Təhsilə dair axtardığınız bir çox kitabın elektron versiyasını “**Telegram**” kanalımızda tapa bilərsiniz (https://t.me/eSources).

Telegram:
Kanal: **@eSources**
Reklam, təklif və iradlarınız üçün: **@n4hkro**

- Kitablar ödənişlidir?
✓ Xeyr, təbii ki.

- Paylaşdığınız kitabları öz kanalımda paylaşa bilərəm?
✓ Bəli. Könül istərdi ki, paylaşarkən mənbə bildirəsiniz, amma təbii ki, heç kim sizi buna məcbur etmir.

- Bədii kitablar da paylaşırsınız?
✓ Xeyr, amma həmin kitab sizə dərs üçün lazımdırsa, istisna edərik.

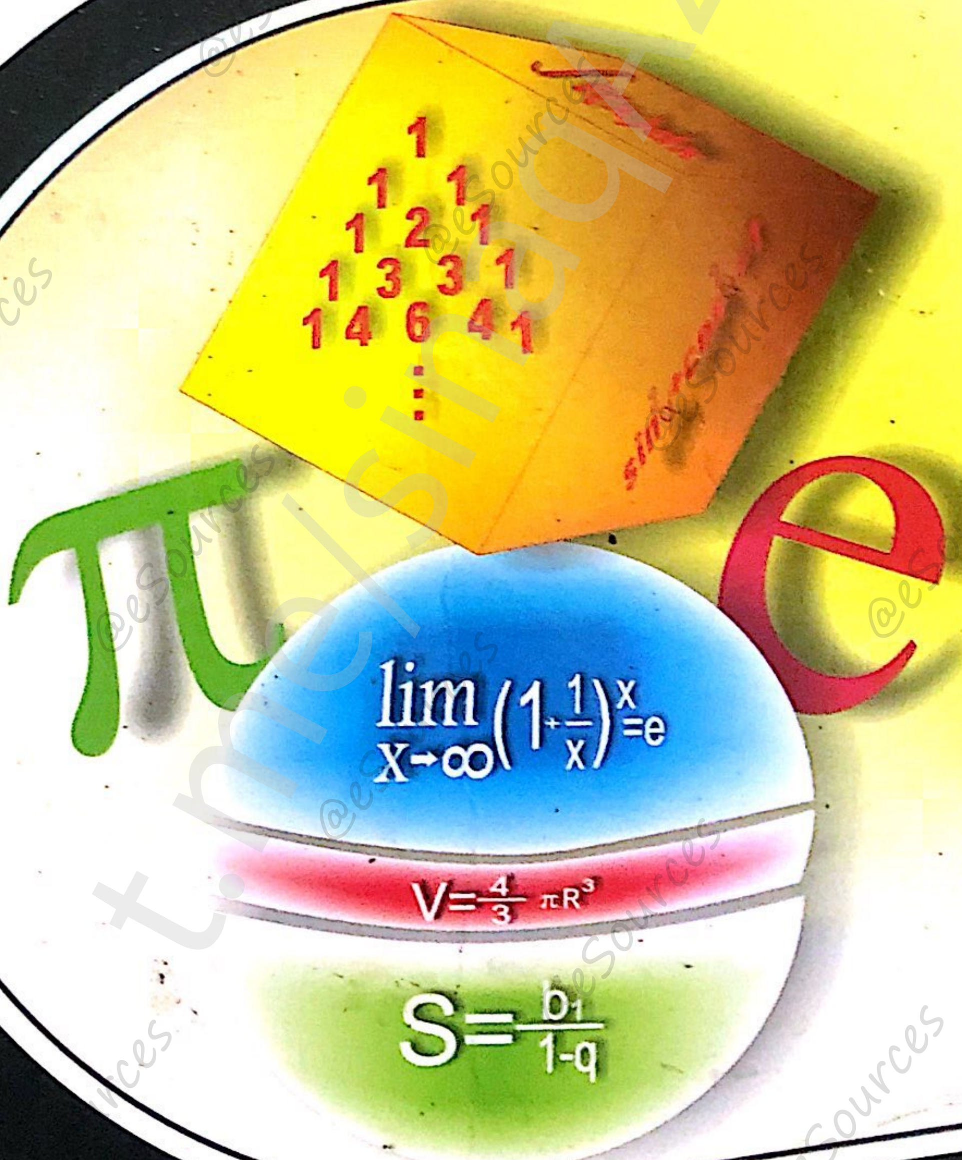
- Azərbaycan Milli Kitabxanasından kitab yükləyirsiniz?
✓ Bəli. Onlayn şəkildə oxunulması mümkün olan istədiyiniz kitabı yükləyirik.

- Sizə kitab göndərsəm qarşılığında nə alacağam?
✓ Kanaldan maddi qazancımız olmadığı üçün, bizə göndərdiyiniz kitablara görə ən yaxşı halda sizin kanalınızı reklam edə bilərik.

2-ci nəşr

CƏBR-HƏNDƏSƏ DÜSTURLARI

Abituriyentlər üçün dərs vəsaiti



2012

arazyayınları

CƏBR- HƏNDƏSƏ DÜSTURLARI

arazyayınları

Riyaziyyat

Araz yayınları № 5
Abituriyent seriyası № 5

ISBN13 978-9952-433-44-9
ISBN10 9952-433-44-1

Müəlliflər

Araz Kursları araz kursları və Azərbaycan-Türkiyə Özəl Liseylərinin AZƏRBAYCAN-TÜRKİYƏ ÖZƏL LİSEYLƏRİ Riyaziyyat fənni üzrə mütəxəssis-müəllim heyə

Çapa hazırlıq
Araz yayınları Dizayn & Qrafik

Cəbr- Həndəsə düsturları (Abituriyentlər üçün hazırlıq vəsaiti)

Təkmilləşdirilmiş və əlavələr edilmiş II nəşr.

arazyayınları

Ünvan: Nəsimi rayonu, A.Salamzadə küçəsi, 28;
Telefon: 530-10-20 (Pbx)
www.arazyayinlari.az, www.araz.edu.az

Ön söz

Araz Kursları uzun illərdir ki, abituriyentləri qəbul imtahanlarına hazırlaşdırır. Bu istiqamətdə Araz Kurslarının çox ciddi təcrübəsi var. Kurslarımızda çalışan təcrübəli müəllimlər bu istiqamətdə ixtisaslaşmış və sagirdləri daha effektiv şəkildə qəbul imtahanlarına hazırlaşdırırlar.

Əziz abituriyentlər! Sizə təqdim etdiyimiz "Cəbr-Həndəsə düsturları kitabı bizim təcrübəli müəllimlərimizin əməyinin nəticəsidir. Bu kitab düsturların daha dərindən öyrənilməsində sizə köməkçi vəsait olacaqdır. Kitabda Cəbr və Həndəsə fənninə aid bütün düsturlar və düsturların misallarla izahı verilmişdir.

Biz inanırıq ki, bu kitab gələcəkdə sizin qəbul imtahanına dərindən hazırlaşmagınıza çox böyük kömək edəcəkdir.

CƏBR

araz yayınları

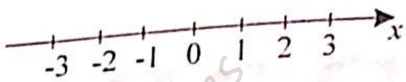
Ədədlər

Natural ədələr

$N = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$ çoxluğunun hər bir elementinə **natural ədəd** deyilir.

Tam ədələr

$Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ çoxluğunun hər bir elementinə **tam ədəd** deyilir.



Ədəd oxu üzərində hər bir ədəd özündən sağdakı ədəddən kiçik, soldakı ədəddən isə böyükdür.

Rasional ədədlər

$Q = \left\{ \frac{a}{b}, a \in Z, b \in N \right\}$ çoxluğunun hər bir elementinə **rasional ədəd** deyilir.

$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 3, 0$ və sair ədədlər rasionaldır.

İrrasional ədədlər

Dövrü olmayan sonsuz onluq kəsr şəklində göstərilə bilən ədədlərə **irrasional ədədlər** deyilir və Q' ilə işarə edilir.

Məsələn,

$\pi \approx 3,14159265...$

$e \approx 2,71828182...$

$\sqrt{2} \approx 1,41423562...$

Ədədlərin mərtəbəsi

$\overline{abcd}$ → dörd rəqəmli ədəd
- d — təkliklər mərtəbəsi
- c — onluqlar mərtəbəsi
- b — yüzlüklər mərtəbəsi
- a — minliklər mərtəbəsi

$$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$$

Misal: $\overline{abb}+\overline{bcc}+\overline{caa}=1332$ isə, a+b+c=?

Həlli:

$\overline{abb}=100a+10b+b=100a+11b$

$\overline{bcc}=100b+10c+c=100b+11c$

$\overline{caa}=100c+10a+a=100c+11a$

$\overline{abb}+\overline{bcc}+\overline{caa}=111(a+b+c)$

$$1332=111(a+b+c)$$

$$a+b+c=12$$

Misal: a, b, c - birrəqəmli ədədlərdir. $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=165$ isə, a+b+c=?

Həlli:

$$\left.\begin{aligned}\overline{ab}&=10a+b\\ \overline{bc}&=10b+c\\ \overline{ca}&=10c+a\end{aligned}\right\}\Rightarrow \overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=11(a+b+c)$$

165=11(a+b+c)

a+b+c=15

a və b həqiqi ədədləri, üçün aşağıdakıları yazmaq olar.

1. a+b=b+a
2. a+(b+c)=(a+b)+c
3. a+0=a
4. a+(-a)=0
5. a-(-b)=a+b
6. a+(-b)=a-b
7. $a\cdot b=b\cdot a$
8. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
9. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
10. $a\cdot 1=a$

Tək və cüt ədədlər

2-yə tam bölünən natural ədədlərə **cüt ədədlər** deyilir. Cüt ədədlər çoxluğu $\{2n;\ n\in N\}$ şəklində göstərilir. Məsələn: 2; 4; 10; 18 cüt ədədlərdir.

Tək ədədlər çoxluğu $\{2n-1;\ n\in N\}$ şəklində göstərilir. Məsələn: 1; 3; 15; 17 tək ədədlərdir.

Tək və cüt ədədlər üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur.

$T+T\to C$	$T\cdot T\to T$	$T^n\to T (n\in N)$
$T+C\to T$	$T\cdot C\to C$	$C^n\to C (n\in N)$
$C+C\to C$	$C\cdot C\to C$	

$2^5+3^9\to(C+T)\to$ Tək ədəd

$3^{16}+5^{13}\to(T+T)\to$ Cüt ədəd

$5^{18}-3^{17}+2^{14}\to(T-T+C)\to$ Cüt ədəd

$5^{12}-3^{12}\to(T-T)\to$ Cüt ədəd

$3^{144}\to$ Tək ədəd

$6^{121}\to$ Cüt ədəd

Sadə ədədlər

Yalnız vahidə və özünə bölünən 1-dən böyük ədədlərə **sadə ədədlər** deyilir.

✔ Ən kiçik sadə ədəd 2-dir. Sadə ədədlərin ümumi düsturu yoxdur.

2; 3; 5; 7; 11; 13; ... sadə ədədlərdir.

Mürəkkəb ədədlər

Üç və daha çox böləni olan natural ədədlərə **mürəkkəb ədədlər** deyilir.

4; 6; 8; 9; 10; ... mürəkkəb ədədlərdir.

Qeyd: 1 ədədi nə sadədir, nə də mürəkkəb.

Mürəkkəb ədədin sadə vuruqlara ayrılışı.

Ədədin müsbət bölənlərindən sadə olanları bu ədədin **sadə vuruqları** adlanır.

Məsələn, $120=2^3\cdot3\cdot5$ yazmaq olar. 120 ədədinin müxtəlif sadə vuruqları 2; 3; 5-dir. 120 ədədin 5 sadə vuruğu vardır.

- $72=2^3\cdot3^2$ olduğundan 72 ədədinin müxtəlif sadə vuruqları 2 və 3-dür. 72-nin 5 sadə vuruğu vardır.

ƏBOB (Ən Böyük Ortaq Bölən) və ƏKOB (Ən Kiçik Ortaq Bölünən)

a və b natural ədədlərinin bölündüyü ən böyük natural ədədə bu ədədlərin **ən böyük ortaq böləni** deyilir və ƏBOB(a, b) kimi işarə olunur.

a və b natural ədədlərinə bölünən ən kiçik natural ədədə bu ədədlərin **ən kiçik ortaq bölünəni** deyilir və ƏKOB(a, b) kimi işarə olunur.

24 və 36 ədədlərinin ƏBOB və ƏKOB-nu tapaq:

$24 = 2^3 \cdot 3$ və $36 = 2^2 \cdot 3^2$ olduğundan,

ƏBOB $(24,36) = 2^2 \cdot 3$ (ortaq sadə vuruqların hasili) = 12;

ƏKOB $(24,36) = 2^3 \cdot 3^2$ (ortaq və ortaq olmayan sadə vuruqların hasili) = 72 alınar.

✔ $a \cdot b = \text{ƏBOB}(a,b) \cdot \text{ƏKOB}(a,b)$

✔ $\text{ƏBOB}(a,b) = \sqrt{\dfrac{a \cdot b}{c}}$

✔ $\text{ƏKOB}(a,b) = \text{ƏBOB}(a,b) \cdot c$

✔ $\text{ƏKOB}(a,b) \le a \cdot b$

Burada c ədədi a və b ədədlərinin **ortaq olmayan sadə vuruqlarının hasilidir**.

Ortaq bölünənləri yalnız vahidə bərabər olan natural ədədlər cütünə **qarşılıqlı sadə ədədlər** deyilir.

Misal: (25; 37), (18; 49) və s.

✔ Ədəd oxu üzərində ardıcıl yerləşən ixtiyari natural ədədlər cütü bir-biriləri ilə qarşılıqlı sadədir.

Misal: (106; 107), (86; 87)və s.

a və b qarşılıqlı sadə ədədlər olarsa,

ƏBOB(a, b)=1; $\text{ƏKOB}(a,b) = a \cdot b$

Rasional ədədlərin ƏBOB və ƏKOB-nun tapılması

$$\text{ƏBOB}\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) = \frac{\text{ƏBOB}(a \cdot d, c \cdot b)}{\text{ƏKOB}(b,d)}$$

Misal:

$$\text{ƏBOB}\left(\frac{3}{5},\frac{4}{7}\right) = \frac{\text{ƏBOB}(3 \cdot 7, 5 \cdot 4)}{\text{ƏKOB}(5,7)} = \frac{1}{35}$$

$$\text{ƏKOB}\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) = \frac{\text{ƏKOB}(a,c)}{\text{ƏBOB}(b,d)}$$

Misal:

$$\text{ƏKOB}\left(\frac{4}{15},\frac{5}{3}\right) = \frac{\text{ƏKOB}(4,5)}{\text{ƏBOB}(15,3)} = \frac{20}{3}$$

Tam ədədlərdə Bölən - Qalıq əlaqəsi

A, B, x, K_1, K_2 tam ədədlər və $n \in N$-dir.
A-nın x-ə bölünməsindən alınan qalıq K_1 və
B-nin x-ə bölünməsindən alınan qalıq K_2 olsun. Onda,

- $A \cdot B$-nin x-ə bölünməsindən alınan qalıq $K_1 \cdot K_2$,
- $A \pm B$-nin x-ə bölünməsindən alınan qalıq $K_1 \pm K_2$,
- A^n-nin x-ə bölünməsindən alınan qalıq K_1^n olar.

Tam bölünmə əlamətləri

✓ 2: Bütün cüt ədədlər 2-yə tam bölünür.
✓ 3: Rəqəmləri cəmi 3-ə bölünən bütün ədədlər 3-ə tam bölünür.
✓ 5: Sonuncu rəqəmi 0 və ya 5 olan ədədlər 5-ə bölünür.
✓ 7: $(\overline{a_n.......a_4a_3a_2a_1a_0})$ $n+1$ rəqəmli ədədin 7-yə tam bölünməsi üçün aşağıdakı şərt ödənilməlidir.

- $(1a_0 + 3a_1 + 2a_2)$-$(1a_3 + 3a_4 + 2a_5) + ... = 0$ və ya 7k olmalıdır.

Misal:
4538625 ədədinin 7-yə bölünməsini isbat edək.
$(5 \cdot 1+3 \cdot 2+2 \cdot 6)-(8 \cdot 1+3 \cdot 3 + 2 \cdot 5) + 4 \cdot 1 =(5+6+12)-(8+9+10) + 4 = =27-27 = 0$
Deməli, 4538625 ədədi 7-yə tam bölünür.

✓ **11**: $(\overline{a_n.......a_4a_3a_2a_1a_0})$ $n+1$ rəqəmli ədədin 11-ə tam bölünməsi üçün aşağıdakı şərt ödənməlidir:
$(a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+....) =0$ və ya 11k olmalıdır.
Misal:
136173829 ədədinin 11-ə bölünməsini isbat edək.
$(9+8+7+6+1)-(2+3+1+3) = 22$
22 ədədi 11-in bölünəni olduğuna görə 136173829 ədədi 11-ə tam bölünər.

✓ **4**: Bir ədədin sonuncu iki rəqəmi sıfırla qurtararsa və ya bu iki rəqəmin əmələ gətirdiyi ədəd 4-ə qalıqsız bölünərsə, onda verilmiş ədəd 4-ə tam bölünər.
✓ **8**: Bir ədədin sonuncu üç rəqəmi sıfırla qurtararsa və ya sonuncu üç rəqəmin əmələ gətirdiyi ədəd 8-ə tam bölünərsə, onda verilmiş ədəd 8-ə bölünər.
✓ **9**: Rəqəmləri cəmi 9-a bölünən ədəd 9-a tam bölünür.
✓ **10**: Sonuncu rəqəmi "0" olan ədəd 10-a tam bölünür.

✓ **6**: 3-ə və 2-yə tam bölünən ədəd 6-ya tam bölünür.
✓ **12**: 3-ə və 4-ə tam bölünən ədəd 12-yə tam bölünür.
✓ **18**: 9-a və 2-yə tam bölünən ədəd 18-ə tam bölünür.
✓ **36**: 9-a və 4-ə tam bölünən ədəd 36-ya tam bölünür.
✓ **84**: 12-yə və 7-yə tam bölünən ədəd 84-ə tam bölünür.

Əsas cəm düsturu

Əgər **r** ilk hədd, **n** son hədd, **x** artım olarsa, aşağıdakı cəm düsturu doğrudur.

$$r+(r+x)+(r+2x)+ .... + n = \frac{(n+r)(n-r+x)}{2x}$$

Misal:
$7 + 14 + 21 + ... + 112 = ?$
$r = 7, n = 112, x = 7$

$$7 + 14 + 21 + ... + 112 = \frac{(112+7)\cdot(112-7+7)}{2\cdot 7} = \frac{119\cdot 112}{14} = 952$$

Natural ədədlər üçün bəzi düsturlar

$A = x^m \cdot y^n \cdot z^p$, x, y, z - sadə vuruqlar, $m, n, p \in N$ olarsa, onda

✓ **A-nın müsbət bölənlərinin sayı**
$T = (m+1)\cdot(n+1)\cdot(p+1)$ düsturu ilə tapılır.
Bir ədədin müsbət tam bölənləri qədər mənfi tam bölənləri var. Buna görə bütün tam bölənlərin cəmi "0"-dır.

Misal:

1. 600 ədədinin müsbət tam bölənlərinin sayını tapın.
   $600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$
   $T = (m+1)\cdot(n+1)\cdot(p+1)$
   $T = (3+1)\cdot(1+1)\cdot(2+1) = 24$

2. 72 ədədinin müsbət tam bölənlərinin sayını tapın.
   $72 = 2^3 \cdot 3^2$
   $T = (3+1)\cdot(2+1) = 12$

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72 müsbət tam bölənlərdir.

Müsbət bir ədəddən kiçik olmaqla bu ədəd ilə qarşılıqlı sadə olan ədədlərin sayının tapılması qaydası

$A = a^m \cdot b^n \cdot c^k$ ədədindən kiçik və A ilə qarşılıqlı sadə olan ədədlərin sayı P olarsa,

$$P = a^m \cdot b^n \cdot c^k \cdot \left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

Misal:
48-dən kiçik və 48 ilə qarşılıqlı sadə olan neçə natural ədəd var?

$48 = 2^4 \cdot 3$

$P=2^4\cdot 3\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=48\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=16$

Bu ədədlər aşağıdakılardır:
47; 43; 41; 37; 35; 31; 29; 25; 23; 19; 17; 13; 11; 7; 5; 1

Bəzi cəm düsturları

1. $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Misal:

$1+2+3+.....+20=\frac{20(20+1)}{2}=210$

2. $2+4+6+....+2n=n(n+1)$

Misal:
$2+4+6+.....+50=25\cdot(25+1)=650$
$2n=50,\ n=25$

3. $1^2+2^2+3^2+....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. $1^3+2^3+3^3+....+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Misal:

$1^3+2^3+3^3+...+10^3=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2=3025$

5. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

6. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+....\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

7. $1+r+r^2+r^3+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$

Misal:

$1+2+2^2+2^3+....+2^7=\frac{1-2^8}{1-2}=255$

8. $3+6+9+....+3n=\frac{3n(n+1)}{2}$

9. $1+4+7+....+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$

10. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

Misal:
$1+3+5+....+21=n^2=(11)^2=121$
$2n-1=21$
$2n=22$
$n=11$

11. $1^2+3^2+5^2+....+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$

12. $1^3+3^3+5^3+....+(2n-1)^3=n^2\cdot(2n^2-1)$

13. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

14. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+....+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$

15. $2+5+8+11+.....+3n-1=\frac{n(3n+1)}{2}$

16. $1+7+13+19+.....+6n-5=n(3n-2)$

17. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1}\cdot n^2 = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

18. $2^1\cdot 2 + 2^2\cdot 3 + 2^3\cdot 4 + \dots + 2^n(n+1) = n\cdot 2^{n+1}$

19. $1 + 3 + 3^2 + \dots 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

20. $2 + 5 + 13 + \dots + (2^{n-1} + 3^{n-1}) = 2^n - 1 + \frac{3^n - 1}{2}$

21. $\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{6}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots + \frac{n+4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(3n+7)}{2(n+1)\cdot(n+2)}$

22. $\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \dots + \frac{3^2}{5\cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

23. $\cos a + \cos 3a + \dots + \cos((2n-1)a) = \frac{\sin(2na)}{2\sin a}$

24. $\sin a + \sin 2a + \dots + \sin(na) = \dfrac{\cos\frac{a}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a}{2\sin\frac{a}{2}}$

25. $\cos a + \cos 2a + \dots + \cos(na) = \dfrac{\sin\frac{na}{2}\cdot\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)a}{\sin\frac{a}{2}}$

Rasional ədədlər üzərində əməllər

Əməllər sırası

1. Mötərizələrin daxilindəki əməllər yerinə yetirilir.
2. Qüvvətə yüksəltmə əməli yerinə yetirilir.
3. Vurma-bölmə yerinə yetirilir.
4. Toplama-çıxma yerinə yetirilir.

- ***Müsbət və mənfi ədədlərin vurulması***

$(+)\cdot(+) = (+)$, $(+):(+) = (+)$, $(+)\cdot(-) = (-)$, $(+):(-) = (-)$

$(-)\cdot(+) = (-)$, $(-):(+) = (-)$, $(-)\cdot(-) = (+)$, $(-):(-) = (+)$

Məsələn:
$(-4)\cdot 3 = -12$ $(-4)\cdot(-3) = 12$ $(-8):4 = -2$ $(-8):(-4) = 2$

Adi və onluq kəsrlər

$m, n \in N$ olarsa, $\frac{m}{n}$ şəklində verilən ədədlərə **adi kəsrlər** deyilir: $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{13}{8}$ və s.

Surəti məxrəcindən kiçik olan kəsrə **düzgün kəsr** deyilir: $\frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}$ və s.

Düzgün kəsrlər üçün $\frac{m}{n} < 1$ şərti ödənilir.

Surəti məxrəcindən böyük və ya ona bərabər olan kəsrə **düzgün olmayan kəsr** deyilir.

Məsələn, $\frac{8}{8}, \frac{9}{5}, \frac{14}{11}$ və s.

Düzgün olmayan kəsrlər üçün $\frac{m}{n} \geq 1$ şərti ödənilir.

Qeyd: Vahid də **düzgün olmayan** kəsrdir.

I. ***Toplama və çıxma***

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$,

Məxrəclərin ƏKOB-u tapılır.

$\frac{4}{15} + \frac{7}{10} = \frac{8}{30} + \frac{21}{30} = \frac{29}{30}$

II. ***Vurma***: Məxrəc məxrəcə, surət surətə vurulur.

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f} = \frac{a\cdot c\cdot e}{b\cdot d\cdot f}$

$\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{13} = \frac{4\cdot 5\cdot \cancel{9}^{3}}{\cancel{3}_{1}\cdot 7\cdot 13} = \frac{60}{91}$

III. *Bölmə:* Birinci kəsr olduğu kimi yazılır ikinci kəsr tərsinə çevrilib vurulur.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \text{ və ya } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

$$\frac{4}{7}:\frac{8}{3}=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{14}$$

Kəsrlərin müqayisəsi

- Məxrəcləri eyni olan iki müsbət kəsrdən surəti böyük olan kəsr böyükdür.
  Misal: $\frac{6}{7}>\frac{5}{7}>\frac{4}{7}$
- Surətləri eyni olan iki kəsrdən məxrəci böyük olan kəsr kiçikdir.
  Misal: $\frac{13}{7}>\frac{13}{8}>\frac{13}{9}$
- Mənfi kəsrlər üçün bu təkliflərin tərsi doğrudur.
- Surət ilə məxrəcinin fərqi eyni olan müsbət düzgün kəsrlərdə surət və məxrəc böyüdükcə kəsrin qiymətı artar.
- $\frac{a}{a+n}$ kəsri , n sabit ikən a böyüdükcə artar.
  Surət ilə məxrəcinin fərqi eyni olan müsbət düzgün olmayan kəsrlərdə surət ilə məxrəc böyüdükcə kəsrin qiyməti azalar. Yəni, $\frac{a+n}{a}$ kəsrində n sabit ikən a artarsa, kəsrin qiyməti azalar.

Məsələn,

$a=\frac{11}{10}$, $b=\frac{101}{100}$, $c=\frac{1001}{1000}$ olarsa; $a>b>c$ alınar.

Dövrü onluq kəsr

Bir rasional ədədin onluq kəsr şəklində yazılışında təkrar olunan rəqəm və ya rəqəmlər qrupu varsa, belə onluq kəsrə *dövrü onluq kəsr* deyilir.

Məsələn, $0,a(bc)=0,a\overline{bcbcbcbc}....=\frac{\overline{abc}-a}{990}$

Cəbr-Həndəsə düsturları

1. $0,(a)=\frac{a}{9}$
2. $0,a(b)=\frac{\overline{ab}-a}{90}$
3. $0,(ab)=\frac{\overline{ab}}{99}$
4. $a,b(c)=a\frac{\overline{bc}-b}{90}$
5. $a,(b)=a\frac{b}{9}$
6. $a,cd(ef)=a\frac{\overline{cdef}-\overline{cd}}{9900}$

Misal:

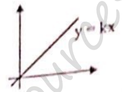
1. $0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$
2. $0,(22)=\frac{22}{99}=\frac{2}{9}$
3. $0,2(1)=\frac{21-2}{90}=\frac{19}{90}$
4. $0,3(21)=\frac{321-3}{990}=\frac{318}{990}=\frac{53}{165}$
5. $3,(4)=3\frac{4}{9}$
6. $4,3(2)=4\frac{32-3}{90}=4\frac{29}{90}$

Faiz. Nisbət. Tənasüb

✔ Asılı iki kəmiyyətdən birinin artması (azalması) ilə o biri də artarsa (azalarsa), belə asılılığa düz mütənasiblik deyilir. Düz mütənasib kəmiyyətlərin nisbətləri sabitdir.

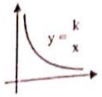
✔ Asılı iki kəmiyyətdən birinin artması (azalması) ilə o biri azalarsa (artarsa), belə asılılığa tərs mütənasiblik deyilir. Tərs mütənasib kəmiyyətlərin hasilləri sabitdir.

Düz mütənasib



$(k > 0)$

Tərs mütənasib



$(k > 0)$

$\frac{a}{b}$ kəsrinə a-nın b-yə nisbəti deyilir $(b \neq 0)$

$\frac{a}{b}$ və $\frac{c}{d}$ kimi iki nisbətin bərabərliyinə *tənasüb* deyilir.

✔ Tənasübün xassələri

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ tənasübü üçün aşağıdakı xassələr doğrudur:

1. b və c-yə orta hədlər, a və d-yə kənar hədlər deyilir.

$$a : \underbrace{b = c}_{\text{orta}} : d \quad (a, d - \text{kənar})$$

2. $a \cdot d = b \cdot c$ (orta və kənar hədd hasilləri bərabərdir)

3. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (orta hədlər yerini dəyişir)

4. $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (kənar hədlər yerini dəyişir)

5. $\frac{ma}{mb} = \frac{nc}{nd}$ $\quad (m, n \neq 0)$

Cəbr-Həndəsə düsturları

6. $\frac{a:m}{b:m} = \frac{c:n}{d:n}$ $\quad (m, n \neq 0)$

7. $\frac{ma \pm nc}{mb \pm nd} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\quad (m, n \neq 0)$

8. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ və ya $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

9. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

10. $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = k^2 \Rightarrow \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = k^2$

11. $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = k^2$

Ədədin yüzdə bir hissəsinə faiz deyilir və % kimi yazılır.
$0,01 = 1\%$, $\quad 0,25 = 25\%$

Misal:

- 30 ədədinin 20%-i $30 \cdot \frac{20\%}{100\%} = 6$ olar.
- 3,6 ədədinin 20% -i $3,6 \cdot \frac{20\%}{100\%} = \frac{72}{100} = 0,72$ olar.
- 6 ədədinin 6%-i $6 \cdot \frac{6\%}{100\%} = \frac{36}{100} = 0,36$ olur.

2. Ədədi faizlə göstərmək üçün $a = a \cdot 100\%$ bərabərliyindən istifadə edilir.

Misal:
5 ədədini faizlə göstərin.
Həlli:
$5 \cdot 100\% = 500\%$

3. Faizi ədədlə göstərmək üçün $b\% = b \cdot 0,01$ bərabərliyindən istifadə edilir:
$15\% = 15 \cdot 0,01 = 0,15$

4. a ədədinin p%-i $\frac{a \cdot p\%}{100\%}$ düsturu ilə hesablanır.

5. p%-i b olan ədədi tapmaq üçün $\frac{b \cdot 100\%}{p\%}$ düsturundan istifadə edilir.

Misal:
6%-i 12 olan ədədi tapın.
Həlli:
Axtarılan ədəd x olsun.

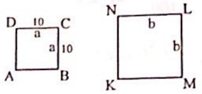
$$x \cdot 6\% = 12 \Rightarrow x \cdot \frac{6}{100} = 12$$

$$6x = 1200 \Rightarrow x = 200$$ və ya $x = \frac{12 \cdot 100\%}{6\%} = 200$ kimi yazmaq olar.

Misal:
Bir ədədin 45% ilə 40%-inin fərqi 12,5 olarsa, bu ədədi tapın.
$0{,}45x - 0{,}4x = 12{,}5$
$x = 250$

6. Bir ədədin başqa bir ədədə bölünməsindən alınan qismətə **nisbət** deyilir. a:b və ya $\frac{a}{b}$ kimi yazılır.

Misal:
Kvadratın tərəfini 20% artırdıqda onun sahəsi neçə faiz artar?



$S(ABCD) = S_1$; $S(KMLN) = S_2$
$S_1 = a^2 = 10^2 = 100$ sm

$$b = a + a \cdot 20\% = 10 + 10 \cdot \frac{20}{100} = 12 \text{ sm}$$

$S_2(KLMN) = b^2 = 12^2 = 144$

$$\frac{S_2 - S_1}{S_1} \cdot 100 = 44\%$$

Yəni 44% artır.

7. a ədədinin b-nin neçə faizi olduğunu bilmək üçün $\frac{a}{b} \cdot 100\%$ düsturundan istifadə olunur.

Misal:
3 ədədi 4 ədədinin neçə faizini təşkil edir?

$$\frac{3}{4} \cdot 100\% = 0{,}75 \cdot 100\% = 75\%$$

Misal:
16 ədədi 20 ədədinin neçə faizini təşkil edir?

$$\frac{16}{20} \cdot 100\% = \frac{4}{5} \cdot 100\% = 0{,}8 \cdot 100\% = 80\ \%$$

8. İldə p% gəlir verən kassaya qoyulmuş a manat pulun, n ildən sonra neçə manat olduğunu $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ düsturu ilə hesablamaq olar. Bu, **mürəkkəb faiz düsturudur**.

Üzərində başlanğıc nöqtə, istiqamət və ölçü vahidi qeyd edilmiş düz xəttə əd... **oxu** deyilir. Ədəd oxu üzərində göstərilə bilən hər bir ədədə **həqiqi ədəd** deyi... Həqiqi ədədlər çoxluğu $R = Q \cup Q'$ ilə işarə edilir.

Həqiqi ədədin kəsr hissəsi: $\{x\} = x - [x]$ burada $[x]$ - ədədin tam hissəsidir.

- Həqiqi ədədin qüvvəti

$(+)^n = (+)$; $(-)^{2n} = (+)$; $(-)^{2n-1} = (-)$ $(n \in N)$

Müsbət ədədlərin bütün qüvvətləri müsbətdir. Mənfi ədədlərin cüt qüvv... ***müsbət***, tək qüvvəti isə ***mənfidir***.

- Həqiqi ədədlərdə aşağıdakı bərabərlik xassələri doğrudur:

I. Bərabərliyin hər iki tərəfinə eyni bir ədədi əlavə etsək və ya çıxsaq bərabərl... dəyişməz.

$a = b \quad \Rightarrow a \pm c = b \pm c$

II. Bərabərliyin hər tərəfini eyni ədədə vursaq, bərabərlik dəyişməz.

$a = b \quad \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$

III. Bərabərliyin hər tərəfini sıfırdan fərqli ədədə bölsək, bərabərlik dəyişməz.

$a = b \Rightarrow a : c = b : c \quad (c \neq 0)$

IV. Bərabərliyin hər tərəfini qüvvətə yüksəltdikdə, bərabərlik dəyişməz.

$a = b \Rightarrow a^n = b^n \ (n \in R)$

$a = b \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \qquad (n > 1, n \in Z)$

IV. Bərabərliklər üzərində toplama, çıxma, vurma və bölmə əməlləri aşağıdakı kimidir:

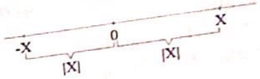
$$\frac{\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}}{a \pm c = b \pm d} \qquad \frac{\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}}{a \cdot c = b \cdot d} \qquad \frac{\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}}{a : c = b : d}$$

$(c \neq 0, d \neq 0)$

Mütləq qiymət

Ədəd oxunda x həqiqi ədədinə qarşı qoyulan nöqtənin başlanğıc nöqtədən uzaqlığına x-ın **mütləq qiyməti** deyilir və $|x|$ ilə işarə edilir.

$$|x| = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$



1. $\forall n \in Z^+$ üçün $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$

2. $x < |x| \Rightarrow x < 0$
$x = |x| \Rightarrow x \geq 0$

3. $|x| = |-x|$
$|x - y| = |y - x|$
$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| (y \neq 0)$

4. $a \in R^+$ və $|f(x)| = a$ isə, $f(x) = a$ və ya $f(x) = -a$

Misal:
$|2x - 3| = 5$
$2x - 3 = 5 \qquad 2x - 3 = -5$
$x = 4 \qquad x = -1$
Cavab $\{-1, 4\}$

5. $|f(x)| \leq a \quad \Rightarrow -a \leq f(x) \leq a$

Misal:
$|3x - 4| \leq 5$ olarsa,

$-5 \leq 3x - 4 \leq 5 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3} \leq x \leq 3$

6. $|f(x)| \geq a$ isə $f(x) \geq a$ və ya $f(x) \leq -a$

Misal:
$|4x + 1| \geq 3$
$4x + 1 \geq 3 \qquad 4x + 1 \leq -3$
$4x \geq 2 \qquad 4x \leq -4$
$x \geq 0{,}5 \qquad x \leq -1$
$x \in (-\infty; -1] \cup [0{,}5; +\infty)$

7. $A=|x-a|+|x-b|$ ifadəsi maksimum qiymətini $x=a$ və ya $x=b$ qiymətində alır.
$x = a$ üçün $\max(A) = |a - b|$
$x = b$ üçün $\max(A) = |b - a|$

8. $B = |x - a| - |x - b|$ ifadəsi ən kiçik qiymətini $x = a$ olanda, ən böyük qiymətini isə $x = b$ olanda alır.
$x = a$ üçün $\min(B) = -|a - b|$
$x = b$ üçün $\max(B) = |b - a|$

9. $|x-b| = |x-a|$ olarsa, $x = \frac{a+b}{2}$. Burada $a \neq b$ şərti ödənilməlidir.

Ədədi orta (Ə.O.)

1. İki ədədin ədədi ortası:

$$A = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Misal:
8 və 10 ədədlərinin ədədi ortasını tapın.

$$\text{Ə.O.} = \frac{8+10}{2} = 9$$

2. Üç ədədin ədədi ortası:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

Misal:
10, 12, -6 ədədlərinin ədədi ortasını tapın.

$$\text{Ə.O} = \frac{10+12-6}{3} = \frac{16}{3}$$

3. n ədədinin ədədi ortası:

$$A = \frac{x_1 + x_2 ... + x_n}{n}$$

Həndəsi orta (G)

1. İki ədədin həndəsi ortası:

$$G = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

Misal:
9 və 4 ədədlərinin həndəsi ortasını tapın.

$$G = \sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$$

2. Üç ədədin həndəsi ortası:

$$G = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$$

Misal:
3, 9, 1 ədədlərinin həndəsi ortasını tapın.

$$G = \sqrt[3]{1 \cdot 3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$$

3. n ədədin həndəsi ortası:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Çoxhədlilərin vuruqlara ayrılması

1. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

Misal:
- ✓ $9x^2 - 4y^2 = (3x - 2y)(3x + 2y)$
- ✓ $a^2 - 9 = (a - 3)(a + 3)$

$a^2 - b = \left(a - \sqrt{b}\right)\cdot\left(a + \sqrt{b}\right)$

Misal:
- ✓ $a^2 - 3 = \left(a - \sqrt{3}\right)\cdot\left(a + \sqrt{3}\right)$

2. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

3. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Misal:
- ✓ $27 - a^3 = (3)^3 - a^3 = (3 - a)(9 + 3a + a^2)$
- ✓ $8y^3 - 27 = (2y)^3 - (3)^3 = (2y - 3)(4y^2 + 6y + 9)$
- ✓ $x^3y^3z^3 - 1 = (x \cdot y \cdot z - 1)(x^2y^2z^2 + xyz + 1)$
- ✓ $64a^3 - 125b^3 = (4a - 5b)(16a^2 + 20ab + 25b^2)$

$x^5 - y^5 = (x - y)\cdot(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$
$x^5 + y^5 = (x + y)\cdot(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$
$x^8 - y^8 = (x - y)\cdot(x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7)$

Nəticə:

$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$
n - təkdirsə $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$
$x^2 + (m + n)x + m\cdot n = (x + m)(x + n)$
$x^2 - (m + n)x + m\cdot n = (x - m)(x - n)$
$x^2 + (m - n)x - m\cdot n = (x + m)(x - n)$

Misal:
- ✓ $x^2 + 11x + 24 = (x + 3)(x + 8)$
- ✓ $x^2 - 6x - 27 = (x - 9)(x + 3)$
- ✓ $x^2 + 8x - 33 = (x + 11)(x - 3)$
- ✓ $x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6)$

4. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Misal:
- ✓ $(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

5. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
6. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
7. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
8. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
9. $ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$

Misal:
- ✓ $6a^2 + 3ab - 2ax - xb$
  $3a(2a + b) - x(2a + b) = (2a + b)(3a - x)$
  $a^4 + 7a^2 + 16$ ifadəsini vuruqlara ayırın.
- ✓ $a^4 + 7a^2 + 16 + a^2 - a^2 = a^4 + 8a^2 + 16 - a^2 = (a^2 + 4)^2 - a^2 =$
  $= (a^2 + 4 - a)(a^2 + 4 + a) = (a^2 - a + 4)(a^2 + a + 4)$

10. $(a \pm b)^n$ - nin açılışı
n=0 ....$(a \pm b)^0$ ....1..................
n=1 ....$(a \pm b)^1$ ....1.....1...............
n=2 ....$(a \pm b)^2$ ....1.....2.....1...........
n=3 ....$(a \pm b)^3$ ....1....3.....3....1..........
n=4 ....$(a \pm b)^4$ .....1....4.....6.....4.....1.....
n=5 ....$(a \pm b)^5$ ....1..5....10....10....5....1...
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

✓ *Bəzi əhəmiyyətli çevirmələr*

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$

$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

Çoxhədlilər

$n \in N$ və $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in R$ olmaqla $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}...+a_1x+a_0$ ifadəsinə n-dərəcəli həqiqi, əmsallı *çoxhədli* deyilir.

✔ $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+ a_2x^{n-2}+ ....+ a_1x + a_0$ ifadəsində, $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ çoxhədlinin əmsalları;

n - çoxhədlinin dərəcəsi
a_n - çoxhədlinin ən böyük dərəcəsinin əmsalı,
a_0 - çoxhədlinin sərbəst həddidir.

Misal:

✔ $P(x) = 6x^5 + 3x^3 - 6x + 7$
Çoxhədlisinin dərəcəsi 5,
Sərbəst həddi 7-dir.

✔ $P(x,y) = 7x^6y^2 + 6x^3y^7 + 4x^2y - 12$
Çoxhədlisinin dərəcəsi $(3 + 7) = 10$,
Sərbəst həddi (-12)-dir.

Misal: $\left(\frac{3}{2}a^2b^4\right)^4$ birhədlisinin qüvvəti ilə əmsalının hasilini tapın.

✔ $\left(\frac{3}{2}a^2b^4\right)^4 = \frac{81}{16}a^8b^{16}$

Qüvvəti $(16 + 8) = 24$ Əmsalı $\frac{81}{16}$

✔ $\frac{81}{16} \cdot 24 = \frac{243}{2}$ dır.

$P(x)=a_0$ $(a_0 \in R)$ çoxhədlisinə ***sabit çoxhədli*** deyilir. Sabit çoxhədlinin dərəcəsi sıfırdır. $P(x) = a_0x^0$,

✔ Çoxhədlilərin tək qüvvətli əmsalları cəmi $P_T = \frac{P(1)-P(-1)}{2}$, cüt qüvvətləri əmsalları cəmi $P_C = \frac{P(1)+P(-1)}{2}$ düsturu ilə hesablanır.

Sərbəst hədd

Çoxhədlinin sərbəst həddini tapmaq üçün dəyişənə "0" qiymətini vermək lazımdır. Yə'ni P(x)-in sərbəst həddi P(0)-dır.

İki çoxhədlinin bərabərliyi

İki çoxhədli bərabər isə onların eyni qüvvətli əmsalları bərabərdir.
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ...+a_1x + a_0$
$Q(x) = b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+ b_2x^{n-2} + ...+b_1x + b_0$ olsun. Əgər $P(x)=Q(x)$ isə,
$a_n= b_n$, $a_{n-1}=b_{n-1}$, ... $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$-dır.

Çoxhədlilərin toplanması və çıxılması

Çoxhədlilər toplanarkən və çıxılarkən eyni dərəcələrin əmsalları islah olunur.
dər $[P(x)] = m$ dər $[Q(x)] = n$
və $m > n$ isə, dər $[P(x) +Q(x)] = m$ olar.

Çoxhədlilərin vurulması və bölünməsi

Əgər dər $[P(x)] = m$, dər $[Q(x)] = n$ və $m \geq n$ isə, onda *dər* $[P(x) : Q(x)] = m\text{-}n$ olar. P(x) çoxhədlisini Q(x) çoxhədlisinə böldükdə natamam qismət R(x), qalıq K(x) olarsa, onda $P(x) = Q(x)\cdot R(x) + K(x)$ yazmaq olar. Bu halda aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur.

dər $[P(x)] \geq$ dər $[Q(x)] >$ dər $[K(x)]$
dər $[P(x)] \geq$ dər $[R(x)]$
dər $[P(x)] =$ dər $[Q(x)] +$ dər $[R(x)]$

Klassik Bölmə

Misal:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 3x^3 + 2 & x^2 - 3 \\
\hline
\mp x^4 \pm 3x^2 & x^2 - 3x + 3 \\
\hline
-3x^3 + 3x^2 & \\
\pm 3x^3 \mp 9x & \\
\hline
3x^2 - 9x + 2 & \\
\mp 3x^2 \pm 9 & \\
\hline
-9x + 11 &
\end{array}
$$

Deməli $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2$, $Q(x) = x^2 - 3$,
$R(x) = x^2 - 3x + 3$, $K(x) = -9x + 11$ olar.

$$\underbrace{\overset{P(x)}{x^4 - 3x^3 + 2}}_{\text{Bölünən}} = \underbrace{\overset{Q(x)}{(x^2 - 3)}}_{\text{Bölən}}\underbrace{\overset{R(x)}{(x^2 - 3x + 3)}}_{\text{Qismət}} + \underbrace{\overset{K(x)}{(-9x + 11)}}_{\text{Qalıq}}$$

Horner üsulu

P(x) çoxhədlisinin x-a iki hədlisinə bölmək üçün aşağıdakı yazılan şər... istifadə edilir:

1. $\begin{array}{c|c} I & II \\ \hline & III \end{array}$ formasında işarə daxil edilir.

2. P(x)-in əmsalları x-in azalan qüvvətinə görə I-nin yerində ya... Çoxhədlidə x-in hər hansı qüvvəti iştirak etmirsə, onun əmsalı kimi 0 götürü...

3. $x-a=0$-ın kökü olan $x=a$ qiyməti II-nin yerində yazılır.

4. Baş həddin əmsalı III-nün yerində yazılır. (I-nin olduğu sütunda)

5. a qiyməti baş həddə vurularaq sonrakı hədlə toplanır. Bu, uyğun qa... ilə bütün əmsallar üçün yerinə yetirilir.

6. Hesablamanın son nəticəsi P(x)-in (x-a)-ya bölünməsindən alınan qal... digərləri isə qismətdə alınan çoxhədlinin əmsallarını verir.

✔ P(x) çoxhədlisinin (x-a) -ya bölünməsindən alnan qalıq: P(a) - dir.

$P(x)=(x-a).Q(x)+K(x)$

$x=a$ üçün $P(a)=K(a)$ (sabit)

* P(x) çoxhədlisini $(x-a)^n$ bölünməsindən alınan qalıq K(x) isə, P(x)-i... (x-a) -ya bölünməsindən alınan qalıq K(a)-dır.

$P(a)=(a-a)^n\cdot Q(a)+K(a)$

$P(a)=K(a)$

Həqiqi üstlü qüvvət.
Kvadrat köklər

$a\in R$ və $n\in N$ olduqda a-nın n dəfə öz-özünə hasilinə a-nın n-ci qüvvəti deyilir və a^n kimi işarə edilir.

$\underbrace{a\cdot a\cdot a\ldots a}_{n\ dəfə}=a^n$

1. Sıfırdan fərqli həqiqi ədədin sıfırıncı qüvvəti 1-dir. Sıfırın sıfırıncı qüvvəti isə qeyri müəyyəndir.

$a^0=1 \qquad (a\neq 0);$

Misal:

$(12)^0=1, \qquad (1244)^0=1$

2. Qüvvəti qüvvətə yüksəldərkən əsas qalır, qüvvət üstləri vurulur.

$(a^k)^m=a^{km}$

Misal:

$(3^4)^6=3^{4\cdot 6}=3^{24}$

3. $((a^k)^m)^n=a^{k\cdot m\cdot n}$

Misal:

$((5^2)^3)^4=5^{2\cdot 3\cdot 4}=5^{24}$

4. Mənfi üstlü qüvvət həmin əsasdan müsbət üstlü qüvvətin tərs qiymətinə bərabərdir.

$a^{-m}=\frac{1}{a^m} \qquad (a\neq 0)$

Misal:

$9^{-1}=\frac{1}{9}, \qquad 12^{-1}=\frac{1}{12}$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^{m} \qquad (a\neq 0,\ b\neq 0)$

Misal:

$\left(\frac{4}{3}\right)^{-5}=\left(\frac{3}{4}\right)^{5}$

6. Müsbət ədədin bütün qüvvətləri müsbətdir. Mənfi ədədin isə tək qüvvəti mənfi, cüt qüvvəti müsbətdir.

$a > 0$ və $n \in Z$ üçün $(-a)^{2n} = a^{2n}$ $\quad (-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$

Misal:

- $-2^4 = -16$
- $[(-2^4)^3]^5 = -2^{60}$
- $-3^4 = -81$
- $[(-2^3)^4]^5 = 2^{60}$

7. $a^n = 1 \Rightarrow a \neq 0$ və $n = 0$; $a = 1$ və $n \in R$; $a = -1$ və n-cüt

8. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad 3^4 \cdot 3^6 = 3^{10}$

9. $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ $\qquad 3^4 \cdot 6^4 = (3 \cdot 6)^4 = (18)^4$

10. $a^m : a^n = a^{m-n}$ $\qquad \frac{7^{14}}{7^4} = 7^{14-4} = 7^{10}$

11. $a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ $\qquad \frac{3^4}{7^4} = \left(\frac{3}{7}\right)^4$

12. $a \neq 0,\ a \neq 1,\ a \neq -1$ isə $\quad a^m = a^n \Rightarrow m = n$

13. $a^m = b^m \Rightarrow \begin{cases} a = b, & m \text{ tək} \\ a = \pm b, & m \text{ cüt} \end{cases}$

Misal 1:
$(3x - 4)^7 = (2x + 6)^7$ isə, $x = ?$
$3x - 4 = 2x + 6 \Rightarrow x = 10$

Misal 2:
$(2x - 1)^4 = (x + 1)^4$
I. $2x - 1 = x + 1$
$x = 2$
II. $2x - 1 = -(x + 1)$
$x = 0$

14. $a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n$ $\qquad 3^6 \cdot 2^6 \cdot 7^6 = (3 \cdot 2 \cdot 7)^6 = 42^6$

15. $a^n \cdot a^m \cdot a^t = a^{m+n+t}$ $\qquad 7^2 \cdot 7^4 \cdot 7^{10} = 7^{2+4+10} = 7^{16}$

$n \geq 1$ natural ədədi və a həqiqi ədədi üçün $x^n = a$ tənliyi aşağıdakı (1) şərti ödədikdə belə həll olunur.

$x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$ və x - ə a-nın n-ci **dərəcədən kökü** deyilir.

- **Köklü ifadələr üzərində əməllər**

1. $\sqrt[n]{a} \in R \Rightarrow \begin{cases} n - \text{tək} \\ n - \text{cüt},\ a \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt[n]{a} \notin R \Rightarrow$ n cüt və $a < 0$

2. Rasional qüvvət: $\quad a > 0$ və $\frac{m}{n}$ $(m \in Z, n \in N)$ olarsa, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Qeyd 1: Mənfi ədədlərin kəsr üstlü qüvvətlərinə baxılmır.
Qeyd 2: Sıfrın yalnız müsbət kəsr üstlü qüvvətlərin mənası var.

$\sqrt[2]{16} = \sqrt[2]{2^4} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

3. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{33}{3}} = \sqrt{11}$

4. $\sqrt[m]{a^m} = a$ $\quad$; əgər m tək isə;

$\sqrt[m]{a^m} = |a|$; əgər m cüt isə.

Misal: $\sqrt[3]{5^3} = 5$; $\quad \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$; $\quad \sqrt[4]{(-4)^4} = |4| = 4$

✔ $k \in N$ isə, aşağıdakı münasibətlər doğrudur.

5. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot k]{a^{n \cdot k}}$ $\qquad \sqrt[7]{2^3} = \sqrt[7 \cdot 4]{2^{3 \cdot 4}} = \sqrt[28]{2^{12}}$

6. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:k]{a^{n:k}}$ $\qquad \sqrt[8]{10^6} = \sqrt[8:2]{10^{6:2}} = \sqrt[4]{10^3}$

7. $\sqrt[m]{a^{mp} \cdot c} = a^p \cdot \sqrt[m]{c}$ (m-tək); $\sqrt[m]{a^{mp} \cdot c} = |a^p| \cdot \sqrt[m]{c}$ (m-cüt)

$a^p \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{a^{mp} \cdot c}$ (m-tək); $a^p \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{a^{mp} \cdot c}$ (m-cüt, $a^p > 0$)

$a^p \cdot \sqrt[m]{c} = -\sqrt[m]{a^{mp} \cdot c}$ (m-cüt, $a^p < 0$)

8. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[m \cdot n \cdot p]{a}$

9. $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b\sqrt[p]{c}}} = \sqrt[m\cdot n\cdot p]{a^{n\cdot p}\cdot b^{p}\cdot c}$

10. $\sqrt[m]{a^{x}\sqrt[n]{a^{y}\sqrt[p]{a^{z}}}} = \sqrt[m\cdot n\cdot p]{a^{(x\cdot n+y)p+z}}$

11. $\underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots\sqrt{a}}}}}_{n \text{ dəfə}} = a^{\frac{2^{n}-1}{2^{n}}}$ $\qquad \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}} = 3^{\frac{2^{4}-1}{2^{4}}} = 3^{\frac{15}{16}}$

12. **Mürəkkəb kök düsturu**

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^{2}-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^{2}-b}}{2}}$$

13. $\sqrt{m+n\pm2\sqrt{m\cdot n}} = \sqrt{m}\pm\sqrt{n}$ $(m>n>0)$

Misal:

- ✓ $\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{4+3+2\sqrt{3\cdot4}} = \sqrt{4}+\sqrt{3} = 2+\sqrt{3}$
- ✓ $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{3+5+2\sqrt{5\cdot3}} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$
- ✓ $\sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{6+1-2\sqrt{6}} = \sqrt{6}-1$
- ✓ $\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{5+2-2\sqrt{5\cdot2}} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$

Sonsuz köklər

14. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}} = a$ $\qquad \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\ldots}}} = 6$

15. $\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\ldots}}} = \sqrt[n-1]{a}$ $\qquad \sqrt[3]{625\sqrt[3]{625\sqrt[3]{625\ldots}}} = \sqrt{625} = 25$

16. $\sqrt[n]{a:\sqrt[n]{a:\sqrt[n]{a\ldots}}} = \sqrt[n+1]{a}$ $\qquad \sqrt[5]{4:\sqrt[5]{4:\sqrt[5]{4\ldots}}} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^{2}} = \sqrt[3]{2}$

17. $\sqrt{a\pm\sqrt{a\pm\ldots}} = \dfrac{\sqrt{4a+1}\pm1}{2}$

Misal:

- ✓ $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12\ldots}}} = \dfrac{\sqrt{4\cdot12+1}+1}{2} = 4$
- ✓ $\sqrt{30-\sqrt{30-\sqrt{30\ldots}}} = \dfrac{\sqrt{4\cdot30+1}-1}{2} = 5$

18. a ardıcıl iki müsbət ədədin hasili isə, yəni $a=n(n+1)$ olarsa,

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a\ldots}}} = n+1$$

$$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a\ldots}}} = n$$

Misal:

$12=3\cdot4$ olduğundan, $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12\ldots}}} = 4$ olar.

$30=5\cdot6$ olduğundan, $\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30\ldots}}} = 6$ olar.

$20=4\cdot5$ olduğundan, $\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20\ldots}}} = 4$ olar.

Bəzi köklü ifadələrin qoşması

p	q	p·q
$\sqrt[m]{a^{n}}$	$\sqrt[m]{a^{m-n}}$	a
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	a-b
$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^{2}}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^{2}}$	a-b
$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^{2}}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^{2}}$	a+b

19. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

- ✓ $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \dfrac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$

✓ $$\frac{6}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}=\frac{6\cdot(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{(\sqrt{11}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{11}-\sqrt{5})}=\frac{6\cdot(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{6}=\sqrt{11}-\sqrt{5}$$

✓ $$\frac{7}{\sqrt{17}-\sqrt{10}}=\frac{7\cdot(\sqrt{17}+\sqrt{10})}{(\sqrt{17}-\sqrt{10})\cdot(\sqrt{17}+\sqrt{10})}=\frac{7\cdot(\sqrt{17}+\sqrt{10})}{7}=\sqrt{17}+\sqrt{10}$$

✓ Məxrəci $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$ şəklində olan ifadənin surət və məxrə... $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ ifadəsinə vurulur:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{(a\pm b)}$$

Misal:

✓ $$\frac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}=\frac{7\cdot(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5\cdot2}+\sqrt[3]{2^2})}{(5+2)}=\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}$$

✓ $$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot2}+\sqrt[3]{2^2}}{3-2}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$$

Tənliklər

Bir dərəcəli bir məchullu tənliklər

$ax+b=0$ şəklində tənliyə bir dərəcəli bir məchullu tənlik deyilir. Burada x-dəyişən (məchul), a və b isə məlumlardır.

* Bu tip tənliyin həllinin varlığı üçün aşağıdakı şərtlər vardır:

I. $a\neq0$ üçün $ax+b=0$ tənliyinin yeganə $x=-\frac{b}{a}$ kökü var.

II. $a=0$ və $b=0$ üçün tənliyin sonsuz kökü var, $(-\infty;+\infty)$
Yəni $x\in R$-dir.

III. $a=0$ və $b\neq0$ üçün tənliyin həlli yoxdur. Yəni $x\in\varnothing$ -dir.

Bir dərəcəli iki məchullu tənliklər sistemi

Sistemin ümumi forması belədir.

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1 & \text{(I)}\\ a_2x+b_2y=c_2 & \text{(II)}\end{cases}$$

Burada $a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2$ verilən həqiqi ədədlərdir.
Bu sistemin həllinin varlığı üçün aşağıdakı şərtlər vardır:

1. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ olduqda, sistemin sonsuz sayda həlli vardır.

Misal:

$$\left.\begin{array}{l}8x+6y=10\\ 4x+3y=5\end{array}\right\}$$

$\frac{8}{4}=\frac{6}{3}=\frac{10}{5}=2$ Sistemin sonsuz sayda həlli var.

2. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ olduqda, sistemin həlli yoxdur.

3. $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ olduqda, sistemin yeganə həlli vardır.

Sistemin həlli üsulları

- ✔ *Əvəzetmə üsulu*

1. (I) və ya (II) - də y tapılır.
2. y-in qiymətini digər tənlikdə yerinə yazaraq x tapılır.

- ✔ *Toplama üsulu*

1. x və ya y - dən birinin əmsalları bərabərləşir.
2. Tərəf-tərəfə çıxmaqla əmsalları eyni olan dəyişənlər yox edilir.
3. Dəyişənlərdən biri tapılır və (I) və ya (II) də yerinə yazılaraq o biri dəyişən tapılır:

$$\begin{matrix} b_2 \\ b_1 \end{matrix}\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ a_2b_1x + b_2b_1y = c_2b_1 \end{cases}$$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

- ✔ *Müqayisə üsulu*

$$\left.\begin{aligned} &(I)\ \ y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1} \\ &(II)\ y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2} \end{aligned}\right\} \qquad \frac{c_1 - a_1x}{b_1} = \frac{c_2 - a_2x}{b_2}$$

Kvadrat tənliklər

$a, b, c \in R$ və $a \neq 0$ olmaqla $ax^2 + bx + c = 0$ bərabərliyinə *2 dərəcəli bir dəyişənli* tənlik deyilir.

$D = b^2 - 4ac$ ifadəsinə bu tənliyin diskriminantı deyilir. Diskriminantın köməyi ilə bu tənliyin kökləri belə tapılır.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad \text{və} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Yarıya bölmə düsturu:

$ax^2 + bx + c = 0$ tənliyində b cüt ədəd olarsa, onda köklər belə tapılır:

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac\ ; \quad x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

Əmsallar üzərində əməllər

$ax^2 + bx + c = 0$ tənliyində

I. $a + b + c = 0$ isə, köklər

$$x_1 = 1; \qquad x_2 = \frac{c}{a}$$

II. $a - b + c = 0$ isə köklər:

$$x_1 = -1; \qquad x_2 = -\frac{c}{a}$$

III. $c = 0$ isə, köklər:

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = -\frac{b}{a}$$

IV. $b = 0$ isə, köklər:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad \text{və} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Bu zaman deyirlər ki, tənliyin 2 simmetrik kökü var. Əgər.

$a \cdot c \leq 0$ isə, simmetrik köklər həqiqi,

$a.c > 0$ isə, simmetrik köklər kompleksdir.

V. $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ və

$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ tənliklərinin eyni kökü olması üçün $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ olmalıdır.

Köklərin varlığı

$ax^2 + bx + c = 0$ tənliyinin $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ köklərinin varlığı D (diskriminant)dan asılıdır.

I. $D \geq 0$ olduqda, tənliyin həqiqi kökləri vardır.

$D>0$ isə, tənliyin 2 müxtəlif kökü vardır və onlar belə tapılır: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$;

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

D=0 olduqda isə tənliyin bir (iki bərabər) kökü var və belə tapılır: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

II. D<0 olduqda tənliyin həqiqi kökləri olmur və ancaq kompleks kökləri olur.

Köklər və əmsallar arasındakı asılılıq $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ və $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ *olduqda, aşağıdakılar doğrudur:*

- ✔ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$;
- ✔ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
- ✔ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$;
- ✔ $\frac{1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{a}{c}$
- ✔ $x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$;
- ✔ $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$;
- ✔ $x_1^3 + x_2^3 = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}$;

$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{-b^3 + 3abc}{c^3}$;

$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$; $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = \frac{-bc}{a^2}$

Bəzi düsturlar

- ✔ $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 + 2x_1x_2$
- ✔ $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$
- ✔ $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
- ✔ $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 - x_2)$

Köklərinə görə ikidərəcəli tənliyin qurulması

Kökləri x_1 və x_2 olan ikidərəcəli tənliyi belə qurmaq olar:

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{-\frac{b}{a}}x + \underbrace{x_1x_2}_{\frac{c}{a}} = 0$

Misal 1:

Kökləri 4 və 5 olan ikidərəcəli tənliyi qurun.

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$

$x_1 = 4$ və $x_2 = 5$

$x^2 - (4 + 5)x + 5 \cdot 4 = 0$

$x^2 - 9x + 20 = 0$

Misal 2:

Kökləri $2 + \sqrt{3}$ və $2 - \sqrt{3}$ olan ikidərəcəli tənliyi qurun.

$x_1 = 2 + \sqrt{3}$ və $x_2 = 2 - \sqrt{3}$

$x^2 - (x_1 + x_2)x - x_1x_2 = 0$

$x^2 - (2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3})x + (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 0$

$x^2 - 4x + 1 = 0$

Üçdərəcəli tənlikdə köklər və əmsallar arasında asılılıq

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tənliyinə ($a \neq 0$, a, b, c, d $\in R$)

Bu tənliyin kökləri x_1, x_2, x_3 olduqda aşağıdakı bərabərliklər doğrudur.

- ✔ $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$
- ✔ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$
- ✔ $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$
- ✔ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}$

- ✓ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$
- ✓ $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{b}{d}$
- ✓ $\frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2} = \frac{2ac - b^2}{ad}$

Əgər x_1, x_2, x_3 kökləri ədədi silsilə əmələ gətirərsə onda aşağıdakılar doğrudur:

- ✓ $\frac{x_1 + x_3}{2} = x_2 \Rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$
- * $x_2 = -\frac{b}{3a}$

Həndəsi silsilə olarsa,

$\sqrt{x_1x_3} = x_2 \Rightarrow x_1x_3 = x_2^2$

$x_2 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$

Qeyd: *n dərəcəlidən tənliyin kökləri cəmi* $-\frac{b}{a}$, *hasili isə*

$$(-1)^n \cdot \frac{\text{sərbəst hədd}}{a} \text{ olur.}$$

Məsələn: $5x^{14} - 4x^{13} + 3x^2 - 10 = 0$ üçün;

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{14} = -\frac{-4}{5} = \frac{4}{5}$

$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{14} = (-1)^{14} \frac{-10}{5} = -2$ olar.

Tənlik qurmaq üsulu ilə məsələlərin həlli

Yaş məsələləri

- * İki adam arasında yaş fərqi zaman keçdikcə dəyişməz.
- * İki adamın yaşları cəmi t ildən sonra 2t qədər artar.

- * Bir adamın yaşı x olarsa t ildən sonra yaşı x+t, t il öncəki yaşı isə x-t olar.
- * n sayda adamın yaşlarının cəmi x olarsa, t ildən sonra yaşlarının cəmi x+nt, t il öncəki yaşlarının cəmi isə x-nt olar.

Saat məsələləri

Saat və dəqiqə əqrəbi arasındakı bucaq $\hat{x} = \frac{|11d - 60s|}{2}$ düsturu ilə ölçülür.

Burada d-dəqiqə, s-saat, x-dəqiqə və saat əqrəbləri arasında qalan bucaqdır. Aşağıdakıları bilmək vacibdir.

- ✓ Saat çevrəsi 12 bərabər hissəyə bölünür.
- ✓ Hər hissə yenidən 5 bərabər hissəyə bölünür.
- ✓ Saat çevrəsi $5 \cdot 12 = 60$ bərabər hissəyə ayrılmışdır. Bu bölmələrin hər biri 1 dəqiqəni göstərir.
- ✓ Bir dəqiqə $\frac{360^0}{60} = 6^0$-lik mərkəzi bucağa uyğundur.
- ✓ Dəqiqə əqrəbi 60 dəqiqə getdikdə, saat əqrəbi 5 bölmə gedir.
- ✓ Saat əqrəbi 1 bölmə getdikdə, dəqiqə əqrəbi $\frac{60^0}{5} = 12^0$ dəqiqə gedir.

Hərəkət məsələləri

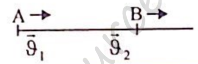
- ✓ S : Yol, V: Sürət, t: zaman, qəbul edək. Onda,

$$S = V \cdot t, \quad V = \frac{S}{t}, \quad t = \frac{S}{V}$$

- ✓ Sürət ilə yol düz, sürət ilə zaman tərs mütənasibdir.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}, \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{t_2}{t_1}$$

İki cisim eyni zamanda qarşı-qarşıya hərəkət etməyə başlayırsa, $t = \frac{x}{\vartheta_1 + \vartheta_2}$ olar. AB = x



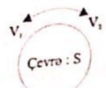
Bu cisimlər eyni istiqamətdə hərəkət etdikləri zaman isə $t=\frac{x}{|\vartheta_1-\vartheta_2|}$

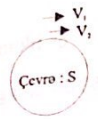
✓ Orta Sürət V:

$$V_o=\frac{\text{Bütün yolların cəmi}}{\text{Bütün zamanların cəmi}}$$

✓ Yolun birinci yarısı V_1 sürətlə, o biri yarısı isə V_2 sür'ətlə gedilərsə, orta sürət $V_0=\frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$ olar.

✓ Çevrə üzrə hərəkət;





$V_1+V_2=\frac{S}{t}$ Eyni anda əks istiqamətdə

$V_1-V_2=\frac{S}{t}$ Eyni anda eyni istiqamətdə

İşçi-hovuz məsələləri

✓ Bir iş a saata görülərsə, 1 saatda işin $\frac{1}{a}$ hissəsi görülür.

✓ Bir işi I işçi a saata, II işçi b saata, ikisi birlikdə x saata görərsə, onda, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$ doğrudur və ya $x=\frac{a\cdot b}{a+b}$

Misal:
Bir işi I fəhlə 4 günə, II fəhlə 6 günə qurtarır. İkisi bu işi neçə günə qurtarar?

Həlli:

$$x=\frac{6\cdot 4}{6+4}=\frac{24}{10}=2,4$$

✓ Boş bir hovuza 1-ci boru a saatda, 2-ci boru b saatda doldurur. İki boru eyni anda açılarsa hovuz x saatda dolar.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{ab}{a+b}$$

✓ Boş bir hovuzu 1-ci boru a saatda doldurar, 2-ci boru b saatda boşaldar. İki boru eyni anda açılarsa hovuz x saatda dolar.

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{ab}{b-a}$$

✓ Boş bir hovuzu 1-ci boru a saatda və 2-ci boru b saatda doldurur, 3-cü boru isə dolu hovuzu c saatda boşaldır. Üç boru eyni anda açılarsa hovuz x saatda dolar.

Onda, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{x}$; $x=\frac{a\cdot b\cdot c}{b\cdot c+a\cdot c-a\cdot b}$ doğrudur.

Məsələ:

1. I boru boş hovuzu 6 saatda, II boru 8 saatda doldurur. Hər iki boru eyni anda açılarsa hovuz neçə saata dolar?

Həlli:

$$x=\frac{a\cdot b}{a+b}=\frac{6\cdot 8}{6+8}=\frac{24}{7}$$

2. Boş hovuzu I boru 8 saatda doldurar, II boru dolu hovuzu 10 saatda boşaldar. İki boru eyni anda açılarsa hovuz neçə saata dolar?

Həlli:

$$x=\frac{a\cdot b}{b-a}=\frac{8\cdot 10}{10-8}=\frac{80}{2}=40$$

Bərabərsizliklər

Bir-biri ilə ">" və ya "<" işarələri ilə bağlı olan ifadələr *bərabərsizlik* adlanır.

Bərabərsizliyin xassələri

x, y, a, b həqiqi ədədlər olduqda, aşağıdakı xassələr doğrudur.

1. Bərabərsizliyin hər tərəfinə eyni həqiqi ədədi əlavə etdikdə və ya çıxdıqda bərabərsizliyin işarəsi dəyişməz.
   $a \in R$ və $x < y \Rightarrow x + a < a + y$
   $a \in R$ və $x < y \Rightarrow x - a < y - a$
2. Eyni işarəli bərabərsizliyi tərəf-tərəfə toplamaq olar, ancaq çıxmaq olmaz.
   $\forall x,y,a,b \in R$ üçün
   $$\begin{array}{l} x<y \\ \underline{a<b} \\ x+a<y+b \end{array}$$
3. x,y,a,b-müsbət həqiqi ədədlər olarsa,
   $$\begin{array}{l} x<y \\ \underline{a<b} \\ x \cdot a<y \cdot b \end{array}$$ doğrudur.
4. Sıfır və vahid arasında yerləşən həqiqi ədədin müsbət tam qüvvəti artdıqca nəticə azalır. Yəni $x \in (0,1) \Rightarrow x > x^2 > x^3 > x^4$ ....

Misal: $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \frac{1}{16}$

5. Əgər x və y - eyni işarəli həqiqi ədədlər olarsa, aşağıdakı şərt doğrudur.
   $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

Misal: $2 < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

6. x və y əks işarəli olarsa, $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ olar.

Misal: $-3 < 2 \Rightarrow -\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

Xətti bərabərsizliklər

$a \neq 0$ olduqda, $ax+b>0 (\geq 0)$ $(ax+b<0 (\leq 0))$ şəklində verilən bərabərsizliklərə ***xətti bərabərsizliklər*** deyilir.

$a>0$ olduqda, $ax+b>0$ bərabərsizliyinin həlli $x > \frac{b}{a}$; $a<0$ olduqda isə, $x < -\frac{b}{a}$ kimi tapılacaq.

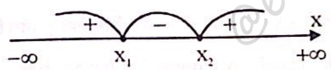
Kvadrat bərabərsizliklər (intervallar üsulu)

$ax^2+bx+c>0 (\geq 0, <0, \leq 0), (a \neq 0)$ şəklində verilən bərabərsizliklərə ***kvadrat bərabərsizliklər*** deyilir. Kvadrat bərabərsizliyin həllini tapmaq üçün intervallar üsulundan istifadə edirlər.

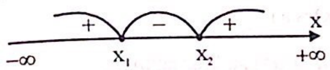
İntervallar üsulunu araşdıraq:

Əvvəlcə kvadrat üçhədlini vuruqlarına ayırmaq lazımdır, yəni
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
(x_1 və x_2 ədədləri $ax^2+bx+c=0$ tənliyinin kökləridir). Fərz edək ki, $x_1<x_2$-dir. x_1 və x_2 ədədlərini ədəd oxunda yerləşdirək və sonra $(-\infty; x_1), (x_1; x_2)$ və $(x_2; +\infty)$ aralıqlarından qiymətlər götürüb kvadrat üçhədlidə yerinə yazaq. Əgər verilmiş aralıqda müsbət ədəd alınsa, həmin aralığın işarəsi "müsbət", əgər verilmiş aralıqda mənfi ədəd alınsa, həmin aralığın işarəsi "mənfi" olacaq.

Məsələn



İşarələri tapdıqdan sonra, bərabərsizliyin həllini tapmaq üçün bərabərsizliyin öz işarəsinə baxmaq lazımdır.

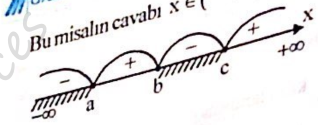


halı üçün bərabərsizliyin işarəsindən asılı olaraq cavablar aşağıdakı kimi olacaq:

1) İşarə ">" isə, $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;
2) İşarə "≥" isə, $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$;
3) İşarə "<" isə, $x \in (x_1; x_2)$;
4) İşarə "≤" isə, $x \in [x_1; x_2]$ alınacaq.

Əgər bərabərsizlikdə vuruqların sayı 2-dən çoxdursa, intervallar üsulundan istifadə etmək olar. Məsələn, $(x-a)(x-b)(x-c) \leq 0$ $(a<b<c)$ bərabərsizliyini həll edək:

Bu misalın cavabı $x\in(-\infty;a]\cup[b;c]$ olacaq.

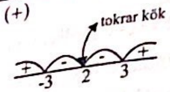


Misal: $\frac{(x^2-9)(2x^2-x+7)}{x^2-4x+4}<0$ bərabərsizliyini həll edək.

Surətdə birinci mötərizədəki çoxhədlinin kökləri ±3, baş həddin işarəsi (... ikinci çoxhədlinin həqiqi kökü yoxdur və baş həddin işarəsi (+) - dir.

Məxrəcdəki çoxhədlinin $x=2$ təkrar kökü var və baş həddin işarəsi müsbət...

Ədəd oxu quraq. İfadənin işarəsi $\frac{(+)\cdot(+)}{(+)}=(+)$ olar.



Cavab: $x\in(-3;2)\cup(2;3)$

Modul bərabərsizliklər

Bu tip bərabərsizliklər üçün aşağıdakı xassələr vardır:

1) $|f(x)|>a(\ge a),(a>0)\Rightarrow f(x)<-a(\le -a)$ bərabərsizliyinin həlli, sonra isə

$f(x)>a(\ge a)$ bərabərsizliyinin həlli tapılır. Alınmış həllər birləşdirilir.

2) $|f(x)|<a(\le a),(a>0)\Rightarrow -a<f(x)<a$

$(-a\le f(x)\le a)$

$|f(x)|<a$, $a>0$ bərabərsizliyinin həllini başqa üsulla da tapmaq olar:

$f(x)>-a$ bərabərsizliyinin həlli tapılır, sonra isə $f(x)<a$ bərabərsizliyinin həlli tapılır. Alınmış həllər kəsişdirilir.

Qeyd: Yuxarıda verilən f(x) - ixtiyari funksiyadır.

Silsilələr

Ədədi silsilə

Ədədi silsilənin ümumi həddinin düsturu $a_n=a_1+(n-1)d$, burada d-silsilə fərqi, a_1-birinci hədddir.

* Bir ədədi silsilədə, hər hansı bir həddən əvvəl gələn həddi çıxdıqda silsilə fərqini verir. Yəni $d=a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\dots=a_{n+1}-a_n$

Ümumi həddin düsturuna əsasən:

$a_1=a_1+(1-1)d=a_1$ $\quad a_2=a_1+(2-1)d=a_1+d$

$a_3=a_1+(3-1)d=a_1+2d$

Silsilə fərqini aşağıdakı kimi də tapmaq olar:

$$d=\frac{a_t-a_p}{t-p}\qquad 1\le p\le t\le n$$

Bir ədədi silsilədə ikincidən başlayaraq hər hədd özündən bərabər məsafədəki hədlərin ədədi ortasına bərabərdir.

$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$ olan bir ədədi silsilədə $a_4=\frac{a_3+a_5}{2}=\frac{a_2+a_6}{2}=\frac{a_1+a_7}{2}$

Sonlu bir ədədi silsilədə əvvəldən və sondan eyni məsafədə olan iki həddin cəmi ilk və son hədlərin cəminə bərabərdir. $a_p=\frac{a_{p-k}+a_{p+k}}{2}$

Ədədi silsilədə $m+n=i+k$ olarsa, $a_m+a_n=a_i+a_k$ onda

$a_1,a_2,a_3,\dots a_{n-2},a_{n-1},a_n$ üçün $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\dots\dots$

Məsələn:

$a_1+a_7=a_2+a_6=a_3+a_5=a_4+a_4$

a və b ədədləri arasında bunlarla birlikdə ədədi silsilə təşkil edən n sayda ədəd yazılarsa, bu silsilənin fərqi $d=\frac{b-a}{n+1}$ olar.

Ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmi

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n\qquad S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$$

Misal:

✔ $a_1=4$, $a_8=25$ isə, $d=?$

$a_8=a_1+7d$ $\quad 25=4+7d$ $\quad\Rightarrow\quad d=3$

✔ $a_5=19$ və $a_{14}=55$ isə, $d=?$

$$d=\frac{a_{14}-a_5}{14-5}=\frac{55-19}{9}=\frac{36}{9}=4$$

✔ $a_8 = 10$ olarsa, $a_2 + a_{14} = ?$

$a_8 = \frac{a_2 + a_{14}}{2} = 10 \quad \Rightarrow \quad a_2 + a_{14} = 20$

✔ $a_1 - a_9 = 48$ isə, $d = ?$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_1 - (a_1 + 8d) = 48 \quad \Rightarrow d = -6$

✔ 12 ilə 78 ədədləri arasında ədədi silsilə təşkil edəcək şəkildə 5 ədəd yerləşdirilir. Silsilə fərqini tapın.

$12,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 78$

$r = \frac{a_7 - a_1}{7-1} = \frac{78-12}{6} = \frac{66}{6} = 11$

Həndəsi silsilə

Həndəsi silsilənin ümumi həddinin düsturu

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b,\ bq,\ bq^2,\ bq^3,\ \ldots,\ bq^{n-1}\ \ldots$

$b_1 = b_1 \cdot q^{1-1} = b_1 \cdot q^0 = b_1$

$b_2 = b_1 \cdot q^{2-1} = b_1 \cdot q^1 = b_1 \cdot q$

$b_3 = b_1 \cdot q^{3-1} = b_1 \cdot q^2$

....

$b_n = b_{n-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{n-2} \cdot q = b_1 \cdot q^{n-1}$

Həndəsi silsilədə, hər hansı bir həddin özündən əvvəlki həddə nisbəti silsilə vuruğuna bərabərdir.

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \ldots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = q$$

a ilə b ədədləri arasında həndəsi silsilə təşkil edəcək n sayda ədəd yazılarsa bu silsilənin silsilə vuruğu aşağıdakı kimi olar:

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}; \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Silsilənin ilk n həddinin hasilinə P_n desək, onda

$$P_n = (b_1 \cdot b_n)^{\frac{n}{2}}; \qquad P_n = \sqrt{(b_1 \cdot b_n)^n}$$

Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi aşağıdakı kimi hesablanır.

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Müsbət hədli həndəsi silsilədə hər bir hədd özündən eyni məsafədə yerləşən hədlərin həndəsi ortasına bərabərdir.

$$b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}$$

Həndəsi silsilədə $n + m = i + k$ olarsa,

$$b_n \cdot b_m = b_i \cdot b_k$$

Həndəsi silsilədə $|q| < 1$ olarsa, belə silsiləyə sonsuz azalan həndəsi silsilə deyilir.

Sonsuz azalan həndəsi silsilənin hədləri cəminin düsturu:

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

Misal 1:

$b_1 = \frac{1}{9}$ və silsilə vuruğu 3 olan həndəsi silsilədə $b_8 = ?$

$b_8 = b_1 \cdot q^7 = \frac{1}{9} \cdot (3)^7 = 3^7 \cdot 3^{-2} = 3^5 = 243$

$b_8 = 243$

Misal 2:

$b_5 = \frac{1}{32}, \qquad b_8 = 2^{-8}$ isə, $q = ?$

$b_8 = b_5 \cdot q^3 \quad \Rightarrow 2^{-8} = 2^{-5} \cdot q^3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{2^{-8}}{2^{-5}}} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Misal 3:

$b_1 = 5$ və $b_6 = 20$ isə, həndəsi silsilənin ilk altı hədinin hasilini tapın.

$T = \sqrt{(b_1 \cdot b_6)^6} = \sqrt{(5 \cdot 20)^6} = \sqrt{100^6} = 10^6$

Misal 4:

$3 - 2\sqrt{2}$ və $3 + 2\sqrt{2}$ ədədləri arasına hansı müsbət ədəd gəlməlidir ki, həndəsi silsilə olsun.

$3 - 2\sqrt{2},\ x,\ 3 + 2\sqrt{2}$

$x^2 = (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$

$x^2 = 9 - 8,\ \ x^2 = 1,\ \ x = 1$

Funksiyalar. Qrafiklər

Funksiyanın təyin oblastı

$(D(f))$ arqumentinin ala biləcəyi nöqtələr çoxluğudur.

$y = f(x)$ və $y = g(x)$ iki funksiya olsun.

1) $y = f(x)$ - ın təyin oblastı R-dir.

2) $y = \frac{f(x)}{q(x)}$ -ın təyin oblastı $q(x) \neq 0$ şərtini ödəyən həqiqi ədədlərdir.

3) $y = \sqrt{f(x)}$ -ın təyin oblastı $f(x) \geq 0$ şərtini ödəyən həqiqi ədədlərdir.

4) $y = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ -ın təyin oblastı, $f(x) > 0$ şərtini ödəyən həqiqi ədədlərdir.

5) $y = \sqrt[3]{f(x)}$ -ın təyin oblastı R-dir.

Misal 1:

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ funksiyasının təyin oblastını tapın.

Həlli:

$f(x) \geq 0$, $x^2 - 1 \geq 0$ üçün $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Misal 2:

$q(x) = \sqrt{3 - |x - 1|}$ funksiyasının tə'yin oblarstını tapın.

Həlli:

$3 - |x - 1| \geq 0$ $\quad 3 \geq |x - 1|,$ $\quad 3 \geq x - 1 \geq -3$

$4 \geq x \geq -2$ $\quad$ *Cavab:* $[-2; 4]$

Misal 3:

$f(x) = \sqrt{9 - |x - 1|}$ funksiyanın təyin oblastını tapın.

Həlli:

$9 - |x - 1| \geq 0$

$-|x - 1| \geq -9$

$|x - 1| \leq 9$

$-9 \leq x - 1 \leq 9$

$-8 \leq x \leq 10$

Cavab: $[-8; 10]$

Funksiyanın qiymətlər oblastı $E(f)$ *-funksiyasının ala biləcəyi qiymətlərə deyilir.*

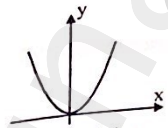
Məsələn: $y = x^2$ üçün $E(f) = [0; +\infty)$

$y = x^3$ üçün $E(f) = (-\infty; +\infty)$

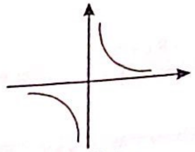
Tək və Cüt funksiyalar

1. ***f(-x) = -f(x)*** isə f(x) funksiyası tək funksiyadır.
Tək funksiyaların qrafikləri koordinat başlanğıcına görə simmetrikdir.
Tək funksiya x=0 nöqtəsndə təyn olunubsa, f(0)=0 olar.

2. ***f(-x) = f(x)*** isə f(x) funksiyası cüt funksiyadır.
Cüt funksiyaların qrafikləri y oxuna görə simmetrikdir.



cüt funksiya



tək funksiya

Misal 1: $\quad f(x) = 4x^3 - \frac{7}{x}$ təkdir, yoxsa cüt?

$f(-x) = 4(-x)^3 - \frac{7}{(-x)} = -4x^3 + \frac{7}{x} = -\left(4x^3 - \frac{7}{x}\right) = -f(x)$

$f(-x) = -f(x)$ olduğuna görə f(x) tək funksiyadır.

Misal 2:

$f(x) = x^2 + \frac{6}{x^4} + 4$ təkdir, yoxsa cüt?

$f(-x) = (-x)^2 + \frac{6}{(-x)^4} + 4 = x^2 + \frac{6}{x^4} + 4 = f(x)$

$f(-x) = f(x)$ olduğuna görə f(x) cüt funksiyadır.

Funksiyaların tərsi

$f(x) = ax + b$ isə $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$

Misal 1:

$f(x) = 3x + 4$ isə $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}$

Misal 2:

$f(x) = x + 4$ isə $f^{-1}(x) = x - 4$

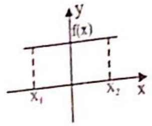
b) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ isə, $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$

Misal 1:

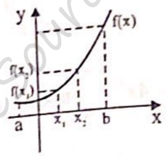
$f(x) = \frac{3x+4}{6x+7}$ isə, $f(x)^{-1} = \frac{-7x+4}{6x-3}$

Misal 2:

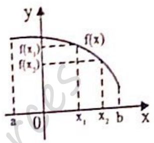
$f(x) = \frac{-4x+6}{3x+8}$ isə, $f^{-1}(x) = \frac{-8x+6}{3x+4}$



Sabit funksiya



$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ***artan funksiya***

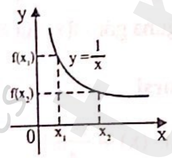


$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ***azalan funksiyadır.***

Misal:

$x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$

$y = \frac{1}{x}$ funksiyası azalandır.



Xətti funksiya

$y = kx + b$ $(k \neq 0;\ k, b \in R)$ şəklində verilən ədədi funksiyaya ***xətti funksiya*** deyilir.

Məsələn, y=2x+3, $y = -\frac{1}{3}x + 4$ və s.

Qeyd: y=kx+b xətti funksiyasında k – bucaq əmsalıdır, b – sərbəst həddir.

Qeyd: mx+ny+c=0 $(m, n, c \in R)$ şəklində verilən funksiyanı y=kx+b kimi yazıb, bucaq əmsalını və sərbəst həddini tapaq:

$mx + ny + c = 0 \Rightarrow ny = -mx - c \Rightarrow$

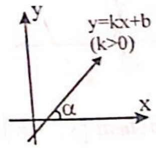
$\Rightarrow y = -\frac{m}{n}x - \frac{c}{n} (k = -\frac{m}{n}; b = -\frac{c}{n}) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = kx + b$

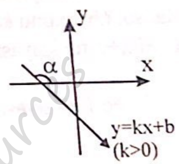
Göründüyü kimi bucaq əmsalı $-\frac{m}{n}$, sərbəst hədd isə $-\frac{c}{n}$-dir.

Xətti funksiyalar üçün asagidaki ***xassələr*** vardır:

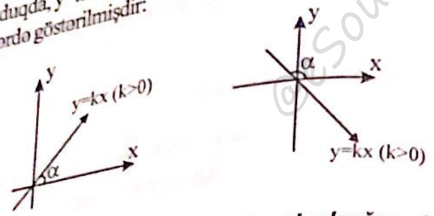
1) Təyin oblastı: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
2) Qiymətlər oblastı: $E(f) = (-\infty; +\infty)$
3) ***k>0*** olduqda, funksiya ***artan***, ***k<0*** olduqda, funksiya ***azalan*** olur.
4) ***k>0*** isə, y=kx+b funksiyasının qrafiki Ox oxunun müsbət istiqaməti ilə iti bucaq əmələ gətirir.



5) ***k<0*** isə, y=kx+b funksiyasının qrafiki Ox oxunun müsbət istiqaməti ilə k... bucaq əmələ gətirir.



6) *b=0* olduqda, y=kx funksiyasının qrafiki ... aşağıdakı şəkillərdə göstərilmişdir:



y=kx funksiyası *tək funksiyadır* və *koordinat başlanğıcından keçir.*

Qeyd: Yuxarıdakı qrafiklərdə bucaq əmsalı üçün $k = tg\alpha$ ödənilir.

Kvadratik funksiya (Parabola)

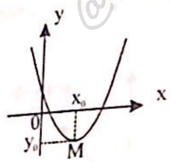
$y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0; a, b, c \in R)$ şəklində verilən ədədi funksiyaya *kvadratik funksiya* deyilir.

$y=ax^2+bx+c$ funksiyasının qrafikinə *parabola* deyilir.

Kvadratik funksiyanın aşağıdakı *xassələri* vardır:

1) Təyin oblasti $R = (-\infty; +\infty)$ həqiqi ədədlər çoxluğudur.

2) Təpə nöqtəsi $M(x_0; y_0)$-in koordinatları $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$ kimi tapılır.



3) Əgər a>0 isə, *qiymətlər oblastı* $[y_0; +\infty)$; əgər a<0 isə, *qiymətlər oblastı* $(-\infty; y_0]$ kimi tapılır.

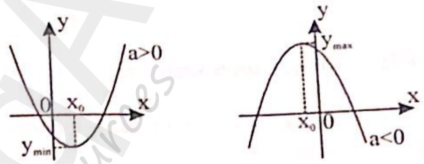
4) *D(diskriminant)>0 isə*, funksiyanın qrafiki *Ox* oxunu *kəsir*; *D=0* olduqda, *Ox* oxuna *toxunur*; *D<0* olduqda isə, *Ox* oxunu *kəsmir*.

5) *a>0, D<0* şərtlərində $y=ax^2+bx+c$ funksiyası x-in bütün həqiqi qiymətlərində həmişə müsbətdir.

6) *a<0, D<0* şərtlərində $y=ax^2+bx+c$ funksiyası x-in bütün həqiqi qiymətlərində həmişə mənfidir.

7) *a>0* olduqda, parabolanın qolları *yuxarı*; *a<0* olduqda isə, *aşağı* olur.

8) *a>0* olduqda, parabola $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nöqtəsində ***minimum***, a<0 olduqda isə, $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nöqtəsində ***maksimum*** qiymət alır.

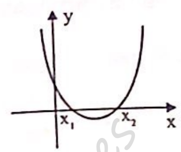


Xüsusi hallar

1. $y = ax^2$ üçün *təpə nöqtəsi* T.N. (0; 0)
2. $y = ax^2 + c$ üçün T.N. (0; c)
3. $y = a(x - r)^2$ üçün T.N. (r; 0)
4. $y = a(x - r)^2 + k$ üçün T.N. (r; k)

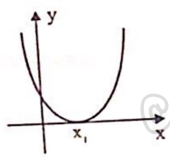
Qrafiki verilən parabolanın tənliyi

1.



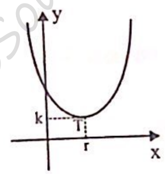
$y = a.(x - x_1)(x - x_2)$

2.



$y = a(x - x_1)^2$

3.



$y = a(x - r)^2 + k$

Misal: Qrafiki şəkildə verilən parabolanın tənliyini tapın.

$x_1 = 2,\ x_2 = 3$ və parabolanın (0; 6) nöqtəsindən keçdiyini nəzərə alsaq,

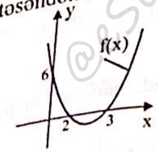
$y = a(x-2)(x-3)$

$6 = a(0-2)(0-3)$

$a = 1$

$y = f(x) = (x-2)(x-3)$

$f(x) = x^2 - 5x + 6$ olar.



Parabola ilə düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti

✓ $y = ax^2 + bx + c$ parabolası ilə $y = mx + n$ düz xəttinin qarşılıqlı vəziyyəti

$ax^2 + bx + c = mx + n$ və ya

$ax^2 + (b-m)x + c - n = 0$ tənliyinin həlli ilə müəyyən edilir.

1) $D < 0$ isə, parabola ilə düz xətt kəsişməzlər.
2) $D = 0$ olarsa, düz xətt parabolaya toxunandır.
3) $D > 0$ olarsa parabola ilə düz xətt iki nöqtədə kəsişirlər.

Misal:
$y = 2x - m$ düz xəttinin $y = x^2 + 6x - 2$ parabolasının toxunanı olması üçün m neçə olmalıdır?

Həlli:

$x^2 + 6x - 2 = 2x - m$

$x^2 + 4x + m - 2 = 0$

$D = 0$ olmalıdır.

$D = 16 - 4(m-2) = 0$

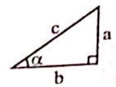
$m = 6$

Triqonometriya

Düzbucaqlı üçbucaqda triqonometrik funksiyalar

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$

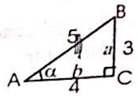
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$



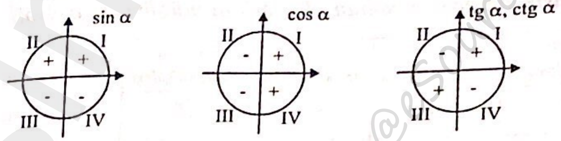
Misal:
Aşağıdakı şəklə əsasən triqonometrik funksiyaların qiymətlərini tapın.

$\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6;\ \cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}\ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$



Triqonometrik funksiyaların işarəsi



Bucaqların radian və dərəcə ölçüləri

Bucaqların radian və dərəcə ölçüləri arasında əlaqə

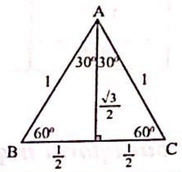
$\alpha = \frac{\alpha^0 \cdot \pi}{180^0};\quad \alpha^0 = \frac{\alpha \cdot 180^0}{\pi}$

α – bucağın radian ölçüsü

α^0 – bucağın dərəcə ölçüsü

✓ $\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

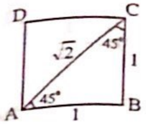


$tg30^\circ = ctg60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

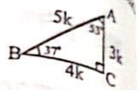
$tg60^\circ = ctg30^\circ = \sqrt{3}$

✓ $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$tg45^\circ = ctg45^\circ = 1$



✓ Düzbucaqlı üçbucaqda 37°-nin qarşıqındakı tərəf 3k, 53°-nin qarşısında tərəf 4k-ya bərabər olur.



Bəzi bucaqların dərəcə və radian ölçülərinin müqayisəli cədvəli

Bucaqların dərəcə ölçüləri	*Bucaqların radian ölçüləri*	*Bucaqların dərəcə ölçüləri*	*Bucaqların radian ölçüləri*
0°	0	210°	$\frac{7\pi}{6}$
30°	$\frac{\pi}{6}$	225°	$\frac{5\pi}{4}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	240°	$\frac{4\pi}{3}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	270°	$\frac{3\pi}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	300°	$\frac{5\pi}{3}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	315°	$\frac{7\pi}{4}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	330°	$\frac{11\pi}{6}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	360°	2π
180°	π		

Bəzi bucaqların triqonometrik funksiyalarının qiymətləri cədvəli

Funksiya	Arqument							
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Triqonometrik funksiyaların dövrü

$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$

$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$

$tg(\alpha + \pi n) = tg\,\alpha$

$ctg(\alpha + \pi n) = ctg\,\alpha$

Triqonometrik funksiyanın qüvvəti verildikdə onun dövrünün təyin edilməsi

$$\left.\begin{matrix}\sin^m(kx+b)\\ \cos^m(kx+b)\end{matrix}\right\} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|k|} \quad \text{(m tək olarsa)}$$

$$\left.\begin{matrix}\sin^m(kx+b)\\ \cos^m(kx+b)\end{matrix}\right\} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|k|} \quad \text{(m cüt olarsa)}$$

$$\left.\begin{matrix}tg^m(kx+b)\\ ctg^m(kx+b)\end{matrix}\right\} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|k|}$$

burada, $m \in N$, $k \in Z$

Misal 1:

$f(x)=tg5x$ dövrünü tapın.

$T = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{5}$

Misal 2:
$f(x)=\cos^3(2x+5)$ dövrünü tapın.

$m=3$, $k=2$ olduğundan, $T=\frac{2\pi}{|k|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

Misal 3:
$f(x)=\sin^3(5x-4)$ isə, funksiyanın ən kiçik müsbət dövrünü tapın.

$T=\frac{2\pi}{|k|}=\frac{2\pi}{5}$

Misal 4:
$f(x)=\cos(6x+8)$ isə, funksiyanın ən kiçik müsbət dövrünü tapın.

$T=\frac{2\pi}{|k|}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

Misal 5:
$f(x)=\operatorname{tg}3x$ isə $f(x)$-in ən kiçik müsbət dövrünü tapın.

$T=\frac{\pi}{|k|}=\frac{\pi}{3}$

Misal 6:
$f(x)=2\cos^3 4x-\sin^2 3x$ funksiyasının ən kiçik müsbət dövrünü tapın.

$2\cos^3 4x$ üçün, $T_1=\frac{2\pi}{|k|}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$-\sin^2 3x$ üçün, $T_2=\frac{\pi}{|k|}=\frac{\pi}{3}$ $\quad ƏKOB(T_1;T_2)=\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)=\pi$

Misal 7:
$f(x)=\sin 9x+\cos^2 6x$ funksiyasının periodunu tapın.

$\sin 9x$ üçün, $T_1=\frac{2\pi}{|k|}=\frac{2\pi}{9}$

$\cos^2 6x$ üçün, $T_2=\frac{\pi}{|k|}=\frac{\pi}{6}$

$ƏKOB(T_1;T_2)=\left(\frac{2\pi}{9};\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{3}$

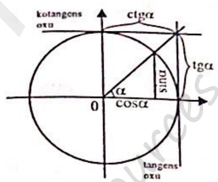
Triqonometrik funksiyaların tək və cütlüyü

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$, $\qquad \operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$

Əsas triqonometrik eyniliklər

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
2. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$
3. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\alpha\neq\pi k$
4. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$; $\alpha\neq\frac{\pi k}{2}$
5. $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$
6. $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$; $\alpha\neq\pi k, k\in Z$

Vahid dairədə bucağın triqonometrik funksiyaları



Funks.	Arqument			
	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Triqonometrik funk...

	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\cos x$	$f(x)=\text{tg}\,x$	$f(x)=\text{ctg}\,x$
Təyin obl. D(y)	R	R	$(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n)$	$(\pi n, \pi+\pi n)$
Qiymət obl. E(y)	$[-1;1]$	$[-1;1]$	R	R
Təklik, cütlük	tək f-dir	cütdür	tək f-dir	tək f-dir
Ən kiçik müs. dövr T	2π	2π	π	π
OX oxu ilə kəs. nöq	$(\pi n;0)$	$(\frac{\pi}{2}+2\pi n;0)$	$(\pi n;0)$	$(\frac{\pi}{2}+\pi n;0)$
OY oxu ilə kəs. nöq	$(0;0)$	$(0;1)$	$(0;0)$	yox
$f(x)>0$	$(2\pi n; \pi+2\pi n)$	$(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n)$	$(\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n)$	$(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n)$
$f(x)<0$	$(-\pi+2\pi n, 2\pi n)$	$(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n)$	$(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \pi n)$	$(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n)$
Artma aralığı	$[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n]$	$[-\pi+2\pi n, 2\pi n]$	$(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n)$	yox
Azalma aralığı	$[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n]$	$[2\pi n; \pi+2\pi n]$	yox	$(\pi n; \pi+\pi n)$
Minimum nöq	$-\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$\pi+2\pi n$	yox	yox
Funksiyanın min.	-1	1	yox	yox
Maksimum nöq	$\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$2\pi n$	yox	yox
Funksiyanın max	1	1	yox	yox

Toplama düsturları

1. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
3. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\beta$
4. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\beta$

Misal:

$\sin75^0 = \sin(45^0+30^0) = \sin45^0\cos30^0+\sin30^0\cos45^0=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin75^0 = \cos15^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos75^0=\cos(45^0+30^0)=\cos45^0\cos30^0-\sin45^0\sin30^0=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos75^0 = \sin15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5. $\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}$

6. $\text{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}{1+\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}$
7. $\text{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{ctg}\alpha\cdot\text{ctg}\beta-1}{\text{ctg}\beta+\text{ctg}\alpha}$
8. $\text{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\text{ctg}\alpha\cdot\text{ctg}\beta+1}{\text{ctg}\beta-\text{ctg}\alpha}$

İkiqat, üçqat və dördqat arqument düsturları

1. $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2. $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
3. $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$
4. $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$
5. $\sin4\alpha=8\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin\alpha$
6. $\cos4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$

1. $\text{tg}2\alpha=\frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$; $\text{ctg}2\alpha=\frac{\text{ctg}^2\alpha-1}{2\text{ctg}\alpha}$
2. $\text{tg}3\alpha=\frac{3\text{tg}\alpha-\text{tg}^3\alpha}{1-3\text{tg}^2\alpha}$; $\text{ctg}3\alpha=\frac{\text{ctg}^3\alpha-3\text{ctg}\alpha}{3\text{ctg}^2\alpha-1}$
3. $\text{tg}4\alpha=\frac{4\text{tg}\alpha-4\text{tg}^3\alpha}{1-6\text{tg}^2\alpha+\text{tg}^4\alpha}$
4. $\text{ctg}4\alpha=\frac{\text{ctg}^4\alpha-6\text{ctg}^2\alpha+1}{4\text{ctg}^3\alpha-4\text{ctg}\alpha}$

Yarım arqumentin triqonometrik funksiyaları

1. $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
2. $\text{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
3. $\text{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Triqonometrik funksiyaların cəm... düsturları

1. $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$

2. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

3. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$

Misal:

$$\frac{\cos 105 + \cos 15}{\sin 105 + \sin 15} = \frac{2\cos\frac{105+15}{2}\cos\frac{105-15}{2}}{2\sin\frac{105+15}{2}\cos\frac{105-15}{2}} =$$

$$= \frac{\cos 60 \cdot \cos 45}{\sin 60 \cdot \cos 45} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$

5. $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha + \varphi)$

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$

6. $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

7. $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

8. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}$

9. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}$

10. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -2\operatorname{ctg}2\alpha$

11. $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

12. $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$

13. $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$

14. $1 \pm \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right)}{\cos\alpha}$

15. $1 - \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; $1 - \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$

Dərəcəni aşağı salma düsturları

1. $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

2. $\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$

3. $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

4. $\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$

5. $\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3)$

6. $\cos^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3)$

Triqonometrik fuksiyaların hasilinin cəmə çevirmə düsturları

1. $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

2. $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

3. $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

Misal 1:

$$\cos105^0\cdot\cos15^0=\cos(90^0+15^0)\cdot\cos15^0=-\sin15^0\cdot\cos15^0=$$

$$=-\frac{1}{2}\sin30^0=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

Misal 2:

$$\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{12}-\cos\frac{4\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

5. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$

6. $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$

7. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

8. $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

Triqonometrik funksiyaların yarım bucağın tangensi ilə ifadəsi

1. $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; 2. $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

3. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; 4. $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

Tərs triqonometrik funksiyalar daxil olan əsas münasibətlər

$\sin(\arcsin x)=x,\qquad x\in[-1;1]$

$\cos(\arccos x)=x,\qquad x\in[-1;1]$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x,\qquad x\in R$

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x,\qquad x\in R$

$\arcsin(\sin x)=x,\qquad x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\arccos(\cos x)=x,\qquad x\in[0;\pi]$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x,\qquad x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)=x,\qquad x\in(0;\pi)$

$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\qquad x\in(0;1)$

$\operatorname{arctg}x=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\qquad x\in(0;+\infty)$

$\operatorname{arcctg}x=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\qquad x\in(0;+\infty)$

$\arcsin(-x)=-\arcsin x;\ \arccos(-x)=\pi-\arccos x$

$\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x;\quad \operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x$

$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$

$\arcsin x-\arcsin y=\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right)$

$\arccos x+\arccos y=\arccos\left(xy-\sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1-x^2}\right)$

$\arccos x-\arccos y=\arccos\left(xy+\sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1-x^2}\right)$

$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$

$\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$

Ən sadə triqonometrik tənliklərin həlli

$\sin x=a\Leftrightarrow x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\qquad |a|\le1,\ k\in Z$

$\cos x=a\Leftrightarrow x=\pm\arccos a+2\pi k,\qquad |a|\le1,\ k\in Z$

$\operatorname{tg} x=a\Leftrightarrow x=\operatorname{arctg} a+\pi k,\qquad a\in R,\ k\in Z$

$\operatorname{ctg} x=a\Leftrightarrow x=\operatorname{arcctg} a+\pi k,\qquad a\in R,\ k\in Z$

Xüsusi hallar

a	sin x = a	cos x = a
		$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$
0	$x=\pi k$	
		$x=2\pi n$
1	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$	
		$x=\pi+2\pi n$
−1	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$	
$\frac{1}{2}$	$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$	$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$
$-\frac{1}{2}$	$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$	$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$	$x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k$	$x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$	$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k$	$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$

a	tgx = a	ctgx
0	$x=\pi k$	$x=\frac{\pi}{2}$
1	$x=\frac{\pi}{4}+\pi k$	$x=\frac{\pi}{4}$
−1	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$	$x=\frac{3\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	$x=\frac{\pi}{3}+\pi k$	$x=\frac{\pi}{6}$
$-\sqrt{3}$	$x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$	$x=\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x=\frac{\pi}{6}+\pi k$	$x=\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$	$x=\frac{2\pi}{3}$

Ən sadə triqonometrik bərabərsizliklər

$\sin x>a \Rightarrow x\in(\arcsin a+2\pi n;\ \pi-\arcsin a+2\pi n)$, $(|a|<1)$

$\sin x<a \Rightarrow x\in(-\pi-\arcsin a+2\pi n;\ \arcsin a+2\pi n)$, $(|a|<1)$

$\cos x>a \Rightarrow x\in(-\arccos a+2\pi n;\ \arccos a+2\pi n)$, $(|a|<1)$

$\cos x<a \Rightarrow x\in(\arccos a+2\pi n;\ 2\pi-\arccos a+2\pi n)$, $(|a|<1)$

$\text{tg}\, x>a \Rightarrow x\in(\text{arctg}\, a+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n)$, $(a\in R)$

$\text{tg}\, x<a \Rightarrow x\in(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \text{arctg}\, a+\pi n)$, $(a\in R)$

$\text{ctg}\, x>a \Rightarrow x\in(\pi n;\ \text{arcctg}\, a+\pi n)$, $(a\in R)$

$\text{ctg}\, x<a \Rightarrow x\in(\text{arcctg}\, a+\pi n;\ \pi+\pi n)$, $(a\in R)$

Tərs triqonometrik tənliklər

$\arcsin x=a \Rightarrow x=\sin a$, $(|a|\le\frac{\pi}{2})$ $\arccos x=a \Rightarrow x=\cos a$, $(0\le a\le\pi)$

$\text{arctg}\, x=a \Rightarrow x=\text{tg}\, a$, $(|a|<\frac{\pi}{2})$ $\text{arcctg}\, x=a \Rightarrow x=\text{ctg}\, a$, $(0<a<\pi)$

Tərs triqonometrik bərabərsizliklər

$\arcsin x>a \Rightarrow x\in(\sin a;\ 1]$, $(|a|<\frac{\pi}{2})$

$\arcsin x<a \Rightarrow x\in[-1;\ \sin a)$, $(-\frac{\pi}{2}<a\le\frac{\pi}{2})$

$\arccos x>a \Rightarrow x\in[-1;\ \cos a)$, $(0<a<\pi)$

$\arccos x<a \Rightarrow x\in(\cos a;\ 1]$, $(0<a\le\pi)$

$\text{arctg}\, x>a \Rightarrow x\in(\text{tg}\, a;\ +\infty)$, $(|a|<\frac{\pi}{2})$

$\text{arctg}\, x<a \Rightarrow x\in(-\infty;\ \text{tg}\, a)$, $(|a|<\frac{\pi}{2})$

$\text{arcctg}\, x>a \Rightarrow x\in(-\infty;\ \text{ctg}\, a)$, $(0<a<\pi)$

$\text{arcctg}\, x<a \Rightarrow x\in(\text{ctg}\, a;\ +\infty)$, $(0<a<\pi)$

Kompleks ədədlər

Tərif: a+b*i* ($i^2=-1$) şəklində verilən kompleks ədədə ***cəbri şəkildə verilmiş kompleks ədəd*** deyilir.

z=a+b*i* kompleks ədədində a-ya z-in ***həqiqi hissəsi***, b-yə z-in ***xəyali hissəsi*** deyilir və aşağıdakı kimi göstərilir:

$$Re(z)=a,\ Im(z)=b$$

Tərif: a-b*i* kompleks ədədinə z=a+b*i* kompleks ədədinin qoşması deyilir və $\bar{z}=a-bi$ kimi işarə edilir.

Tərifdən alınır ki, **a+b*i*** kompleks ədədi də **a-b*i*** kompleks ədədinin qoşmasıdır. Ona görə də $z=a+bi$ və $\bar{z}=a-bi$ ədədlərinə ***qarşılıqlı qoşma kompleks ədədlər*** deyilir.

Tərif: **0+b*i*** şəklində olan ədədə ***sırf xəyali ədəd*** deyilir.

"0" ədədi yeganə kompleks ədəddir ki, ($0+0\cdot i$) həm ***həqiqi***, həm də ***sırf xəyali*** ədəddir.

Qeyd: Kompleks ədədlər üzərində toplama və vurma əməllərinin xassələri həqiqi ədədlərdə olduğu kimidir.

Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlərin vurulması, bölünməsi, qüvvətə yüksəldilməsi

1. ***Vurulması***

$z_1=r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$ və $z_2=r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)$ kompleks ədədlərinin hasili $z_1\cdot z_2=r_1r_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$ kimi tapılacaq.

2. ***Bölünməsi***

$z_1=r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$ kompleks ədədinin $z_2=r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)$ kompleks ədədinə nisbəti aşağıdakı kimi tapılacaq:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1-\alpha_2)+i\sin(\alpha_1-\alpha_2))$$

3. $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $z\neq 0$ kompleks ədədinin n-ci ($n\in Z$) dərəcədən qüvvəti $z^n=[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n=r^n(\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha))$ düsturu ilə tapılacaq.

Xüsusi halda r = 1 olduqda, α bucağı və $n\in Z$ üçün $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)$ düsturu doğrudur. Bu düstura ***Muavr düsturu*** deyilir.

Üstlü və loqarifmik funksiyalar

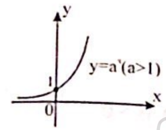
Üstlü funksiyalar

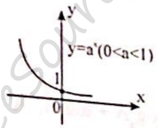
Tərif: a vahiddən fərqli hər hansi müsbət ədəd olmaqla $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ düsturu ilə verilən ədədi funksiyaya ***üstlü funksiya*** deyilir.

Məsələn, y=2x, və s.

Üstlü funksiyanın aşağıdakı ***xassələri*** vardır:

1) Təyin oblastı: $D(f)=R=(-\infty;+\infty)$
2) Qiymətlər oblastı: $E(f)=(0;+\infty)$
3) Üstlü funksiya nə ***tək***, nə də ***cüt*** funksiyadır.
4) Üstlü funksiya ***dövrü*** deyil.
5) **a>1** və **x>0** olduqda, **ax >1**;
0<a<1 və **x<0** olduqda, **ax >1**;
a>1 və **x<0** olduqda, **0< ax <1**;
0<a<1 və **x>0** olduqda, **0< ax<1** olur.
6) **a>1** üçün **y=ax** funksiyası monoton artan, **0<a<1** olduqda isə monoton azalan funksiyadır. Ona görə də onun ekstremum nöqtələri yoxdur.

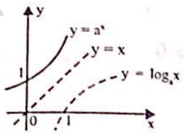




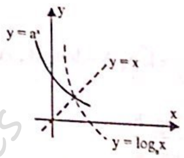
Loqarifmik funksiyalar

$a\in R^+-\{1\}$ olarsa, $f(x)=\log_a x$ funksiyasına loqarifmik funksiya deyilir.

1) $\log_a 1=0$
2) $\log_a a=1$; $\lg 10=1$; $\ln e=1$
3) $a>1$ isə, log funksiyası artan funksiyadır.
$0<x_1\leq x_2$ isə, $\log_a x_1\leq\log_a x_2$ dır.
$0<a<1$ olarsa, log funksiyası azalan funksiyadır.
Yəni $0<x_1\leq x_2$ isə, $\log_a x_1\geq\log_a x_2$



a > 1

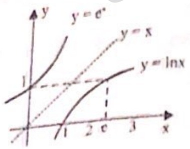


0 < a < 1

4) $\log_{10} x = \log x = \lg x$

5) Natural loqarifma $\log_e x$

$y = \log_e x = \ln x$



6) $\log_a x = y$ isə, $x = a^y$

7) $f(x) = \log_a x$ isə, $f^{-1}(x) = a^x$

$y = \log_a x$ funksiyasının tərsi olan funksiya $y = a^x$-dır.

8) Mənfi ədədlərin loqarifması yoxdur.

a) $a > 0$ isə, $\log_a 0 = -\infty$

b) $0 < a < 1$ isə, $\log_a 0 = +\infty$

9) $a^{\log_a b} = b$

10) $\log_a a^x = x$

11) $\log_a(A \cdot B) = \log_a A + \log_a B;\ A > 0, B > 0$

$\log_a \underbrace{(A.A.A...A)}_{n\ \text{dəfə}} = \underbrace{\log_a A + \log_a A + \log_a A + ... + \log_a A}_{\log_a A\ \ n\text{ - dəfə}}$

12) $\log_a A^n = n \log_a A;\ A > 0$

$\log_a \sqrt[n]{A} = \log_a A^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a A$

$\log_a \sqrt[m]{x^p} = \frac{p}{m} \log_a x$

13) $\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B;\ A > 0, B > 0$

14) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

15) $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

* $\log_a x = \frac{\log_x x}{\log_x a} = \frac{1}{\log_x a}$

* $\ln 2 = \frac{1}{\log_2 e}$

16) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

17) $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

18) $\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a a = \frac{m}{n}$

19) $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$

Misal:

* $\lg 6 = \lg 2 \cdot 3 = \lg 2 + \lg 3$

* $\lg_3 30 = \lg_3(10 \cdot 3) = \lg_3 3 + \lg_3 10 = 1 + \log_3 10$

* $\ln(5e^3) = \ln 5 + \ln e^3 = \ln 5 + 3\ln e = 3 + \ln 5$

* $\lg 4 + \lg 25 = \lg(4 \cdot 25) = \lg 100 = 2$

* $\lg 2 = p$ və $\lg 3 = q$ isə, $\lg 225 = ?$

$\lg 225 = \lg 15^2 = 2\lg 15 = 2(\lg 3 + \lg 5) = 2(\lg 3 + \lg \frac{10}{2}) =$

$= 2(\lg 3 + \lg 10 - \lg 2) = 2(q + 1 - p)$

* $\lg \frac{1}{2} + \lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{4} + ... + \lg \frac{99}{100} = \lg\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot .... \cdot \frac{99}{100}\right) =$

$= \lg \frac{1}{100} = \lg 10^{-2} = -2$

Üstlü və loqarifmik tənliklər

Üstlü tənliklər

Üstlü tənliklərin aşağıdakı növləri vardır:

1. ***Əsasları bərabər olan üstlü tənliklər***

Bu tənliklər $a^{g(x)} = a^{f(x)} (a > 0, a \neq 1)$ şəklində verilir. Burada g(x) və f(x) ixtiy… funksiyalardır.

Belə üstlü tənliyin həlli onunla eynigüclü olan g(x)=f(x) tənliyinə gətirilir.

2. $a^{f(x)} = b (a > 0, b > 0, a \neq 1)$ ***şəklində verilən üstlü tənliklər***

Belə üstlü tənliklərin həlli $f(x)=\log_a b$ kimi tapılır. Burada f(x) ixtiyari funksiyadı…

Qeyd: $a^{f(x)} = b (a > 0, a \neq 1)$ tənliyində *b<0* isə, bu tənliyin ***həlli yoxdur.***

3. ***Yeni dəyişən daxil etməklə həll edilən tənliklər***

Bu tənlikləri $m \cdot a^{2f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + k = 0$ şəklində göstərə bilərik.

Belə tənliklərdə $a^{f(x)} = t$ əvəzləməsi aparıb, tənliyi kvadrat tənliyə gətirirlər, ya… $m \cdot t^2 + n \cdot t + k = 0$

Bu kvadrat tənliyin köklərini əvəzləmədə nəzərə alib, üstlü tənliyin kökləri… tapirlar.

Loqarifmik tənliklər

Loqarifmik tənliklərin aşağıdakı növləri vardır:

1. ***Əsasları bərabər olan loqarifmik tənliklər***

Bu tənliklər $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ şəklində verilir. Burada f(x) və g(x) ixtiyari funksiyalardır. Belə loqarifmik tənliyin həlli onunla eynigüclü olan sisteminin həllinə gətiril…

Qeyd: Bəzən loqarifmik tənliklərdə verilmiş funksiyaların təyin oblastlarını tapmada… da, tənliyin köklərini təyin etmək olur. Bunun üçün alınmış kökləri aparıb loqarifmik… tənlikdə yerinə qoyub yoxlamaq lazımdır.

2. $\log_a f(x) = b$ $(a > 0, a \neq 1, b \in R)$ ***şəklində verilən loqarifmik tənliklər***

Belə loqarifmik tənliklərin həlli $f(x) = a^b$ tənliyindən tapılır. Burada f(x) ixtiyari funksiyadır.

Üstlü və loqarifmik bəbabərsizliklər

Üstlü bərabərsizliklər

Tərif: Dəyişəni qüvvət üstündə olan bərabərsizliyə ***üstlü bərabərsizlik*** deyilir.

Məsələn: $2^x > 3$; $3^{x^2-1} \le 1$ və s.

Üstlü bərabərsizliklərin aşağıdakı ***növləri*** vardır:

1. ***Əsasları bərabər olan bərabərsizliklər***

Bu bərabərsizliklər aşağıdakı kimi verilə bilər:

$a^{f(x)} > a^{g(x)}, a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$, $\quad a^{f(x)} < a^{g(x)}, a^{f(x)} \le a^{g(x)}$

Bu bərabərsizliklərdə $a > 0, a \neq 1$ şərtləri ödənilir.

Burada f(x) və g(x) ixtiyari funksiyalardır.

a>1 və 0<a<1 hallarında bu bərabərsizliklərin həllərini nəzərdən keçirək:

$a^{f(x)} > a^{g(x)} (0 < a < 1) \Rightarrow f(x) < g(x)$

$a^{f(x)} > a^{g(x)} (a > 1) \Rightarrow f(x) > g(x)$

$a^{f(x)} \ge a^{g(x)} (0 < a < 1) \Rightarrow f(x) \le g(x)$

$a^{f(x)} \ge a^{g(x)} (a > 1) \Rightarrow f(x) \ge g(x)$

$a^{f(x)} < a^{g(x)} (0 < a < 1) \Rightarrow f(x) > g(x)$

$a^{f(x)} < a^{g(x)} (a > 1) \Rightarrow f(x) < g(x)$

$a^{f(x)} \le a^{g(x)} (0 < a < 1) \Rightarrow f(x) \ge g(x)$

$a^{f(x)} \le a^{g(x)} (a > 1) \Rightarrow f(x) \le g(x)$

2. $a^{f(x)} > b (\ge b, < b, \le b), (a > 0, a \neq 1, b > 0)$ ***şəklində verilən üstlü bərabərsizliklər***

$a > 1$ və $0 < a < 1$ şərtlərində bu bərabərsizliklərin həllərini nəzərdən keçirək:

$a^{f(x)} > b (a > 1) \Rightarrow f(x) > \log_a b$

$a^{f(x)} > b (0 < a < 1) \Rightarrow f(x) < \log_a b$

$a^{f(x)} \ge b (a > 1) \Rightarrow f(x) \ge \log_a b$

$a^{f(x)} \ge b (0 < a < 1) \Rightarrow f(x) \le \log_a b$

$a^{f(x)} < b (a > 1) \Rightarrow f(x) < \log_a b$

$a^{f(x)} < b (0 < a < 1) \Rightarrow f(x) > \log_a b$

$a^{f(x)} \le b (a > 1) \Rightarrow f(x) \le \log_a b$

$a^{f(x)} \le b (0 < a < 1) \Rightarrow f(x) \ge \log_a b$

Loqarifmik bərabərsizliklər

Tərif: Dəyişəni loqarifm işarəsi altında olan bərabərsizliklərə **loqarif** ***bərabərsizliklər*** deyilir.

Loqarifmik bərabərsizliklərin aşağıdakı ***növləri*** vardır:

1. ***Əsasları bərabər olan loqarifmik bərabərsizliklər***

Bu bərabərsizliklər aşağıdakı kimi verilə bilər:

$\log_a f(x) > \log_a g(x), \log_a f(x) \geq \log_a g(x),$

$\log_a f(x) < \log_a g(x), \log_a f(x) \leq \log_a g(x)$

Bu bərabərsizliklərdə $a > 0, a \neq 1$ şərtləri ödənilir. Burada $f(x)$ və $g(x)$ ixtiy funksiyalardır. Bu bərabərsizliklərin hər birinin həllini $a > 1$ və $0 < a < 1$ hallar nəzərdən keçirək:

- $\log_a f(x) > \log_a g(x), (0 < a < 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

- $\log_a f(x) > \log_a g(x), (a > 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

- $\log_a f(x) \geq \log_a g(x), (0 < a < 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

- $\log_a f(x) \geq \log_a g(x), (a > 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

- $\log_a f(x) < \log_a g(x), (0 < a < 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

- $\log_a f(x) < \log_a g(x), (a > 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

- $\log_a f(x) \leq \log_a g(x), (0 < a < 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

- $\log_a f(x) \leq \log_a g(x), (a > 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

2. $\log_a f(x) > b (\geq b, < b, \leq b), (a > 0, a \neq 1)$ ***şəklində verilən bərabərsizliklər***

$a>1$ və $0<a<1$ şərtlərində bu bərabərsizliklərin həllərini nəzərdən keçirək:

- $\log_a f(x) > b, (0 < a < 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$

- $\log_a f(x) > b, (a > 1) \Rightarrow f(x) > a^b$

- $\log_a f(x) \geq b, (0 < a < 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$

- $\log_a f(x) \geq b, (a > 1) \Rightarrow f(x) \geq a^b$

- $\log_a f(x) < b, (0 < a < 1) \Rightarrow f(x) > a^b$

- $\log_a f(x) < b, (a > 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$

- $\log_a f(x) \leq b, (0 < a < 1) \Rightarrow f(x) \geq a^b$

- $\log_a f(x) \leq b, (a > 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ və $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=b$ isə,

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm q(x))=a\pm b$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ və $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=b$ isə,

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot q(x)=a\cdot b$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{q(x)}=\dfrac{a}{b},\ (b\neq 0)$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{p}{x}\right)^{qx}=e^{pq}$

$\boxed{e\approx 2{,}718}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{cx}}=e^{\frac{ab}{c}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin px}{qx}=\dfrac{p}{q}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}px}{qx}=\dfrac{p}{q}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin px}{\sin qx}=\dfrac{p}{q}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}px}{\operatorname{tg}qx}=\dfrac{p}{q}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin px}{\operatorname{tg}qx}=\dfrac{p}{q}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}px}{\sin qx}=\dfrac{p}{q}$

16. $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|,\ (a>0)$$

17. Loptal qayda $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$ və ya $\dfrac{\infty}{\infty}$ (qeyri-müəyyənlik) olarsa, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Misal:

✓ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg}3x}=\dfrac{5}{3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{7x}=\dfrac{4}{7}$

✓ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(6x-18)}{4x-12}=\dfrac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x^2-9)}{\sin(x-3)}=6$

✓ $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-4x+6)=21$; $\lim\limits_{x\to -2}(2x-x^3)=4$

$\dfrac{0}{0}$ ***və*** $\dfrac{\infty}{\infty}$ ***qeyri-müəyyənlik halları üçün Lopital qaydası***

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ limitinin qiyməti $\dfrac{0}{0}$ və ya $\dfrac{\infty}{\infty}$ olarsa, Lopital qaydasından aşağıdakı kimi istifadə edirlər:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Yəni surətin və məxrəcin ayrı-ayrılıqda törəməsi alınır. Əgər yenə də qeyri-müəyyənlik halı alınarsa, bu proses davam etdirilir, yəni

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\ldots$$

Proses o vaxta qədər davam etdirilir ki, qeyri-müəyyənlik halı alınmasın.

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ ifadəsinə $f(x)$-funksiyasının x_0- nöqtəsində törəmə deyilir.

a sabit bir ədəd olarsa, y=a funksiyasının törəməsi $y' = 0$ olar.

Qeyd: Sabiti törəmədən kənara çıxarmaq olar.

Məsələn, $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $(c \in R)$

Sadə funksiyaların törəməsi ilə bağlı aşağıdakı ***əsas düsturlar*** vardır:

1) $x' = 1$
2) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(n \in R)$
3) $(\sin x)' = \cos x$
4) $(\cos x)' = -\sin x$
5) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
6) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
7) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $(a > 0, a \neq 1)$
8) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
9) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(a > 0, a \neq 1)$
10) $(e^x)' = e^x$
11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
15) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
16) $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
17) $y = \sqrt[n]{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

Misal:

* $y = \sqrt{x^2+2x-4}$ isə,

$$y' = \frac{(x^2+2x-4)'}{2\sqrt{x^2+2x-4}} = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-4}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

$$y' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}} \Rightarrow y' = \frac{x+1}{y}$$

Triqonometrik funksiyaların törəməsi

1. $F(x) = \sin x \Rightarrow F'(x) = \cos x$
2. $F(x) = \sin u \Rightarrow F'(x) = u' \cdot \cos u$ burada $u = f(x)$ -dir.
3. $F(x) = \sin^n x \Rightarrow F'(x) = n \cdot \sin^{n-1} x \cdot \cos x$
4. $F(x) = \cos x \Rightarrow F'(x) = -\sin x$
5. $F(x) = \cos u \Rightarrow F'(x) = -u' \cdot \sin u$
6. $F(x) = \cos^n x \Rightarrow F'(x) = -n \cdot \cos^{n-1} \cdot \sin x$

$y = \sin(5x+9)$ isə, $y' = 5\cos(5x+9)$

$y = \sin^2 3x$ isə, $y' = ((\sin 3x)^2)'$

$y' = 6\sin 3x \cdot \cos 3x$

$y' = 3\sin 6x$

Misal:

$y = \sin x$ isə, $y' = \cos x$

$y = \sin(x^2+x)$ isə, $y' = \cos(x^2+x) \cdot (2x+1)$

$y=\sin(\sin x)$ isə, $y'=\cos(\sin x)\cdot\cos x$

$y=\cos(x+x^3)$ isə, $y'=-\sin(x+x^3)\cdot(1+3x^2)$

$y=\cos(\sin x)$ isə, $y'=-\sin(\sin x)\cdot\cos x$

7. $F(x)=\text{tg}x \Rightarrow F'(x)=1+\text{tg}^2x=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$
8. $F(x)=\text{tg}u$ olarsa, $\Rightarrow F'(x)=(1+\text{tg}^2u)\cdot u'=\dfrac{u'}{\cos^2 u'}$
9. $F(x)=\text{ctg}x \quad \Rightarrow F(x)=-(1+\text{ctg}^2x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}-\text{cosec}^2x$
10. $F(x)=\text{ctg}u$ olarsa,

$F'(x)=-u'\cdot(1+\text{ctg}^2u)=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

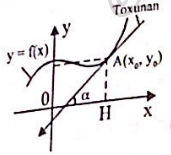
Misal:

$y=\text{tg}2x$ olarsa, $y'=(1+\text{tg}^2 2x)\cdot 2$ və ya $y'=\dfrac{2}{\cos^2 2x}$

$y=\text{tg}^2x$ olarsa, $y'=2\text{tg}x\cdot(1+\text{tg}^2x)$ və ya $y'=\dfrac{2\text{tg}x}{\cos^2 x}$

Törəmənin həndəsi mənası toxunanın bucaq əmsalıdır.

$y=f(x)$ funksiya üzərində $A(x_0, y_0)$ nöqtəsində çəkilən toxunanın bucaq əmsalı funksiyanın bu nöqtədəki törəməsinə bərabərdir.



$f(x_1)$ funksiyasının qrafikinə aid $A(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən toxunanın bucaq əmsalı m olsun. Bucaq əmsalı eyni zamanda tgα - ya bərabərdir.

Toxunanın bucaq əmsalı $m=\text{tg}\alpha=f'(x_0)$

Törəmənin fiziki mənası sürətdir. Yəni

$$\vartheta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=S'(t_0)$$

Buradan görünür ki, düzxətli hərəkətin sürəti yolun zamana görə törəməsinə bərabərdir.

İki funksiyanın cəminin, fərqinin, hasilinin və qismətinin törəməsi

$u=u(x)$ və $v=v(x)$ funksiyaları x nöqtəsində diferensiallanandırsa, onların cəmi, fərqi, hasili və nisbəti də (məxrəc həmin nöqtədə sıfırdan fərqli olmaqla) bu nöqtədə diferensiallanandırlar. Həmin törəmələri aşağıdakı düsturlarla hesablamaq olar:

- ✔ $(u+v)'=u'+v'$
- ✔ $(u-v)'=u'-v'$
- ✔ $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
- ✔ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}, (v\neq 0)$

Mürəkkəb funksiyanın törəməsi

Mürəkkəb funksiyanı $y=f(g(x))$ şəklində göstərsək, bu funksiyanın nöqtədə törəməsi haqqında aşağıdakı teoremi yaza bilərik:

Teorem: $z=g(x)$ funksiyasinin x_0 nöqtəsində, $y=f(z)$ funksiyasının $z_0=g(x_0)$ nöqtəsində törəməsi varsa, $y=f(g(x))$ mürəkkəb funksiyasının da x_0 nöqtəsində törəməsi olar və bu törəmə $y'(x_0)=f'(z_0)\cdot g'(x_0)$ düsturu ilə hesablanır.

Toxunanın tənliyi $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ *və ya* $y-y_0=m(x-x_0)$

Misal:

$f(x)=x^2-4x+2$ funksiyasına $A(3;-1)$ nöqtəsində çəkilən toxunanın tənliyini tapın.

Həlli:

$m=\text{tg}\alpha=f'(x_0)\ =2x-4=2x_0-4=2.3-4=2$

$A\quad(3;\ -1)$

$\quad\ \ x_0\ \ y_0$

$m=\text{tg}\ \alpha=2 \qquad y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

$y-y_0=m(x-x_0)$

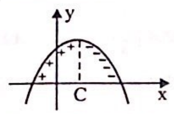
$y-(-1)=2(x-3)$

$y+1=2x-6$

$y=2x-7$

Ekstremum nöqtələrinin təhlili

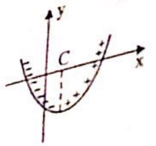
1. $f(x)$ funksiyası $x=c$ nöqtəsinin solunda artan, sağında isə azalan isə $x=c$, $f(x)$ - in bir maksimum nöqtəsidir.



	-∞	c	+∞
f'(x)	+	⌽	-
f(x)	↗	f(c)	↘

(c, f(c)) maksimum nöqtəsidir.

2. $f(x)$ funksiyası $x = c$ nöqtəsinin solunda azalan, sağında isə artan isə
nöqtəsi $f(x)$-in minimum nöqtəsidir.



	$-\infty$	c	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$

$(c, f(c))$ minimum nöqtəsidir.

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_1)$ max	$\searrow$	$f(x_2)$ min	$\nearrow$

$(x_1, f(x_1))$ maksimum nöqtəsidir.
$(x_2, f(x_2))$ minimum nöqtəsidir.

Misal:
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ funksiyanın ekstremum (max, min) nöqtələrini tapın.

Həlli: $f'(x) = 3x^2 - 6x$,
$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0$
$x_1 = 0, \; x_2 = 2$

x	$-\infty$	0		2	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(0) = 5$, $(0; 5)$ max nöqtəsi
$f(2) = 1$, $(2; 1)$ min nöqtəsi

Artan və Azalan funksiyalar

1. $f'(x) < 0$ isə $f(x)$ funksiyası azalan funksiyadır.
2. $f'(x) > 0$ isə $f(x)$ funksiyası artan funksiyadır.
3. $f'(x) = 0$ isə $f(x)$ sabit funksiyadır.

Misal:
$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x - 4$
$f'(x) = 6x^2 + 12x - 18 = 0$
$x^2 + 2x - 3 = 0$
$(x + 3)(x - 1) = 0$
$x_1 = -3 \qquad x_2 = 1$

x		-3		1	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	Artan $\nearrow$	max	Azalan $\searrow$	min	Artan $\nearrow$

$-\infty < x < -3$ üçün $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ artan funksiyadır.
$-3 < x < 1$ üçün $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ azalan funksiyadır.
$1 < x < +\infty$ üçün $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ artandır.
Ekstremum nöqtələrinin apsisi -3 və 1-dir.
$x = -3$ üçün $f(x) = 2(-3)^3 + 6(-3)^2 - 18(-3) - 4$
$f(x) = 50$
$x_2 = 1$ üçün. $f(x) = 2.1^3 + 6.1^2 - 18.1 - 4$
$f(x) = -14$
$(-3; 50)$ nöqtəsi maksimum
$(1; -14)$ nöqtəsi minimum nöqtələridir.

Misal:
$f(x) = x^2 - 3x + 2$ funksiyasının artan və azalan aralığını tapın.

Həlli:
$f'(x) = 2x - 3$
$f'(x) = 2x - 3 = 0$

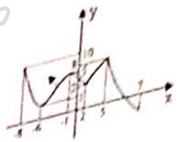
$x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Bu halda funksiya $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ azalan $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ artan funksiyadır.

* Bir funksiyanın birdən artıq maksimum və minimum nöqtələri ola bilər.

- Maksimum və minimum qiymətlərinə qısaca funksiyanın ekstremumu deyilir.



f(x) funksiyasının [-8; 7] intervalında

- (-6; 1) və (2; 2) nöqtələri minimum nöqtələridir.
- (-1; 5) və (5; 8) nöqtələri maksimum nöqtələridir.

Üstlü funksiyaların törəməsi

1. $y = e^x$ olarsa, $y' = e^x$
2. $y = e^u$ olarsa, $y' = u'.e^u$

Misal:

- ✔ $y = e^{x^2+2x}$ isə, $y' = (x^2+2x)'e^{x^2+2x} = (2x+2)e^{x^2+2x}$
- ✔ $y = e^{3x+2}$ isə, $y' = (3x+2)'e^{3x+2}$
  $y' = 3e^{3x+2}$
- ✔ $y = e^{tgx}$ isə, $y' = (tgx)'\cdot e^{tgx}$
  $y' = e^{tgx}\cdot(1+tg^2x) = \dfrac{e^{tgx}}{\cos^2 x}$

3. $y = a^x$ olarsa, $y' = a^x.\ln a$
4. $y = a^u$ olarsa, $y' = u'.a^u.\ln a$

Misal:

- ✔ $y = 3^{x^2}$ isə, $y' = (x^2)'\cdot 3^{x^2}\cdot\ln 3$
  $y' = 2x\cdot 3^{x^2}\cdot\ln 3$
- ✔ $y = 2^{\sin x}$ isə $y' = (\sin x)'\cdot 2^{\sin x}\cdot\ln 2$
  $y' = \cos x\cdot 2^{\sin x}\ln 2$

- ✔ $y = \dfrac{3^x}{5^x}$ isə, $y = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ $y' = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x\cdot\ln\dfrac{3}{5}$
- ✔ $y = 3^x + x^3$ isə,
  $y' = 3^x.\ln 3 + 3x^2$

Loqarifmik funksiyaların törəməsi

1. $y = \ln x$ olarsa, $y' = \dfrac{1}{x}$
2. $y = \ln u$ olarsa, $y' = \dfrac{u'}{u}$, [u=f(x)]

Misal:

- ✔ $y = \ln(\cos x)$ isə, $y' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \dfrac{-\sin x}{\cos x}$
- ✔ $y = \ln(x^2 - 5x + 1)$ isə,
  $y' = \dfrac{(x^2-5x+1)'}{x^2-5x+1} = \dfrac{2x-5}{x^2-5x+1}$
- ✔ $y = \log_3(5-3x)$ isə, $y = \dfrac{\ln(5-3x)}{\ln 3}$ və
  $y' = \dfrac{u'}{u}\cdot\dfrac{1}{\ln 3} = \dfrac{(5-3x)'}{5-3x}\cdot\dfrac{1}{\ln 3}$
  $y' = \dfrac{-3}{5-3x}\cdot\dfrac{1}{\ln 3} = \dfrac{3}{(3x-5)\ln 3} = \dfrac{3}{3x-5}\log_3 e$
- ✔ $y = \log_5(\sin x)$ isə, $y' = \dfrac{(\sin x)'}{\sin x}\cdot\log_5 e = ctgx\,lg_5 e$

3. $y = \log_a x$ olarsa, $y' = \dfrac{1}{x\cdot\ln a} = \dfrac{1}{x}\cdot\log_a e$
4. $y = \log_a u$ olarsa, $y' = \dfrac{u'}{u\cdot\ln a} = \dfrac{u'}{u}\cdot\log_a e$

1. $\int dx = x + c$
2. $\int a dx = ax + c$
3. $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
4. $\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
5. $\int e^{ax} \cdot dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$
6. $\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
7. $\int (ax+b)^n \cdot dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$
8. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
9. $\int \frac{1}{x \ln a} dx = \log_a x + c$
10. $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
12. $\int \frac{1}{ax+b} \cdot dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$
13. $\int \frac{1}{x^2} \cdot dx = -\frac{1}{x} + c$

$\int (u+v) dx = \int u dx + \int v dx$

$\int u dv = u \cdot v - \int v du$ hissə-hissə inteqrallama

$\int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + c$

$\left(\int f(x) dx\right) = f(x)$

Triqonometrik funksiyaların inteqralı

1. $\int \cos x \cdot dx = \sin x + c$
2. $\int \cos ax \cdot dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$
3. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c$
4. $\int \sin ax \cdot dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$
5. $\int \sin^2 ax \cdot dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + c$
6. $\int \cos^2 ax \cdot dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + c$
7. $\int \cos(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
8. $\int \sin(ax+b) \cdot dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
9. $\int tgx \cdot dx = -\ln|\cos x| + c$
10. $\int ctgx \cdot dx = \ln|\sin x| + c$
11. $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$

Misallar:

- ✓ $\int 3 dx = 3x + c$
- ✓ $\int x^4 \cdot dx = \frac{x^5}{5} + c$
- ✓ $\int \frac{4}{x} dx = 4 \int \frac{dx}{x} = 4 \ln|x| + c$
- ✓ $\int (3x^2 - 1) dx = \int 3x^2 dx - \int dx = x^3 - x + c$
- ✓ $\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$

- $\int \frac{6}{x+1}dx = 6\int\frac{1}{x+1}dx = 6\ln|x+1|+c$
- $\int \frac{2x}{x^2+7}dx = \ln(x^2+7)+c$
- $\int 5^x \cdot dx = \frac{5^x}{\ln 5}+c$
- $\int 7^{2x+4}\cdot dx = \frac{7^{2x+4}}{2\ln 7}+c$
- $\int (3^x - x^3)\cdot dx = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x^4}{4}+c$
- $\int e^{5x+1}dx = \frac{1}{5}e^{5x+1}+c$
- $\int \sin 2x\cdot dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$
- $\int \cos(3x+4)\cdot dx = \frac{1}{3}\sin(3x+4)+c$
- $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}+c$
- $\int \cos^2 3x dx = \int\frac{1+\cos 6x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{6}\sin 6x\right)+c$

Müəyyən İnteqral

- $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

f(x) funksiyası çüt funksya olarsa: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

f(x) funksyası tək funksya olarsa: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

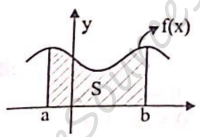
1. $\int_b^a cf(x)dx = c\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_b^a (f(x)\pm q(x))dx = \int_b^a f(x)dx \pm \int_b^a q(x)dx$
3. $\int_b^a f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. $a<b$ olmaq üzrə [a, b] aralığında

$f(x) \le q(x)$ $\quad\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b q(x)dx$

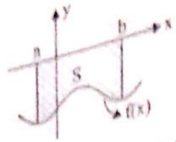
Misallar:

- $\int_1^2 x\cdot dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{(2)^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
- $\int_1^3 x^2\cdot dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{(3)^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$
- $\int_{\ln 3}^{\ln 8} e^x\cdot dx = e^x\Big|_{\ln 3}^{\ln 8} = e^{\ln 8} - e^{\ln 3} = 8-3=5$
- $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos 3x\cdot dx = \frac{1}{3}\sin 3x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{3}\left(\sin 3\pi - \sin\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}(0+1) = \frac{1}{3}$
- $\int_0^1 x^{90}\cdot dx = \frac{x^{91}}{91}\Big|_0^1 = \left(\frac{1^{91}}{91}\right) - \left(\frac{0^{91}}{91}\right) = \frac{1}{91}$
- $\int_{e^3}^{e^9}\frac{dx}{x} = \ln|x| = \ln e^9 - \ln e^3 = 9-3=6$
- $\int_0^2 x^3\cdot dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0}{4} = 4$
- $\int_0^{\pi}\sin x\cdot dx = -\cos\Big|_0^{\pi} = -[\cos\pi - \cos 0] = -(-1-1) = 2$

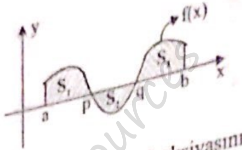
İnteqralda sahə

1) 

[a, b] aralığında, $f(x)\ge 0$ isə $S = \int_a^b f(x)dx$

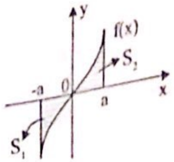
2) 

[a, b] aralığında $f(x) \le 0$ isə $S = -\int_a^b f(x)dx$

3) 

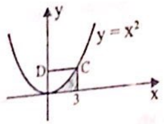
[a, b] aralığında f(x) funksiyasının işarəsi dəyişərsə, onda

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^p f(x)dx - \int_p^q f(x)dx + \int_q^b f(x)dx$$

4) 

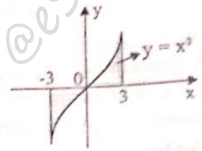
$$\int_{-a}^{a} |f(x)|dx = -\int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$S_1 + S_2 = 2\int_0^a |f(x)|dx$$

Misal 1: 

$$S = \int_0^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \left(\frac{27}{3}\right) - \left(\frac{0}{3}\right) = 9$$

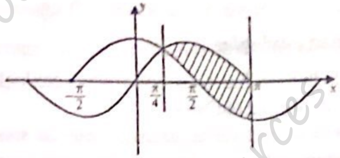
Misal 2: Qeyd edilmiş sahəni tapın.



Həlli:

$$S = \int_{-3}^{3} x^3dx = -\int_{-3}^{0} x^3dx + \int_0^3 x^3dx = \int_0^3 x^3dx + \int_0^3 x^3dx = 2\int_0^3 x^3dx = 2\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^3 = \frac{81}{2}$$

Misal 3: $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$ aralığında $y = \sin x$ və $y = \cos x$ əyriləri arasındakı qalan sahəni tapın.

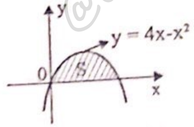


Həlli:

$$S = \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x)dx = (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi}$$

$$S = (-\cos\pi - \sin\pi) - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right) = -(-1) - 0 - \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + 1$$

Misal 4: $y = f(x) = 4x - x^2$ parabolası ilə x oxu arasında qalan sahəni tapın.



Həlli:

$4x - x^2 = 0$

$x(4 - x) = 0$

$x = 0, x = 4$

$$S = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left(4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

A çoxluğu a, b, c elementlərdən təşkil olunmuşdursa, həmin çoxluq $A=\{a; b; c\}$ kimi yazılır.

a elementinin A çoxluğuna aid olması $a \in A$, aid olmaması isə $a \notin A$ kimi işarə edilir.

Heç bir elementi olmayan çoxluğa boş çoxluq deyilir və $\varnothing$ kimi işarə edilir. $x^2=-16$ tənliyinin həqiqi həllər çoxluğu boş çoxluqdur.

A çoxluğunun elementlərinin sayı n(A) ilə göstərilir. $n(\varnothing)=0$

$B=\{x / x^2-4x+3=0\}$ yazılışı - B çoxluğunun $x^2-4x+3=0$ tənliyinin kökləri 1 və 3-dən ibarət olduğunu göstərir. $n(B)=2$

Sonlu və sonsuz çoxluqlar

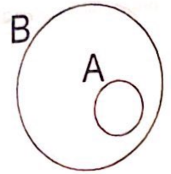
Elementləri ədədlərdən ibarət çoxluqlara ədədi çoxluqlar deyilir. Ədədi çoxluqlar da həm sonlu, həm də sonsuz ola bilər.

Sonlu çoxluqları elementlərin sadalanması üsulu ilə, sonsuz çoxluqları isə onun bir neçə elementini göstərməklə və ya elementi yazıb onun alınması üsulunu göstərməklə vermək olar:

Misal $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ - tam ədədlər çoxluğu

Alt çoxluqlar

Əgər A çoxluğunun bütün elementləri, B çoxluğunun da elementləri olarsa, onda A çoxluğuna B çoxluğunun alt çoxluğu deyililr və $A \subset B$ kimim yazılırf.



$A \subset B$

Alt çoxluğun xassələri

1. $A \subset A$, istənilən çoxluq özünün alt çoxluğudur
2. $\varnothing \subset A$, boş çoxluq istənilən çoxluğun alt çoxluğudur
3. $A \subset B$ və $B \subset A \Leftrightarrow A=B$
4. $A \subset B$ və $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

5. n elementli bir çoxluğun bütün elementli alt çoxluqlarının sayı: C_n^r
6. $n \geq r$ olmaqla n elementli bir çoxluğun r elementli alt çoxluqların sayı, n - r elementli alt çoxluqlarının sayına bərabərdir: $C_n^r = C_n^{n-r}$
7. *n* elementli bir çoxluğun *2n* sayda alt çoxluğu vardır.

Misal:

$A=\{a; b; c\}$ çoxluğunun bütün alt çoxluqların sayı $2^3=8$ -dir.

Bunlar: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a; b; c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}, \varnothing$

Həqiqi ədədlər çoxluğu $R=\{x / x \in (-\infty; +\infty)\}$. Rasional və irrasional ədədlər çoxluğu həqiqi ədədlər çoxluğunun alt çoxluqlarıdır. $Q \cup Q' = R$

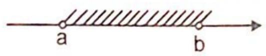
Kompleks ədədlər çoxluğu $C=\{a+bi / a \in R, b \in R, i=\sqrt{-1}\}$

Həqiqi ədədlər çoxluğu kompleks ədədlər çoxluğunun alt çoxluğudur. Yəni $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

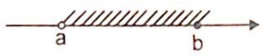
Açıq və qapalı ədədi çoxluqlar

1. Parça: $\{x / x \in R$ və $a \leq x \leq b\}$ qapalı çoxluqdur. [a; b] kimi işarə olunur.

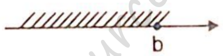
2. İnterval: $\{x / x \in R$ və $a < x < b\}$ açıq çoxluqdur. (a; b) kimi işarə olunur.



3. Yarıminterval: a) $\{x / x \in R$ və $a < x \leq b\}$.



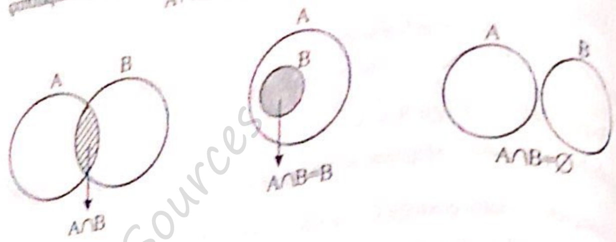
4. Şua: $\{x / x \in R$ və $x \leq b\}$. Bu aşağıdan qeyri-məhdud, yuxarıdan qapalı çoxluqdur. $(-\infty; b]$ kimi işarə olunur.



Çoxluqların kəsişməsi

A və B çoxluqlarının bütün ortaq elementlərindən ibarət olan çoxluğa A və B çoxluqlarının kəsişməsi deyilir və $A \cap B$ kimi işarə edilir.

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ və } x \in B\}$$



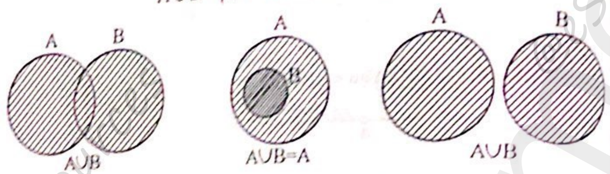
Kəsişmənin xassələri

1. $A \cap B = B \cap A$. (Yerdəyişmə qanunu)
2. $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. (Qruplaşdırma qanunu)
3. $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
4. $A \cap A = A, A \cap \varnothing = \varnothing$

Çoxluqların birləşməsi

A və B çoxluqlarının heç olmazsa birinə daxil olan bütün elementlərindən ibarət olan çoxluğa A və B çoxluqlarının birləşməsi deyilir və $A \cup B$ kimi işarə edilir.

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ və ya } x \in B\}$$



$A = \{x |\ x \in R,\ 0 < x < 5{,}5\}$, $B = \{x |\ x \in R,\ -3 < x < 2\}$

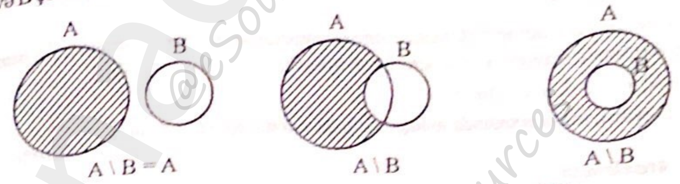
$A \cup B = \{x |\ x \in R,\ -3 < x < 5{,}5\}$

Birləşmənin xassələri

1. $A \cup B = B \cup A$. (Yerdəyişmə qanunu)
2. $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Qruplaşdırma qanunu)
3. $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$
4. $A \cup A = A, A \cup \varnothing = A$

Çoxluqların fərqi

A çoxluğunun B çoxluğuna daxil olmayan bütün elementlərindən ibarət olan çoxluğa A və B çoxluqlarının fərqi deyilir $A \setminus B = \{x / x \in A \text{ və } x \notin B\}$



$A = \{a;b;c;d;e\}$, $B = \{c;d;e\}$ olarsa, $A \setminus B = \{a;b\}$, $B \setminus A = \{\varnothing\}$

A hadisəsi üçün əlverişli halların sayının bütün mümkün hallar sayına nisbəti A hadisəsinin ehtimalı deyilir və P(A) ilə işarə olunur: $P(A)=\frac{m}{n}$

1. Yəqin hadisənin ehtimalı vahidə bərabərdir. Həqiqətən də A yəqin hadisə olarsa, onda m=n və $P(A)=\frac{n}{n}=1$ olar.

2. Mümkün olmayan hadisənin ehtimalı sıfra bərabərdir. Həqiqətən də A mümkün olmayan hadisə olarsa, onda m=0 və $P(A)=\frac{0}{n}=0$ olar.

3. İxtiyari A hadisəsinin ehtimalı $0 \le P(A) \le 1$ şərtini ödəyir.

Misal.
Bir zər atıldıqda aşağıdakı hadisələrin ehtimalını hesablayın
I. Cüt ədədin düşməsi (A hadisəsi)
II. Sadə ədədin düşməsi (B hadisəsi)
III. 3-ə bölünən ədədin düşməsi (C hadisəsi)

Həlli:
I. Zərin üzlərində üç dənə cüt ədəd vardır: (2; 4 və 6), yəni əlverişli halların sayı m=3, bütün mümkün halların sayı isə (1; 2; 3; 4; 5; 6), yəni n=6-dır.

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

II. Zərin üzlərində 2; 3; 5 kimi üç sadə ədəd vardır, yəni m=3, n=6. $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

III. Zərin üzlərində olan ədədlərdən yalnız 3 və 6 ədədləri üç ədədinin misilləridir, yəni m=3, Bütün mümkün halların sayı isə (1; 2; 3; 4; 5; 6), yəni n=6-dır.

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Ehtimalların toplanması

Teorem: İki uyuşmayan hadisənin cəminin ehtimalı, bu hadisələrin ehtimalları cəminə bərabərdir:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Ümumi şəkildə belə bir düsturu ixtiyari sonlu sayda hadisələrin ehtimalı üçün yazmaq olar:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

Nəticələr.

1. Qarşılıqlı əks A və $\bar{A}$ hadisələrinin ehtimalları cəmi vahidə bərabərdir:
2. Tam sistem əmələ gətirən $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hadisələrinin ehtimalları cəmi vahidə bərabərdir:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

3. $A \subset B$ olarsa, onda $P(A) \le P(B)$
4. A=B olarsa, onda P(A)=P(B)

Ehtimalların vurulması

B hadisəsinin baş verməsi şərtilə A hadisəsinin ehtimalına şərti ehtimal deyilir və $P_B(A)$ ilə işarə olunur.

Teorem:
A və B hadisələrinin hasilinin ehtimalı onlardan birinin ehtimalı ilə ikincinin birinci hadisənin baş verməsi şərti daxilində şərti ehtimalı hasilinə bərabərdir.

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

Misal:
Qutuda iki ağ və iki qara kürə vardır. Birinci sınaqda qutudan bir kürə çıxarılaraq kənara qoyulur. ikinci sınaqda isə daha bir kürə çıxarılır. Hər iki sınaq zamanı ağ kürənin çıxması ehtimalını tapın.

Həlli:
Birinci sınaq zamanı ağ kürənin çıxması hadisəsi A, ikinci sınaq zamanı ağ kürənin çıxması hadisəsi B olsun. Onda,

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad P_A(B)=\frac{1}{3}$$

İki asılı hadisənin hasilinin ehtimalına aid teoremə əsasən,

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \text{ olar.}$$

Teorem:
Asılı olmayan A və B hadisələrinin hasilinin ehtimalı onların ehtimalları hasilinə bərabərdir:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

Misal:
Bir qutuda 6 qara, 4 ağ kürə, ikinci qutuda isə 5 qara və 7 ağ kürə vardır. Hər qutudan bir kürə götürülür. Kürənin hər ikisinin ağ olması ehtimalını tapın.

Həlli:
Birinci qutudan ağ kürənin çıxması hadisəsi A_1, ikinci qutudan isə ağ kürənin çıxması hadisəsi A_2 olsun. Bu hadisələr asılı olmayan hadisələr olduğundan

$$P(A_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5} \qquad P(A_2)=\frac{7}{12}$$

$$P(A_1 \cdot A_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}=\frac{14}{60}=\frac{7}{30}$$

Misal:
İki atıcı hədəfə güllə atır. Birinci atıcının hədəfi vurma ehtimalı 0,9-a, ikinci atıcının hədəfi vurma ehtimalı isə 0,8-dirsə, hər iki atıcının hədəfi vurma ehtimalını tapın.

Həlli:
Birinci atıcının hədəfi vurma hadisəsi A, ikinci atıcının hədəfi vurma hadisəsi B olsun. A və B hadisələri bir-birindən asılı deyillər. P(A)=0,9, P(B)=0,8 olduğu üçün hər iki atıcının hədəfi vurma hadisəsi olan A·B hadisəsinin ehtimalı:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0,9\cdot 0,8=0,72$$

Uyuşan hadisələrin ehtimalı

Teorem:
Uyuşan iki A və B hadisələrinin cəminin ehtimalı A və B hadisələrinin ehtimalları cəmi ilə A·B hadisəsinin ehtimalı fərqinə bərabərdir:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

Bu teoremi uyuşan bir neçə hadisə üçün də ümumiləşdirmək olar. Məsələn:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-(P(A\cdot B)+P(A\cdot C)+P(B\cdot C))+P(A\cdot B\cdot C)$$

Misal.
Birinci və ikinci atıcının hədəfə dəymə ehtimalları uyğun olaraq P(A)=0,9 və P(B)=0,7-dir. Hər iki atıcı atəş açarsa, onlardan heç olmazsa birinin hədəfə dəymə ehtimalını tapın.

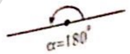
Həlli:
A və B hadisələri uyuşan hadisələr olduğundan

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=0,9+0,7-0,9\cdot 0,7=0,97$$

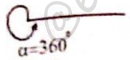
HƏNDƏSƏ

araz yayınları

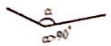
Bucaqlar

1. 

Açıq bucaq

2. 

Tam bucaq

3. 

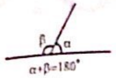
Kor bucaq

4. 

İti bucaq

5. 

Düz bucaq

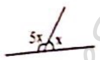
6. 

Qonşu bucaqlar

Məsələ 1.
Qonşu bucaqlardan biri o birindən 5 dəfə böyükdür. Kiçik bucağı tapın.
Həlli:

$x + 5x = 180^0$

$x = 30^0$



Məsələ 2.
Qonşu bucaqların fərqi 40^0-dir. Kiçik bucağı tapın.
Həlli:

$\alpha + \beta = 180^0$

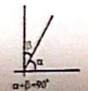
$\alpha - \beta = 40^0$

$2\alpha = 220^0$

$\alpha = 110^0$

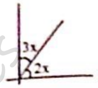
$\beta = 70^0$

7. Tamamlayıcı bucaqlar



Məsələ:
Tamamlayıcı bucaqların nisbəti 2:3 kimidir. Bucaqları tapın.

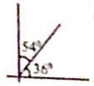
Həlli:



$2x + 3x = 90^0$

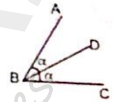
$5x = 90^0$

$x = 18^0$

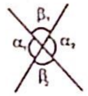


8. |BD| tənböləndir.

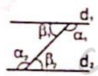
$\angle ABD = \angle DBC = \alpha$



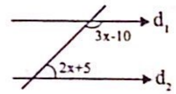
9. Qarşılıqlı bucaqlar $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$ və ya $\alpha_1+\beta_2=\alpha_2+\beta_1=180^0$



10. $d_1 // d_2$ isə, $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$



Məsələ 1.
$d_1 // d_2$ olarsa, Şəklə əsasən x -i tapın.



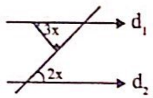
Həlli:

$3x - 10 + 2x + 5 = 180^0$

$5x = 185^0$

$x = 37^0$

Məsələ 2.
Şəklə əsasən x-ı tapın.



Həlli:

$2x + 3x = 90$

$5x = 90^0$

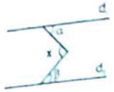
$x = 18^0$

11. $d_1 \parallel d_2$ isə, $\alpha_1 + \beta_1 = 180^0$

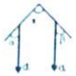
12. $d_1 \parallel d_2$ isə, $\alpha + \beta = 180^0$

13. $d_1 \parallel d_2$ olarsa,

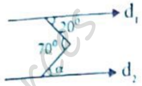
$x = \alpha + \beta$



və ya

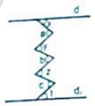


Məsələ
Şəklə əsasən α - nı tapın.

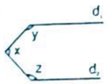


Həlli:
$70^0 = 20^0 + \alpha$
$\alpha = 50^0$

14. $d_1 \parallel d_2$, $a+b+c = x+y+z+t$

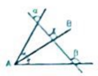


15. $d_1 \parallel d_2$ olarsa, $x + y + z = 360^0$



16. |AB| tənbölləndir

$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$



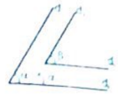
Məsələ:
Şəklə əsasən α - nı tapın

Həlli:

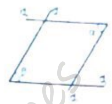
$\alpha = \frac{80 + 140}{2} = \frac{220}{2} = 110 \Rightarrow \alpha = 110^0$

17. $d_1 \parallel d_2$, $d_3 \parallel d_4$
I) Uyğun tərəfləri paralel olan eyniadlı bucaqlar

$\alpha = \beta$

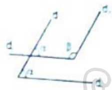


və ya



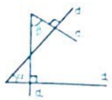
II) Uyğun tərəfləri paralel olan muxtəlifadlı bucaqlar

$\alpha + \beta = 180^0$



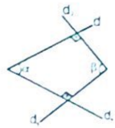
18. $d_1 \perp d_2$, $d_3 \perp d_4$
I) Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan eyniadlı bucaqlar.

$\alpha = \beta$

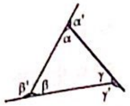


II) Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan müxtəlifadlı bucaqlar:

$\alpha + \beta = 180^0$

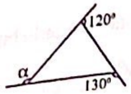


1. Üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi 180°, xarici bucaqlarının cəmi i... 360°-dir.



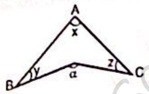
$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ və $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^0$

Məsələ 1:
Şəklə əsasən α - nı tapın.

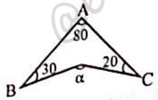


Həlli:
$\alpha + 120^0 + 130^0 = 360^0$
$\alpha = 110^0$

2. $x + y + z = \alpha$



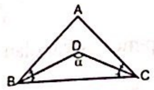
Məsələ 2:
Şəklə əsasən α - nı tapın.



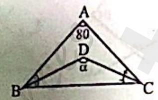
Həlli:
$\alpha = 80 + 30 + 20$
$\alpha = 130^0$

3. |BD| və |CD| tənbölənlərdir.

$\alpha = 90 + \frac{\angle A}{2}$



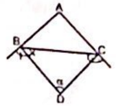
Məsələ:
∠A=80° olarsa, α - nı tapın.



Həlli:
$\alpha = 90^0 + \frac{80^0}{2}$
$\alpha = 130^0$

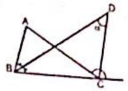
4. |BD| və |DC| tənbölənlərdir.

$\alpha = 90 - \frac{\angle A}{2}$

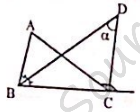


5. |BD| və |DC| tənbölənlərdir.

$\alpha = \frac{\angle A}{2}$



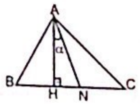
Məsələ:
$\angle A = 80^0$ olarsa,
α - nı tapın.



Həlli:
$\alpha = \frac{\angle A}{2} = 40^0$

6. $\angle A = 90^0$ olarsa, |AH| - hündürlük, |AN| - tənbölənd
ir.

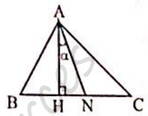
$\alpha = \frac{|\angle B - \angle C|}{2}$



Məsələ:
Şəkildə $\angle B = 80^0$ və $\angle C = 30^0$, α - nı tapın.

Həlli:

$\alpha = \frac{80 - 30}{2} = 25$



7. $|AD|$ - tənbölləndir.

$\alpha = 90 + \frac{|\angle B - \angle C|}{2}$

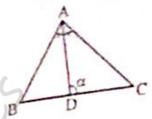
Məsələ:

Şəkildə $\angle B = 80^0$ və $\angle C = 30^0$ isə, $\alpha = ?$

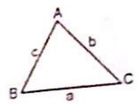
Həlli:

$\alpha = 90 + \frac{80 - 30}{2}$

$\alpha = 115^0$



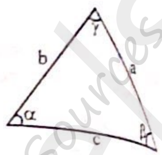
✔ *Üçbucağın perimetri $P = |AB| + |AC| + |BC|$ və ya $P = a + b + c$*



✔ *Sinuslar teoremi*

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

R - xaricə çəkilmiş çevrənin radiusudur.

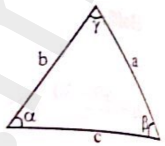


✔ *Kosinuslar teoremi*

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$

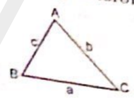
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



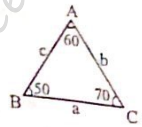
Üçbucaqda bucaq tərəf əlaqəsi (Üçbucaq bərabərsizliyi)

1. Üçbucaqda böyük bucaq qarşısında böyük tərəf olur.
$\angle A > \angle B > \angle C$ olarsa,

$|BC| > |AC| > |BA|$



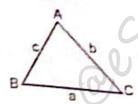
Məsələ:
Üçbucağın tərəflərinin uzunluğunu azalma sırası ilə düzün.



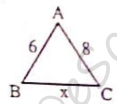
Həlli:
Şəkildə $\angle C > \angle A > \angle B$ olduğuna görə $c > a > b$

2. Bir üçbucaqda iki tərəfin cəmi üçüncü tərəfdən böyük, fərqi isə, üçüncü tərəfdən kiçikdir.

$a + b > c > |a - b|,$
$a + c > b > |a - c|$
$b + c > a > |b - c|$

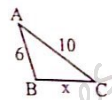


Məsələ 1.
Şəklə əsasən BC tərəfinin dəyişmə aralığını tapın.



Həlli:
$8 - 6 < x < 6 + 8$
$2 < x < 14$

Məsələ 2.
Şəklə əsasən BC-nin tam qiymətləri çoxluğunu tapın.



Həlli:

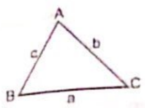
$10 - 6 < x < 10 + 6$

$4 < x < 16$

$\angle B > \angle A$ olduğuna görə

$4 < x < 10$ və $x = 5; 6; 7; 8; 9$ olar.

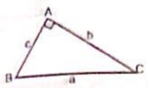
3. $A > 90^0$ olarsa,
$b + c > a > \sqrt{b^2 + c^2}$ olar.
$A < 90^0$ olarsa,
$\sqrt{b^2 + c^2} > a > |b - c|$ olar.



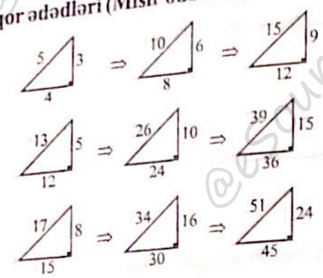
Düzbucaqlı üçbucaq

✔ **Pifaqor teoremi:**

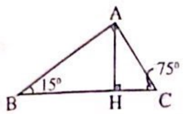
$\angle A = 90^0$ olarsa, $a^2 = b^2 + c^2$



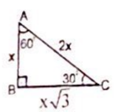
✔ **Pifaqor ədədləri (Misir ədədləri)**



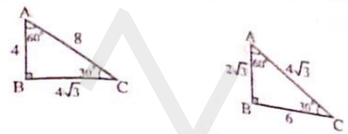
✔ $\angle A = 90^0$
$\angle B = 15^0$, $\angle C = 75^0$ olarsa,
$AH = a$
$BC = 4a$



Qeyd: 30^0-li bucaq qarşısındakı katet hipotenuzun yarısına, 60^0-li bucaq qarşısındakı katet kiçik katetin $\sqrt{3}$ mislinə bərabərdir.



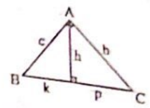
Məsələ:



Düzbucaqlı üçbucaqda mütənasib parçalar

$\angle A = 90^0$ və $BC = a$ olarsa,

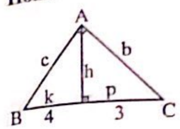
- $h^2 = p \cdot k$
- $c^2 = k(k + p) = k \cdot a$
- $b^2 = p(p + k) = p \cdot a$
- $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$
- $\frac{c}{b} = \sqrt{\frac{k}{p}}$



Məsələ:

Şəklə əsasən düzbucaqlı üçbucağın katetlərini və düz bucaq təpəsindən çəkilmiş hündürlüyü tapın.

Həlli:



$h^2 = p \cdot k$

$h^2 = 3 \cdot 4$

$h = 2\sqrt{3}$

$c^2 = k \cdot (k + p)$

$c^2 = 4 \cdot (4 + 3)$

$c = 2\sqrt{7}$

$b^2 = p \cdot (p + k)$

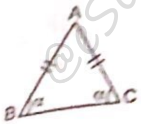
$b^2 = 3 \cdot (3 + 4)$

$b = \sqrt{21}$

$\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Bərabəryanlı üçbucaq

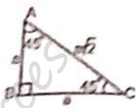
1. Bərabəryanlı üçbucaqda
$|AB| = |AC|$
$\angle B = \angle C$



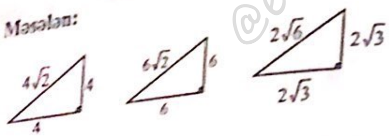
Məsələ:
$\triangle ABC$-də $AB = AC$, $\angle A = 80^0$ isə, $\angle B = ?$, $\angle C = ?$

Həlli:
$\angle B = \angle C = \frac{180^0 - 80^0}{2} = 50^0$

2. Bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqda
$|AB| = |BC| = a$
$\angle A = \angle C = 45^0$ olarsa,
$AC = a\sqrt{2}$
$P = 2a + a\sqrt{2}$



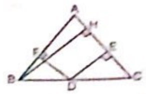
Məsələn:



3. AH - tənböləndir. $|AB|=|AC|$, $|AH| = V_a = h_a = = n_a$
(median = hündürlük = tənbölən)

4. $|AB| = |AC|$. Üçbucağın oturacağı üzərində olan ixtiyari D nöqtəsi üçün
DE //BA və DF // AC olarsa,
$|DE| + |DF| = |AC| = |AB|$

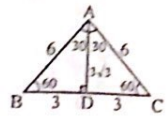
5. $|AB| = |AC|$ və BC tərəfi üzərində olan ixtiyari D nöqtəsi üçün, $DF \perp AB$, $DE \perp AC$, $BH \perp AC$ isə, $|DE| + |DF| = |BH|$



Bərabərtərəfli üçbucaq

1. $|AB| = |BC| = |AC| = a$, $P = 3a$
$\angle A = \angle B = \angle C = 60^0$ $\quad S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\quad AH = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Məsələ:
Şəklə əsasən bərabərtərəfli üçbucağın perimetrini, sahəsini və hündürlüyünü tapın.

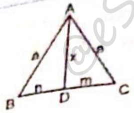


Həlli:
$P = 3a = = 3.6 = 18$ sm
$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ $\quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

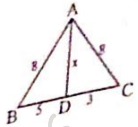
2. Bərabərtərəfli üçbucaqda
a - tərəf,
V - median,
h - hündürlük,
n - tənbölən olarsa,

$V_a = h_a = n_a = V_b = n_b = h_b = V_c = n_c = h_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
$|AH| = |CD| = |BE|$
$|PA| = |PC| = |PB|$
$|PD| = |PE| = |PH|$

3. ABC bərabərtərəfli üçbucaqdır.
$x^2 = a^2 - (a - n)n$

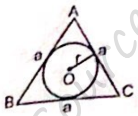


Məsələ:
Şəklə əsasən,
$x = ?$



Həlli:
$x^2 = 8\cdot8 - 5\cdot3$
$x^2 = 64 - 15$
$x = 7$ sm

4. ABC bərabərtərəfli üçbucaqdır.
$AB = AC = BC = a$



$h = 3r$

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $S_{\Delta ABC} = 3r^2\sqrt{3}$

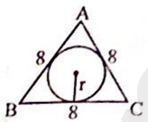
Məsələ:
Bərabərtərəfli üçbucağın tərəfi 8 sm-dir. Üçbucağın hündürlüyünü, sahəsini və daxilə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

Həlli:

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

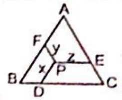
$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$

$h = 3r \Rightarrow 4\sqrt{3} = 3r \Rightarrow r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

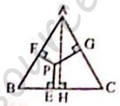


5. ABC bərabərtərəfli üçbucaqdır.
$R = 2r$
$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
$h = r + R$
$S_{\Delta ABC} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

6. ABC bərabərtərəfli üçbucaqdır. Üçbucaq daxilində olan ixtiyari P nöqtəsi üçün, $PE \parallel BC$, $PF \parallel AC$ və $PD \parallel AB$ olarsa,
$|PD| + |PF| + |PE| = a$

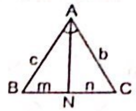


7. ABC bərabərtərəfli üçbucaqdır. Üçbucağın daxilində yerləşən hər hansı P nöqtəsi üçün $PE \perp AB$, $PF \perp BC$,
$PG \perp AC$, olarsa,
$|PE| + |PF| + |PG| = AH$,
$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

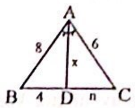


Üçbucaqda tənbölən median və hündürlük.

1. AN - daxili bucaq tənbölənidirsə, $\frac{c}{m} = \frac{b}{n}$
$|AN| = \sqrt{b\cdot c - m\cdot n}$



Məsələ 1.
Şəklə əsasən $x = ?$



Həlli:
$\frac{8}{4} = \frac{6}{n} \Rightarrow n = 3$
$x^2 = b\cdot c - m\cdot n$
$x^2 = 6\cdot8 - 4\cdot3$
$x = 6$ sm

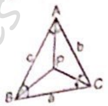
2. $|AN|$ - daxili bucaq tənbölənı $|AD|$ - xarici bucaq tənbölənidirsə,

$$\frac{|BD|}{|CD|}=\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$$

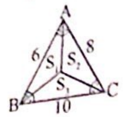
3. AD - xarici bucaq tənbölənidirsə, $|AD|=\sqrt{|DC||DB|-|AB||AC|}$

4. AP, BP, CP, - daxili bucaq tənbölənləridir:

$$\frac{S_{\Delta BPC}}{a}=\frac{S_{\Delta APC}}{b}=\frac{S_{\Delta APB}}{c}$$



Məsələ 2.
Şəklə əsasən S_1, S_2 və S_3-ü tapın.



Həlli:

$6^2+8^2=10^2$ olduğu üçün $\angle A=90^0$ və $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$

$\frac{S_1}{6}=\frac{S_2}{8}=\frac{S_3}{10}=k$, $S_1=6k$, $S_2=8k$, $S_3=10k$

$S_1+S_2+S_3=S_{\Delta ABC}$, $6k+8k+10k=24$

$24k=24$, $k=1$, $S_1=6$, $S_2=8$, $S_3=10$

5. Üçbucaqda tənbölənlərin kəsişdiyi nöqtə, daxilə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir.

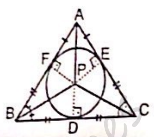
$|PE|=|PF|=|PD|=r$

$|AE|=|AF|=p-a$

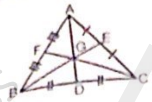
$|EC|=|CD|=p-c$

$|BF|=|BD|=p-b$

$p=\frac{a+b+c}{2}$



6.



$|BD|=|DC|$, $|AD|=V_a$ (BC tərəfinə çəkilmiş median)
$|AF|=|FB|$, $|FC|=V_c$ (AB tərəfinə çəkilmiş median)
$|AE|=|EC|$, $|BE|=V_b$ (AC tərəfinə çəkilmiş median)

- Üçbucağın medianları bir nöqtədə kəsişirlər. Bu nöqtəyə üçbucağın ağırlıq mərkəzi deyilir. və G ilə göstərilir.

$AD=V_a$ $\quad FC=V_c$ $\quad BE=V_b$

7. ⇨ $2V_a^2=b^2+c^2-\frac{a^2}{2}$

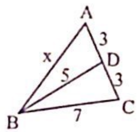
⇨ $2V_b^2=c^2+a^2-\frac{b^2}{2}$

⇨ $2V_c^2=b^2+a^2-\frac{c^2}{2}$

⇨ $V_a^2+V_b^2+V_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$

Məsələ:

Şəklə əsasən $x=?$



Həlli:

$2V_b^2=c^2+a^2-\frac{b^2}{2}$

$2\cdot 5^2=x^2+7^2-\frac{6^2}{2}$

$50=x^2+49-18$

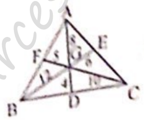
$x=\sqrt{19}$

8. $\Leftrightarrow |AG| = \frac{2}{3}V_a$ $\quad \Leftrightarrow |GD| = \frac{1}{3}V_a$

$\Leftrightarrow |BG| = \frac{2}{3}V_b$ $\quad \Leftrightarrow |GE| = \frac{1}{3}V_b$

$\Leftrightarrow |GC| = \frac{2}{3}V_c$ $\quad \Leftrightarrow |FG| = \frac{1}{3}V_c$

Məsələ:
$V_a = 12$, $V_b = 18$, $V_c = 15$ olarsa, medianların kəsişmə nöqtəsində bölündüyü hissələrin uzunluğunu tapın.



Həlli:
$V_a = 12$

$AG = \frac{2}{3}V_a = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$

$V_b = 18;\quad BG = \frac{2}{3}V_b = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12$

$V_c = 15;\quad CG = \frac{2}{3}V_c = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10$

$GD = \frac{1}{3}V_a = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$

$GE = \frac{1}{3}V_b = \frac{1}{3} \cdot 18 = 6$

$GF = \frac{1}{3}V_c = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5$

9. $|AP| = |PD|$, $|PG| = \frac{1}{6}V_a$

$|FR| = |RC|$, $|KG| = \frac{1}{6}V_b$

$|BK| = |KE|$, $|GR| = \frac{1}{6}V_c$

10. $|FE| \parallel |BC| \Rightarrow |FE| = \frac{|BC|}{2}$, $|FP| = |PE| = \frac{|BC|}{4}$

$|FD| \parallel |AC| \Rightarrow |FD| = \frac{|AC|}{2}$, $|FK| = |KD| = \frac{|AC|}{4}$

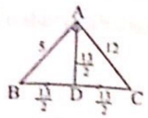
$|ED| \parallel |AB| \Rightarrow |ED| = \frac{|AB|}{2}$, $|DR| = |RE| = \frac{|AB|}{4}$

11. AH - hündürlük,
$|BC| = a$, AD-median,
$HD = x$ isə, $|b^2 - c^2| = 2ax$

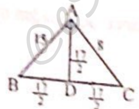
12. $\triangle ABC$-də $|BD| = |DC| = |AD|$ olarsa, $\angle A = 90^\circ$.
$|AD| = V_a$-median və $|BC| = a$ olarsa, $V_a = \frac{a}{2}$;

Məsələ 3:
Aşağıdakı düzbucaqlı üçbucaqlarda verilmiş katetlərə əsasən düz bucaq təpəsindən çəkilmiş medianların tapılması üsulu göstərilmişdir.

$AD = 5$



$AD = 6{,}5$

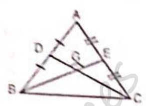


$AD = 8{,}5$

13. Bir üçbucaqda $a > b > c$ olarsa, onda $V_a < V_b < V_c$

14. Üçbucağın V_a, V_b, V_c medianları və $P = \frac{a+b+c}{2}$ yarımperimetri arasında aşağıdakı kimi əlaqə vardır. $P < V_a + V_b + V_c < 2P$
$|V_a - V_b| < V_c < V_a + V_b$

15. $|BE| \perp |DC|$, $|BE| = V_b$,
$|DC| = V_c$ olarsa,
$V_b^2 + V_c^2 = V_a^2$

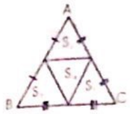


16. $\angle A = 90^0$, $|AF| = |FB|$, $|AE| = |EC|$, $|BD| = |DC|$ olarsa, $V_b^2 + V_c^2 = \frac{5}{4}a^2$

$V_b^2 + V_c^2 = 5V_a^2$

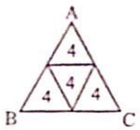
17. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \frac{S_{\Delta ABC}}{6}$

18. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S_{(ABC)}}{4}$



Məsələ 4.

$S_{\Delta ABC} = 16$ sm^2 olarsa, üçbucağın orta xətlərlə ayrıldığı üçbucaqların sahəsini tapın.

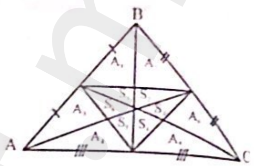


Həlli:

$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{16}{4} = 4$ sm^2

14. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \frac{S_{(ABC)}}{24}$

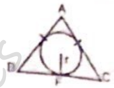
$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = \frac{S_{(ABC)}}{8}$



19. $|AH| \cdot |HD| = |BH| \cdot |HE| = |CH| \cdot |HF|$

20. h_a, h_b, h_c - hündürlüklər, r-daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu olarsa,

$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$



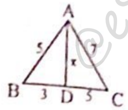
21. h_a, h_b, h_c - hündürlüklər olarsa, $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$

22. Stüart teoremi:

$x^2 = \frac{b^2 \cdot m + c^2 \cdot n}{n + m} - m \cdot n$

Məsələ 5.

Şəklə əsasən $x = ?$



Həlli:

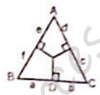
$x^2 = \frac{5^2 \cdot 5 + 7^2 \cdot 3}{3 + 5} - 5 \cdot 3$

$x^2 = \frac{125 + 147}{8} - 15$

$x = \sqrt{19}$

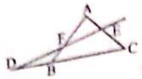
23. Çarnot teoremi:

$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2$



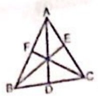
23. Menelay teoremi:

$$\frac{|DB|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}\cdot\frac{|AF|}{|FB|}=1$$

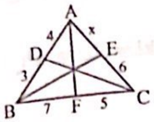


24. Çeva teoremi:

$$\frac{|DB|}{|DC|}\cdot\frac{|EC|}{|EA|}\cdot\frac{|FA|}{|FB|}=1$$



Məsələ 6.
Şəklə əsasən x-i tapın.



Həlli:

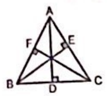
$$\frac{7}{5}\cdot\frac{6}{x}\cdot\frac{4}{3}=1$$

$$x=\frac{56}{5}=11{,}2$$

Üçbucaqda sahə

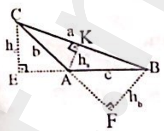
1. Üçbucağın sahəsi, tərəfinin uzunluğu ilə o tərəfə çəkilmiş olan hündürlüyü hasilinin yarısına bərabərdir:
$|AD| = h_a$, $|BE| = h_b$, $|CF| = h_c$ və
$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ olarsa,

$$S_{(ABC)}=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$$



2. $$S_{(ABC)}=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$$

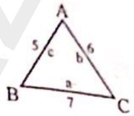
Şəkildə $CE = h_c$, $AK = h_a$, $BF = h_b$



3. **Heron düsturu:**

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}\quad \text{burada}\quad p=\frac{a+b+c}{2}$$

Məsələ:
Şəklə əsasən üçbucağın sahəsini və hündürlüklərini tapın.



Həlli:

$a+b+c=2p$

$5+6+7=2p \Rightarrow p=9$

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{9\cdot(9-5)\cdot(9-6)\cdot(9-7)}$

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{9\cdot4\cdot3\cdot2}$

$S_{\Delta ABC}=6\sqrt{6}$

$S_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot h_a}{2}=6\sqrt{6}$

$\frac{7\cdot h_a}{2}=6\sqrt{6}\quad 7h_a=12\sqrt{6},\quad h_a=\frac{12\sqrt{6}}{7}$

$S_{\Delta ABC}=\frac{b\cdot h_b}{2}=6\sqrt{6}$

$\frac{6\cdot h_b}{2}=6\sqrt{6}\quad h_b=2\sqrt{6}$

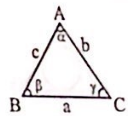
$S_{\Delta ABC}=\frac{c\cdot h_c}{2}=6\sqrt{6}$

$\frac{5\cdot h_c}{2}=6\sqrt{6}\quad h_c=\frac{12\sqrt{6}}{5}$

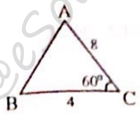
4. ΔABC-də a, b, c - tərəflər, α, β, γ, daxili bucaqlar olarsa,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{b\cdot c\cdot\sin\alpha}{2},\quad S_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot c\cdot\sin\beta}{2}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$$



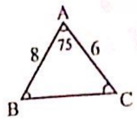
Məsələ 1.
Şəklə əsasən üçbucağın sahəsini tapın.



Həlli:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot b\cdot \sin\gamma}{2}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$$

Məsələ 2.
$AB=8$, $AC=6$,
$\angle A=75^0$ olarsa,
$S_{\Delta ABC}=?$



Həlli:

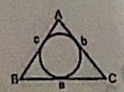
$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}6\cdot 8\cdot \sin 75^0=\frac{1}{2}6\cdot 8\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=6\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)sm^2$$

5. R-xaricə çəkilmiş çevrənin radiusu olarsa,

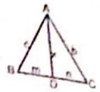
$$S_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$$

6. r-daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu, $\frac{a+b+c}{2}=p$ olarsa,

$$S_{\Delta ABC}=p\cdot r$$



Məsələ:
$AB=15$ sm, $AC=13$ sm,
$BC=14$ sm olarsa, $r=?$



Həlli:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{14+13+15}{2}=21\,sm$$

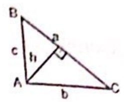
$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}=\sqrt{21\cdot 7\cdot 8\cdot 6}=84\,sm^2$$

$$r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p}=\frac{84}{21}=4\,sm$$

7. $S_{\Delta ABC}=\frac{b\cdot c}{2}$

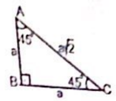
$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h$

$\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}bc\Rightarrow h=\frac{bc}{a}$



8. $\angle B=90^0$, $|AB|=|BC|=a$ olarsa,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{a^2}{2}$$

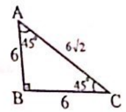


Məsələ:
Katetləri 6 sm olan düzbucaqlı üçbucağın perimetrini və sahəsini tapın.

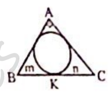
Həlli:

$p=12+6\sqrt{2}$ sm

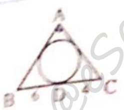
$S_{\Delta ABC}=\frac{6\cdot 6}{2}=18\,sm^2$



9. $\angle A=90^0$, K-toxunma nöqtəsi,
$BK=m$,
$KC=n$ olarsa,
$S_{(ABC)}=m\cdot n$

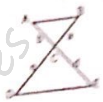


Məsələ:
Şəkilə əsasən $S_{\Delta ABC} = ?$

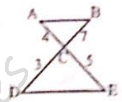


Həlli:
$S_{\Delta ABC} = m \cdot n = 6 \cdot 4$
$S_{\Delta ABC} = 24\ sm^2$

10. $\frac{S_{(\Delta ABC)}}{S_{(\Delta DEC)}} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$



Məsələ:
Şəkildə verilənlərə görə $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEC}}$ nisbətini tapın.

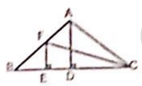


Həlli:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEC}} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{28}{15}$$

11. Oturacaqları eyni olan üçbucaqların sahələri nisbəti, onların hündürlükləri nisbətinə bərabərdir.
AD ⊥ BC, FE ⊥ BC olarsa,

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta FBC}} = \frac{|AD|}{|FE|}$$

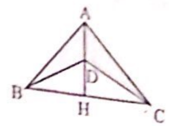


12. Hündürlükləri eyni olan üçbucaqların sahələri nisbəti, onların oturacaqları nisbətinə bərabərdir.

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta AFC}} = \frac{|BD|}{|FC|}, \quad \frac{S_{\Delta ADF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{|DF|}{|BC|}$$

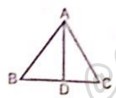
13. |AH| ⊥ |BC| olarsa, $S = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2}$. Burada, S = qeyd edilmiş sahədir.

Məsələ:
AD = 4, BC = 8 olarsa, $S_{qeyd.ed} = ?$



Həlli:
Qeyd edilmiş sahə $\frac{8 \cdot 4}{2} = 16\ sm^2$

14. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{|BC|}{|BD|}$



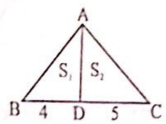
Məsələ:
Şəkildə verilənlərə görə $\frac{S_1}{S_2}$, $\frac{S_1}{S_{\Delta ABC}}$, $\frac{S_2}{S_{\Delta ABC}}$ nisbətlərini tapın.

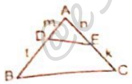
Həlli:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{S_1}{S_{\Delta ABC}} = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{S_2}{S_{\Delta ABC}} = \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{5}{9}$$





15. $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{m \cdot n}{(m+t) \cdot (n+k)}$

16. TF // AB, RG // BC, DE // AC

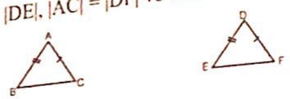
$S_{\Delta ABC} = \left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3}\right)^2$

17. $\frac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{r \cdot t \cdot m + k \cdot n \cdot p}{a \cdot b \cdot c}$

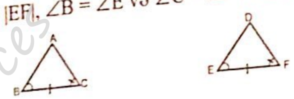
Üçbucaqların bərabərliyi

Bərabərlik əlamətləri

1. $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$ və $\angle A = \angle D$ olarsa, $\Delta ABC = \Delta DEF$



2. $|BC| = |EF|$, $\angle B = \angle E$ və $\angle C = \angle F$ olarsa, $\Delta ABC = \Delta DEF$



3. $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|BC| = |EF|$ olarsa, $\Delta ABC = \Delta DEF$

Üçbucaqların oxşarlığı.

Oxşarlıq əlamətləri

1. $\angle A = \angle D$ və $\angle B = \angle E$ olarsa, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

2. $\angle A = \angle D$ və $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ olarsa, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

3. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ olarsa, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Oxşar üçbucaqlarda:

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

$\frac{c}{f} = \frac{b}{e} = \frac{a}{d} = \frac{h_a}{h_d} = \frac{V_a}{V_d} = \frac{n_a}{n_d} = \frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{P_{(ABC)}}{P_{(DEF)}} = k$ $\quad \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEF}} = k^2$

Məsələ:

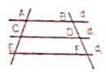
İki oxşar üçbucağın medianlarının nisbəti $\frac{4}{3}$ isə, onların sahələrinin nisbətini tapın.

Həlli:

$\frac{S(ABC)}{S(DEF)} = k^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

Fales teoremi

$d_1 // d_2 // d_3$ olarsa,



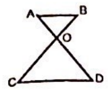
1) $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$

2) $\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF}$

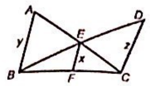
1. DE // BC olarsa,

   1) $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$, 2) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

2. AB // CD olarsa, $\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC}=\frac{AB}{CD}$



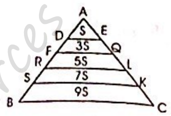
3. AB // EF // DC olarsa,



   1) $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$;

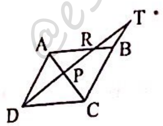
   2) $\frac{y}{BF}=\frac{z}{FC}$

4. AD = DF = FR = RS = SB
   AE = EQ = QL = LK = KC
   $S_{(ADE)}:S_{(DFQE)}:S_{(FRLQ)}:S_{(RSKL)}:S_{(SBCK)}=1:3:5:7:9$



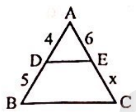
5. ABCD paraleloqramdır.

   $|DP|^2=|PR|\cdot|PT|$



Məsələ 1.

Şəkildəki verilənlərə əsasən x = ?

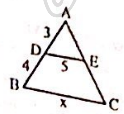


Həlli:

$\frac{4}{5}=\frac{6}{x}$; x = 7,5 sm

Məsələ 2.

Şəklə əsasən x - i tapın.

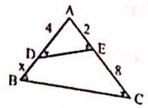


Həlli:

$\frac{3}{7}=\frac{5}{x}\Rightarrow x=\frac{35}{3}$

Məsələ 3.

Şəklə görə x - i tapın.

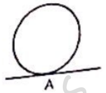


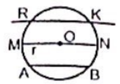
Həlli:

$\frac{4}{2+8}=\frac{2}{x+4}$; x = 1 sm

Çevrə və dairə

Çevrənin mərkəzindən çevrə xəttinə qədər olan məsafə ***çevrənin radiusu*** adlanır. Çevrəni iki nöqtədə kəsən düz xəttin çevrə daxilində qalan hissəsi ***vətər*** adlanır. Çevrənin mərkəzindən keçən vətər isə çevrənin ***diametri*** adlanır. Çevrə ilə bir ortaq nöqtəsi olan düz xətt ***toxunan*** adlanır.

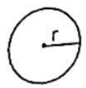




Çevrənin uzunluğu

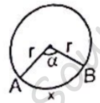
$\ell = 2\pi r$, $\pi \approx \frac{22}{7}$ və ya

$\pi \approx 3,14$



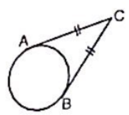
Qövsün uzunluğu

$AB = x = 2\pi r \frac{\alpha}{360}$

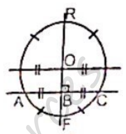


burada, α -bucağın dərəcə ölçüsüdür.

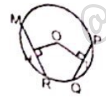
1. $|AC|=|BC|$



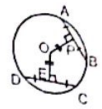
2. Mərkəzdən keçib vətərə perpendikulyar olan düz xətt vətəri yarıya bölür. $|RF|$ diametr, $|RF| \perp |AC|$ olarsa, $|AB|=|BC|$
Çevrənin uzunluğu $c=2\pi R$ və ya $c=\pi d$ ilə hesablanır.



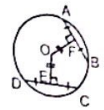
3. $|OH|=|OT| \Rightarrow |MR|=|PQ|$



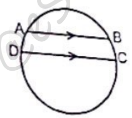
4. Vətərlərin orta perpendikulyarı çevrənin mərkəzindən keçər.



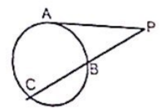
5. $|OE|=|OF| \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DC}$



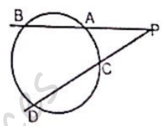
6. $AB \parallel DC \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$



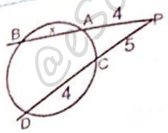
7. $|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$



8. $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$

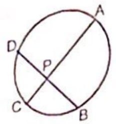


Məsələ: Şəklə əsasən x-i tapın.

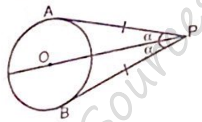


Həlli:
$4(4+x)=5(5+4)$
$16+4x=45$
$x=29/4$

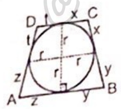
9. $|PA|\cdot|PC|=|PD|\cdot|PB|$



10. $|PO|$ tənböləndir.



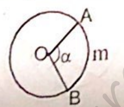
11. $|AB|=a,\ |BC|=b,$
$|CD|=c,\ |DA|=d \Rightarrow$
$a+c=d+b$



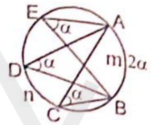
$S_{(ABCD)}=P\cdot r=(a+c)r=(b+d)r$ burada, $P=\dfrac{a+b+c+d}{2}=a+c=b+d$

Çevrədə bucaqlar

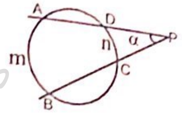
1. Mərkəzi bucaq uyğun qövsün ölçüsünə bərabərdir. $\alpha=\overset{\frown}{AmB}$



2. Çevrə daxilinə çəkilən bucaq, söykəndiyi qövsə uyğun mərkəzi bucağın yarısına bərabərdir.

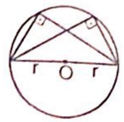


3. $\alpha=\dfrac{|\overset{\frown}{AmB}-\overset{\frown}{DnC}|}{2}$



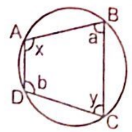
Məsələ:
$\overset{\frown}{AmB}=80^{\circ}$, $\overset{\frown}{DnC}=20^{\circ}$ olarsa, $\alpha=\dfrac{80^{\circ}-20^{\circ}}{2}=30^{\circ}$

4. Diametrə söykənən daxilə çəkilmiş bucaqlar 90°-dir.



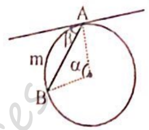
Vətərə söykənən daxilə çəkilmiş birtərəfli bucaqlar bərabərdir.

5. ABCD - çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaq-lıdırsa,
$\angle a+\angle b=180^{\circ}$
$\angle x+\angle y=180^{\circ}$
$\angle x+\angle y=\angle a+\angle b$

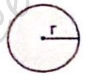


6. Toxunanla vətər arasında qalan bucaq mərkəzi bucağın yarısına və ya ona uyğun qövsün yarısna bərabərdir.

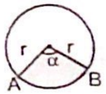
$\angle\beta=\dfrac{\angle\alpha}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{m}}{2}$



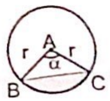
Dairənin sahəsi



1. Dairə sahəsi
$S=\pi r^2$

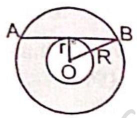


2. Dairə sektorunun sahəsi
$S=\pi r^2\frac{\alpha}{360}$



3. Dairə seqmentinin sahəsi
$S=\pi r^2\frac{\alpha}{360}\pm\frac{1}{2}r^2\sin\alpha=\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180}\pm\sin\alpha\right)$

4. Dairə halqası $S=\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)$



5. AB = a
$S=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$

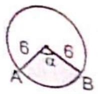
6. OC = r, OB = R
$S=\pi R^2\frac{\alpha}{360}-\pi r^2\frac{\alpha}{180}=\frac{\pi\alpha}{360}(R^2-r^2)$

Məsələ:
Radiusu $\sqrt{2}$ sm olan dairənin sahəsini tapın.

Həlli:
$S=\pi r^2=\pi(\sqrt{2})^2=2\pi$

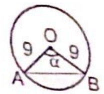
Məsələ 2:
Sahəsi 169π sm^2 olan dairənin diametrini tapın.
Həlli: $\pi r^2=169\pi \Rightarrow r=13;\ d=2r=26$

Məsələ 3:
$r=6$sm, $\alpha=60^0$, $S_{Seq}=?$



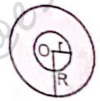
Həlli:
$S_{Seq}=\pi r^2\frac{\alpha}{360}=\pi r^2\frac{60}{360}=6\pi$

Məsələ 4:
$\alpha=30^0$, $r=9$sm, $S_{Seq}=?$



Həlli:
$S_{Seq}=\pi r^2\frac{\alpha}{360}-\frac{1}{2}r^2\sin\alpha=$
$=\pi\cdot81\frac{30}{360}-\frac{1}{2}\cdot81\cdot\sin30=\frac{81\pi-243}{12}$

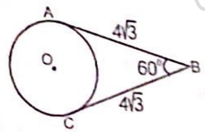
Məsələ 5:
$r=3$ sm, $R=5$ sm, $S_s=?$



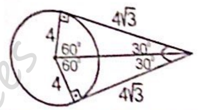
Həlli:
$S_s=\pi(R^2-r^2)=\pi(5^2-3^2)=16\pi$

Məsələ 6:

$r=?$



$r=4$ sm

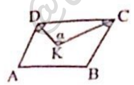


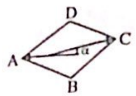
Dördbucaqlılar

1. DK və CK tənbölənlərdirsə,

$\alpha = \frac{\angle A + \angle B}{2}$

AK və CK tənbölənlərdirsə,

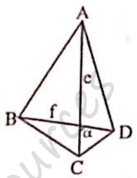




2. $\alpha = \frac{|\angle B - \angle D|}{2}$

3. $|AC| = e$, $|BD| = f$ olarsa,

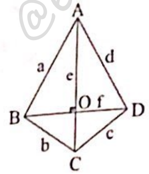
$S_{(ABCD)} = \frac{1}{2} e \cdot f \sin\alpha$



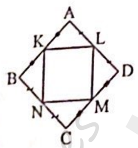
4. Dördbucaqlının diaqonalları perpendikulyar olarsa,

$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

$S_{(ABCD)} = \frac{e \cdot f}{2}$



5. ABCD dördbucaqlı, M, N, K, L tərəflərin orta nöqtələri olarsa, KLMN paraleloqramdır:

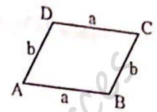


Paraleloqramlar

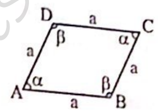
- Qarşı tərəfləri bir-birinə bərabər və paraleldir.
- Diaqonallar tənbölən deyil.
- Diaqonalların uzunluqları fərqlidir.
- Qarşılıqlı bucaqlar bərabərdir.
- Diaqonal paraleloqramı iki bərabər üçbucağa ayırır.
- Paraleloqramda tərəflərin nisbəti, hündürlükləri nisbətinin tərs qiymətinə bərabərdir.

$\left(\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}\right)$

1. $P = 2(a + b)$

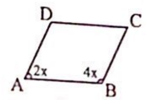


2. $\alpha + \beta = 180^0$



Məsələ:

Şəkildə verilənlərə əsasən x-i tapın



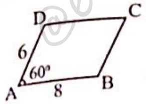
Həlli:

$2x + 4x = 180^0$

$6x = 180^0$

$x = 30^0$

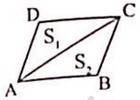
Məsələ 2.
Şəkildə verilənlərə görə paraleloqramın sahəsini və perimetrini tapın:



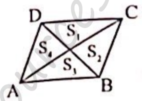
Həlli:

$S_{(ABCD)} = 6\cdot 4\cdot \sin 60^\circ = 24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}\ sm^2$ $\quad P = 2(a+b) = 2(8+6) = 28\ sm$

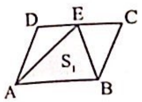
3. $S_1 = S_2 = \frac{S_{(ABCD)}}{2}$



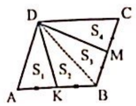
4. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S_{(ABCD)}}{4}$



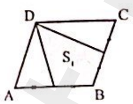
5. $E \in |DC|$, $\quad S_1 = \frac{S_{(ABCD)}}{2}$



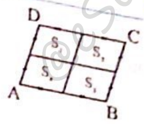
6. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S_{(ABCD)}}{4}$ burada, $AK = KB$ və $BM = MC$



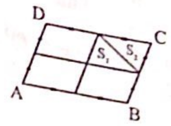
7. $S_1 = \frac{S_{(ABCD)}}{2}$



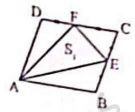
8. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S_{(ABCD)}}{4}$



9. $S_1 = S_2 = \frac{S_{(ABCD)}}{8}$

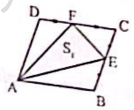


10. $S_1 = \frac{3}{8} S_{(ABCD)}$



Məsələ:
ABCD paraleloqramında $S_{(ABCD)} = 40\ sm^2$, $DF = FC$, $CE = EB$ olarsa,

$S(AFE) = ?$

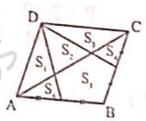


Həlli:

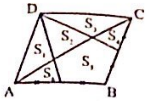
$S_{\Delta AFE} = \frac{3}{8} S_{(ABCD)} = \frac{3}{8}\cdot 40 = 15\ sm^2$

11. $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S_{(ABCD)}}{6}$ $\quad S_4 = S_6 = \frac{S_{(ABCD)}}{12}$

$S_5 = \frac{S_{(ABCD)}}{3}$



Məsələ:
ABCD paraleloqramında $S_{(ABCD)} = 60\ sm^2$ olarsa, şəkildə qeyd edilmiş sahələri tapın.

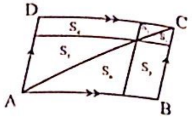


Həlli:

$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{60}{6} = 10\ sm^2$

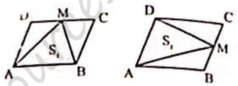
$S_4 = S_6 = \frac{60}{12} = 5\ sm^2 \quad S_5 = \frac{60}{3} = 20\ sm^2$

12. $S_1 = S_2$,
$S_3 = S_4$,
$S_5 = S_6$



13. İxtiyari $M \in DC$ və ya $M \in$

$S_1 = \frac{S_{(ABCD)}}{2}$

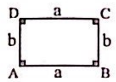


Düzbucaqlı

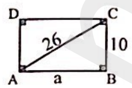
✔ *Paraleloqramın bütün xassələri düzbucaqlı üçün də doğrudur.*

1. $S_{(ABCD)} = a \cdot b$

$P_{(ABCD)} = 2(a + b)$



Məsələ:
ABCD düzbucaqlısında AC = 26 sm, BC = 10 sm olarsa, düzbucaqlının perimetrini və sahəsini tapın.



Həlli:

$26^2 = a^2 + 10^2 \qquad P = 2(a + b)$

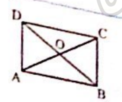
$676 - 100 = a^2 \qquad P = 2(10 + 24)$

$576 = a^2 \qquad P = 2 \cdot 34 = 68$ sm

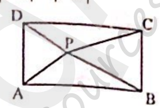
$a = 24\ sm^2$

$S_{(ABCD)} = a \cdot b = 24 \cdot 10 = 240\ sm^2$

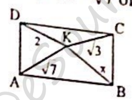
2. $|AC| = |BD|$, AD=a, DC=b olarsa,
$|AC| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$|OA| = |OC| = |OB| = |OD|$
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$



3. P nöqtəsi düzbucaqlının daxilində olduqda,
$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$



Məsələ:
ABCD düzbucaqlısında $DK = 2$, $KC = \sqrt{3}$, $AK = \sqrt{7}$ olarsa, $BK = x = ?$



Həlli:

$(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{3})^2 = 2^2 + x^2$

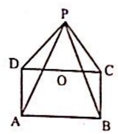
$7 + 3 = 4 + x^2$

$10 = 4 + x^2$

$x^2 = 6$

$x = \sqrt{6}$

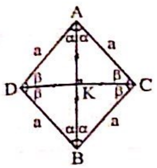
4. P nöqtəsi düzbucaqlının xaricində olduqda,
$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$



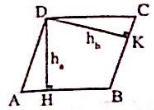
Romb

1. Paraleloqramın bütün xassələri romba da aiddir.
2. Bütün tərəflər bərabərdir
3. Diaqonallar tənböləndir.
4. Diaqonallar rombu iki bir-birinə bərabər olan bərabəryanlı üçbucaqlara ayırır.

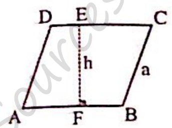
1. $h_a = h_b$



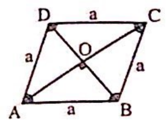
2. $S_{(ABCD)} = a \cdot h$



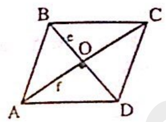
3. $P_{(ABCD)} = 4 \cdot a$



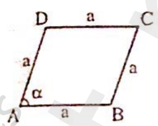
4. $|AC| \perp |BD|$, $|AC| \neq |BD|$
$\angle AOB = 90^0$



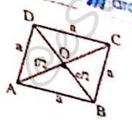
5. $S_{(ABCD)} = \frac{e \cdot f}{2}$
$|OA|=|OC|$ və $|OB|=|OD|$



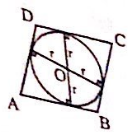
6. $S_{(ABCD)} = a^2 \sin\alpha$



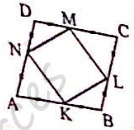
7. $e^2 + f^2 = 4a^2$



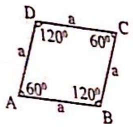
8. $h = \frac{e \cdot f}{2a}$ $h = 2r$



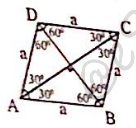
9. KLMN - düzbucaqlıdır.



10. ABCD rombunda,
$AB=BC=CD=AD=a$,
$A = 60^0$ olarsa,
$BD = a$ və $AC = a\sqrt{3}$



$S_{(ABCD)} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$



Məsələ 1:
Diaqonalları 10 və 24 sm olan rombun sahəsini perimetrini və daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

Həlli:

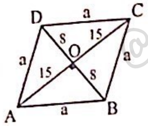
$S_{(ABCD)} = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120\ sm^2$

$e^2 + f^2 = 4a^2$
$10^2 + 24^2 = 4a^2$
$100 + 576 = 4a^2$
$676 = 4a^2$
$a^2 = 169$
$a = 13$

$P = 4a$
$P = 4 \cdot 13$
$P = 52\ sm$

$h = 2r$
$h = \frac{e \cdot f}{2a} = \frac{24 \cdot 10}{2 \cdot 13} = \frac{120}{13}; \quad h = \frac{120}{13}$
$r = \frac{h}{2} = \frac{60}{13}$

Məsələ 2.
Diaqonalları 16 və 30 sm olan rombun perimetrini sahəsini, hündürlüyünü və daxilə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.



$15^2 + 8^2 = a^2$
$a = 17\ sm$

$P = 4a$
$P = 4 \cdot 17$
$P = 68\ sm$

$S_{(ABCD)} = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240\ sm^2$

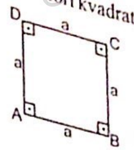
$S_{(ABCD)} = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot h\ ; \quad \frac{30 \cdot 16}{2} = 17 \cdot h\ ;$

$h = \frac{240}{17 \cdot 2} = 2r\ ;\ r = \frac{120}{17}$

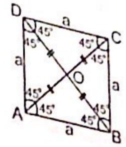
Kvadrat

Paraleloqramın, rombun və düzbucaqlının bütün xassələri kvadrata da aiddir.

1. $S_{(ABCD)} = a^2$
$P_{(ABCD)} = 4a$



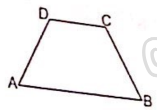
2. $|AC| = |BD| = a\sqrt{2} = e = f$
$S_{(ABCD)} = \frac{e^2}{2}$
burada, e və f -diaqonalların uzunluğudur.



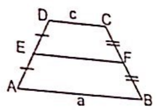
Məsələ:
Diaqonalı $\sqrt{6}$ sm olan kvadratın sahəsini və perimetrini tapın.
Həlli:
$a^2 + a^2 = (\sqrt{6})^2 \Rightarrow 2a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{3}$
$P = 4a = 4\sqrt{3}\ sm$
$S = \frac{e^2}{2} = \frac{(\sqrt{6})^2}{2} = \frac{6}{2} = 3\ sm$

Trapesiya

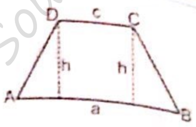
1. $AB \parallel CD$-dir.



2. EF - orta xətdir.
$|EF| = \frac{a+c}{2}$

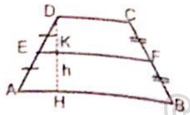


3. $S_{(ABCD)} = \frac{a+c}{2} \cdot h$

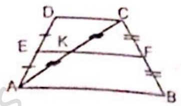


4. $S_{(ABCD)} = |EF| \cdot h$

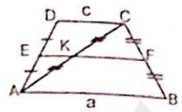
$|DK| = |KH| = \frac{h}{2}$



5. Orta xətt dioqanalları yarı bölür. $|AK| = |KC|$



6. $|EK| = \frac{c}{2}$; $|KF| = \frac{a}{2}$

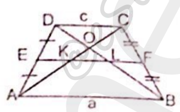


7. $|AK| = |KC|$, $|LB| = |LD|$

$|EK| = |LF| = \frac{c}{2}$

$|EL| = |KF| = \frac{a}{2}$

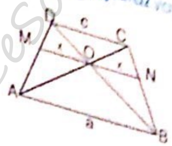
$|KL| = \frac{a-c}{2}$



8. $MN \parallel AB$ -dır.

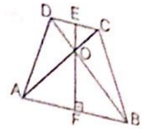
$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ və

$x = \frac{a \cdot c}{a+c}$; $|MN| = \frac{2a \cdot c}{a+c}$



9. $|OE| = \frac{c \cdot h}{a+c}$;

$|OF| = \frac{a \cdot h}{a+c}$



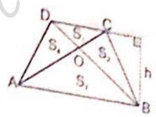
10. İxtiyari trapesiyada

$S_{(ABD)} = S_{(ABC)}$

$S_3 + S_4 = S_1 + S_2$

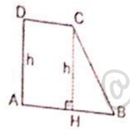
$S_2 = S_4 = \sqrt{S_1 \cdot S_3}$

$S_{(ABCD)} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3}\right)^2$



11. Düzbucaqlı trapesiya

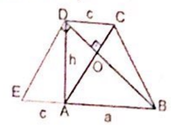
$\angle A = \angle D = 90^0$



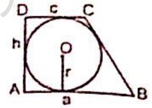
12. Düzbucaqlı trapesiyada diaqonallar perpendikulyar olarsa,

$|ED| \perp |BD|$

$h^2 = a \cdot c$ -dir.



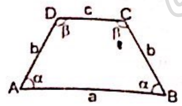
13. Düzbucaqlı trapesiyanın daxilində çevrə çəkmək olarsa,



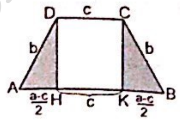
$a = \dfrac{c \cdot r}{c - r}$; $c = \dfrac{a \cdot r}{a - r}$

$r = \dfrac{a \cdot c}{a + c}$; $h = 2r$

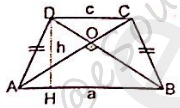
14. Bərabəryanlı trapesiyada:
$|AD| = |BC| = b$
$\angle A = \angle B = \alpha$



15. $\Delta DAH = \Delta CBK$

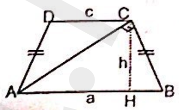


16. Diaqonalları perpendikulyar olan bərabəryanlı trapesiya



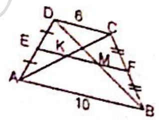
$h = \dfrac{a + c}{2}$-dir.

17. Diaqonallar yan tərəflərə perpendikulyar olarsa,



$h = \dfrac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}$

Məsələ 1:
$DC = c = 6$, $AB = a = 10$ olarsa, $EF = ?$, $KM = ?$, $EK = ?$

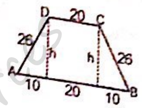


$EF = \dfrac{a + c}{2} = \dfrac{10 + 6}{2} = 8$

$KM = \dfrac{a - c}{2} = \dfrac{10 - 6}{2} = 2$

$EK = \dfrac{c}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$; $KF = \dfrac{a}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

Məsələ 2:
Şəklə əsasən, $S_{(ABCD)} = ?$



Həlli:
$26^2 = 10^2 + h^2 \Rightarrow h = 24$

$S_{(ABCD)} = \dfrac{a + c}{2} h = \dfrac{20 + 40}{2} \cdot 24 = 720 sm^2$

Məsələ 3:
Diaqonalları perpendikulyar olan düzbucaqlı ABCD trapesiyasında, DC=4 sm, AB=9 sm olarsa, $S_{(ABCD)} = ?$

Həlli:
$h^2 = ac$
$h = \sqrt{9 \cdot 4} = 6 sm$
$S_{(ABCD)} = \dfrac{a + c}{2} h = \dfrac{9 + 4}{2} \cdot 6 = 39 sm^2$

Çoxbucaqlılar

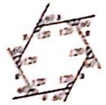
Çoxbucaqlı n tərəfli olarsa,

- $(n-2)180^\circ$ daxili bucaqlarının cəmi
- 360° xarici bucaqlarının cəmi
- $\frac{n(n-3)}{2}$ diaqonallarının sayı
- $(n-4)180^\circ$ ulduzlu çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi

Düzgün çoxbucaqlılar

- Xarici bucaq $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$
- Daxili bucaq $\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$

1. Xarici bucaqları bərabərdir.
2. Daxili bucaqları bərabərdir.
3. Tərəflərin uzunluqları eynidir.



- Düzgün altıbucaqlının bir xarici bucağı:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

- Daxili bucağı:

$$\beta = \frac{180^\circ(6-2)}{6} = \frac{180^\circ \cdot 4}{6} = 120^\circ$$

- Qabarıq altıbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi $(6-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ$
- Qabarıq səkkizbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi $(8-2)\cdot 180^\circ = 6\cdot 180^\circ = 1080^\circ$
- Altıbucaqlının diaqonallarının sayı: $\frac{6(6-3)}{2} = 9$

- Doqquzbucaqlının diaqonallarının sayı:

$$\frac{9(9-3)}{2} = \frac{9\cdot 6}{2} = 27$$

- Düzgün beşbucaqlının xarici bucağı:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

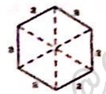
- Düzgün doqquzbucaqlının xarici bucağı:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

- Düzgün on iki bucaqlının xarici bucağı

$$\alpha = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

Düzgün altıbucaqlı



$P = 6a,$

$$S = 6\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

Kiçik diaqonal $d_k = a\sqrt{3}$,

Böyük diaqonal $d_b = 2a$,

Məsələ:
Perimetri 24 sm olan düzgün altıbucaqlının tərəfini və sahəsini tapın.

Həlli:

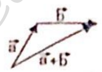
$P = 6a$

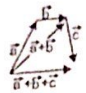
$24 = 6a$

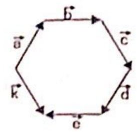
$a = 4$ sm

$$S = 6\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = 6\left(\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\right) = 24\sqrt{3}$$

Vektorlar. Koordinatlar metodu



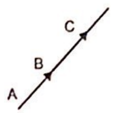




$\vec{k}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\vec{c}+\vec{a})+\vec{b}$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
5. $\vec{n}\cdot(m\cdot\vec{a})=m\cdot(n\vec{a})=(m\cdot n)\vec{a}$
6. $(n+m)\vec{a}=n\vec{a}+m\vec{a}$
7. $n(\vec{a}+\vec{b})=n\vec{a}+n\vec{b}$

✓ Vektorun bir ədəd ilə hasili $\overline{AC}=k\cdot\overline{AB}$ $\quad |\overline{AC}|=|k|\cdot|\overline{AB}|$



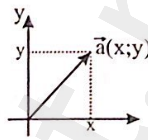
$k>0$ olarsa, $\overline{AB}$ və $\overline{AC}$ eyni istiqamətlidir.

$k<0$ olduqda isə, $\overline{AB}$ və $\overline{AC}$ əks istiqamətli vektorlardır.

$\overline{AB}=k\cdot\overline{CD}$, $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$

✓ **Vektorun uzunluğu** (mütləq qiyməti) $\vec{a}(x,y)$ vektorunun uzunluğu aşağıdakı kimi tapılır:

$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$



Məsələ:
$\vec{a}(5, 12)$ isə, $\vec{a}$ vektorunun uzunluğunu tapın.

Həlli:
$|\vec{a}|=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

Vahid vektor

Uzunluğu bir olan vektora vahid vektor deyilir.

$\vec{a}=(x;y)$, $|\vec{a}|=1$ olarsa, $\vec{a}$ vektoru vahid vektor adlanır.

$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}=1$

• $\vec{a}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$ isə, $|\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{9}+\frac{7}{9}}=1$

$\vec{a}$ - vektoru vahid vektordur.

• $\vec{k}=(\sin\alpha, \cos\alpha)$ $\quad |\vec{k}|=\sqrt{(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2}=1$,

$\vec{k}$ - vektoru vahid vektordur.

$\vec{a}(x_1;y_1)$ və $\vec{b}=(x_2;y_2)$

$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;y_1+y_2)$; $\quad \vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;y_1-y_2)$

$k\in R$ və $k\neq 0$

$k\vec{a}=(kx_1;kx_2)$

Məsələ 1:
$\vec{a}(3;2)$ və $\vec{b}(4;6)$ vektorlarının cəminin uzunluğunu tapın.

Həlli:
$\vec{a}+\vec{b}=(3+4;2+6)=(7;8)$ $\quad |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7^2+8^2}=\sqrt{113}$

Məsələ 2:
$\vec{a}(8;6)$ və $\vec{b}(4;3)$ isə $|\vec{a}-\vec{b}|=?$

Həlli:
$\vec{a}-\vec{b}=(8-4;6-3)=(4;3)$ $\quad |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

✓ **Kollenіar vektorlar**

$\vec{a}=(x_1;y_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2)$ və $\vec{a}\,//\,\vec{b}$ olarsa, $\vec{b}=k\vec{a}$ və $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ olur.

Məsələ:

$\vec{a}\,(x;-3)$ və $\vec{b}\,(2;6)$ və $\vec{a}\,//\,\vec{b}$ isə, $x=?$

Həlli:

$\frac{x}{2}=\frac{-3}{6}$; $x=-1$

✓ **İki vektorun paralellik əlaməti:**

$\vec{u}=(a, b, c)$, $\vec{v}=(p, q, r)$

$\vec{u}\,//\,\vec{v}$ olarsa, $\vec{u}=k\,\vec{v}$

$\vec{A}\,//\,\vec{B}$ olarsa, $\vec{A}\cdot\vec{B}=|A|\cdot|B|\cdot\cos 0^0$ $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|$

Məsələ:

$\vec{a}\,(-3;6;9)$ və $\vec{b}\,(2;-4;m)$ $\vec{a}\,//\,\vec{b}$ isə, $m=?$

Həlli:

$\frac{-3}{2}=\frac{6}{-4}=\frac{-9}{m}$; $\frac{6}{-4}=\frac{-9}{m}$; $m=-6$

✓ **Perpendikulyarlıq əlaməti:**

$\vec{A}\,(a;b)$, $\vec{B}\,(c;d)$

$ac+bd=0$

$\vec{A}\perp\vec{B}$ olarsa $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos 90^0$

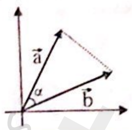
✓ **Müstəvi üzərində vektorların skalyar hasili**

$\vec{a}=(x_1;y_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$ və ya $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

$$\cos\alpha=\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}$$

$0<\alpha<180^0$



Məsələ:

$\vec{a}\,(-2;0)$ və $\vec{b}\,(-\sqrt{3};3)$ vektorları arasındakı bucağı tapın.

Həlli:

$$\cos\alpha=\frac{-2\cdot(-\sqrt{3})+0\cdot 3}{\sqrt{2^2+0^2}\cdot\sqrt{(-\sqrt{3})^2+3}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

$\cos\alpha=\frac{1}{2}$ isə, $\alpha=60^0$

✓ **Sklayar hasilin xassələri**

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=x_1^{\,2}+y_1^{\,2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$m;n\in R$ üçün

$(m\vec{a})\cdot(n\vec{b})=(m\cdot n)\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$

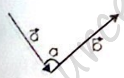
$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(m\vec{b})$

✓ **$\vec{A}$ və $\vec{B}$ vektorları əks istiqamətli olarsa,**

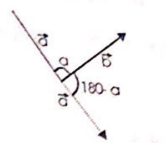
$\vec{A}\cdot\vec{B}=|A|\cdot|B|\cdot\cos 180^0$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=-|\vec{A}||\vec{B}|$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^0-\alpha)$;



$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$

Fəzada vektorlar

✓ **Vektorların toplanması və çıxılması**

$\bar{u} = (x_1, y_1, z_1)$ və $\bar{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$\bar{u} + \bar{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$\bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + (-\bar{v}) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$

Məsələ:

$\bar{a}(3; 2x-1; y+1)$ və $\bar{b}(z+3; 4; 3)$

$\bar{a} = 2\bar{b}$ isə, $x + y + z = ?$

Həlli:

$2\bar{b} = 2(z+3; 4; 3) = (2z+6; 8; 6)$

$\bar{a} = 2\bar{b} \Rightarrow (3; 2x-1; y+1) = (2z+6; 8; 6)$

$2z+6=3 \quad 2x-1=8 \quad y+1=6$

$z = -\frac{3}{2}; \quad x = \frac{9}{2}; \quad y=5 \quad x+y+z = \frac{9}{2}+5-\frac{3}{2} = \frac{16}{2} = 8$

✓ **Vektor ilə ədədin hasili**

$\bar{u} = (a; b; c)$ vektoru ilə bir k ədədinin hasili

$k \cdot \bar{u} = (ka, kb, kc)$ olar.

$k > 0$ olarsa, $k \cdot \bar{u}$ ilə $\bar{u}$ eyni istiqamətli olar.

$k < 0$ olarsa, $k \cdot \bar{u}$ ilə $\bar{u}$ əks istiqamətli olar.

$|k \cdot \bar{u}| = |k| \cdot |\bar{u}|$

✓ **Vektorların skalyar hasili**

$\bar{u} = (x_1, y_1, z_1)$ və $\bar{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$|\bar{u}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \qquad |\bar{u}| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$

$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \bar{b} = (x_2, y_2, z_2) \quad \bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$

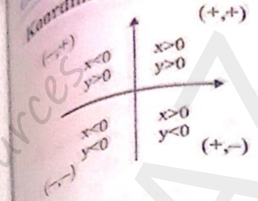
$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \qquad \bar{b} \cdot \bar{a} = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1$

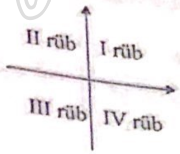
$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

$\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$

$\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) \neq (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c}$

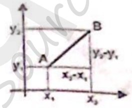
Koordinatlar metodu





İki nöqtə arasındakı məsafə:

$A(x_1; y_1)$ və $B(x_2; y_2)$ nöqtələri arasındakı məsafə aşağıdakı kimidir.



$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Fəzada iki nöqtə arasındakı məsafə:

$A(x_1, y_1, z_1)$ və $B(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri verilmiş olsun. Onda

$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

$\bar{u} = (a; b; c)$ olarsa, $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Məsələ 1.

$A(-1; 7)$ və $B(3; 4)$ nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

Həlli:

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$AB = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 7)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$AB = 5$ sm

Məsələ 2.
$\vec{a}$ (-3; 4; -12) vektorun uzunluğunu tapın.

Həlli:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

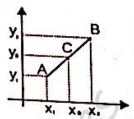
✓ Düz xətt parçasının orta nöqtəsi

Uc nöqtələrinin koordinatları $A(x_1; y_1)$ və $B(x_2; y_2)$ olan $|AB|$ düz xətt parçasının orta nöqtəsi $C(x_0; y_0)$ olarsa,

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$C(x_0; y_0) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



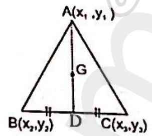
✓ Üçbucağın sahəsi və ağırlıq mərkəzi

$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ və $C(x_3; y_3)$ ΔABC-nin təpə nöqtələri, G üçbucağın ağırlıq mərkəzi, D isə BC tərəfinin orta nöqtəsi olsun. Onda,

$$D(x_0; y_0) = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}; \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

$$S_{(ABC)} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$



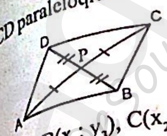
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_3y_2 + x_2y_1)]$$

Məsələ:
Təpə nöqtələri A(7; 2), B(1,3), C(4; 1) olan üçbucağın sahəsini tapın.
Həlli:

$$S_{(ABC)} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(21 + 1 + 8 - 7 - 12 - 2) = \frac{9}{2}$$

$$S_{(ABC)} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ sm}^2$$

ABCD paraleloqramdır. |AC| və |BD| -nin orta nöqtəsi P-dir. $P(x_0; y_0)$ olarsa,



$A(x_4; y_4)$, $B(x_3; y_3)$, $C(x_2; y_2)$, $D(x_1; y_1)$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{x_2 + x_4}{2} \Rightarrow x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{y_2 + y_4}{2} \Rightarrow y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

İki nöqtəsi mə'lum olan düz xəttin bucaq əmsalı:

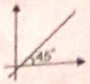
$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ k -bucaq əmsalıdır.}$$

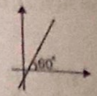
Məsələ:
A(2; 4) və B(-4; 8) nöqtələrindən keçən düz xəttin bucaq əmsalını tapın.
Həlli:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 4}{-4 - 2} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

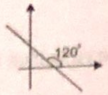
Şəkildə göstərilən düz xəttin bucaq əmsalı:



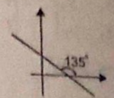
$k = tg45^0 = 1$



$k = tg60^0 = \sqrt{3}$



$k = tg120^0 = -\sqrt{3}$

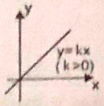


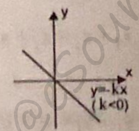
$k = tg135^0 = -1$

✓ **Düz xətt tənlikləri**

1. Başlanğıc nöqtəsindən keçən düz xətt

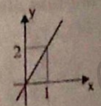
$y = kx$, burada, $k = tg\alpha$, α -meyl bucağıdır. $k = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$





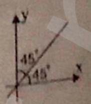
Məsələ 1:
$y=2x$ tənliyi ilə verilmiş düz xəttin qrafikini çəkin.
Həlli:

Bucaq əmsalı $k=2>0$ olduğundan

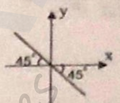


Məsələ 2:
$y=x$ tənliyi ilə verilmiş düz xəttin qrafikini çəkin.
Həlli:

Burada $k=1$ olduğundan, qrafik belə olar.



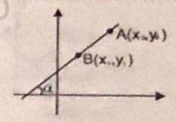
Məsələ 3:
$y=-x$ tənliyi ilə verilmiş düz xəttin qrafikini çəkin.
Həlli:
$y=-x$ tənliyi ilə verilmiş düz xəttin bucaq əmsalı $k=-1<0$ olduğundan, qrafiki yandakı kimi olacaqdır.



✓ **Bir nöqtəsi və bucaq əmsalı məlum olan düz xəttin tənliyi:**

$A(x_0; y_0)$ və bucaq əmsalı k olan düz xəttin tənliyi

$y - y_0 = k(x - x_0)$



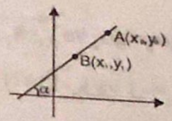
Məsələ:
A(2; -3) nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı 2 olan düz xəttin tənliyini tapın.
Həlli:
A(2; -3) və k=2 $\quad y - y_0 = k(x - x_0) \quad y - (-3) = 2(x - 2) \quad y = 2x - 7$

✓ **İki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyi:**

$A(x_0; y_0)$ və $B(x_1; y_1)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi aşağıdakı kimidir:

$$\frac{y - y_1}{y_0 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$k = tg\alpha = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

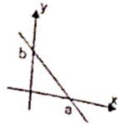


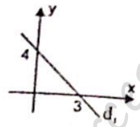
Məsələ 1:
A(2; 3) və B(-2; 1) nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.
Həlli:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-(-2)}{2-(-2)} \Rightarrow 2y - x - 4 = 0$$

✓ Düz xəttin parçalarla tənliyi:

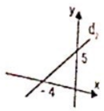
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$





d_1: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

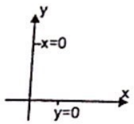
$4x+3y=12$

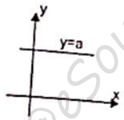


d_2: $\frac{x}{-4}+\frac{y}{5}=1$

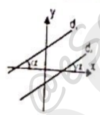
$-5x+4y=20$

✓ Xüsusi hallar:





d_1 düz xəttinin tənliyi $a_1x+b_1y+c_1=0$,
d_2 düz xəttinin tənliyi isə, $a_2x+b_2y+c_2=0$ d_1 düz xəttinin bucaq əmsalı k_1,
d_2 düz xəttinin bucaq əmsalı k_2-dir.



Əgər $d_1 \| d_2$ olarsa, $tg\alpha_1=tg\alpha_2$ və $k_1=k_2$ olar.

$d_1 \perp d_2$ olarsa, $tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2=-1$ və $k_1 \cdot k_2=-1$ olar.

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ olarsa, d_1 və d_2 düz xətləri üst - üstə düşür. $d_1=d_2$

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ olarsa, $d_1 \| d_2$ olar. $k_1=k_2$-dir.

$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ olarsa, d_1 və d_2 yalnız bir nöqtədə kəsişirlər.

✓ İki düz xətt arasındakı bucağın tapılması.

ABC üçbucağının xarici bucağı θ olarsa,

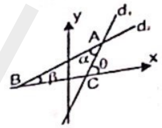
$\alpha+\beta=\theta$ $\quad tg\theta=k_1$

$\alpha=\theta-\beta$ $\quad tg\beta=k_2$

$tg\alpha=tg(\theta-\beta)$

$tg\alpha=\frac{tg\theta-tg\beta}{1+tg\theta\cdot tg\beta}$

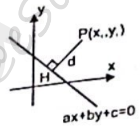
$tg\alpha=\frac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}$



✓ Verilmiş nöqtədən verilmiş düz xəttə qədər məsafə

$P(x_1;y_1)$ nöqtəsindən $ax+by+c=0$ düz xəttinə qədər olan məsafə d olsun.
Onda,

$$|PH|=d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



Məsələ:
A(2; 1) nöqtəsindən $3x-4y+18=0$ düz xəttinə qədər olan məsafəni tapın.

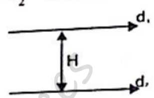
Həlli:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3\cdot2-4\cdot1+18|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

✓ İki paralel düz xətt arasındakı məsafə

d_1 düz xətti $ax+by+c_1=0$
d_2 düz xətti $ax+by+c_2=0$ olsun. Onda

$$H=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



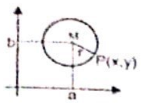
Məsələ:
$3x-4y-20=0$ və $3x-4y-6=0$ paralel düz xətləri arasındakı məsafəni tapın.

Həlli:

$$H=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|20-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{14}{5}=2,8$$

✓ Çevrənin tənliyi

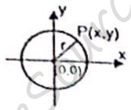
1. Mərkəzi M(a; b) və radiusu r olan çevrənin tənliyi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ kimidir.



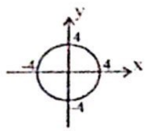
Məsələ:
Mərkəzi (4; 3) və radiusu 5 sm olan çevrənin tənliyini yazın.
Həlli:
$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$

2. Çevrənin mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşərsə, yəni M(0;0) olarsa, çevrənin tənliyi aşağıdakı kimi olar:

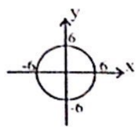
$x^2 + y^2 = r^2$



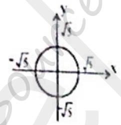
Məsələn:



$x^2 + y^2 = 16$



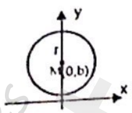
$x^2 + y^2 = 36$



$x^2 + y^2 = 5$

3. Çevrənin mərkəzi y oxu üzərindədirsə, yəni M(0; b); (b≠0)

$x^2 + (y - b)^2 = r^2$



4. Çevrənin mərkəzi x oxu üzərindədirsə, yəni M(a; 0) (a≠0) olarsa,

$(x-a)^2 + y^2 = r^2$

✓ **Çevrənin ümumi tənliyi:**

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 = r^2$
$x^2 + y^2 - 2ax - 2yb + a^2 + b^2 - r^2 = 0$
$-2a = A$, $-2b = B$ və $a^2 + b^2 - r^2 = C$ qəbul etsək,
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
M(a; b) çevrənin mərkəzidirsə,
$$M(a;b) = \left(-\frac{A}{2}; -\frac{B}{2}\right)$$
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$$

Məsələ 1:
$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ tənliyi ilə verilən çevrənin mərkəzini və radiusunu tapın.

Həlli:
$$M\left(-\frac{A}{2}; -\frac{B}{2}\right) = \left(-\frac{(-2)}{2}; -\frac{4}{2}\right) = (1; -2)$$
M(1; -2)
A=-2, B=4, C = -4
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4 \cdot 4} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ sm}$$

Məsələ 2.
$x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$ tənliyi ilə verilən çevrənin radiusunu tapın.

Həlli:
$A = 0, \quad B = -4 \quad , \quad C = -12$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-4)^2 - 4(-12)} = \frac{1}{2}\sqrt{16+48} =$$

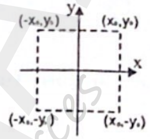
$$= \frac{1}{2}\sqrt{64} = \frac{8}{2} = 4$$

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$A^2 + B^2 - 4C > 0$ olarsa, bu çevrədir.
$A^2 + B^2 - 4C < 0$ olarsa, belə çevrə yoxdur.
$A^2 + B^2 - 4C = 0$ isə, nöqtəni bildirir.
$A^2 = 4C$ olarsa, çevrə x oxuna toxunur.
$B^2 = 4C$ olarsa, çevrə y oxuna toxunur.
$A^2 = B^2 = 4C$ olarsa, çevrə hər iki oxa toxunur.

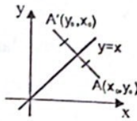
Simmetriya

- $A(x_0; y_0)$ nöqtəsinə OX -oxuna görə simmetrik olan nöqtə $A'(x_0; -y_0)$
- $A(x_0; y_0)$ nöqtəsinə OY oxuna görə simmetrik olan nöqtə $A'(-x_0; y_0)$
- $A(x_0; y_0)$ nöqtəsinə (0; 0) nöqtəsinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(-x_0; -y_0)$



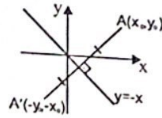
$A(6; 8)$ nöqtəsinə (0; 0) nöqtəsinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(-6; -8)$-dir.
$A(6; 8)$ nöqtəsinə OY oxuna görə simmetrik olan nöqtə $A'(-6; 8)$

- $A(x_0; y_0)$ nöqtəsinə $y=x$ düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(y_0; x_0)$-dir.



$A(6; 8)$ nöqtəsinə $y=x$ düz xəttinə görə simmetriki olan nöqtə $A'(8; 6)$-dır.

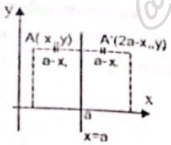
- $A(x_0; y_0)$ nöqtəsinə $y=-x$ düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(-y_0; -x_0)$-dir.



$A(9; 4)$ nöqtəsinə $y=-x$ düz xəttinə görə simmetriki olan nöqtə $A'(-4;-9)$ -dir.

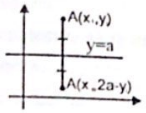
- $A(x_1; y_1)$ nöqtəsinə $P(a; b)$ nöqtəsinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(2a-x_1; 2b-y_1)$ -dir.
$A(3; 4)$ nöqtəsinə $P(6; 9)$ nöqtəsinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(2\cdot 6 - 3; 2\cdot 9 - 4) \Rightarrow A'(9; 14)$ -dir.

✓ $A(x_1; y_1)$ nöqtəsinə x=a düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(2a-x_1; y_1)$



A(8; 3) nöqtəsinə x=6 düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(2\cdot 6-8; 3)=A'(4; 3)$ -dir.

✓ $A(x_1; y_1)$ nöqtəsinə y=a düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(x; 2a-y_1)$



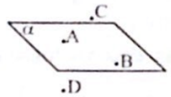
A(6;3) nöqtəsinə y=5 düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtə $A'(6; 2\cdot 5-3)=A'(6; 7)$ -dir.

Fəzada düz xətlər və müstəvilər

Stereometriya - həndəsənin fəza fiqurlarının xassələrini öyrənən bölməsidir.

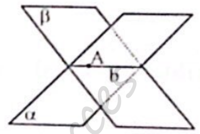
Stereometriyanın aşağıdakı aksiomları vardır:

1. İxtiyari müstəviyə aid olan nöqtələr və ona aid olmayan nöqtələr vardır. Şəkildə $A\in\alpha$, $B\in\alpha$, $C\notin\alpha$, $D\notin\alpha$

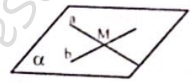


2. İki müxtəlif müstəvinin bir ortaq nöqtəsi varsa, onlar bu nöqtədən keçən düz xətt boyunca kəsişirlər. Yəni

$$A\in\alpha, A\in\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha\cap\beta=b \\ A\in b \end{cases}$$

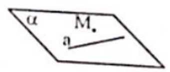


3. Kəsişən iki düz xətdən bir və yalnız bir müstəvi keçirmək olar. Yəni $a\cap b=M$, $a\in\alpha$, $b\in\alpha$ şərtini ödəyən α müstəvisi yeganədir.



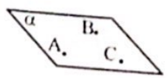
Teorem 1:
Düz xətt və onun üzərində olamayan nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçirmək olar.

$$M\notin a \Rightarrow \begin{cases} a\subset\alpha \\ M\in\alpha \end{cases}$$



şərtini ödəyən α müstəvisi yeganədir.

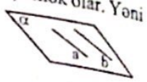
Teorem 2:
Bir düz xətt üzərində olamayan üç nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçirmək olar. Yə'ni A, B, C nöqtələri üçün $A\in\alpha$, $B\in\alpha$, $C\in\alpha$ olan yeganə α müstəvisini keçirmək olar.



Teorem 3:
İki paralel düz xətdən bir və yalnız bir müstəvi keçirmək olar. Yəni

$$a \| b \Rightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \end{cases} \text{ şərtini}$$

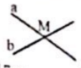
ödəyən α müstəvisi yeganədir.



Fəzada düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyəti

Fəzada düz xətlər kəsişə bilər, paralel və ya çarpaz ola bilər.

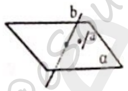
Tərif: *Fəzada iki düz xəttin yalnız bir ortaq nöqtəsi varsa, bu düz xətlər kəsişir.*



Şəkildə $a \cap b = M$ olduğundan bu düz xətlər kəsişirlər.

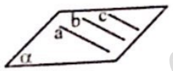
Tərif: *Bir müstəvi üzərində olub heç bir ortaq nöqtəsi olamayan və ya üst-üstə düşən düz xətlərə paralel düz xətlər deyilir. Yəni $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$ və $a \cap b = \varnothing \Rightarrow a \| b$*

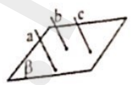
Tərif: *Bir müstəvi üzərində yerləşməyən və ortaq nöqtələri olmayan düz xətlərə çarpaz düz xətlər deyilir.*
Şəkildə $a \subset \alpha$, $b \not\subset \alpha$ və $a \cap b = \varnothing$



Teorem:
İki düz xətt üçüncü düz xəttə paraleldirsə, onda bu iki düz xətt paraleldir.

$$\text{Yəni} \begin{cases} a \| \alpha \\ b \| \alpha \end{cases} \Rightarrow a \| b \text{ olar.}$$

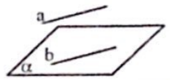




Tərif:
Düz xətt və müstəvinin ortaq nöqtəsi yoxdursa, onda düz xətt müstəviyə paraleldir. a düz xəttinin α müstəvisinə paralelliyi belə yazılır. $a \| \alpha$

Teorem:
(Düz xətt və müstəvinin paralellik əlaməti). Düz xətt müstəvi üzərindəki hər hansı düz xəttə paraleldirsə, onda həmin düz xətt müstəviyə də paraleldir. Teoremi qısaca olaraq belə yazmaq olar:

$$\begin{cases} a \| b \\ b \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow a \| \alpha$$



Bu teoremin tərsi də doğrudur.

Müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti

İki müstəvi aşağıdakı qarşılıqlı vəziyyətlərdə ola bilər:

1. İki müstəvinin bir ortaq nöqtəsi var. Belə müstəvilər həmin nöqtədən keçən düz xətt boyunca kəsişirlər.

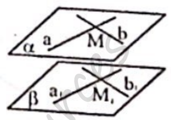
2. İki müstəvinin heç bir ortaq nöqtəsi yoxdur.

3. İki müstəvinin bir düz xətt üzərində olmayan üç ortaq nöqtəsi var. Belə müstəvilər üst-üstə düşür.

Tərif:
Ortaq nöqtəsi olmayan və ya üst-üstə düşən müstəvilərə paralel müstəvilər deyilir. α və β müstəvilərinin paralelliyi $\alpha \| \beta$ kimi işarə olunur.

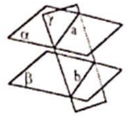
Teorem:
(İki müstəvinin paralellik əlaməti). Bir müstəvinin iki kəsişən düz xətti uyğun olaraq, o biri müstəvinin iki kəsişən düz xəttinə paraleldirsə, onda həmin müstəvilər paraleldir.

$$\begin{cases} a, b \subset \alpha \text{ və } a \cap b = M \\ a \| a_1, b \| b_1 \text{ və } a_1, b_1 \in \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha \| \beta$$



Paralel müstəvilərin xassələri

Teorem. İki paralel müstəvi üçüncü müstəvi ilə kəsişərsə, onda onların kəsişmə xətləri paraleldir. Yəni $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b \Rightarrow a \parallel b$



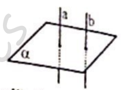
Teorem:

Verilmiş nöqtədən verilmiş müstəviyə yalnız bir paralel müstəvi keçirmək olar. Yə'ni $M \notin \alpha$, $M \in \beta \Rightarrow \beta \parallel \alpha$ şərtini ödəyən β müstəvisi yeganədir.

Teorem:

Əgər iki düz xətt eyni müstəviyə perpendikulyardırsa, onda həmin düz xətlər paraleldir.

Yəni $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$

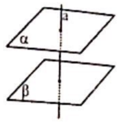


Tərs teorem: Paralel düz xətlərdən birinə perpendikulyar olan müstəvi digər düz xəttə də perpendikulyardır. Yəni $a \parallel b$, $a \perp \alpha \Rightarrow \alpha \perp b$

Teorem: Eyni düz xəttə perpendikulyar olan iki müstəvi paraleldir.

$\alpha \perp a$, $\beta \perp a \Rightarrow \alpha \perp \beta$

Bu teoremin tərsi doğru deyil.

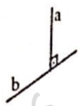


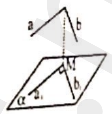
Fəzada düz xətlərin perpendikulyarlığı

Tərif: *Fəzada düz bucaq altında kəsişən iki düz xəttə perpendikulyar düz xətlər deyilir.* Müstəvi üzərində olduğu kimi a və b düz xətlərinin perpendikulyarlığı $a \perp b$ kimi işarə olunur.

Teorem: Kəsişən iki düz xətt uyğun olaraq perpendikulyar iki düz xəttə paralel olarsa, onda onlar perpendikulyardırlar. Yəni

$$\begin{cases} a_1 \perp b_1 \text{ və } a_1 \cap b_1 = M \\ a \parallel a_1,\ b_1 \parallel b_2 \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$

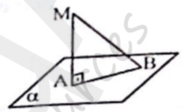




Perpendikulyar və maillər

Tərif: *Müstəvi xaricində götürülmüş nöqtədən bu müstəviyə çəkilmiş perpendikulyarın müstəviyə qədər olan parçasına verilmiş nöqtədən verilmiş müstəviyə çəkilmiş perpendikulyar deyilir.*

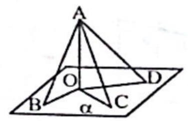
Tərif: *Müstəvini kəsən, lakin ona perpendikulyar olmayan düz xəttə mail deyilir.* α müstəvisi üzərində olmayan M nöqtəsindən bu müstəviyə MA perpendikulyar və MB maili çəkilərsə, A perpendikulyarın, B maililn oturacağı olur. AB parçasına BM mailinin α müstəvisi üzərindəki proyeksiyası deyilir.



Teorem:

Müstəvi xaricindəki nöqtədən müstəviyə perpendikulyar və maillər çəkilərsə;

1. perpendikulyar ixtiyari maildən qısadır. Yəni $AO<AB$, $AO<AC$, $AO<AD$,
2. proyeksiyaları bərabər olan maillər bərabərdir. Yəni $OB=OC \Rightarrow AB=AC$
3. iki maildən proyeksiyası böyük olan mail böyükdür. Yəni $OD>OB \Rightarrow AD>AB$

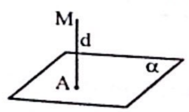


Nöqtədən müstəviyə qədər məsafə

Tərif:

Verilmiş nöqtədən verilmiş müstəviyə qədər çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğuna nöqtədən müstəviyə qədər olan məsafə deyilir.

Şəkildə $AM=d$, M nöqtəsindən α müstəvisinə qədər olan məsafədir.



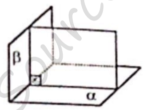
Perpendikulyar müstəvilər. İki müstəvinin perpendikulyarlıq əlaməti

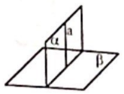
Tərif:

İki kəsişən müstəvinin kəsişmə xəttinə perpendikulyar olan üçüncü müstəvi onları perpendikulyar düz xətlər üzrə kəsərsə, onda kəsişən müstəvilərə perpendikulyar müstəvilər deyilir.

Teorem:

(İki müstəvinin perpendikulyarlıq əlaməti). Müstəviyə perpendikulyar düz xətdən keçən müstəvi, həmin müstəviyə də perpendikulyardır. Yə'ni $a\perp\beta$, $a\subset\alpha\Rightarrow\alpha\perp\beta$



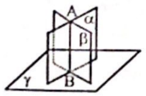


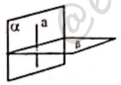
Teorem:

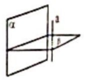
Bir müstəviyə perpendikulyar olan iki müstəvinin kəsişmə xətti həmin müstəviyə perpendikulyardır. Yə'ni $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, $\alpha\cap\beta\Rightarrow AB\perp\gamma$

Teorem:

İki perpendikulyar müstəvidən birinə perpendikulyar olan düz xətt ya o biri müstəvi üzərindədir, ya ona paraleldir. Yəni $\alpha\perp\beta$, $a\perp\beta\Rightarrow a\subset\alpha$ və ya $a\parallel\alpha$



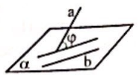




Çarpaz düz xətlər arasındakı bucaq və məsafə

Tərif:

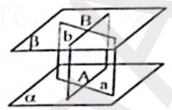
Çarpaz düz xətlərə paralel olmaqla bir nöqtədən çıxan iki şüanın əmələ gətirdiyi eyniadlı bucağa, çarpaz düz xətlər arasındakı bucaq deyilir.



Tərif:

Çarpaz düz xətlərdən hər birinə perpendikulyar olan parçanın uzunluğuna çarpaz düz xətlər arasındakı məsafə deyilir.

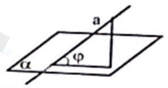
İki çarpaz düz xəttin bir və yalnız bir ortaq perpendikulyarı var və həmin perpendikulyar, bu düz xətlərdən keçən paralel müstəvilərin ortaq perpendikulyarıdır.



Düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq

Tərif: *Düz xətlə onun müstəvi üzərindəki proyeksiyası arasındakı iti bucağa düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq deyilir.*

Şəkildə a düz xətti α müstəvisini A nöqtəsində kəsir. Bu düz xətlə onun həmin müstəvi üzərindəki proyeksiyası arasındakı φ bucağına a düz xətti ilə α müstəvisi arasındakı bucaq deyilir. və $\varphi=(a\wedge\alpha)$ kimi göstərilir.



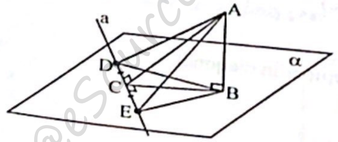
✓ **Üç perpendikulyar haqqında teorem.**

Teorem:

Müstəvi üzərində mailin oturacağından keçirilmiş düz xətt, onun proyeksiyasına perpendikulyardırsa, onda o mailə də perpendikulyardır.

Tərs teorem:

Müstəvi üzərindəki düz xətt mailə perpendikulyardırsa, onda o mailin proyeksiyasına da perpendikulyardır.



Çoxüzlülər

V – həcm, S_{tam} – tam səthin sahəsi, S_{yan} – yan səthin sahəsi, S_{ot} – oturacağın sahəsi, P_{ot} – oturacağın perimetri, $P_{p.k}$ – perpendikulyar kəsiyin perimetri, ℓ – tilin uzunluğu, H – hündürlük

Mail prizma

Prizmanın səthinin sahəsi:

1. $S_{yan} = P_{p.k} \cdot \ell$
2. $S_{tam} = 2S_{ot} + S_{yan}$

Prizmanın həcmi:

3. $V = S_{ot} H = S_{p.k} \cdot \ell$

Düz prizma

Düz prizmanın səthinin sahəsi:

1. $S_{yan} = P_{ot} \cdot \ell \qquad (\ell = H)$
2. $S_{tam} = P_{ot} \cdot \ell + 2S_{ot}$

Düz prizmanın həcmi:

3. $V = S_{ot} \cdot \ell = S_{ot} \cdot H$

Düzbucaqlı paralelepiped

Düzbucaqlı paralelepipedin səthinin sahəsi:

1. $S_{yan} = 2c(a+b)$

Burada a və b -oturacağın tərəfləri, c -isə tildir.

2. $S_{tam} = 2(ab + bc + ac)$
3. $V = abc$

Düzbucaqlı paralelepipedin diaqonalı

4. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

burada d - diaqonaldır.

Piramida

Düzgün piramidanın səthinin sahəsi:

1. $S_{yan} = ph$ burada, p - oturacağın yarımperimetri, h - piramidanın apofemidir.
2. $S_{tam} = S_{yan} + S_{ot}$

Piramidanın həcmi:

3. $V = \frac{1}{3} S_{ot} \cdot H$

Kəsik piramida

Düzgün kəsik piramidanın səthinin sahəsi:

1. $S_{yan} = (p_1 + p_2) \cdot h$ burada, p_1 və p_2 -oturacaqların yarımperimetrləri, h - kəsik piramidanın apofemidir.
2. $S_{tam} = S_{yan} + S_1 + S_2$

S_1 və S_2 - oturacaqların sahələridir.

Kəsik piramidanın həcmi:

3. $V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2\right) \cdot H$

H - kəsik piramidanın hündürlüyüdür.

Düzgün çoxüzlülər

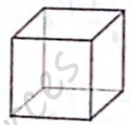
Çoxüzlünün növü	Üzlərin sayı və forması	Tillərin sayı	Təpə nöqtələrin sayı	Bir nöqtədən çıxan til sayı
Tetraedr	4 üzbucaq	6	4	3
Kub	6 kvadrat	12	8	3
Oktaedr	8 üçbucaq	12	6	4
Dodekaedr	12 beşbucaqlı	30	20	3
İkosaedr	20 üçbucaq	30	12	5

e - təpə nöqtələrinin sayı, f - üzlərin sayı, k - tillərin sayı olarsa, Eyler teoreminə görə $e - k + f = 2$ olar.

Aşağıdakı düsturlarda a - tillərin uzunluğu, S - səthin sahəsi, V - həcm, R - xaricə çəkilmiş çevrənin radiusu, r - daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur.

Kub

1. $S = 6a^2$; $H = a$
2. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{a}{2}$
3. $V = a^3$



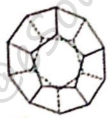
Düzgün tetraedr

1. $S=a^2\sqrt{3}$
2. $R=\frac{a\sqrt{6}}{4}$; $r=\frac{a\sqrt{6}}{12}$
3. $R=3r$, $H=\frac{a\sqrt{6}}{3}$
4. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
5. $S_{yan}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

Oktaedr

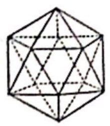
1. $S=2a^2\sqrt{3}$
2. $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $r=\frac{a\sqrt{6}}{6}$; $R=3r$
3. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Dodekaedr



1. $S=3\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}\cdot a^2$
2. $R=\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}\cdot a$
3. $r=\frac{\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}\cdot a$
4. $V=\frac{\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}\cdot a^3$

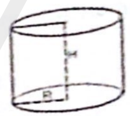
İkosaedr



1. $S=5\sqrt{3}\cdot a^2$
2. $R=\frac{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4}\cdot a$
3. $r=\frac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}\cdot a$
4. $V=\frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}\cdot a^3$

Fırlanma cisimləri

Silindr



1. $S_{yan}=2\pi RH$
2. $S_{tam}=2\pi RH+2\pi R^2=2\pi R(H+R)$
3. $V=\pi R^2H$

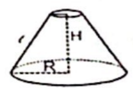
✓ Silindrin diaqonal kəsiyi düzbucaqlıdır.

Konus

1. $S_{yan}=\pi R\ell$
2. $S_{tam}=\pi R(R+\ell)$
3. $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$ burada, R -konusun oturacağının radiusu, ℓ-konusun doğuranı, H-konusun hündürlüyüdür.

✓ Konusun diaqonal kəsiyi bərabəryanlı üçbucaqdır.

Kəsik konus



1. $S_{yan}=\pi\ell(R+r)$
2. $S_{tam}=\pi\ell(R+r)+\pi(R^2+r^2)$

Kəsik konusun həcmi:

3. $V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$ burada, R və r-kəsik konusun oturacaqlarının radiusları,

H -kəsik konusun hündürlüyü, ℓ-kəsik konusun doğuranıdır.

✓ Kəsik konusun diaqonal kəsiyi bərabəryanlı trapesiyadır.

Sfera və kürə

Sferanın sahəsi: 1. $S=4\pi R^2$

Kürənin həcmi: 2. $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

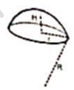
Kürə sektorunun səthinin sahəsi:

$S=\pi R(2H+r)$

Kürə sektorunun həcmi:

$$V=\frac{2\pi R^2 H}{3}$$

Kürə seqmentinin səthinin sahəsi:



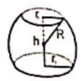
$S_{yan}=2\pi RH=\pi(r^2+H^2)$

$S_{tam}=\pi(2RH+r^2)=\pi(H^2+2r^2)$

Kürə seqmentinin həcmi:

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$$

Kürə qatının səthinin sahəsi:



$S_{yan}=2\pi Rh$

$S_{tam}=2\pi Rh+\pi(r_1^2+r_2^2)$

Kürə qatının həcmi:

$V=\frac{1}{6}\pi(3r_1^2+3r_2^2+h^2)$ burada, R - kürənin radiusu, H - seqmentin hündürlüyü,

h - kürə qatının hündürlüyü, r_1 və r_2 - kürə qatının oturacaqlarının radiusları, - seqmentin oturacağının radiusudur.

Daxilə və xaricə çəkilmiş fiqurlar

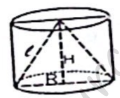
Düzgün piramidanın daxilinə çəkilmiş kürə

$$R_{kür}=\frac{a\cdot H}{2h+a}$$

$$\frac{a}{2R_{kür}}=\frac{h}{H-R_{kür}}=\frac{H}{R_{kür}\cdot tg\varphi}$$

h - piramidanın apofemi, H - piramidanın hündürlüyü, a - oturacağın tərəfi, φ - yan üzlə oturacaq müstəvisi arasındakı bucaq, $R_{kür}$ - kürənin radiusudur.

Silindr daxilinə çəkilmiş konus



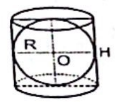
$H_{sil.}=H_{kon.}=H$; $R_{sil.}=R_{kon.}=R$;

$$\frac{S_{y\,sil}}{S_{y\,kon}}=\frac{2H_{sil}}{\ell}=\frac{2H_{kon}}{\ell};$$

$V_{Sil.}=3V_{kon.}$

S_{yan} və S_{kon} - silindrin və konusun yan səthinin sahəsi, $R_{sl.}$ və R_{kon} - silindrin və konusun oturacaqlarının radiusu, ℓ - konusun doğuranı, $V_{sl.}$ və V_{kon} - silindrin və konusun həcmi, H_{sl} və H_{kon} - silindrin və konusun hündürlüyüdür.

Silindr daxilinə çəkilmiş kürə



$R_{sl.}=R_{kür}=R$

$H=2R$

$V_{sl.}=1{,}5V_{kür}$

$S_{y.sl.}=S_{sfera}$

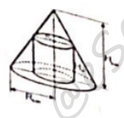
S_{sfera} -sferanın sahəsi, $R_{kür}$ -kürənin radiusu, $V_{kür}$ -kürənin həcmidir.

Konus daxilinə çəkilmiş silindr

$$\frac{R_{kon.}}{R_{sl.}} = \frac{H_{kon.}}{H_{kon.} - H_{sl.}};$$

$$\frac{H_{kon.}}{H_{sl.}} = \frac{R_{kon.}}{R_{kon.} - R_{sl.}}$$

$$\frac{H_{kon.}}{H_{sl.}} = \frac{\ell}{\ell - \sqrt{R_{sl.}^2 + (H_{kon.} - H_{sl})^2}}$$



Konus daxilinə çəkilmiş kürə

$$R_{kür} = \frac{R_{kon.} \cdot H_{kon}}{\ell + R_{kon.}}$$

$$\frac{\ell}{H_{kon.} - R_{kür.}} = \frac{R_{kon.}}{R_{kür.}}$$

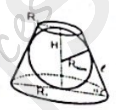
$$R_{kon} = \sqrt{\ell^2 - H_{kon}^2}$$

Kəsik konus daxilinə çəkilmiş kürə

$$\ell = R_1 + R_2$$

$$H = 2\sqrt{R_1R_2} = 2R_{kür}$$

$$R_{kür}^2 = R_1 \cdot R_2$$



$$\sin\alpha = \frac{H}{\ell} = \frac{2\sqrt{R_1R_2}}{R_1 + R_2} = \frac{2R_{kür}}{\ell}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 - R_2}{\ell}$$

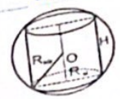
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{R_1 - R_2} = \frac{2\sqrt{R_1R_2}}{R_1 - R_2} = \frac{2R_{kür}}{R_1 - R_2}$$

R_1 və R_2 -kəsik konusun aşağı və yuxarı oturacaqlarının radiusları, α - kəsik konusun doğuranı ilə oturacaq müstəvisi arasındakı bucaqdır.

Kürə daxilinə çəkilmiş silindr

$$H_{sl.} = 2\sqrt{R_{kür}^2 - R_{sl.}^2}$$

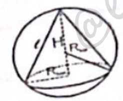
$$R_{sl.} = \sqrt{R_{kür}^2 - \frac{H_{sl.}^2}{4}}$$



Kürə daxilinə çəkilmiş konus

$$R_{kür} = \frac{\ell^2}{2H_{kon}}$$

$$R_{kon}^2 = H_{kon} \cdot (2R_{kür} - H_{kon})$$



MÜNDƏRİCAT

CƏBR

HƏNDƏSƏ

CƏBR- HƏNDƏSƏ DÜSTURLARI

Çapa imzalanıb 01.08.2012

Format: 70x100 1/16

Ofset kağız. Sayı 800

Sifariş No 69

Qiyməti: 4 manat

"Şərq-Qərb" ASC

Abituriyentlər üçün dərs vəsaiti

arazyayınları

K-Q TSE-ISO-EN 9000

TSE-EN-ISO 9001:2000 Keyfiyyəti idarəetmə sistemi

araz kursları

ÇAĞ ÖYRƏTİM İŞLƏTMƏLƏRİ

DƏRS VƏSAİTİ

ISBN 9952-433-44-1

9789952433449

YAYIN № 21

araz kursları

www.arazyayinlari.az