən (və ya hökmən baş verə bilməyən) hadisəyə mümkün olmayan hadisə deyilir.

Nəhayət, sınağın icrası zamanı nəzərdə tutulan hadisə baş verə də bilirsə, verməyə də bilirsə, yəni sınaq zamanı həmin hadisənin baş verib-verməməsi haqqında qabaqcadan heç nə demək mümkün deyildirsə, onda həmin hadisəyə təsadüfə hadisə deyilir.

Əlbəttə, hər bir hadisənin müəyyən bir sınağa nəzərən (yəni aparılan müəyyən bir sınaq nəticəsində) yəqin, mümkün olmayan, təsadüfə olmasından danışmaq olar. Bir sınağa nəzərən yəqin, mümkün olmayan və təsadüfə olan hadisə başqa bir sınağa nəzərən başqa xarakterli ola bilər.

Misal 1. Bir oyun zərini atmaqdan ibarət olan sınaq nəticəsində zərin yuxarı düşən üzərində 1,2,3,4,5,6 xallarının hər hansı birisinin olması - yəqin hadisə, yuxarı düşən üzərində xallar sayının 8 olması - mümkün olmayan hadisə, yuxarı düşən üzərində cüt sayda xalların olması isə təsadüfə hadisədir.

3.ELEMENTAR HADİSƏLƏR FƏZASI.

Tutaq ki, təkrarən aparıla bilən hər hansı U sınağının icrasında cüt-cüt uyuşmayan $\omega_i (i=1,2,...)$ nəticələrindən ancaq biri baş verir. Bu halda ω_i nəticələrinin hər biri U sınağının elementar hadisəsi (və ya elementar nəticəsi)

adlanır. Bütün belə elementar hadisələr çoxluğuna U sınağının elementar hadisələr fəzası deyilir və Ω ilə işarə olunur: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

Həyatda istənilən sayda təkrarən aparıla bilən müxtəlif sınaqlar və onların elementar nəticələri vardır. Bunların hər birini ayrılıqda öyrənməyin heç bir elmi əhəmiyyəti yoxdur. Buna görə də ehtimal nəzəriyyəsində konkret elementar hadisələr və elementar hadisələr fəzası deyil, ümumi (abstrakt) elementar hadisələr fəzası öyrənilir.

Ümumiyyətlə, ixtiyari təbiətli ω elementlərinin Ω çoxluğu elementar hadisələr fəzası, onu təşkil edən ω elementləri isə elementar hadisələr adlanır. Hər bir real hadisə və prosesi öyrənmək üçün uyğun elementar hadisələr fəzası təyin edilir. Baxılan sınağın cüt-cüt uyuşmayan uyğun nəticələri isə elementar hadisələr hesab olunur.

Hadisə anlayışı ümumi halda da uyğun şəkildə təyin edilir. Elementar hadisələr fəzasının hər bir alt çoxluğuna təsadüfə hadisə və ya sadəcə olaraq hadisə deyilir. Aparılan sınaqda müəyyən hadisənin baş verməsi, onu təşkil edən elementar hadisələrin heç olmasa birinin baş verməsi deməkdir. Beləliklə, baxılan sınaq nəticəsində baş verə bilən bütün hadisələr çoxluğu Ω fəzasının bütün altçoxluqları çoxluğundan ibarətdir. Ω çoxluğundan ibarət olan hadisə, sınaq nəticəsində baş verən hər bir elementar hadisənin baş verməsi nəticəsində baş verir. Deməli, Ω fəzası yəqin hadisədir. Boş çoxluq isə sınağın icrası zamanı heç bir elementar hadisənin baş verməsi nəticəsində baş verə bilməz, yəni $\emptyset$ boş çoxluğu mümkün olmayan hadisədir.

Qeyd edək ki, hər bir elementar hadisəyə Ω fəzasının bir elementli altçoxluğu kimi baxmaq olar. Buna görə də Ω fəzasını təşkil edən elementar hadisələrin hər biri təsadüfə hadisədir.

n sayda elementdən ibarət olan sonlu çoxluğun 2^n asyda alt çoxluğu vardır. Doğrudan da, bu çoxluğun k elementli müxtəlif altçoxluqlarının sayı C_n^k olduğundan $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$ olar.

Buradan aydın olur ki, elementar hadisələr fəzası 2^n sayda hadisə ilə bağlıdır. Bu hadisələrdən biri yəqin hadisə (fəzanın özü) , o biri isə mümkün olmayan hadisədir (boş çoxluq). Hər bir prosesə uyğun elementar hadisələr fəzası vardır.

1. Metal pulun bir dəfə atılışından ibarət olan sınaq aparılır. Bu sınağın elementar hadisələr fəzası $\Omega = (Q, \S)$ çoxluğu olar. Burada Q metal pulun qərb üzünün $\S$ isə şəbəkə üzünün düşməsidir.

2. Metal pul iki dəfə atılır. Bu sınağın elementar hadisələr fəzası $\Omega = (QQ, Q\S, \S Q, \S\S)$ çoxluğudur.

3. Oyun zəri bir dəfə atılır və zərdə düşən xalın sayı müşahidə edilir. Bu sınağın elementar hadisələr fəzası $\Omega = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ çoxluğu olar.

4. Oyun zəri iki dəfə atıldıqda elementar hadisələr fəzası $\Omega = ((i, k) : i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ çoxluğu olar.

5. Metal pul qərb üzünü düşənə kimi atılır. Bu sınağın elementar hadisələr fəzası $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots, \omega_\infty)$ çoxluğu olar. Burada $\omega_n = \S \dots \S Q$ qərb üzünün ilk dəfə n -ci atılışda düşdüyünü göstərir.

Məsələ 1. Oyun zəri bir dəfə atılır və zərin yuxarı düşən üzündəki xalalrın X sayı müşahidə edilir. Sınağın nəticələr çoxluğunu və aşağıdakı hadisələrə uyğun altçoxluqları təsvir edin.

$$A = \{X - \text{üçünmislidir}\}; B = \{X - \text{cütededdir}\}; C = \{X > 3\}; D = \{X < 7\}; \\ E = \{X - \text{kesrededdir}\} F = \{0.5 < X < 1.5\}.$$

Həlli. Sınağın icrası zamanı müşahidə edilən hadisələr üçün aşağıdakı işarələri daxil edək: $\omega_k = \{X = k\}, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \omega^{(1)} = \{1, 3, 5\}; \omega^{(2)} = \{2, 4, 6\}$

Sınağın nəticələri əsasında elementar hadisələrin iki çoxluğunu qurmaq olar: $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \Omega_2 = \{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}\}$. Ω_1, Ω_2 -yə nisbətən baxılan sınağın formal modelinə daha uyğun gəlir. Belə ki, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, A, B, D, E$ hadisələri Ω_2 çoxluğunun alt çoxluqları deyillər. Digər tərəfdən bu hadisələrin hər biri Ω_1 çoxluğunun alt çoxluğu kimi təsvir edilə bilər. Doğrudan da, $A = \{\omega_3, \omega_6\}; B = \omega^{(1)} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}; C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}; D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \Omega_1; E = \emptyset; F = \{\omega_1\}$

Bu bərabərliklərdən aydın olur ki, $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ sınağın nəticələri olan elementlərin ayrılışıdır. Deməli, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ nəticələri $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ nəticələrinə nisbətən daha “bəsitdir”.

Hadisələri cüt-cüt müqayisə edərək, onların ümumi elementlərini müəyyən etməklə uyuşan və uyuşmayan hadisələr cütlərini təyin edə bilərik:

$$AB = \{\omega_3\}; AC = \{\omega_6\}; AD = \{\omega_3, \omega_6\}; AE = \emptyset; AF = \emptyset; BC = \{\omega_5\}; BD = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}; \\ BE = \emptyset; BF = \{\omega_1\}; CE = \emptyset; DF = \{\omega_1\}; CD = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}; EF = \emptyset$$

Deməli, $A \vee B, A \vee C, A \vee D, B \vee C, B \vee D, B \vee F, C \vee D, D \vee F$ hadisələri uyuşan, $A \vee E, A \vee F, B \vee E, C \vee E, E \vee F$ hadisələri isə uyuşmayan hadisələrdir.

4. TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏLLƏR

4.1. HADİSƏLƏR ARASINDA DAXİLOLMA VƏ EYNİGÜCLÜLÜK MÜNASİBƏTLƏRİ.

Tutaq ki, Ω - müəyyən U sınağının elementar hadisələr fəzasıdır. Bu sınaq ilə əlaqədar bütün hadisələr çoxluğunu, yəni Ω - nın altçoxluqları sinfini $S(\Omega)$ ilə işarə edək.

Fərz edək ki, A hadisəsi baş verdikdə B hadisəsi hökmən baş verir. Bu halda A hadisəsi B hadisəsini doğurur deyirlər və bunu $A \subset B$ kimi yazırlar. $\subset$ - daxilolma münasibəti adlanır. Tərifə görə

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega: \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$$

Məsələn, bir dəfə atılan zərdə 2, 4, 6 xallarına uyğun üzldən hər hansı birinin düşməsi hadisəsi düşən üzdə cüt rəqəmin olması hadisəsini doğurur. Bir elementli A və B hadisəsi üçün $A \subset B$ təklifi $\omega \in B$ təklifi ilə eynigüclüdür. Daxilolma münasibəti aşağıdakı xassələrə malikdir.

$$A \in A, \emptyset \in A, A \in \Omega, A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

$A \subset B, B \subset A$ olduqda A və B hadisələri eynigüclü hadisələr adlanır və bu fakt $A = B$ kimi yazılır. Tərifə görə

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Eynigüclülük münasibəti ekvivalentlik münasibətidir, yəni o, simmetriklik, refleksivlik və tranzitivlik xassələrinə malikdir:

$$A = A, A = B \Rightarrow B = A, A = B, B = C \Rightarrow A = C$$

Məhz bu mənada eynigüclü hadisələri birləşdirərək bir hadisə kimi baxmaq olar.

4.2. HADİSƏLƏRİN HASİLİ.

A və B hadisələrinin hasili elə hadisəyə deyilir ki, o ancaq və ancaq A və B birlikdə baş verdikdə yerinə yetir. A və B hadisələrinin hasili $A \cap B$ və ya AB ilə işarə edilir. Buradan aydın olur ki, AB hasili həm A hadisəsinə həm də B hadisəsinə daxil olan elementar hadisələrdən ibarətdir, yəni

$$AB = (\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \in B)$$

n sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin hasili

$$\prod_1^n A_i = (\omega \in \Omega : \forall n : \omega \in A_n)$$

bərabərliyi ilə verilən hadisəyə deyilir.

Vurma əməli aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$1. AB = BA$$

$$2. (AB)C = A(BC) = ABC$$

$$3. AA = A$$

$$4. A\Omega = A, A\emptyset = \emptyset$$

$$5. \prod A_i \subset A_k$$

4.3. HADİSƏLƏRİN BİRLƏŞMƏSİ.

A və B hadisələrinin birləşməsi elə hadisəyə deyilir ki, o ancaq və ancaq A və B -dən heç olmasa biri yerinə yetdikdə baş verir. A və B hadisələrinin birləşməsi $A \cup B$ ilə işarə edilir. Deməli $A \cup B$ birləşməsi A və B hadisələrindən heç olmasa birinə daxil olan elementar hadisələrdən ibarətdir. Yəni,

$$A \cup B = (\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B)$$

Anoloji olaraq

$$\bigcup_1^n A_i = (\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \vee \omega \in A_2 \vee \dots \vee \omega \in A_n)$$

bərabərliyi ilə verilən hadisəyə $A_1, \dots, A_n$ hadisələrinin birləşməsi deyilir. Birləşmə əməli aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$1. A \cup B = B \cup A$$

$$2. (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$3. A \cup A = A$$

$$4. A \cup \emptyset = A, A \cup \Omega = \Omega$$

Məsələ 2. Hadisələrin birləşməsi və hasili əməllərinin aşağıdakı xassələrini ödədiyini isbat edin.

$$a) A \cup B = B \cup A, AB = BA (\text{kommütativlik})$$

$$b) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), A(BC) = A(BC) (\text{assosiativlik})$$

$$c) (A \cup B)C = AC \cup BC (\text{distributivlik})$$

Həlli. Birinci iki xassə bilavasitə hadisələrin hasili və birləşməsinin tərifindən alınır. Belə ki, “ $A \vee B$ hadisələrindən heç olmasa biri baş verdikdə” və “ $A \vee B$ hadisələri eyni zamanda baş verdikdə” hadisələri bu hadisələrin ardıcılığından asılı deyildir.

$(A \cup B)C$ və $AC \cup BC$ hadisələrinin eynigüclü olduqlarını isbat edək.

Tutaq ki, $\omega \in (A \cup B)C$. Hadisələrin hasilinin tərifinə əsasən $\omega \in C, \omega \in A \cup B$. $\omega \in A \cup B$ o deməkdir ki, $\omega \in A \vee \omega \in B$ hadisələrindən heç olmasa birinə daxildir. Yəni, $\omega \in AC \cup BC$. Deməli, $\omega \in (A \cup B)C$ olduqda $\omega \in AC \cup BC$ olar. Beləliklə, $(A \cup B)C \subset AC \cup BC$

İndi isə fərz edək ki, $\omega \in AC \cup BC$. Deməli, $\omega \in AC$ və yaxud $\omega \in BC$. Bu isə o deməkdir ki, $\omega \in C$ və $\omega \in A \vee \omega \in B$ hadisələrindən heç olmasa birinə daxildir. Hadisələrin hasilinin tərifinə əsasən $\omega \in (A \cup B)C$

Məsələ 3. $A - B = A\bar{B}$ eyniliyini isbat edin.

Həlli. Tutaq ki, $\omega \in A - B$. $A \vee B$ hadisələrinin fərqi A -nın baş verməsi B -nin isə baş verməməsi hadisəsidir. B baş vermədikdə $\bar{B}$ hadisəsi hökmən baş verir. Deməli, $\omega \in A\bar{B}$. Əksinə $\omega \in A\bar{B}$ olduqda $\omega \in A$ və $\omega \notin B$ olar. Deməli, $\omega \in A - B$. Bu isə o deməkdir ki, $\omega \in A - B$

Məsələ 4. Tutaq ki, A, B, C ixtiyari hadisələrdir. Aşağıdakı hadisələr üçün sadə ifadələr tapın.

a) $D = (A, B, C \text{ hadisələrindən heç biri baş vermir})$;

b) $E = (A, B, C \text{ hadisələrindən heç olmasa ikisi baş verir})$;

c) $F = (A, B, C \text{ hadisələrindən heç olmasa biri baş vermir})$.

Həlli. A, B, C hadisələrinin baş verməməsi hadisələri müvafiq olaraq $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ hadisələridir. Deməli, $D = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Hadisələrin hasilinin tərifinə əsasən $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ - $A \vee B$ hadisələrinin baş verməsi C -nin baş verməməsi; $\bar{A}\bar{B}C$ - $A \vee C$ -nin baş verməsi B -nin isə baş verməməsi; $\bar{A}BC$ - A -nın baş verməməsi B və C -nin baş verməsi hadisəsidir. Hadisələrdən heç olmasa birinin baş verməməsi onlarda heç olmasa birinin, ikisinin və yaxud hər üçünün baş verməməsi deməkdir. Hadisələrin birləşməsinin tərifinə əsasən $E = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}BC$, $F = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

Məsələ 5. Tutaq ki, A, B, C ixtiyari hadisələrdir. Aşağıdakı hadisələr üçün sadə ifadələr tapın.

a) $D = (A, B, C \text{ hadisələrindən ancaq biri baş verir})$;;

b) $E = (A, B, C \text{ hadisələrindən ancaq ikisi baş verir})$.

Həlli. $D = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}BC$

$E = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}BC$

Məsələ 6. A və B hadisələrinin birləşməsi onların hasili ilə üst üstə düşə bilərmi?

Həlli. Tutaq ki, A və B eynigüclü hadisələrdir. Bu halda $A + B = A \cup B$

Məsələn, tutaq ki, hədəfə atəş açılır. Hədəfi vurma onun məhv olması ilə nəticələnir və hədəf heç bir başqa üsulla məhv edilə bilməz.

A ilə hədəfi vurma və B ilə hədəfin məhv olması hadisələrini işarə edək. A və B eynigüclü hadisələrdir və onalar üçün $A + B = A$ B münasibəti ödənilir.

4.4. HADİSƏLƏRİN FƏRQİ VƏ TAMAMLAMA ƏMƏLİ.

A və B hadisələrinin fərqi

$$A - B = (\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B)$$

bərabərliyi ilə verilən hadisəyə deyilir. Deməli, $A - B$ fərqi A -nın baş verməsi, B -nin isə baş verməməsi hadisəsidir. A hadisəsinin baş verməməsi hadisəsi A -nın tamamlayanı (əksi) adlanır və $\bar{A}$ kimi işarə olunur.

Aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

1. $(A \cup B)C = AC \cup BC$
2. $(AB)C = (A \cup C)(B \cup C)$
3. $A \cup (AB) = A, A(A \cup B) = A$
4. $\bigcup_i A_i$
4. $\bigcup_i A_i = \prod_i A_i$
5. $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$
6. $C \subset A, C \subset B \Leftrightarrow C \subset AB$
7. $A \subset C, B \subset C \Leftrightarrow (A \cup B) \subset C$

5. HADİSƏLƏRİN TAM SİSTEMİ.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələr sistemi aşağıdakı üç şərti ödədikdə tam sistem adlanır:

1. $A_i \neq \emptyset, i \geq 1$
2. $A_i A_j = \emptyset, i \neq j$
3. $\bigcup_1^\infty A_i = \Omega$

2-ci və 3-cü şərtləri ödəyən hadisələr uyğun olaraq uyuşmayan və yeganə mümkün adlanır.

Misal 1. Yeşikdən bir məmulat götürülür. Məmulatın keyfiyyətli olması onun keyfiyyətsiz olmasını istisna edir. “məmulat keyfiyyətlidir” və “məmulat keyfiyyətsizdir” hadisələri uyuşmayandır.

Misal 2. Metal pul bir dəfə atılır. “pulun gerb üzünün yuxarı düşməsi” (ω_g hadisəsi) və “pulun şəbəkə üzünün yuxarı düşməsi” hadisələri uyuşmayandır.

Uyuşmayan hadisələrin birləşməsinə bu hadisələrin cəmi deyilir və bunu

$$\sum_i A_i = A_1 + A_2 + \dots$$

kimi işarə edirlər.

Əgər A hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin cəmidirsə , yəni

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

münasibəti ödənilirsə, onda deyirlər ki, A hadisəsi $A_1, A_2, \dots, A_n$ xüsusi hallarına ayrılır.

Misal 3. Bir zəri bir dəfə atmaqdan ibarət olan sınaqda zərin yuxarı düşən üzündə cüt sayda xalın olmasından ibarət olan A hadisəsi $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ kimi xüsusi hallara ayrılır:

$$A = \omega_2 + \omega_4 + \omega_6$$

Zərin yuxarı düşən üzündə tək sayda xalın olmasından ibarət olan B hadisəsi $\omega_1, \omega_3, \omega_5$ kimi xüsusi hallara ayrılır:

$$B = \omega_1 + \omega_3 + \omega_5$$

Burada $\omega_i, i = 2, 4, 6$ zərin yuxarı düşən üzündə uyğun olaraq 2, 4, 6 xalının olması hadisəsidir.

Misal 4. Tutaq ki, $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ natural ədədlər çoxluğudur və $S_1 = \{x : x = 3n; n = 1, 2, 3, \dots\}; S_2 = \{x : x = 3n + 1; n = 1, 2, 3, \dots\}; S_3 = \{x : x = 3n + 2; n = 1, 2, 3, \dots\}$. Onda $\{S_1, S_2, S_3\}$ çoxluğu hadisələrin tam sistemini təşkil edir.

Doğrudan da S_1 - üçə tam bölünən, S_2 - üçə bölündükdə qalıqda bir, S_3 - isə qalıqda iki alınan natural ədədlərdir. Aydındır ki, S_1, S_2 və S_3 uyuşmayan, yeganə mümkün hadisələrdir. Deməli, $\{S_1, S_2, S_3\}$ çoxluğu hadisələrin tam sistemini təşkil edir.

Hadisələrin tam sisteminə aid başqa bir misal göstərək.

Misal 5. Tutaq ki, $A_1, \dots, A_n$ hadisələrdir. Bu hadisələrdən düz i saydasının baş verməsi hadisəsini H_i ilə işarə edək. Bu halda $H_1, \dots, H_n$ hadisələri tam sistem təşkil edəcəkdir. Xüsusi halda $n=2$ olarsa

$$H_0 = \bar{A}_1 \bar{A}_2, H_1 = A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2, H_2 = A_1 A_2$$

Şahmat oyununda növbəti partiyayı udmaq, uduzmaq və heç-heçə qurtarmaq hadisələri də hadisələrin tam sisteminə masadır. o

Aşağıdakı düstur hadisələrin birləşməsini onların cəmi ilə ifadə etməyə imkan verir:

$$\bigcup_{i \geq 1} A_i = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \dots$$

İsbatı. Aşağıdakı hadisələrə baxaq:

$$B_1 = A_1, B_i = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{i-1} A_i, i \geq 2$$

İxtiyari i və j indeksləri üçün goğru olan

$$i < j \Rightarrow B_i \subset A_i \wedge B_j \subset \bar{A}_i$$

münasibətindən $B_i B_j = \emptyset, i < j$ alırıq. Burada i və j eynii hüquqlu olduğuna görə ,

$B_i B_j = \emptyset, i < j$ olar. Deməli, $B_1, B_2, \dots$ uyuşmayan hadisələrdir. $B_i \subset A_i \Rightarrow \sum_{i \geq 1} B_i \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i$

İndi fərz edək ki, $\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ -dir. $A_i - A_n, n \geq 1$ ardıcılığında ω -nı öz daxilinə alan berinci hadisədir. Onda $\omega \in B_i \Rightarrow \omega \in \bigcup_{i>1} B_i \Leftrightarrow \bigcup_{i>1} A_i \subset \bigcup_{i>1} B_i$

6. HADİSƏLƏR ARDİCILLIĞI VƏ ONUN LİMİTİ

$A_n, n \geq 1$ hadisələr ardıcılığı :

- a) $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ şərtini ödədikdə artan,
- b) $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ şərtini ödədikdə azalan,
- c) artan və ya azalan olduqda monoton
- d) $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ və $\bigcap A_i = \emptyset$ şərtlərini ödədikdə isə yox olan ardıcılıq adlanır.

Misal 1. İstənilən $A_n, n \geq 1$ hadisələri üçün $\bigcup A_i$ artan, $\bigcap A_i$ isə azalan ardıcılıqdır.

Misal 2. Fərz edək ki, elementar hadisələr fəzası müstəvidir. A_n, B_n ilə müvafiq olaraq təsadüfi seçilən (x, y) nöqtəsinin uyğun olaraq $1-1/n$ və $1+1/n$ radiuslu dairənin daxilində olması hadisələrini işarə edək. Başqa sözlə,

$$A_n = ((x, y): x^2 + y^2 < 1 - \frac{1}{n}), B_n = ((x, y)): x^2 + y^2 < 1 + \frac{1}{n}$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, $A_n, n \geq 1$ artan, $B_n, n \geq 1$ isə azalan ardıcılıqdır.

Misal 3. $A_n, n \geq 1$ artan ardıcılıq olduqda $\bigcup A_i = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \dots$
 $A_n, n \geq 1$ artan ardıcılıq olduğuna görə, $\bar{A}_n, n \geq 1$ azalan olar. Buradan isə $\bar{A}_1 \dots \bar{A}_i = \bar{A}_i$ olar.

Tutaq ki, $A_n, n \geq 1$ hadisələr ardıcılığıdır. A^* ilə A_n -lərin qeyri məhdud saydasının başverməsi hadisəsini işarə edək. Asanlıqla görmək olar ki,

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Doğrudan da, $\omega \in A^*$ olduqda yəni ω qeyri məhdud sayda A_n -lərə daxil olduqda istənilən n üçün $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ olar. Beləliklə, $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Bu isə o deməkdir ki,

$$A^* \subset A^* \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \text{ Əksinə } \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \text{ olduqda } \omega \in A^* \text{ olar.}$$

Tutaq ki, A_* müəyyən nömrədən sonra bütün A_n -lərin başverməsi, yəni yalnız sonlu sayda A_n -lərin başverməməsi hadisəsidir. Eyni qayda ilə göstərmək

olar ki, $A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Aydın ki, $A_* \subset A^*$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \text{ və } \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \text{ hadisələrinə uyğun olaraq } A_n, n \geq 1 \text{ hadisələr ardıcılığının}$$

yuxarı və aşağı limiti deyilir.

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A$ olduqda $A_n, n \geq 1$ ardıcılığına yığılan ardıcılıq, A hadisəsinə isə onun limiti deyilir.

Tərifə görə $A_n, n \geq 1$ ardıcılığı A hadisəsinə yalnız və yalnız o zaman yığılır ki, hər bir $\omega \in A$ elementar hadisəsi sonlu sayda müstəsna olmaqla $A_n, n \geq 1$ hamısına, hər bir $\omega \notin A$ isə yalnız sonlu sayda A_n -lərə daxil olmasın.

Tutaq ki, $A_n, n \geq 1$ monoton artan ardıcılıqdır, yəni $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$. Onda $A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Bu isə o deməkdir ki, $A_n, n \geq 1$ ardıcılığı yığılandır və

$$A_n \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, n \rightarrow \infty$$

$A_n, n \geq 1$ monoton azalan ardıcılıq, yəni $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ olduqda

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \text{ Beləliklə, } A_n, n \geq 1 \text{ hadisələr ardıcılığı yığılandır və}$$

7. Cəbr və σ -cəbr anlayışları

Tutaq ki, Ω, U sınağı ilə bağlı elementar hadisələr fəzasıdır. Ehtimal nəzəriyyəsində ehtimala hadisələrin funksiyası kimi baxılır. Lakin Ω fəzasının istənilən altçoxlğu üçün ehtimalı təyin etmək mümkün deyildir. Ehtimal anlayışı fəzanın müəyyən hadisələri (altçoxlqları) sisteminə daxil olan hadisələr (çoxlqlar) üçün təyin edilir. Buna görə də hadisələrin ehtimalını riyazi olaraq təyin etmək üçün belə hadisələr sistemi əvvəlcədən müəyyən edilməlidir.

Tutaq ki, Ω fəzasının hər hansı hadisələr (altçoxlqları) sistemi F ilə işarə edilmişdir və bu sistem üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

$$1) \Omega \in F$$

$$2) A \in F, B \in F \Rightarrow AB \in F, A + B \in F, A - B \in F$$

olur. Onda F sisteminə hadisələr cəbri deyilir.

Hadisələr cəbrinin bir sıra xassələri vardır. Ω fəzası F sisteminə daxil olduğundan 2-ci şərtə görə $\emptyset = \Omega - \Omega$ boş çoxluğu da F sisteminə daxildir. Hadisələrin cəmi və fərqi üçün qruplaşdırma xassəsi doğru olduğundan F sisteminə daxil olan sonlu sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin cəmi və hasilini də həmin sistemə daxildir:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k \in F, \bigcap_{k=1}^n A_k \in F$$

Bir çox məsələləri həll etmək üçün ehtimal nəzəriyyəsində hadisələr cəbri anlayışı ilə kifayətlənmək olar. Lakin bir sıra mürəkkəb məsələləri həll etmək üçün hadisələr cəbrinin əlavə bir xassəni də ödəməsi tələb edilir. Bu xassə, sistemin hesabi sayda hadisələrin cəmi və hasilinin yenə də həmin sistemə daxil olmasından ibarətdir:

$$3) \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in F, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in F$$

Bu halda, yəni F hadisələr cəbri 3) şərtini ödədikdə, ona σ -cəbr və yaxud Borel cəbri deyilir.

F sisteminə daxil olduğundan 2-ci şərtə görə $\emptyset = \Omega - \Omega$ boş çoxluğu da F sisteminə daxildir. Hadisələrin cəmi və fərqi üçün qruplaşdırma xassəsi doğru olduğundan F sisteminə daxil olan sonlu sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin cəmi və hasilini də həmin sistemə daxildir:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k \in F, \bigcap_{k=1}^n A_k \in F$$

Tutaq ki, S Ω -nın müəyyən alt çoxluqları sistemidir:

$$1) S \subset \sigma(S)$$

2) $S \subset F$ şərtini ödəyən istənilən F σ -cəbri üçün $\sigma(S) \subset F$ olarsa $\sigma(S)$ -ə S sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik σ -cəbr deyilir.

Teorem 1. İstənilən S çoxluqlar sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik $\sigma(S)$ cəbri vardır.

İsbatı. Əvvəlcə qeyd edək ki, S sinfini öz daxilində saxlayan heç olmasa bir σ -cəbr vardır. Məsələn, belə bir cəbr olaraq Ω -nın bütün altçoxluqları sinfini götürmək olar. S sinfini öz daxilində saxlayan bütün σ -cəbrlərin kəsişməsini $\sigma(S)$ ilə işarə edək. Onda $\sigma(S)$ -də σ -cəbr olar. S sinfini öz daxilində saxlayan istənilən F σ -cəbri üçün $\sigma(S) \subset F$ olar. Beləliklə, $\sigma(S)$, S sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik σ -cəbrdir.

Misal 3. Minimal cəbrə misal olaraq $\emptyset$ və Ω çoxluqlarından ibarət olan cəbri göstərmək olar. Doğrudan da,

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega, \Omega \cap \emptyset = \emptyset, \overline{\Omega} = \emptyset, \overline{\emptyset} = \Omega$$

olduğu üçün $S_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ cəbrdir.

Misal 4.

$$\emptyset \cup A = A, \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}, \emptyset \cup \Omega = \Omega, \emptyset \cup \overline{\Omega} = \overline{\Omega},$$

$$\emptyset \cap \Omega = \emptyset, A \cup \overline{A} = \Omega, A \cup \Omega = \Omega, A \cap \overline{A} = \emptyset, A \cap \Omega = A, \overline{\overline{A}} = A,$$

$$\overline{A} \cup \Omega = \Omega, \overline{A} \cap \Omega = \overline{A}, \overline{\Omega} = \emptyset,$$

bərabərlikləri ödənilirdiyi üçün $S_2 = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ sinfi də cəbrə misaldır.

Misal 5. Tutaq ki, $\Omega = [0,1) \times [0,1)$. S isə $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ dözbucaqlılar və kəsişməyən düzbucaqlıların sonlu cəmindən ibarət çoxluqdur. Onda S cəbrdir.

M sinfi :

$$1) A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots, A_n \in M \text{ olduqda } \lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M$$

$$2) A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \dots, A_n \in M \text{ olduqda } \lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in M$$

şərtlərini ödədikdə ona monoton sinif deyilir.

İstənilən σ -cəbr monoton sinifdir.

Teorem 2. S cəbrinin σ -cəbr olması üçün onun monoton sinif olması zəruri və kafidir.

Zərurilik. S cəbri σ -cəbr olduqda o, eyni zamanda monoton sinifdir.

Kafilik. Tutaq ki, S cəbri monoton sinifdir. Göstərək ki, $A_n \in S$ olduqda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ olar. $B_m = \bigcup_{i=1}^m A_i$ işarə edək. Aydın ki, $B_m \subset B_{m+1}$. S cəbr olduğu üçün

$$B_m \subset S. S \text{ eyni zamanda monoton sinif olduğu üçün } B_m \rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \in S \text{ olar.}$$

S sinfini öz daxilində saxlayan $M(S)$ monoton sinfi:

- 1) $S \subset M(S)$;
- 2) S sinfini öz daxilində saxlayan istənilən M monoton sinfi üçün $M(S) \subset M$ şərtləri ödənildikdə $M(S)$ monoton sinfi S sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik monoton sinif adlanır.

Teorem 3. İstənilən S sinfi üçün onu öz daxilində saxlayan ən kiçik monoton sinif vardır.

İsbatı. S sinfini öz daxilində saxlayan heç olmasa bir monoton sinif vardır. Məsələn, belə bir sinif olaraq Ω -nın bütün altçoxluqları sinfini götürmək olar. S sinfini öz daxilində saxlayan bütün monoton siniflərin kəsişməsini $M(S)$ ilə işarə edək. Monoton siniflərin kəsişməsi də monoton sinif olduğu üçün $M(S)$ monoton sinifdir. S sinfini öz daxilində saxlayan istənilən M monoton sinfi üçün $M(S) \subset M$ olar. Beləliklə, $M(S)$ S sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik monoton sinifdir.