ELŞAD EYVAZOV

RİYAZİ ANALİZ-3
HƏQİQİ VƏ KOMPLEKS DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR NƏZƏRİYYƏSİ

MÜHAZİRƏLƏR VƏ ÇALIŞMALAR

E.H.EYVAZOV

RİYAZİ ANALİZ-3

HƏQİQİ VƏ KOMPLEKS DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR NƏZƏRİYYƏSİ

MÜHAZİRƏLƏR VƏ ÇALIŞMALAR

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirinin
08.12.2015-ci il tarixli 1108 nömrəli əmri və
Bakı Dövlət Universitetinin Rektorunun
16.07.2018-ci il R-70 nömrəli əmri ilə
dərs vəsaitinə nəşr hüququ (qrif) verilmişdir.

BAKI
"Araz" – 2018

517.2
UDK 517.5+517.53
E 70

Elmi redaktor: **HƏMZAĞA D. ORUCOV**- fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor, **Bakı Mühəndislik Universitetinin** tədris işləri üzrə prorektoru

Rəyçilər: **HİDAYƏT M. HÜSEYNOV**- fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, Bakı Dövlət **Universitetinin "Tətbiqi riyaziyyat" kafedrasının** professoru

HƏMDULLA İ. ASLANOV- fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor, AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Funksional analiz" şöbəsinin müdiri

ARAZ R. ƏLİYEV- riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor, Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye **Universitetinin " Ümumi və tətbiqi riyaziyyat" kafedrasının müdiri**

Eyvazov E. H. **"Riyazi Analiz-3. Həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi. Mühazirələr və çalışmalar." Bakı, "Araz" nəşriyyatı, 2018, 372 səh.**

Riyazi analiz-3 fənnini əhatə edən bu kitab iki hissədən ibarətdir. I hissədə hesabi və kontinuum güclü çoxluqlar, n ölçülü Evklid fəzasında Lebeq ölçüsü və Lebeq inteqralı şərh olunur. II hissə kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinə həsr olunub. Kompleks ədədlər, kompleks dəyişənli funksiyalar daxil olunur və birqiymətli analitik funksiyalar öyrənilir. Hər fəslin sonunda çalışmalar və onların cavabları verilir.

Kitab sadə dildə yazıldığı üçün ondan Bakı Dövlət Unversitetinin "Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika", "Mexanika-riyaziyyat" fakültələrinin tələbələri ilə yanaşı, "Riyazi analiz-3" (həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi) fənni tədris olunan bütün universitetlərin tələbələri başqa dərsliklərə müraciət etmədən sərbəst istifadə edə bilərlər.

E $\frac{4905784321}{050-2018}$ qrifli nəşr

MÜNDƏRİCAT

II HİSSƏ

KOMPLEKS DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR NƏZƏRİYYƏSİ

ÖN SÖZ

Bu kitab Bakı Dövlət Universitetinin "Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika" fakültəsində kompüter elmləri ixtisası üzrə təhsil alan tələbələr üçün "Tətbiqi riyaziyyat" kafedrasının professorları və nüfuzlu müəllimləri tərəfindən hazırlanmış və Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin 01.03.2012-ci il tarixli 326 saylı əmri ilə təsdiq edilmiş "Riyazi analiz-3" (həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi) fənninin proqramı əsasında yazılmış dərs vəsaitidir. Həmin proqrama əsasən "Riyazi analiz-3" fənninin öyrənilməsinə bir semestr (III semestr) ərzində 60 dərs saatı (30 saat mühazirə və 30 saat məşğələ) ayrılır.

Dərs vəsaitinin yazılmasında Bakı Dövlət Unversitetinin "Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika" fakültəsində 35 illik elmi və pedaqoji fəaliyyətim dövründə tələbələrə oxuduğum mühazirələr və apardığım seminarlar əsasında qazandığım təcrübənin böyük rolu olmuşdur.

Kitabın yazılmasında əsas məqsəd latın qrafikasında yazıb oxumağı bacaran, lakin xarici dildə, hətta kiril qrafikasında Azərbaycan dilində yazılmış riyaziyyat kitablarını oxumaqda çətinlik çəkən tələbələrə kömək etməkdir.

Kitab iki hissədən ibarətdir. I hissədə hesabi və kontinuum güclü çoxluqlar, n ölçülü Evklid fəzasında Lebeq ölçüsü və Lebeq inteqralı şərh olunur. II hissə isə kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinə

həsr olunub. Kompleks ədədlər və kompleks dəyişənli funksiyaların daxil olunması elementar funksiyaların inteqrallanmasında, diferensial tənliklərin və bir sıra fiziki məsələlərin həllində olduqca əlverişli rol oynayır. Analitik funksiyalar mexanikanın və fizikanın bir sıra məsələlərində mühüm rol oynayan Laplas tənliyinin həlli ilə sıx əlaqədardır. Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin üsulları hidro və aerodinamikanın, elastiklik nəzəriyyəsinin, elektrodinamikanın və bir çox təbiət elmlərinin məsələlərinin həllində geniş tətbiq olunur.

$\arg z$ və $\ln z$ funksiyaları istisna olmaqla baxılan kompleks dəyişənli funksiyalar birqiymətli olduğundan başqa kitablardan fərqli olaraq biz birqiymətli analitik funksiya termini əvəzinə analitik funksiya terminindən istifadə edirik.

Hər bir hissənin sonunda istfadə olunmuş ədəbiyyatın siyahısı verilmişdir. Bu hissələrin hər birinə ayrı-ayrılıqda həsr olunan kitablar çoxdur. Bu kitabın özəlliklərindən biri ondan ibarətdir ki, bir-biri ilə o qədər də bağlı olmayan iki nəzəriyyə vahid şəkildə burada şərh olunub. Bu kitabın digər özəlliyi ondan ibarətdir ki, ondan seminar dərslərində məsələ-misal kitabı kimi də istifdə oluna bilər.

Fikrimcə, həm nəzəri, həm də praktiki bilikləri bir mənbədən almaq bir çox cəhətdən tələbələrin ürəyincə olacaq.

Kitab 15 fəsildən ibarətdir. Hər fəslin sonunda həmin fəsildə şərh olunan nəzəri məsələləri əhatə edən çalışmalar və onların cavabları verilmişdir. Bir çox çalışmalara göstərişlər, bəzən də onların həll üsulları verilmişdir. Hər bir fəslin nəzəri hissəsi bir mühazirənin, çalışmaları isə həmin mühazirəyə uyğun seminarın materialını əhatə edir.

Kitabda həqiqi analizin anlayışları və əsas teoremləri sərbəst şəkildə istifadə olunduğu üçün oxucudan onları bilmək tələb olunur.

Həqiqi və kompleks analizin anlayışları və üsulları (metodları) təkcə riyaziyyatçıların deyil, həm də təbiət elmləri sahəsində çalışan bütün tədqiqatçıların təhsilinin zəruri elementidir. Bunu nəzərə alaraq, mövzuları sadə şəkildə şərh etməklə yanaşı materialın yaxşı mənimsənilməsi məqsədi ilə hər mövzuya aid misallar həll edilmiş və sərbəst işlər təklif olunmuşdur.

Kitab sadə dildə yazıldığı üçün ondan Bakı Dövlət Universitetinin "Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika", "Mexanika-riyaziyyat" fakültələrinin tələbələri ilə yanaşı, "Riyazi analiz-3" (həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi) fənni tədris olunan bütün universitetlərin tələbələri başqa dərsliklərə müraciət etmədən sərbəst istifadə edə bilərlər.

Kitabın yazılmasında mənə göstərdiyi dəstəyə görə elmi redaktor, professor H.D.Orucova, kitabın əlyazmasını vaxt ayırıb oxuduqlarına, onun dərs vəsaiti kimi çap olunmasını tövsiyə etdiklərinə və dəyərli iradlarına görə professor H.M.Hüseynova, professor H.İ.Aslanova və professor A.R.Əliyevə öz təşəkkürümü bildirirəm.

Sonda kitabın elektron variantını oxuduğuna və çoxsaylı faydalı iradlarına görə professor İ.M.Nəbiyevə dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

Elşad H.Eyvazov

İŞARƏLƏMƏLƏR

N - natural ədədlər çoxluğu.
Z - tam ədədlər çoxluğu.
Q - rasional ədədlər çoxluğu.
J - irrasional ədədlər çoxluğu.
R - həqiqi ədədlər çoxluğu.
R_n - n ölçülü Evklid fəzası.
C - kompleks ədədlər çoxluğu.
∂G - G çoxluğunun sərhədi.
Re - kompleks ədədin həqiqi hissəsi.
Im - kompleks ədədin xəyali hissəsi.
$z \to a$ - z a-ya yaxınlaşdıqda.
$A \Rightarrow B$ - A-dan B çıxır.
$\forall$ - ixtiyarı (istənilən).
$\exists$ - elə (varlıq).
$\triangleleft$ - isbatın sonu.

I HİSSƏ

HƏQİQİ DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR NƏZƏRİYYƏSI

I FƏSİL

HESABİ ÇOXLUQLAR. KONTİNUUM GÜC

1.1. Ekvivalent çoxluqlar

TƏRİF 1.1. *Elementlərinin sayı sonlu olan çoxluğa sonlu çoxluq deyilir.*

ŞƏRTLƏŞMƏ. Heç bir elementi olmayan boş çoxluğun (boş çoxluq $\varnothing$ kimi işarə olunur) elementlərinin sayını sıfır qəbul edəcəyik.

Məsələn, mühazirədə iştirak edən tələbələr çoxluğu, auditoriyadakı stullar çoxluğu, çoxbucaqlının təpə nöqtələri çoxluğu, 2-dən böyük ədəddən böyük olmayan sadə ədədlər çoxluğu, Yer planetindəki su molekulları çoxluğu, Xəzər dənizi sahillərindəki qum dənəcikləri çoxluğu, sonlu çoxluqlardır (elementlərinin sayının bizə məlum olub olmamasından asılı olmayaraq!).

TƏRİF 1.2. *İstənilən sonlu alt çoxluğu ilə fərqi boş çoxluq olmayan çoxluğa sonsuz çoxluq deyilir.*

Sonsuz çoxluqlara nümunələr:

N - natural ədədlər çoxluğu, Z - tam ədədlər çoxluğu, Q - rasional ədədlər çoxluğu, J - irrasional ədədlər çoxluğu, R - həqiqi ədədlər çoxluğu, R_n - n ölçülü Evklid fəzası, n ölçülü Evklid fəzasının boş olmayan istənilən açıq çoxluğu.

TƏRİF 1.3. *Əgər A çoxluğundan B çoxluğuna təsir edən, qiymətlər çoxluğu B çoxluğu ilə üst-üstə düşən və A-nın müxtəlif elementlərini B-nin müxtəlif elementlərinə qarşı qoyan funksiya tapmaq olarsa, onda deyirlər ki, A və B çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq (biyeksiya) yaratmaq olar.*

Bir çox hallarda boş olmayan iki çoxluğu elementlərinin sayına görə müqayisə etmək lazım gəlir. Sonlu çoxluqlar üçün iki üsulu nəzərdən keçirək. I üsul-Sayma üsulu. Bilavasitə hər iki çoxluqdakı elementlər sayılır və alınan natural ədədlər müqayaisə olunur. Aydındır ki, bu üsul sonsuz çoxluqlara tətbiq edilə bilməz. II üsul-Qarşı qoyma. M i s a l 1. Auditoriyaya daxil olan tələbələrin sayı ilə auditoriyadakı stulların sayının eyni olub-olmamasını heç bir sayma aparmadan tələbələrə hərəsi bir stulda oturmaq şərti ilə oturmaq təklif etməklə müəyyən etmək olar. M i s a l 2. Hər bir oğlanın arxasında bir qız durmaq şərti ilə olimpiadada iştirak edən qızları və oğlanları iki sıraya düzməklə onların sayını heç bir sayma aparmadan müqayisə etmək olar. Bu üsul sonsuz çoxluqlara da tətbiq edilə bilər. Bunun üçün "çoxluğun elementlərinin sayı" ifadəsinin ümumiləşməsi olan çoxluğun gücü anlayışını verək.

TƏRİF 1.4. *Əgər A və B çoxluqlarının elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olarsa, onda deyirlər ki, bu çoxluqlar ekvivalentdir və ya onlar eynigüclüdür.*

A və B çoxluqlarının ekvivalent olmasını $A \sim B$ kimi işarə edirlər. A çoxluğunun gücünü $\overline{A}$ kimi işarə edirlər. Beləliklə $A \sim B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

M i s a l. Göstərin ki, istənilən a və b həqiqi ədədləri üçün (a,b) intervalı ilə həqiqi ədədlər çoxluğu $(-\infty,+\infty)$ ekvivalentdir.

Asanlıqla görmək olar ki, $y = -ctg\dfrac{x-a}{b-a}\pi$ funksiyasının köməyi ilə bu iki çoxluq arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olar.

M i s a l. Göstərin ki, müstəvinin ixtiyarı radiuslu istənilən iki çevrəsi ekvivalentdir.

Ümumiliyi pozmadan hesab etmək olar ki, bu çevrələr eyni mərkəzlidir (konsentrikdir). Təpəsi bu çevrələrin mərkəzində olan şüalar vasitəsi ilə bu çevrələr arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olar.

TƏRİF 1.5. *A çoxluğunun özündən fərqli B alt çoxluğuna ($B \subset A, B \neq A$) A çoxluğunun məxsusi alt çoxluğu deyilir.*

Aydındır ki, sonlu çoxluq özünün məxsusi alt çoxluğuna ekvivalent ola bilməz. Lakin sonsuz çoxluq özünün məxsusi alt çoxluğuna ekvivalent ola bilər.

M i s a l. Göstərin ki, $B = [0,1]$ və $A = [0,2]$ çoxluqları ekvivalentdir.

Aydındır ki, $y = 2x$ funksiyası A çoxluğu ilə onun məxsusi alt çoxluğu B arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradır.

Həm nəzəri, həm də praktiki əhəmiyyətə malik olan aşağıdakı teoremləri nəzərdən keçirək.

TEOREM 1.1. *a) $A \sim A$ (eynilik xassəsi).*

b) Əgər $A \sim B$, onda $B \sim A$ (simmetriklik xassəsi)

c) Əgər $A \sim B$ və $B \sim C$ olarsa, onda $A \sim C$ (tranzitivlik xassəsi).

TEOREM 1.2. *Tutaq ki:*

a) $\forall i \in I$ (burada I - indekslər çoxluğudur) $A_i \sim B_i$;

b) $\forall i,j \in I, i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing, B_i \cap B_j = \varnothing$ şərtləri ödənir. Onda

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \sim \bigcup_{i \in I} B_i = B.$$

İSBATI. A_i və B_i çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradan funksiyaları f_i ilə işarə edək. Aydındır ki, $f = \bigcup_{i \in I} f_i$ funksiyası A və B çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradır. ◁

TEOREM 1.3. *Tutaq ki, $A \supset A_1 \supset A_2$. Əgər $A_2 \sim A$ olarsa, onda $A_1 \sim A$ olar.*

TEOREM 1.4 *(Kantor-Bernşteyn). Əgər A və B çoxluqlarının hər biri digərinin müəyyən alt çoxluğuna ekvivalentdirsə, onda A və B çoxluqları ekvivalentdir.*

İSBATI. Tutaq ki, $B \supset B_1, A \sim B_1$ və $A \supset A_1, B \sim A_1$. B çoxluğu ilə A_1 çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradanda B_1 çoxluğu A_1-in müəyyən bir A_2 alt çoxluğuna uyğun olacaqdır. $A \sim B_1$, $B_1 \sim A_2$ və Teorem 1.1-dən çıxır ki, $A \sim A_2$. $A \supset A_1 \supset A_2$ olduğunu və Teorem 1.3-ü nəzərə alsaq $A \sim A_1$ olduğunu almış olarıq. Buradan $A_1 \sim B$ olduğunu və tranzitivlik xassəsini nəzərə almaqla A və B çoxluqlarının ekvivalent olduğunu görərik. ◁.

M i s a l. İstənilən $A = (\alpha, \beta)$ intervalı ilə istənilən $B = [a,b]$ parçası ekvivalentdir.

(α, β) intervalına daxil olan hər hansı bir $A_1 = [\mu, \nu]$ parçası, $[a,b]$ parçasına daxil olan hər hansı bir $B_1 = (c,d)$ intervalı götürək. $A_1 = [\mu,\nu] \sim B = [a,b]$ və $A = (\alpha,\beta) \sim B_1 = (c,d)$ olduğu üçün Kantor-Bernşteyn teoremindən çıxır ki, istənilən interval ilə istənilən parça ekvivalentdir.

QEYD. $s=\frac{d-c}{\beta-\alpha}t+\frac{c\beta-d\alpha}{\beta-\alpha}$ funksiyası (α,β) intervalı ilə (c,d) intervalı arasında, $y=\frac{b-a}{\nu-\mu}x+\frac{a\nu-b\mu}{\nu-\mu}$ funksiyası isə $[\mu,\nu]$ parçası ilə $[a,b]$ parçası arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradır.

1.2. Hesabi çoxluqlar və onlar haqqında bəzi teoremlər

TƏRİF 1.6. *Natural ədədlər çoxluğuna ekvivalent olan çoxluğa hesabi çoxluq və ya hesabi güclü çoxluq deyilir.*

A çoxluğunun hesabi güclü çoxluq olması simvolik olaraq $\overline{A}=a$ kimi işarə olunur. Bilavasitə tərifdən görünür ki, hesabi A çoxluğunun bütün elementlərini (natural ədədlərin hamısından istifadə etməklə!) nömrələmək olar, yəni onu elementləri müxtəlif olan

$$A=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$$

ardıcıllığı şəkilində göstərmək olar.

Misal. $N_-=\{...,-n,-n+1,...,-1\}_{n\in N}$ çoxluğu hesabidir.

Aydındır ki, $n\leftrightarrow -n$ inkası N natural ədədlər çoxluğu ilə N_- çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradır.

TEOREM 1.5. *İstənilən sonsuz çoxluğun hesabi alt çoxluğu var.*

İSBATI. Tutaq ki, A sonsuz çoxluqdur. Onun hər hansı bir b_1 elementini, boş olmayan $A\setminus\{b_1\}$ çoxluğunun hər hansı bir b_2 elementini, boş olmayan $A\setminus\{b_1,b_2\}$ çoxluğunun hər hansı bir b_3 elementini və s. qeyd etməklə natural ədədlərin hamısından istifadə edərək (A sonsuz çoxluqdur!) A çoxluğunun bütün elementləri nömrələnmiş $B=\{b_1,b_1,...,b_1,...\}$ alt çoxluğunu almış olarıq. ◁

QEYD. Sonsuz çoxluğun bir-biri ilə kəsişməyən sonsuz sayda hesabi alt çoxluğu var.

TEOREM 1.6. *Hesabi şoxluğun istənilən sonsuz alt çoxluğu hesabidir.*

İSBATI. Tutaq ki, A hesabi çoxluq, B isə onun sonsuz alt çoxluğudur. A çoxluğunun elementlərini

$$a_1,a_2,...,a_n,... \qquad (1)$$

şəklində nömrələyək.

(1) siyahısında B-yə daxil olan ilk elementi $b_1=a_{n_1}$, növbəti elementi $b_2=a_{n_2}$ ($n_1>n_2$) və s. işarə edərək B çoxluğunun bütün elementlərini

$$b_1,b_2,...,b_n,...$$

şəkilində nömrələmək olar. Qeyd edək ki, B sonsuz çoxluq olduğundan bu prosesdə bütün natural ədədlər istifadə olunacaqdır. ◁

NƏTİCƏ. Hesabi çoxluqdan sonlu çoxluğu atdıqdan sonra qalan çoxluq hesabi olacaqdır.

Misal. Cüt natural ədədlər çoxluğu hesabidir.

Aydındır ki, cüt natural ədədlər çoxluğu N natural ədədlər çoxluğunun sonsuz alt çoxluğudur.

TEOREM 1.7. *Sonlu çoxluq ilə hesabi çoxluğun birləşməsi(cəmi) hesabi çoxluqdur.*

İSBATI. Tutaq ki, $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ sonlu, $B=\{b_1,b_2,...,b_n,...\}$ isə hesabi çoxluqdur. Göstərək ki, onların birləşməsi olan $C=A\cup B$ çoxluğu hesabidir. Ümumiliyi pozmadan hesab etmək olar ki, $A\cap B=\varnothing$. Əks halda kəsişməyən və birləşməsi C çoxluğuna bərabər olan $A'=A\setminus B$ və B çoxluqlrına baxardıq. C çoxluğunu əvvəl

$$C=\{a_1,a_2,...,a_k,b_1,b_2,...,b_n,...\}$$

şəklində yazıb, sonra

$$c_i=\begin{cases} a_i, i=1,2,...,k \\ b_{i-k}, i=k+1,k+2,..., \end{cases}$$

işarələməsi apararaq

$$C=\{c_1,c_2,...,c_j,...\}$$

kimi yazaraq teoremin isbatını almış olarıq. ◁

TƏRİF 1.7. *Əgər çoxluq sonludursa və ya hesabidirsə, onda ona ən çoxu hesabi çoxluq deyilir.*

TEOREM 1.8. *Ən çoxu hesabi sayda hesabi çoxluğun birləşməsi hesabi çoxluqdur.*

İSBATI. Teoremi ortaq nöqtələri olmayan hesabi sayda çoxluqlar üçün isbat etmək kifayətdir. Əgər A çoxluğu ortaq nöqtələri olan $A_i, i=1,2,...$ hesabi çoxluqlarının birləşməsindən ibarət olsa idi, onda onu ortaq nöqtələri olmayan və heç olmasa biri hesabi olan (məsələn, A_1)

$B_1 = A_1, B_k = A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j, k=2,3,...$ çoxluqlarının birləşməsi şəkilində

göstərərdik. Əgər A çoxluğu $A=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ şəklində olsa idi, $A_{n+j}=A_n, j=1,2,...$

götürməklə A çoxluğunu $A=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ kimi göstərərdik.

Beləliklə fərz edək ki,

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \overline{\overline{A_i}}=a,\ \ k\neq m \text{ olduqda } A_k \cap A_m = \varnothing.$$

Əvvəlcə hesabi $A_i, i=1,2,...$ çoxluqlarını

$$\begin{array}{lllll}
A_1: & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots \\
A_2: & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots \\
A_3: & a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
A_n: & a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

şəklində nömrələyək. Sonra istənilən $m \geq 2$ natural ədədini götürək və indeksləri cəmi $i+j=m$ bərabərliyini ödəyən a_{ij} elementlərini i indeksinin artma sırası ilə ($i=1,2,...,m-1$) düzək. m-ə ardıcıl olaraq 2,3,4,... qiymətləri verib A çoxluğunu

$$A=\{a_{11}; a_{12}, a_{21}; a_{13}, a_{22}, a_{31}; a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}; ...; ...\} \qquad (2)$$

şəklində göstərək. (2) siyahısındakı elementləri $N=\{1,2,...\}$ natural ədədlərindən istifadə edərək nömrələsək A çoxluğunun hesabi çoxluq olduğunu görərik. ◁

Misal. Z tam ədədlər çoxluğu hesabidir.

Teorem 1.8-i $Z = N_- \cup \{0\} \cup N$ bərabərliyinə tətbiq etsək Z tam ədədlər çoxluğunun hesabi olduğunu görərik.

TEOREM 1.9. *Tutaq ki, A sonsuz, B isə ən çoxu hesabi çoxluqdur. Onda A və $A \cup B$ eynigüclüdür.*

İSBATI. Ümumiliyi pozmadan hesab etmək olar ki, $A \cap B = \varnothing$. Əks halda B-ni $B \setminus A$ ilə əvəz edərik. Teorem 1.5-dən istfadə edərək A-dan hesabi C çoxluğu ayıraq. $D = A \setminus C$ işarə edək. Aydındır ki,

$$A = C \cup D, C \cap D = \varnothing, A \cup B = D \cup (C \cup B).$$

$D \sim D$ və $C \cup B \sim C$ (Teorem 1.7 və 1.8-ə görə) olduğunu və Teorem 1.2-ni nəzərə alsaq $A \cup B \sim A$ olduğunu, buradan da $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}}$ bərabərliyini almış olarıq. ◁

TEOREM 1.10. *Sonlu sayda hesabi çoxluqların Dekart hasili hesabi çoxluqdur.*

İSBATI. Tutaq ki, $A_1, A_2, ..., A_n$ hesabi çoxluqlardır. Göstərək ki, onların Dekart hasili, yəni

$$A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i, i=1,2,...,n\}$$

çoxluğu hesabidir.İsbatı n-ə nəzərən riyazı induksiya prinsipi ilə aparaq. $n=1$ üçün teoremin hökmü aydındır. $n=k$ üçün hökmün doğruluğunu fərz edib $n=k+1$ üçün isbat edək. $B = B_1 \times B_2 \times ... \times B_k$ və $C = A_{k+1}$ işarələməsi aparsaq $D = A_1 \times A_2 \times ... \times A_k \times A_{k+1}$ çoxluğunu $D = B \times C$ kimi yaza bilərik. B(fərziyyəyə görə) və C (şərtə görə) hesabi çoxluqlar olduğuna görə onları $B = \{b_1, b_2, ..., b_i, ...\}$ və $C = \{c_1, c_2, ..., c_j, ...\}$ kimi nömrələmək olar. Aydındır ki, hər qeyd olunmuş l üçün $D_l = \{(b_l, c_j): j = 1,2,\ldots\}$ hesabi çoxluqdur. $D = \bigcup_{l=1}^{\infty} D_l$ olduğunu və Teorem 1.8-i nəzərə alsaq hökmün $n = k+1$ üçün doğru olduğunu görmüş olarıq. Deməli riyazı induksiya prinsipinə görə teoremin hökmü istənilən n natural ədədi üçün doğrudur. ◁

M i s a l. Q - rasional ədədlər çoxluğu hesabidir.

$Q = \left\{\frac{m}{n} : m \in Z, n \in N\right\}$ - rasional ədədlər çoxluğunun hər bir $\frac{m}{n}$ elementini (m,n) şəkilində yazaraq onu $Q = Z \times N$ Dekart hasili şəklində yazıb Teorem 1.10-u tətbiq etsək Q - rasional ədədlər çoxluğunun hesabi olduğunu almış olarıq.

T Ə R İ F 1.8. *a) Dərəcəsi 1-dən kiçik olmayan tam əmsallı cəbri çoxhədlinin kökü olan (həqiqi və ya kompleks) ədədə cəbri ədəd deyilir. b) Cəbri olmayan ədədə transendent ədəd deyilir.*

$r = \frac{m}{n}$ $(m \in Z, n \in N)$ şəklində olan ədədlər tam əmsallı birdərəcəli $nx - m = 0$ cəbri tənliyinin kökü olduğundan bütün rasional ədədlər (xüsusi halda bütün natural və tam ədədlər) cəbri ədədlərdir. İstənilən $n \geq 2$ və m natural ədədləri üçün $\sqrt[n]{m}$ şəklində olan ədədlər (rasional və ya irrasional olmasından asılı olmayaraq!) tam əmsallı $x^n - m = 0$ cəbri tənliyinin kökləri olduğundan onlar da cəbri ədədlərdir. π və e (Eyler ədədi) ədədləri transendent ədədlərdir.

T A P Ş I R I Q. Göstərin ki, istənilən n natural ədədi üçün həm e^n, həm də π^n ədədləri transendent ədədlərdir.

M i s a l. Cəbri ədədlər çoxluğu hesabidir.

Hər hansı bir natural n ədədi götürək və

$$P_n = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0, a_i \in Z, i = 0,1,2,\ldots n\}$$

ilə tam əmsallı n dərəcəli çoxhədlilər çoxluğunu işarə edək. P_n çoxluğunun hər bir $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ elementinə $Z^{n+1} = \underbrace{Z \times Z \times \ldots \times Z}_{n+1 \text{ sayda}}$ çoxluğunun $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ elementini qarşı

qoyaq. Teorem 1.10-a görə $Z^{n+1} = \underbrace{Z \times Z \times \ldots \times Z}_{n+1 \text{ sayda}}$ çoxluğu hesabi olduğu üçün P_n çoxluğu da hesabi olacaqdır. Teorem 1.8-ə əsasən dərəcəsi 1-dən kiçik olmayan $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ çoxhədlilər çoxluğu hesabi çoxluq olacaqdır. K ilə P çoxluğuna daxil olan çoxhədlilərin köklərindən ibarət olan çoxluğu, yəni cəbri ədədlər çoxluğunu işarə edək. P çoxluğunun hesabi, P-yə daxil olan hər bir çoxhədlinin sonlu sayda kökü olduğunu və K çoxluğunun sonsuz olduğunu (çünki ən azı rasional ədədlər K çoxluğundadır!) nəzərə alsaq cəbri ədədlər çoxluğunun hesabi olduğunu almış olarıq.

1.3. Qeyri-hesabi çoxluqlar. Kontinuum güc

T E O R E M 1.11*(Kantor).* $[0,1]$ *parçası qeyri-hesabidir.*

İ S B A T I. Əksini fərz edək. Tutaq ki, $[0,1]$ parçasındakı ədədləri

$$\begin{array}{l} a_1 = 0, a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \ldots, \\ a_2 = 0, a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = 0, a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (1)$$

şəklində nömrələmək olar. Kantorun diaqonal üsulundan istifadə edərək onluq işarələri

$$b_i = \begin{cases} 2, a_{ii} = 1 \ \ olarsa, \\ 1, a_{ii} \neq 1 \ \ olarsa, \end{cases} \quad i = 1,2,\ldots$$

qaydasında təyin olunmuş $b = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ ədədi düzəldək. Aydındır ki, $b \in [0,1]$. Lakin b ədədi (1) siyahısında yoxdur. Alınan ziddiyyət əks fərziyənin səhv, teoremin hökmünün doğru olduğunu göstərir. ◁

TƏRİF 1.9. $[0,1]$ *parçasına ekvivalent olan çoxluğa kontinuum və ya c güclü çoxluq deyilir. A çoxluğunun kontinuum güclü olmasını* $\overline{A}=c$ *kimi işarə edirlər.*

Misallar. 1. İstənilən $[a,b]$ parçası kontinuum güclü çoxluqdur. Məsələn, $y=(b-a)x+a$ funksiyası ilə $[0,1]$ və $[a,b]$ parçaları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olar.

2. Teorem 1.9-dan çıxır ki, istənilən (a,b), $[a,b),(a,b]$ aralıqları kontinuum güclü çoxluqdur.

3. Həqiqi ox, yəni $(-\infty,+\infty)$ aralığı kontinuum güclü çoxluqdur. Məsələn, $y=\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}$ funksiyası ilə $(-\infty,+\infty)$ və $(0,1)$ aralıqlaları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olar.

4. $(0,+\infty)$ aralığı kontinuum güclü çoxluqdur. Məsələn, $y=tgx$ funksiyası ilə $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ və $(0,+\infty)$ aralıqlaları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olar.

5. $K^0=(0,1)^2:=(0,1)\times(0,1)=\{(x,y):x\in(0,1),y\in(0,1)\}$ açıq kvadratı kontinuum güclü çoxluqdur.

K^0 çoxluğunun ixtiyarı $M(x,y)$ nöqtəsini götürək. x və y ədədlərini $x=\xi_1\xi_2\xi_3...$ və $y=\eta_1\eta_2\eta_3...$ onluq kəsr şəklində yazaq (ŞƏRTLƏŞMƏ: 9-u dövründə saxlayan onluq kəsrlərdən istifadə edilmir!). Sonra $M(x,y)$ nöqtəsinə $(0,1)$ intervalının $t=\xi_1\eta_1\xi_2\eta_2\xi_3\eta_3...$ nöqtəsini qarşı qoyaq. Aydındır ki, bu inkas inyektivdir, yəni K^0 çoxluğunun müxtəlif nöqtələri $(0,1)$ intervalının müxtəlif nöqtələrinə inkas olunur, lakin süryektiv deyil, yəni bu inkasın qiymətlər çoxluğu $(0,1)$ intervalı ilə üst-üstə düşmür. Doğrudan da $(0,1)$ intervalının cüt yerdə duran onluq işarələrinin hamısı 0 olan ədədləri (məsələn, $t=102030...$) K^0 çoxluğunun heç bir elementinin obrazı deyil. Beləliklə, bu inkas zamanı K^0 çoxluğu $(0,1)$ intervalının müəyyən bir $B_1\subset(0,1)$ alt çoxqluğuna qarşılıqlı birqiymətli inkas olunur. Digər tərəfdən aydındır ki, $(0,1)$ intervalı $y=a(0<x<1)$ düz xəttinin K^0 çoxluğunda qalan

$A_1=\{(x,a):x\in(0,1)\}\subset K^0$ hissəsinə ekvivalentdir. Onda Kantor-Bernşteyn teoremindən çıxır ki, $K^0\sim(0,1)$. Buradan da $\overline{K^0}=\overline{(0,1)}=c$.

TEOREM 1.12. *Ən çoxu hesabi sayda kontinuum güclü çoxluqların birləşməsi kontinuum güclü çoxluqdur.*

İSBATI. Tutaq ki, $A_1,A_2,...,A_n$ $(n\le+\infty)$ kontinuum güclü çoxluqlardır. $A_k\sim[k-1,k)$, $k=1,2,...,n$ $(n\le+\infty)$ münasibətləri göstərir ki, A_k-ların ortaq nöqtələri olmadıqda $A=\bigcup_{k=1}^{n\le+\infty}A_k$ çoxluğu $[0,n)$ $(n\le+\infty)$ aralığına, ortaq nöqtələri olduqda isə $[0,n)$ $(n\le+\infty)$ aralığının müəyyən bir alt çoxluğuna ekvivalent olacaqdır. Digər tərəfdən $\overline{A_1}=c$ olduğundan $[0,n)\sim A_1\subset A$ $(n\le+\infty)$ münasibəti doğrudur. Kantor-Bernşteyn teoremini tətbiq edərək $\overline{\bigcup_{k=1}^{n\le+\infty}A_k}=c$ bərabərliyini almış olarıq. ◁

Misal. $K=\{(x,y):x\in[0,1],y\in[0,1]\}$ qapalı kvadratı kontinuum güclü çoxluqdur.

K çoxluğunu

$$K=K^0\cup\{(x,0):x\in[0,1]\}\cup\{(x,1):x\in[0,1]\}\cup$$
$$\cup\{(0,y):y\in[0,1]\}\cup\{(1,y):y\in[0,1]\}$$

şəklində yazıb (K^0 üçün 5-ci misala bax), Teorem 1.12-i tətbiq etsək misalın doğru olduğunu görmüş olarıq.

TEOREM 1.13. *Kontinuum sayda kontinuum güclü çoxluqların birləşməsi kontinuum güclü çoxluqdur.*

İSBATI. Tutaq ki, $A_\tau,\tau\in[0,1]$ kontinuum güclü çoxluqdur. $A_\tau\sim\{(x,\tau):x\in[0,1]\},\tau\in[0,1]$ münasibətləri göstərir ki, A_τ-ların ortaq nöqtələri olmadıqda $A=\bigcup_{\tau\in[0,1]}A_\tau$ çoxluğu K kvadratına (K kvadratı üçün misala bax), ortaq nöqtələri olduqda isə K kvadratının müəyyən bir alt çoxluğuna ekvivalent olacaqdır. Digər tərəfdən $\overline{A_0}=c$ olduğundan

$K \sim A_0 \subset A$ münasibəti doğrudur. Kantor-Bernşteyn teoremini tətbiq edərək $\overline{\bigcup_{\tau \in [0,1]} A_\tau} = c$ bərabərliyini almış olarıq. ◁

M i s a l. Mərkəzi $M(a,b)$ nöqtəsində radiusu R olan qapalı

$$D_R(a,b) = \{(x,y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2, R > 0\}$$

dairəsi kontinuum güclü çoxluqdur.

Mərkəzi $M(a,b)$ nöqtəsində radiusu $r > 0$ olan

$$C_r(a,b) = \{(x,y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, r > 0\}$$

çevrənin

$$\begin{cases} x = a + r\cos\varphi \\ y = b + r\sin\varphi \end{cases} (0 \le \varphi < 2\pi)$$

parametrik tənliyindən çıxır ki, $C_r(a,b) \sim [0,2\pi)$, yəni $\overline{C_r(a,b)} = c$.

$$D_R(a,b) = \bigcup_{0<r\le R} C_r(a,b) \cup \{(a,b)\}$$

bərabərliyindən, Teorem 1.9 və Teorem 1.13-dən $\overline{D_R(a,b)} = c$ bərabərliyi alınır.

T E O R E M 1.14. *Sonlu sayda kontinuum güclü çoxluqların Dekart hasili kontinuum güclü çoxluqdur.*

İ S B A T I. Tutaq ki, $A_1, A_2, ..., A_n$ kontinuum güclü çoxluqlardır. Göstərək ki, onların Dekart hasili, yəni

$$A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i, i = 1,2,...,n\}$$

çoxluğu kontinuum güclü çoxluqdur.Teorem 1.10-da olduğu kimi isbatı n-ə nəzərən riyazı induksiya prinsipi ilə aparaq. $n = 1$ üçün teoremin hökmü aydındır. $n = k$ üçün hökmün doğruluğunu fərz edib $n = k+1$ üçün isbat edək. $B = B_1 \times B_2 \times ... \times B_k$ və $C = A_{k+1}$ işarələməsi

aparsaq $D = A_1 \times A_2 \times ... \times A_k \times A_{k+1}$ çoxluğunu $D = B \times C$ kimi yaza bilərik. B (fərziyyəyə görə) və C (şərtə görə) kontinuum güclü çoxluqlardır. Aydındır ki, hər qeyd olunmuş $b_\tau \in B$ üçün $D_\tau = \{(b_\tau, c_\mu) : c_\mu \in C\}$ kontinuum güclü çoxluqdur. $D = \bigcup D_\tau$ olduğunu və Teorem 1.13-i nəzərə alsaq, hökmün $n = k+1$ üçün doğru olduğunu görmüş olarıq. Deməli, riyazı induksiya prinsipinə görə teoremin hökmü istənilən n natural ədədi üçün doğrudur. ◁

M i s a l. n ölçülü R_n - Evklid fəzası kontinuum güclü çoxluqdur.

R_n - Evklid fəzasını n sayda $R_1 \equiv R = (-\infty, +\infty)$ həqiqi ədədlər çoxluğunun Dekart hasili, yəni $R_n = \underbrace{R_1 \times R_1 \times ... \times R_1}_{n \text{ sayda}} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_k \in R_1, k = 1,2,...,n\}$, şəklində yazıb $\overline{R_1} = c$ və Teorem 1.14-i nəzərə alsaq $\overline{R_n} = c$ bərabərliyini almış olarıq.

T E O R E M 1.15. *Hədləri yalnız* 0 *və ya 1-lərdən ibarət olan*

$$A = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : a_k = 0 \text{ və ya } 1,\ k = 1,2,...,n,...\}$$

ardıcıllıqlar çoxluğu kontinuum güclü çoxluqdur.

İ S B A T I. B ilə A-nın müəyyən nömrədən sonra bütün hədləri 1 olan ardıcıllıqlar çoxluğunu işarə edək. B-yə daxil olan hər bir $b = (b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ elementinə $[0,1]$ parçasının ikilik ayrılışı $0, b_1 b_2 .. b_n ...$ şəklində olan ədədini qarşı qoyaq. Dövrü 1 olan ikilik kəsrlər ya 1, ya da $\frac{m}{2^k}$ $(k \in N, m = 1,3,...,2^k - 1)$ şəklində olduğundan B-nin hesabi çoxluq olduğu alınır. $A \setminus B$ çoxluğunun hər bir $a = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ elementinə $[0,1)$ aralığının ikilik ayrılışı $0, a_1 a_2 .. a_n ...$ şəklində olan ədədini qarşı qoysaq $\overline{A \setminus B} = \overline{[0,1)} = c$ bərabərliklərini almış olarıq. Bunları və Teorem 1.9-u nəzərə alsaq $A = (A \setminus B) \cup B$ çoxluğunun kontinuum güclü olduğunu görərik. ◁

N Ə T I C Ə. Hər bir həddi bir-birindən asılı olmayaraq iki qiymət alan

$$A = \left\{ (a_1, a_2, ..., a_n, ...) : a_k = \begin{cases} l_k \\ m_k \end{cases}, k = 1,2,...,n,... \right\}$$

ardıcıllıqlar çoxluğu kontinuum güclü çoxluqdur.

1.4. Kantorun P_0 və G_0 çoxluqları

$F_0=[0,1]$ parçasını $\frac{1}{3}$ və $\frac{2}{3}$ nöqtələri ilə üç bərabər hissəyə bölüb $\delta_{11}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ intervalını ondan kənarlaşdırıb birranqlı $\Delta_0=\left[0,\frac{1}{3}\right]$ və $\Delta_1=\left[\frac{2}{3},1\right]$ parçalarının birləşməsini F_1 ilə işarə edək. Aydındır ki, F_1 qapalı çoxluqdur. Birranqlı parçaların hər birinin ortaları olan $\delta_{21}=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ və $\delta_{22}=\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ intervallarını onlardan kənarlaşdırıb qalan ikiranqlı $\Delta_{00}=\left[0,\frac{1}{9}\right]$, $\Delta_{01}=\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$, $\Delta_{10}=\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$ və $\Delta_{11}=\left[\frac{8}{9},1\right]$ parçalarının birləşməsini F_2 ilə işarə edək. Aydındır ki, F_2 də qapalı çoxluqdur. n-ci addımda 2^{n-1} sayda olan $n-1$ ranqlı parçalardan onların uzunluqları $\frac{1}{3^n}$-ə bərabər olan $\delta_{n,1},\delta_{n,2},\ldots,\delta_{n,2^{n-1}}$ (nömrələmə soldan sağa aparılır) ortaları atılır. F_n ilə 2^n sayda n ranqlı parçaların birləşməsi işarə olunur. Aydındır ki,

$$F_n=\Bigg(\Delta_{\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ sayda}}}\cup\Delta_{\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{ sayda}}1}\Bigg)\cup\ldots\cup\Bigg(\Delta_{\underbrace{11\ldots1}_{(n-1)\text{ sayda}}0}\cup\Delta_{\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ sayda}}}\Bigg)$$

çoxluğu qapalı çoxluqdur. Əgər bu prosesi sonsuz davam etdirsək, nəticədə $F_0=[0,1]$ qapalı çoxluğundan

$$G_0=\delta_{11}\cup(\delta_{21}\cup\delta_{22})\cup\ldots\cup(\delta_{n1}\cup\delta_{n2}\ldots\delta_{n2^{n-1}})\cup\ldots$$

çoxluğu kənarlaşdırılır. Qeyd edək ki, cüt-cüt kəsişməyən δ_{ij} intervallarının nə bir-biri ilə, nə də ki, $[0,1]$ parçası ilə ortaq ucları yoxdur. $[0,1]$ parçasında monoton azalan, yəni

$$F_0\supset F_1\supset\ldots\supset F_n\supset\ldots$$

şərtini ödəyən $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ qapalı çoxluqlar ardıcıllığının kəsişməsi olan

$$P_0=\bigcap_{n=0}^{\infty}F_n$$

çoxluğu qalır. Aydındır ki, $P_0=[0,1]\setminus G_0=\bigcap_{n=0}^{\infty}F_n$.

G_0 çoxluğuna Kantorun açıq çoxluğu, P_0-a Kantorun diskontinuumu və ya sadəcə Kantor çoxluğu deyilir. Çox vaxt P_0-ı diskontinuum sözü ilə əlaqədər olaraq D ilə işarə edirlər.

Aydındır ki, G_0 kontinuum güclü açıq çoxluqdur. G_0 çoxluğuna daxil olan ədədlərin 3-lük ayrılışı 1-siz mümkin deyil, yəni G_0-a daxil olan hər bir a ədədinin $a=0,a_1a_2\ldots a_n\ldots\ (a_i=0,1,2)$ 3-lük ayrılışında $a_i, i=1,2,\ldots$ rəqəmlərindən ən azı biri 1 olmalıdır. Qeyd edək ki, 3-lük say sisteminin rəqəmləri 0,1 və 2-dir.

P_0 çoxluğunun xassələri.

1. P_0 qapalı çoxluqdur.

2. P_0 kontinuum güclü çoxluqdur. Aydındır ki, P_0-a daxil olan ədədlərin 3-lük ayrılışı 1-siz mümkündür, yəni P_0-a daxil olan ədədlərin 3-lük ayrılışını yalnız 0 və 2 rəqəmləri vasitəsi ilə yazmaq olar. Deməli, Teorem 1.15-in nəticəsinə görə P_0 kontinuum güclü çoxluqdur.

QEYD. P_0-ın nöqtələrini iki növə ayırırlar. Birinci növ nöqtələr G_0-ın təşkiledici δ_{ij} intervallarının uc nöqtələridir:

$$0,1,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9},\frac{8}{9},\ldots$$

yəni dövrü 0 və ya 2 olan rasional 3-lik kəsrlərdir. Dövrü 0 və ya 2 olan rasional 3-lik kəsrlər $\frac{m}{3^k}(m=1,3,...,3^{k-1})$ şəklində olduğu üçün P_0-ın birinci növ nöqtələri hesabidir.

P_0-ın ikinci növ nöqtələri $(0,1)$ intervalının, 3-lik ayrılışında sonsuz sayda 0-lar və sonsuz sayda 2-lər olan ədədləridir. Məsələn,

$$0,0202...=\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+...=\frac{1}{4}$$
$$0,2020...=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^5}+...=\frac{3}{4}$$

ədədləri P_0-ın ikinci növ nöqtələridir. Teorem 1.15-in nəticəsindən çıxır ki, P_0-ın ikinci növ nöqtələri kontinuum güclü çoxluqdur.

3. P_0-ın təcrid olunmuş nöqtəsi yoxdur. P_0-dan olan a ədədini 3-lik say sistemində yazaq:

$$a=0,a_1a_2...a_n...\left(a_i=\begin{cases}0\\2\end{cases}\right). \tag{1}$$

İstənilən müsbət ε ədədi götürək və natural m ədədini elə seçək ki, $\frac{1}{3^m}<\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənsin. (1) ayrılışında m-dən sonra gələn 0-ları 2, 2-ləri isə 0 ilə əvəz edərək

$$a_\varepsilon=0,a_1a_2...a_m a_{m+1}^* a_{m+2}^*... ,$$

ədədini düzəldək, burada

$$a_k^*=\begin{cases}0, a_k=2\ olarsa,\\ 2, a_k=0\ olarsa\end{cases}\quad k=m+1,m+2,....$$

Aydındır ki, $a_\varepsilon\in P_0$, $a_\varepsilon\neq a$ və

$$|a-a_\varepsilon|=\left|\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{a_k-a_k^*}{3^k}\right|\leq\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{2}{3^k}=\frac{1}{3^m}<\varepsilon .$$

Beləliklə alırıq ki, a-nın istənilən ε-ətrafında P_0-ın a-dan fərqli heç olmasa bir elementi var. P_0-ın bu xassəsindən çıxır ki, onun hər bir nöqtəsi özünün limit nöqtəsidir.

P_0-ın 3-cü və 1-ci xassələrindən çıxır ki,

4. P_0 mükəmməl çoxluqdur.

5. P_0 həqiqi oxda heç yerdə sıx deyil. Göstərək ki, həqiqi oxun istənilən (a,b) intervalının daxilində P_0-ın heç bir elementini saxlamayan (α,β) intervalı var. Əgər $(a,b)\cap P_0=\varnothing$ olarsa, onda $(a,b)=(\alpha,\beta)$ götürmək olar. Tutaq ki, $x_0\in(a,b)\cap P_0$. $P_0=\bigcap_{n=0}^{\infty}F_n$ olduğu üçün istənilən $n\in\{0,1,2,...\}$ üçün $x_0\in F_n$ olacaqdır. Deməli istənilən $n\in\{0,1,2,...\}$ üçün elə n ranqlı $\Delta_{i_1i_2...i_n}(i_k=0,1)$ parça tapmaq olar ki, $x_0\in\Delta_{i_1i_2...i_n}$ olar. İndi n-i elə seçək ki, $\frac{1}{3^n}<\min\{|x_0-a|,|x_0-b|\}$ bərabərsizliyi ödənsin. Onda $\Delta_{i_1i_2...i_n}\subset(a,b)$ münasibəti ödəndiyi üçün P_0-ın heç bir elementini saxlamayan (α,β) intervalı olaraq $\Delta_{i_1i_2...i_n}$ parçasının orta intervalını götürmək olar.

QEYD. 4-cü xassədən çıxır ki, P_0 özündə sıxdır. P_0-ın strukturundan çıxır ki, hətta P_0-ın birinci növ nöqtələri P_0-da sıxdır.

1.5. Çalışmalar

1.1

1). N natural ədədlər çoxluğu ilə aşağıdakı çoxluqlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradın.

a) Z-tam ədədlər çoxluğu; b) cüt natural ədədlər çoxluğu; c) tək ədədlər çoxluğu;
d) $[0,1]\cap Q$ (Q - rasional ədədlər çoxluğudur).

2). Aşağıdakı çoxluqlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradın.
a) $[0,1]$ və $[0,1)$; b) $[0,1]$ və $(0,1]$; c) $[0,1]$ və $(0,1)$.

3). Aşağıdakı çoxluqlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradın.
a) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ və $(-\infty,+\infty)$; b) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ və $(0,+\infty)$; c) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ və $[0,+\infty)$.

4). Aşağıdakı çoxluqlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradın.
a) $(0,+\infty)$ və $(-\infty,0)$; b) $[0,+\infty)$ və $(-\infty,0]$; c) $[0,+\infty)$ və $[4,+\infty)$; d) $(-\infty,0]$ və $[4,+\infty)$; e) $(0,1)$ və $(1,+\infty)$.

5). $[0,2\pi)$ aralığı ilə $\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\ (R>0)\}$ çevrəsi arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradın.

6). $\{(t,s):0<t<1, 0<s<1\}$ kvadratı ilə $R_2=\{(x,y):x\in(-\infty,+\infty), y\in(-\infty,+\infty)\}$ müstəvisi arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradın.

7). $\{(t,s):0\le t\le 1, 0\le s\le 1\}$ və $\{(x,y):0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$ kvadratları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradın.

8). Göstərin ki, düzbucaqlı üçbucağın katetləri ekvivalentdir.

9). Göstərin ki, $\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2\ (R>0)\}$ qapalı dairəsi $\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2<R^2\ (R>0)\}$ açıq dairəsinə ekvivalentdir.

10). Göstərin ki, $\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2\ (R>0)\}\setminus\{(a,b)\}$ mərkəzsiz dairə ilə $\{(x',y'):(x'-a)^2+(y'-b)^2\ge R^2\ (R>0)\}$ çoxluğu ekvivalentdir.

11). Göstərin ki, $D_0=\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2\ (R>0)\}\setminus\{M_0\equiv(a,b)\}$ mərkəzsiz dairəsi ilə $D=\{(x',y'):(x'-a)^2+(y'-b)^2\le R^2\ (R>0)\}$ dairəsi ekvivalentdir.

12). Göstərin ki, qapalı $\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2\ (R>0)\}$ dairəsi $\{(x',y'):(x'-a)^2+(y'-b)^2\ge R^2\ (R>0)\}$ çoxluğuna ekvivalentdir.

13). Göstərin ki, $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}[3n-3,3n-2)$ çoxluğu $[0,1)$ aralığına ekvivalentdir.

14). Müstəvidə $[0,+\infty)$ aralığına ekvivalent olan, ortaq nöqtələri olmayan düz bucaqlar çoxluğu varmı?

15). Göstərin ki, $R_2^+=\{(x,y):x\in(-\infty,+\infty), y\ge 0\}$ yuxarı yarımmüstəvi ilə $R_2=\{(x,y):x\in(-\infty,+\infty), y\in(-\infty,+\infty)\}$ müstəvisi ekvivalentdir.

1.2.

1). Göstərin ki, aşağıdakı çoxluqlar hesabidir:
a) S-sadə ədədlər çoxluğu; b) Z-tam ədədlər çoxluğu; b) cüt ədədlər çoxluğu; c) tək ədədlər çoxluğu; d) $[0,1]\cap Q$ (Q- rasional ədədlər çoxluğudur).

2). Göstərin ki, müstəvinin təpələri rasional koordinatlı n bucaqlılar çoxluğu hesabidir.

3). Göstərin ki, fəzada mərkəzləri rasional koordinatlı rasional radiuslu sferalar çoxluğu hesabidir.

4). Göstərin ki, $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş monoton funksiyanın kəsilmə nöqtələri çoxluğu ən çoxu hesabidir.

5). Göstərin ki, $(-\infty,+\infty)$ aralığında təyin olunmuş monoton funksiyanın kəsilmə nöqtələri çoxluğu ən çoxu hesabidir.

6). Tutaq ki, $E\subset(-\infty,+\infty)$ çoxluğunun istənilən iki nöqtəsi arasındakı məsafə 1-dən böyükdür. Göstərin ki, E ən çoxu hesabi çoxluqdur.

7). Tutaq ki, $E\subset(-\infty,+\infty)$ çoxluğunun istənilən iki nöqtəsi arasındakı məsafə müsbət r ədədindən böyükdür. Göstərin ki, E ən çoxu hesabi çoxluqdur

8). Tutaq ki, $E\subset R_2$ çoxluğunun istənilən iki nöqtəsi arasındakı məsafə $\sqrt{2}$-dən böyükdür. Göstərin ki, E ən çoxu hesabi çoxluqdur.

9). Göstərin ki, həqiqi ox üzərində ortaq nöqtələri olmayan parçalar çoxluğu ən çoxu hesabidir.

10). Göstərin ki, müstəvi üzərində ortaq nöqtələri olmayan dairələr çoxluğu ən çoxu hesabidir.

11). Hər bir nöqtədə lokal maksimuma malik olan hesabi qiymətli funksiya qurun.

Qeyd. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında təyin olunub. Əgər
$\forall x_0 \in (a,b), \exists \delta_{x_0} > 0, \forall x \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}) \cap (a,b) \Rightarrow f(x_0) \ge f(x)$
münasbətləri ödənərsə, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında lokal maksimuma malikdir.

12). Bütün sonlu onluq kəsrlər çoxluğu hansı gücə malikdir?

13) Əmsalları cəbri ədədlər olan bütün cəbri çoxhədlilər çoxluğu hansı gücə malikdir?

14). Göstərin ki, hesabi çoxluğun bütün sonlu alt çoxluqlar çoxluğu hesabidir.

1.3.

1). Göstərin ki, aşağıdakı çoxluqlar kontinuum güclü çoxluqlardır.

a) Istənilən aralıq, yəni (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ və $(-\infty,+\infty)$, burada a və b həqiqi ədədlərdir; b) istənilən aralığa daxil olan irrasional ədədlər çoxluğu; c) transendent ədədlər çoxluğu;

d) $[0,1]\setminus\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$ e) $[1,5]\cup(10,20)$; f) $\bigcup_{k=1}^{\infty}[2k,2k+1]$.

2). Göstərin ki, müstəvidə istənilən düzbucaqlı kontinuum güclü çoxluqdur.

3). Göstərin ki, müstəvidə istənilən dairə kontinuum güclü çoxluqdur.

4).Göstərin ki, müstəvinin $\Pi_{a,b} = \{(x;y): a \le x \le b, -\infty < y < +\infty\}$ zolağı kontinuum güclü çoxluqdur.

5).Göstərin ki, müstəvinin $R_2^+ = \{(x;y): -\infty < x < +\infty, y > 0\}$ yarımmüstəvisi kontinuum güclü çoxluqdur.

6).Göstərin ki, $E = \{(x;y) \in R_2 : y > x\}$ yarımmüstəvisi kontinuum güclü çoxluqdur.

7).Göstərin ki, $R_3^+ = \{(x;y;z) \in R_3 : z > 0\}$ yarımfəzası kontinuum güclü çoxluqdur.

8). Göstərin ki, konusun doğuranları çoxluğu kontinuum güclü çoxluqdur.

9).Həqiqi ox üzərində yerləşən bütün mümkün olan parçalar çoxluğu hansı gücə malikdir?

10).Müstəvi üzərində yerləşən bütün mümkün olan dairələr çoxluğu hansı gücə malikdir?

11).Həqiqi əmsallı bütün mümkün olan cəbri çoxhədlilər çoxluğu hansı gücə malikdir?

12). Göstərin ki, R_n $(n \ge 1)$ fəzasının hər hansı bir oblastında təyin olunmuş bütün kəsilməz funksiyalar çoxluğu kontinuum güclü çoxluqdur.

13).Tutaq ki, B və C çoxluqlarının birləşməsi $A = B \cup C$ kontinuum güclü çoxluqdur. Göstərin ki, B və C çoxluqlarından heç olmasa biri kontinuum güclü çoxluqdur.

14). Tutaq ki, $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ $(n \ge 2)$ və $\overline{A} = c$. Göstərin ki, $\exists k_0 \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ ədədi var ki, $\overline{A_{k_0}} = c$.

1.6. Cavablar və göstərişlər

1.1

2. a). $f(x) = \begin{cases} x, x \ne \frac{1}{n} \ (n \in N), \\ \frac{1}{n+1}, x = \frac{1}{n} \ (n \in N) \end{cases}$.

3). $y = tgx$. 4.d) $y = 4 - x$; 4.e) $y = \frac{1}{x}$. 5). Teorem 1.13-dən sonrakı misala baxın.

6). $\begin{cases} x = -ctg\pi t, \\ y = -ctg\pi s \end{cases}$. 9). 2-ci məsələnin a) bəndini dairələrin radiuslarına tətbiq edin. 10). $\begin{cases} x' = a + \dfrac{R^2}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}(x-a), \\ y' = b + \dfrac{R^2}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}(y-b) \end{cases}$ inversiya çevirməsindən istifadə etmək olar. 11). D dairəsinin daxilindən hesabi sayda $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ (M_0-mərkəzdir) nöqtələri ayırın. D-nin hər bir M_k nöqtəsinə D_0-ın M_{k+1} nöqtəsini, D-nin qalan nöqtələrinə isə identiklik prinsipinə əsasən D_0-ın qalan nöqtələrini qarşı qoyun. 12). 10) və 11) nömrəli məsələlərdən istifadə edin. 13) $[0,1)$ aralığını $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ nöqtələri ilə kəsişməyən $\left[\dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n}{n+1}\right)$ aralıqlara bölüb Teorem 1.2-dən istifadə edin. 14). Bəli. Məsələn, təpələri $(a;0)$ $(a \ge 0)$ nöqtələrində, tərəfləri x və $-x$ düz xətlərinə paralel olub, I və IV rüblərdə olan düz bucalar çoxluğu. 15) $y > 0$ olduqda R_2^+ yarımmüstəvisinin hər bir $(x;y)$ nöqtəsinə R_2 müstəvisinin $(x^2 - y^2; 2xy)$ nöqtəsinin, R_2^+ yarımmüstəvisinin hər bir $(x;0)$ nöqtəsinə isə identik olaraq R_2-in $(x;0)$ nöqtəsini qarşı qoyun.

1.2.

1.a) $S \subset N$ olduğu üçün S-in sonsuz çoxluq olduğunu göstərmək kifayətdir. S-in sonsuz olması isə istənilən n sayda müxtəlif $p_1, p_2, \dots, p_n$ sadə ədədlərdən fərqli sadə ədədin varlığından (məsələn, $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ ədədinin sadə bölənləri!) çıxır. 1.d). $[0,1] \cap Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\dfrac{m}{n} : m = 0,1,2,\dots,n\right\}$ bərabərliyindən istifadə edin.

2).Koordinatları rasional ədəd olan nöqtəyə rasional koordinatlı nöqtə deyilir.Teorem 1.10-dan istifadə edin. 5). Funksiyanın $[-k,k]$

parçasındakı kəsilmə nöqtələr çoxluğunu A_k $(k = 1,2,\dots)$ ilə, $(-\infty, +\infty)$ aralığındakı kəsilmə nöqtələr çoxluğunu isə A ilə işarə edib $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ bərabərliyindən və 4)-cü məsələdən istifadə edin. 6). Həqiqi oxu $\{k\}_{k \in Z}$ müntəzəm şəbəkə ilə hesabisayda $[k, k+1]$ ($k \in Z$) parçalara bölün. Hər bir $[k, k+1]$ ($k \in Z$) parçasında E çoxluğundan ən çoxu bir nöqtə olduğunu nəzərə alın. 7). Həqiqi oxu $\{kr\}_{k \in Z}$ müntəzəm şəbəkə ilə hesabi sayda parçalara bölün və 6)-cı məsələdən istifadə edin. 8). R_2 müstəvisini $\{x_k = k\}_{k \in Z}$ və $\{y_m = m\}_{m \in Z}$ düz xətləri vasitəsi ilə hesabi sayda kvadratlara bölün. Hər bir kvadratda E çoxluğundan ən çoxu bir nöqtə olduğunu nəzərə alın. 9). Hər bir parçaya onun daxilindən hər hansı bir rasional ədədi qarşı qoyun. 10). Hər bir dairəyə onun daxilindən hər hansı bir rasional koordinatlı nöqtəni qarşı qoyun. 11). $(0,1)$ intrvalında $f(x) = \dfrac{1}{n}$, əgər $x \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right)$ $(n = 1,2,\dots)$ şəklində təyin olunmuş funksiyaya baxın. 12). Hesabi. 13). Hesabi. Bax Tərif 1.8-ə və ondan sonra gələn misala. 14). Hesabi $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ çoxluğunu $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ şəklində yazın. A_n-in alt çoxluqlarının sayının 2^n-ə bərabər olduğunu göstərin və A-nın bir elementli alt çoxluqlarının hesabi olduğunu nəzərə alın.

1.3.

4). $\Pi_{a,b}$ zolağını $\Pi_{a,b} = \bigcup_{\tau \in [a,b]} \{(\tau; y) :, -\infty < y < +\infty\}$ şəklində göstərib Teorem 1.13-dən istifadə edin. 6). E çoxluğunu $L_\tau = \{(x; -x + 2\tau), -\infty < x < +\infty\} \cap E$ şüalarının birləşməsi, yəni $E = \bigcup_{-\infty < \tau < +\infty} L_\tau$ kimi göstərib Teorem 1.13-dən istifadə edin. 7). R_3^+ yarımfəzasını $z = c$ $(c > 0)$ müstəvilərinin birləşməsi kimi göstərib Teorem 1.13-dən istifadə edin. 9). Hər bir $[a,b]$ ($b > a$) parçasına R_2

fəzasının $(a;b)$ nöqtəsini qarşı qoyub 6)-cı məsələdən istifadə edin. 10). Müstəvinin hər bir $D_{a,b,R}=\{(x;y),(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2\}$ $(R>0)$ dairəsinə R_3 fəzasının $(a;b;R)$ nöqtəsini qarşı qoyub 7)-cı məsələdən istifadə edin. 11). Hər bir $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ cəbri çoxhədliyə R_{n+1} fəzasının $(a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0)$ nöqtəsini qarşı qoyub Teorem 1.14-dən istifadə edin. 12). $C(G)$ ilə R_n fəzasının G oblastında kəsilməz olan funksiyalar çoxluğunu işarə edək. Bütün sabit funksiyalar $C(G)$-yə daxil olduğu üçün $\overline{C(G)}\ge c$ (*). G oblastındakı rasional koordinatlı bütün nöqtələr çoxluğunu $G_Q=\{M_1,M_2,...,M_n,...\}$ ilə işarə edək. $C(G)$-nin hər bir $f(x_1,x_2,...,x_n)\equiv f(M)$ elementinə qarşı $E=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$ ardıcıllıqlar çoxluğunun $a_f=(f(M_1),f(M_2),...,f(M_n),...)$ elementini qarşı qoyaq. Kəsilməz funksiya rasional koordinatlı nöqtələr vasitəsi ilə birqiymətli olaraq təyin olunduğu üçün bu inkas zamanı $C(G)$ çoxluğu $E=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$ çoxluğunun müəyyən bir alt çoxluğuna ekvivalent olacaqdır. Buradan $\overline{C(G)}\le c$ (**) bərabərsizliyini almış olarıq. (*) və (**) -dan $\overline{C(G)}=c$ bərabərliyi alınır.

13). Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $B\cap C=\varnothing$. $B\subset A$ və $C\subset A$ münasibətlərindən $\overline{B}\le c$ və $\overline{A}\le c$ bərabərsizlikləri alınır. $f(x;y)$ ilə $K=\{(x;y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ və $A=B\cup C$ çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradan funksiyanı işarə edək. i) Əgər $[0,1]$ parçasının elə bir x_0 nöqtəsi olsa ki, istənilən $y\in[0,1]$ ədədi üçün $f(x_0;y)\in B$ olsun, onda $\overline{B}\ge c$ olar. Bunu və $\overline{B}\le c$ bərabərsizliyini nəzərə alsaq $\overline{B}=c$ bərabərliyini almış olarıq. ii). Əgər i) variantı mümkün olmasa, onda istənilən $x\in[0,1]$ üçün elə $y\in[0,1]$ ədədi tapmaq olar ki, $f(x;y)\in C$ olar. Bu halda $\overline{C}\ge c$ bərabərsizliyini almış olarıq. Bunu və $\overline{C}\le c$ bərabərsizliyini nəzərə alsaq $\overline{C}=c$ bərabərliyini almış olarıq. 14). Riyazi induksiya prinsipindən və 13)-cü məsələdən istifadə edin.

II FƏSİL
R_n FƏZASINDA LEBEQ MƏNADA ÖLÇÜLƏN ÇOXLUQLAR

2.1. Elementar çoxluqlar və onların ölçüsü

TƏRİF 2.1. *Tutaq ki,* $2n$ *sayda* $(n\in N)$, $-\infty<a_k\le b_k<+\infty\,(k=1,2,...,n)$ *şərtlərini ödəyən,* $a_k,b_k\,(k=1,2,...,n)$ *həqiqi ədədləri verilmişdir.* n *sayda* $[a_k,b_k)(k=1,2,...,n)$ *yarımintervalların Dekart hasilinə, yəni*

$$P=[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times...\times[a_n,b_n)=\{x=(x_1,x_2,...,x_n):a_k\le x_k<b_k;k=\overline{1,n}\}$$

çoxluğuna, sağdan açıq (n ölçülü) parallelepiped deyilir.

Əgər $\{1,2,...,n\}$ çoxluğundan olan hər hansı bir k_0 ədədi üçün $a_{k_0}=b_{k_0}$ olarsa, onda $P=\varnothing$ olar.

$n=1$ olduqda $[a,b)$ şəkilli hər bir sonlu yarıminterval sağdan açıq(1 ölçülü) parallelepipeddir.

$n=2$ olduqda $[a,b)\times[c,d)$ şəkilli hər bir sonlu düzbucaqlı sağdan açıq (2 ölçülü) parallelepipeddir.

TEOREM 2.1. *İki sağdan açıq parallelepipedin kəsişməsi sağdan açıq parallelepipeddir.*

İSBATI. Tutaq ki,

$$P_1=[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times...\times[a_n,b_n) \text{ və}$$
$$P_2=[c_1,d_1)\times[c_2,d_2)\times...\times[c_n,d_n)$$

sağdan açıq (n ölçülü) parallelepipedlərdir. $\alpha_k = \max\{a_k, c_k\}$ və $\beta_k = \min\{b_k, d_k\}$ $(k = 1,2,...,n)$ işarə edək. Aydındır ki,

$$P_1 \cap P_2 = [\alpha_1, \beta_1) \times [\alpha_2, \beta_2) \times ... \times [\alpha_n, \beta_n). \triangleleft$$

Aydındır ki, iki sağdan açıq parallelepipedin fərqi sağdan açıq parallelepiped olmaya bilər. Lakin aşağıdakı teorem doğrudur.

TEOREM 2.2. *İki sağdan açıq parallelepipedin fərqini sonlu sayda cüt-cüt kəsişməyən sağdan açıq parallelepipedlərin birləşməsi şəklində göstərmək olar.*

İSBATI. Tutaq ki, P_1 və P_2 sağdan açıq (n ölçülü) parallelepipedlərdir. $P_2 \setminus P_1 = P_2 \setminus (P_1 \cap P_2)$ və Teorem 2.1-i nəzərə alsaq, ümumiliyi pozmadan, hesab etmək olar ki, $P_1 \subset P_2$. $n = 1$ olduqda $P_2 \setminus P_1$ fərqi ya boş çoxluqdur, ya da $[a,b)$ şəkilli bir yarımintervaldır, yada ki, iki $[a,b)$ və $[c,d)$ şəkilli yarımintervalların birləşməsindən ibarət olduğu üçün teoremin hökmü aydındır.

$n = 2$ halını araşdıraq. Tutaq ki, $[\alpha, \beta) \subset [a,b)$ və $[\gamma, \delta) \subset [c,d)$ şərtləri ödənir. Onda aydındır ki, $P_1 = [\alpha, \beta) \times [\gamma, \delta) \subset P_2 = [a,b) \times [c,d)$. Bu halda teoremin hökmü

$$P_2 \setminus P_1 = [a,b) \times [\gamma, \delta) \cup [a,b) \times [\delta, d) \cup [a,b) \times [c, \gamma)$$

bərabərliyindən alınır. Ümumi hal n-ə nəzərən riyazi induksiya prinsipi ilə aparılır. $\triangleleft$

SƏRBƏST İŞ. İsbatı tamamlayın.

TƏRİF 2.2. *Sonlu sayda cüt-cüt kəsişməyən sağdan açıq parallelepipedlərin birləşməsi kimi göstərilə bilən çoxluğa elementar çoxluq deyilir.*

TƏRİF 2.3. $m(P) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot ... \cdot (b_n - a_n) \equiv \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$ *ədədinə sağdan açıq* $P = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times ... \times [a_n, b_n)$ *parallelepipedinin Lebeq ölçüsü deyilir.*

QEYD. $m(\varnothing) = 0$.

TƏRİF 2.4. $m(E) = \sum_{k=1}^{l} m(P_k)$ *ədədinə* $E = \bigcup_{k=1}^{l} P_k$ *elementar çoxluğunun Lebeq ölçüsü deyilir.*

Ola bilər ki, eyni bir elementar çoxluq müxtəlif şəkildə cüt-cüt kəsişməyən sağdan açıq parallelepipedlərin birləşməsi kimi göstərilsin. Aşağıdakı teorem göstərir ki, elementar çoxluğun Lebeq ölçüsü bu göstərişlərdən asılı deyil.

TEOREM 2.3. *Tutaq ki, E elementar çoxluğu* $E = \bigcup_{k=1}^{l} P_k (P_k \cap P_{k'} = \varnothing, k \neq k')$ *və* $E = \bigcup_{j=1}^{r} Q_j (Q_j \cap Q_{j'} = \varnothing, j \neq j')$ *iki müxtəlif ayrılışa malikdir. Onda*

$$m(E) = \sum_{k=1}^{l} m(P_k) = \sum_{j=1}^{r} m(Q_j)$$

bərabərliyi doğrudur.

İSBATI. a) Aydındır ki, $P_1, P_2, ..., P_l$ və P sağdan açıq parallelepipedləri $P_k \subset P (k = 1,2,...,l)$ və $P_k \cap P_{k'} = \varnothing, k \neq k'$ şərtlərini ödəyərsə, onda $\sum_{k=1}^{l} m(P_k) \le m(P)$ bərabərsizliyi doğru olar.

b) Tutaq ki, E_1 və E_2 elementar çoxluqları üçün $E_1 \subset E_2$ şərti ödənilir. Onda $m(E_1) \le m(E_2)$ bərabərsizliyi doğrudur.

E_1 və E_2 elementar çoxluqlarının hər hansı $E_1 = \bigcup_{k=1}^{l} P_k (P_k \cap P_{k'} = \varnothing, k \neq k')$ və $E_2 = \bigcup_{j=1}^{r} Q_j (Q_j \cap Q_{j'} = \varnothing, j \neq j')$ ayrılışlarına baxaq.

$$m(E_1) = \sum_{k=1}^{l} m(P_k) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{r} m(P_k \cap Q_j) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{l} m(P_k \cap Q_j)$$

bərabərliklərində a) bəndindən çıxan

$$\sum_{k=1}^{l} m(P_k \cap Q_j) \le m(Q_j) \; (j = 1,2,...,r)$$

bərabərsizlikləri nəzərə alsaq

$$m(E_1)=\sum_{k=1}^{l} m(P_k)\le \sum_{j=1}^{r} m(Q_j)=m(E_2)$$

bərabərsizliyini almış olarıq.

c) $E=\bigcup_{k=1}^{l} P_k=\bigcup_{j=1}^{r} Q_j$ bərabərliklərini

$$\begin{cases} E=\bigcup_{k=1}^{l} P_k\subset \bigcup_{j=1}^{r} Q_j \\ E=\bigcup_{j=1}^{r} Q_j\subset \bigcup_{k=1}^{l} P_k \end{cases}$$

şəklində yazıb b) bəndini hər iki bərabərsizliyə tətbiq etsək

$$m(E)=\sum_{k=1}^{l} m(P_k)=\sum_{j=1}^{r} m(Q_j)$$

bərabərliklərini almış olarıq. ◁

2.2. Açıq və qapalı çoxluqların Lebeq ölçüsü

TEOREM 2.4. *a) İstənilən (a,b) intervalını hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən sağdan açıq yarımintervalların birləşməsi şəklində göstərmək olar.*

b) $m((a,b))=b-a$.

İSBATI. a) $a=b$ halı aydın olduğu üçün $a<b$ halına baxaq. $b=b_0>b_1>b_2>\ldots>b_m>\ldots$ və $\lim_{m\to\infty} b_m=a$ şərtlərini ödəyən ixtiyarı $\{b_m\}$ ardıcıllığı götürək. Aydındır ki, $(a,b)=\bigcup_{m=1}^{\infty}[b_m,b_{m-1})$.

b) $$m((a,b))=\sum_{m=1}^{\infty}(b_{m-1}-b_m)=\lim_{l\to\infty}\sum_{m=1}^{l}(b_{m-1}-b_m)=$$
$$=\lim_{l\to\infty}[(b_0-b_1)+(b_1-b_2)+\ldots+(b_{l-1}-b_l)]=\lim_{l\to\infty}(b_0-b_l)=b-a. \triangleleft$$

NƏTICƏ. a) İstənilən n ölçülü açıq $\dot P=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\ldots\times(a_n,b_n)$ parallelepipedi hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən sağdan açıq parallelepipedlərın birləşməsi şəklində göstərmək olar.

b) $m\left(\dot P\right)=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)=\prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$.

TEOREM 2.5. *İstənilən iki açıq parallelepipedin birləşməsini hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən sağdan açıq parallelepipedlərın birləşməsi şəklində göstərmək olar.*

İSBATI. Tutaq ki,

$$\dot P_1=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\ldots\times(a_n,b_n) \text{ və}$$
$$\dot P_2=(\alpha_1,\beta_1)\times(\alpha_2,\beta_2)\times\ldots\times(\alpha_n,\beta_n)$$

açıq parallelepipedlərdir. $\dot P_1\cap\dot P_2=\varnothing$ olarsa teoremin hökmü aydındır. $\dot P_1\cap\dot P_2\ne\varnothing$ olan halı əvvəlcə 1 və 2 ölçülü açıq parallelepipedlər üçün isbat edək. $n=1$ halında $\dot P_1=(a,b)$ və $\dot P_2=(c,d)$ intervallarına baxaq. Fərz edək ki, $a<c<b<d$. Onda $\dot P_1\cup\dot P_2=(a,c)\cup[c,b)\cup[b,d)$ bərabərliyinin (a,c) komponentinə Teorem 2.4-i tətbiq edərək teoremin isbatını almış olarıq.

$n=2$ halında $\dot P_1=(a,b)\times(c,d)$ və $\dot P_2=(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ açıq parallelepipedlərinə baxaq. Fərz edək ki, $a<\alpha<b<\beta$ və $c<\gamma<d<\delta$. $\dot P_1$-in $\dot P_2$ ilə kəsişən tərəflərini $\dot P_2$-ın tərəflərini kəsənə qədər, $\dot P_2$-ın $\dot P_1$ ilə kəsişən tərəflərini isə $\dot P_1$-ın tərəflərini kəsənə qədər uzadaraq $\dot P_1\cup\dot P_2$ çoxluğunu cüt-cüt kəsişməyən

$$\Pi_1=(a,\alpha)\times(c,\gamma),\Pi_2=[\alpha,b)\times(c,\gamma),\Pi_3=(a,\alpha)\times[\gamma,d),\Pi_4=[\alpha,b)\times[\gamma,d),$$
$$\Pi_5=[b,\beta)\times(\gamma,d),\Pi_6=(a,\alpha)\times[d,\delta),\Pi_7=[\alpha,\beta)\times[d,\delta),\Pi_8=[b,\beta)\times[d,\delta),$$

parallelepipedlərin birləşməsi şəklində göstərdikdən sonra $\Pi_j\,(j=1,2,...,8)$ parallelepipedlərinin (σ,τ) tipli Dekart vuruqlarına Teorem 2.4-ü tətbiq edərək teoremin isbatını almış olarıq.

Ümumi halda $\dot{P}_1\cup\dot{P}_2$ çoxluğu hər bir $I_j^{(k)}(j=1,2,...,n;k=1,2,...,s)$ Dekart vuruğu (σ,τ) və ya $[\nu,\mu)$ şəklində olan, cüt-cüt kəsişməyən $\Pi_k=I_1^{(k)}\times I_2^{(k)}\times...\times I_n^{(k)}\,(k=1,2,...,s)$ parallelepipedlərinin birləşməsi şəklində göstərilir. Sonra $\Pi_k\,(k=1,2,...,s)$ parallelepipedlərinin hər bir (σ,τ) tipli Dekart vuruqlarına Teorem 2.4 tətbiq edilir. $\triangleleft$.

TEOREM 2.6. *R_n-fəzasının istənilən məhdud açıq çoxluğunu hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən sağdan açıq parallelepipedlərin birləşməsi şəklində göstərmək olar.*

İSBATI. Tutaq ki, $G\subset R_n$ açıq və məhdud çoxluqdur. $G=\varnothing$ halı aydındır. Ona görə fərz edək ki, $G\neq\varnothing$. $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ ilə aşağıdakı xassələrə malik olan çoxluqlar ardıcıllığını işarə edək. 1) $\forall k\in N, F_k\subset G$; 2) $\forall k\in N, F_k$ qapalı və məhduddur; 3) $\forall k\in N, F_k\subset F_{k+1}$; 4) $\forall k\in N, d_k=dist(\partial F_k,\partial G)=\inf\limits_{t\in\partial F_k, s\in\partial G}\rho(t,s)=\frac{1}{k}$, burada ∂F_k və ∂G ,uyğun olaraq, F_k və G çoxluqlarının sərhədləridir. Aydındır ki, $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$. $F_k\,(k=1,2,...)$ qapalı və məhdud çoxluqlarına Borel lemmasını tətbiq edərək G çoxluğunu $G=\bigcup\limits_{\nu=1}^{l\le+\infty}\dot{P}_\nu$ şəklində, yəni ən çoxu hesabi sayda açıq parallelepipedlərin birləşməsi şəklində göstərə bilərik. $G=\bigcup\limits_{\nu=1}^{l\le+\infty}\dot{P}_\nu$ ayrılışına Teorem 2.5-i tətbiq edərək teoremin isbatını almış olarıq. $\triangleleft$

SƏRBƏST İŞ. Göstərin ki, 1)-4) şərtlərini ödəyən $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ ardıcıllığı var.

TƏRİF 2.5. *Tutaq ki, açıq və məhdud $G\subset R_n$ çoxluğu hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən sağdan açıq $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ parallelepipedlərin birləşməsi, yəni $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}P_k$ şəklində göstərilmişdir. Onda $m(G)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(P_k)$ ədədinə G çoxluğunun Lebeq ölçüsü deyilir.*

Teorem 2.3-də olduğu kimi göstərmək olar ki, açıq və məhdud G çoxluğunun Lebeq ölçüsü onun müxtəlif şəkildə cüt-cüt kəsişməyən sağdan açıq parallelepipedlərin birləşməsi kimi göstərilməsindən asılı deyil.

G çoxluğu məhdud olduğu üçün sağdan açıq elə P parallelepipedi var ki, $G\subset P$. Bu bərabərsizlikdən alınır ki, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(P_k)$ sırasının xüsusi cəmlər ardıcıllığı $\left\{S_l=\sum\limits_{k=1}^{l}m(P_k)\right\}$ monoton artır və yuxarıdan məhduddur. Onda Veyerştras teoreminə görə $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(P_k)$ sırası yığılır. Beləliklə, açıq və məhdud G çoxluğunun Lebeq ölçüsü $m(G)\ge 0$ və $m(G)<+\infty$ xassələrinə malikdir.

Misal. Tutaq ki, G həqiqi oxun açıq və məhdud çoxluğudur. Onda onu

$$G=\bigcup_{k=1}^{l\le+\infty}(\alpha_k,\beta_k),\alpha_k\notin G,\beta_k\notin G;\ (\alpha_k,\beta_k)\cap(\alpha_{k'},\beta_{k'})=\varnothing,k\neq k'$$

şəklində göstərmək olar. Bu ayrılışdan və Teorem 2.4-dən

$$m(G)=\sum_{k=1}^{l\le+\infty}m((\alpha_k,\beta_k))=\sum_{k=1}^{l\le+\infty}(\beta_k-\alpha_k)$$

bərabərliyini almış olarıq.

Misal. Daxili hissəsi $\dot{P}=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times...\times(a_n,b_n)$ olan istənilən P parallelepipedinin Lebeq ölçüsü $m(P)=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot...\cdot(b_n-a_n)$ ədədinə bərabərdir.

$\dot{P} \subset P$ olduğundan $m\left(\dot{P}\right) \le m(P)$. İxtiyarı müsbət ε ədədi götürək. Diaqonalı $d_\varepsilon = \frac{d}{1+\varepsilon}$ (d ədədi P-nin diaqonalıdır) olan $P_\varepsilon \subset P$ şərtini ödəyən sağdan açıq P_ε parallelepipedinə baxaq.

$$m(P_\varepsilon) = \frac{m(P)}{(1+\varepsilon)^n} \le m\left(\dot{P}\right)$$

bərabərsizliyində $\varepsilon \to 0$ şərti daxilində limitə keçərək $m(P) \le m\left(\dot{P}\right)$ bərabərsizliyini alarıq. Beləliklə $m(P) = m\left(\dot{P}\right) = (b_1 - a_1)\cdot(b_2 - a_2)\cdot\ldots\cdot(b_n - a_n)$.

T E O R E M 2.7. *Tutaq ki, açıq və məhdud $G \subset R_n$ çoxluğu ən çoxu hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən açıq $\{G_k, k = 1,2,\ldots\}$ çoxluqlarının birləşməsi, yani $G = \bigcup_{k=1}^{l\le+\infty} G_k$ şəklində göstərilmişdir. Onda* $m(G) = \sum_{k=1}^{l\le+\infty} m(G_k)$.

İsbatı aydındır.

T Ə R İ F 2.6. *Tutaq ki, $F \subset R_n$ qapalı və məhdud çoxluqdur. $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ ciddi azalan müsbət ədədlər ardıcıllığıdır. Onda $m(F) = \lim_{k\to\infty} m(G_{\varepsilon_k})$ ədədinə $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_{\varepsilon_k}$ çoxluğunun Lebeq ölçüsü deyilir, burada* $G_{\varepsilon_k} = \{x \in R_n : \rho(x, F) < \varepsilon_k\}$.

S Ə R B Ə S T İ Ş L Ə R. a) Göstərin ki, $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_{\varepsilon_k}$; b) $m(F) = \lim_{k\to\infty} m(G_{\varepsilon_k})$ limiti var; c) F qapalı və məhdud çoxluğun Lebeq ölçüsü $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ ardıcıllığının seçilişindən asılı deyil; d) Tutaq ki, $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ F-i özündə saxlayan ən kiçik qapalı parallelepipeddir. Göstərin ki, $m(F) = m(\overline{P}) - m(\overline{P} \setminus F)$.

T E O R E M 2.8. *Tutaq ki, qapalı və məhdud F çoxluğu sonlu sayda cüt-cüt kəsişməyən qapalı çoxluqların birləşməsi şəklində göstərilmişdir, yəni*

$$F = \bigcup_{k=1}^{l} F_k \;\; (F_k \cap F_{k'} = \varnothing,\ k \ne k').$$

Onda

$$m(F) = \sum_{k=1}^{l} m(F_k).$$

İ S B A T I. Ümumi hal riyazi induksiya prinsipinə görə aparıldığı üçün $F = F_1 \cap F_2$ $(F_1 \cap F_2 = \varnothing)$ halına baxmaq kifayətdir. Qapalı çoxluğun ölçüsünün tərifindən çıxır ki, ixtiyarı müsbət ε ədədi üçün

$$F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2; m(G_1) < m(F_1) + \frac{\varepsilon}{2}, m(G_2) < m(F_2) + \frac{\varepsilon}{2}$$

şərtlərini ödəyən G_1 və G_2 açıq çoxlyqları var. $G = G_1 \cup G_2$ işarə edək.

$$m(F) \le m(G) \le m(G_1) + m(G_2) < m(F_1) + m(F_2) + \varepsilon$$

bərabərsizliklərindən və ε-nun ixtiyarılığından

$$m(F) \le m(F_1) + m(F_2) \tag{*}$$

bərabərsizliyi alınır.

$$F_1 \subset \tilde{G}_1, F_2 \subset \tilde{G}_2; \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 = \varnothing$$

şərtlərini ödəyən $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2$ açıq çoxluqlarını qeyd edək. F qapalı çoxluq olduğundan ixtiyarı müsbət ε ədədi üçün $F \subset \Omega, m(\Omega) < m(F) + \varepsilon$ şərtlərini ödəyən Ω açıq çoxluğu vardır. $\Omega_i = \Omega \cap \tilde{G}_i$ $(i = 1,2)$ işarə edək. Aydındır ki, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$.

$$m(F_1) + m(F_2) \le m(\Omega_1) + m(\Omega_2) = m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \le m(G) < m(F) + \varepsilon$$

bərabərsizliklərindən və ε-nun ixtiyarılığından

$$m(F_1)+m(F_2)\le m(F) \qquad (**)$$

bərabərsizliyi alınır. (*) və (**)-dan $m(F)=m(F_1)+m(F_2)$ bərabərliyi alınır. ◁

2.3. Lebeq mənada ölçülən çoxluqlar və onların xassələri

Tutaq ki, $E\subset R_n$ məhdud çoxluqdur. Aşağıdakı kimi iki ədəd təyin edək:

$$\text{a)}\quad m^*(E)=\inf_{E\subset G} m(G), \qquad (1)$$

burada infimum E çoxluğunu öz daxilinə alan bütün açıq G çoxluqları üzrə götürülür.

$$\text{b)}\quad \mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} m(P_k): E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\right\}, \qquad (2)$$

burada infimum E çoxluğunun sağdan açıq parallelepipedlər sistemindən ibarət bütün mümkün olan hesabi örtükləri üzrə götürülür.

TEOREM 2.9. *R_n-dən olan ixtiyarı məhdud E çoxluğu üçün*

$$m^*(E)=\mu^*(E) \qquad (3)$$

bərabərliyi doğrudur.

İSBATI. $E\subset G$ şərtini ödəyən ixtiyarı açıq G çoxluğu götürək. Teorem 2.6-ya görə G çoxluğunu $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}P_k$ şəklində göstərmək olar, burada $P_k\ (k=1,2,...)$-lar cüt-cüt kəsişməyən sağdan açıq parallelepipedlərdir. $E\subset G=\bigcup_{k=1}^{\infty}P_k$ münasibətini $\mu^*(E)$-nin tərifində nəzərə alsaq $\mu^*(E)\le m(G)$ bərabərsizliyini alarıq. Buradan da, G-nin ixtiyarılığını nəzərə alsaq,

$$\mu^*(E)\le m^*(E) \qquad (4)$$

bərabərsizliyini alarıq.

İndi fərz edək ki, $E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}P_k$ (burada $P_k\ (k=1,2,...)$-lar sağdan açıq parallelepipedlərdir). İstənilən müsbət ε ədədi götürək və $\varepsilon_k=\frac{\varepsilon}{2^k}\ (k=1,2,...)$ kimi müsbət ədədlər düzəldək. Aydındır ki,

$$P_k\subset \dot{P}_k^{\varepsilon_k},\ m\left(\dot{P}_k^{\varepsilon_k}\right)\le m(P_k)+\varepsilon_k\ (k=1,2,...) \qquad (5)$$

münasibətlərini ödəyən açıq $\dot{P}_k^{\varepsilon_k}\ (k=1,2,...)$ parallelepipedləri vardır. E çoxluğunun $G_0=\bigcup_{k=1}^{\infty}\dot{P}_k^{\varepsilon_k}$ açıq çoxluğuna daxil olduğunu və $m^*(E)$-nın tərifini nəzərə alsaq $m^*(E)\le m(G_0)$ bərabərsizliyini alarıq. (5) münasibətlərini bu bərabərsizlikdə nəzərə alsaq

$$m^*(E)<\sum_{k=1}^{\infty}m(P_k)+\varepsilon$$

bərabərsizliyini alarıq. ε-nun ixtiyarılığından çıxır ki,

$$m^*(E)\le\sum_{k=1}^{\infty}m(P_k) \qquad (6)$$

bərabərsizliyi doğrudur. (6) bərabərsizliyini və $\mu^*(E)$-nin tərifini nəzərə alsaq

$$m^*(E)\le\mu^*(E) \qquad (7)$$

bərabərsizliyini alarıq. (4) və (7) bərabərsizliklərindən (3) bərabərliyi alınır. ◁

SƏRBƏST İŞ. Tutaq ki, $E\subset R_n$ məhdud çoxluqdur.

$$\nu^*(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{l\le+\infty}m(P_k):E\subset\bigcup_{k=1}^{l\le+\infty}P_k\right\}$$

kimi ədəd təyin edək, burada infimum E çoxluğunun bütün növ parallelepipedlər sistemindən ibarət olan bütün mümkün olan sonlu və ya hesabi örtükləri üzrə götürülür. Göstərin ki, $\mu^*(E)=\nu^*(E)$.

T ə r i f 2.7. *Tutaq ki, $E\subset R_n$ məhdud çoxluqdur. $m^*(E)=\inf\limits_{E\subset G}m(G)$ ədədinə (infimum E çoxluğunu öz daxilinə alan bütün açıq G çoxluqları üzrə götürülür) E çoxluğunun xarici (Lebeq) ölçüsü deyilir.*

T ə r i f 2.8. *Tutaq ki, $E\subset R_n$ məhdud çoxluqdur. $m_*(E)=\sup\limits_{F\subset E}m(F)$ ədədinə (supremum E çoxluğuna daxil olan bütün qapalı F çoxluqları üzrə götürülür) E çoxluğunun daxili (Lebeq) ölçüsü deyilir.*

R_n-dən olan məhdud çoxluqların xarici və daxili ölçülərinin xassələri.

1°. İstənilən E çoxluğu üçün $0\le m_*(E)\le m^*(E)<+\infty$.

2°. İstənilən G açıq çoxluğu üçün $m_*(G)=m^*(G)=m(G)$.

3°. İstənilən F qapalı çoxluğu üçün $m_*(F)=m^*(F)=m(F)$.

4°. Əgər $A\subset B$ olarsa, onda $m_*(A)\le m_*(B)$, $m^*(A)\le m^*(B)$.

5°. Tutaq ki, $A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{l\le+\infty}A_k$ ("$\subset$" yerində "="-lik də ola bilər). Onda $m^*(A)\le\sum\limits_{k=1}^{l\le+\infty}m^*(A_k)$.

İ S B A T I. $\sum\limits_{k=1}^{l\le+\infty}m^*(A_k)=+\infty$ halı aydın olduğu üçün $\sum\limits_{k=1}^{l\le+\infty}m^*(A_k)<+\infty$ halına baxaq. Bu halda aydındır ki, hər bir $k\in\{1,2,\dots,l\le+\infty\}$ üçün $m^*(A_k)<+\infty$ olacaq. Istənilən müsbət ε ədədi götürək və $\varepsilon_k=\frac{\varepsilon}{2^k}(k=1,2,\dots)$ kimi müsbət ədədlər düzəldək. $m^*(A_k)$-ın tərifinə görə

$$A_k\subset G_k, m(G_k)<m^*(A_k)+\varepsilon_k\ (k\in\{1,2,\dots,l\le+\infty\})$$

şərtlərini ödəyən açıq G_k çoxluqları vardır. Aydındır ki, $G_0=\bigcup\limits_{k=1}^{l\le+\infty}G_k$ açıq çoxluğu üçün $A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{l\le+\infty}A_k\subset\bigcup\limits_{k=1}^{l\le+\infty}G_k$ münasibətləri doğrudur. Buradan $m^*(A)$-nın tərifinə görə $m^*(A)\le m(G_0)$ və $m(G_0)\le\sum\limits_{k=1}^{l\le+\infty}m(G_k)$ bərabərsizliklərini alarıq. Beləliklə

$$m^*(A)\le m(G_0)\le\sum_{k=1}^{l\le+\infty}m(G_k)\le\sum_{k=1}^{l\le+\infty}\left(m^*(A_k)+\varepsilon_k\right)=\sum_{k=1}^{l\le+\infty}m^*(A_k)+\varepsilon\ .$$

Burada ε-nun ixtiyarılığını nəzərə alsaq isbatı tələb olunan $m^*(A)\le\sum\limits_{k=1}^{l\le+\infty}m^*(A_k)$ bərabərsizliyi almış olarıq. ◃

6°. Tutaq ki, $A=\bigcup\limits_{k=1}^{l\le+\infty}A_k\ (A_k\cap A_{k'}=\varnothing,k\ne k')$. Onda $m_*(A)\ge\sum\limits_{k=1}^{l\le+\infty}m_*(A_k)$.

İ S B A T I. Əvvəlcə $l=p<+\infty$ halına baxaq. Istənilən müsbət ε ədədi götürək və $\{1,2,\dots,p\}$ çoxluğundan olan hər bir k nömrəsi üçün

$$F_k\subset A_k, m(F_k)>m_*(A_k)-\frac{\varepsilon}{p}$$

şərtlərini ödəyən qapalı F_k çoxluqlarını qeyd edək. $F_k\cap F_{k'}=\varnothing\ (k\ne k')$ olduğunu nəzərə alaraq

$$m_*(A)\ge m\left(\bigcup_{k=1}^{p}F_k\right)=\sum_{k=1}^{p}m(F_k)>\sum_{k=1}^{p}m_*(A_k)-\varepsilon$$

münasibətlərini almış olarıq. Burada ε-nun ixtiyarılığını nəzərə alsaq isbatı tələb olunan

$$m_*(A) \geq \sum_{k=1}^{p} m_*(A_k) \qquad (8)$$

bərabərsizliyi almış olarıq.

İndi isə $l = +\infty$ halına baxaq. (8) bərabərsizliyindən çıxır ki, $\left\{\sum_{k=1}^{p} m_*(A_k)\right\}_{p=1}^{\infty}$ monoton artan və yuxarıdan məhdud ardıcıllıqdır. Deməli, Veyerştras teoreminə görə onun limiti var, yəni $\sum_{k=1}^{\infty} m_*(A_k)$ sırası yığılır. (8) bərabərsizliyində $p \to +\infty$ şərti daxilində limitə keçərək $m_*(A) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} m_*(A_k)$ bərabərsizliyini almış olarıq. ◁

QEYD. 6°-cı xassədə $A_k \cap A_{k'} = \varnothing, k \neq k'$ şərtləri mühüm şərtlərdir. Məsələn, $A_1 = A_2 = [0,1], A = A_1 \cup A_2$ olarsa, onda $m_*(A) = 1, m_*(A_1) + m_*(A_2) = 2$ bərabərlikləri 6°-cı xassənin ödənmədiyini göstərir.

7°. Tutaq ki, E çoxluğu $\dot{P} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ açıq parallelepipedinin alt çoxluğudur. Onda

$$\text{a) } m^*(E) + m_*\left(\dot{P} \setminus E\right) = m\left(\dot{P}\right),$$

$$\text{b) } m^*\left(\dot{P} \setminus E\right) + m_*(E) = m\left(\dot{P}\right)$$

bərabərlikləri doğrudur.

İSBATI. Əgər a) bərabərliyində E və $\dot{P} \setminus E$ çoxluqlarının yerlərini dəyişsək b) bərabərliyini alarıq. Ona görə də a) bərabərliyini isbat etmək kifayətdir.

Istənilən müsbət ε ədədi götürək. Daxili ölçünün tərifindən istifadə edərək

$$F \subset \dot{P} \setminus E, m(F) > m_*\left(\dot{P} \setminus E\right) - \varepsilon.$$

şərtlərini ödəyən hər hansı bir qapalı F çoxluğunu qeyd edək. $G = \dot{P} \setminus F$ açıq çoxluğunun E çoxluğunu öz daxilində saxladığını və xarici ölçünün tərifini nəzərə alsaq

$$m^*(E) \leq m(G) = m\left(\dot{P}\right) - m(F) < m\left(\dot{P}\right) - m_*\left(\dot{P} \setminus E\right) + \varepsilon$$

münasibətlərini, buradan da ε-nun ixtiyarı olduğuğunu nəzərə almaqla,

$$m^*(E) + m_*\left(\dot{P} \setminus E\right) \leq m\left(\dot{P}\right) \qquad (9)$$

bərabərsizliyini almış olarıq.

Yenə də istənilən müsbət ε ədədi götürək. Xarici ölçünün tərifindən istifadə edərək

$$E \subset \tilde{G}, m(\tilde{G}) < m^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

şərtlərini ödəyən hər hansı bir açıq $\tilde{G}$ çoxluğunu qeyd edək. $G_1 = \tilde{G} \cap \dot{P}$ ilə E-ni öz daxilində saxlayan açıq çoxluğu işarə edək. $\delta = \delta(\varepsilon)$ müsbət ədədini elə seçək ki, $\dot{P}$-ın daxili sərhəd zonası olan

$$P_\varepsilon = \dot{P} \setminus \left([a_1 + \delta, b_1 - \delta] \times [a_2 + \delta, b_2 - \delta] \times \cdots \times [a_n + \delta, b_n - \delta]\right)$$

açıq P_ε çoxluğunun Lebeq ölçüsü $m(P_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ olsun. Aydındır ki, $G = G_1 \cup P_\varepsilon$ açıq çoxluğu $\dot{P}$ parallelepipedinin alt çoxluğudur və onun Lebeq ölçüsü $m(G) < m^*(E) + \varepsilon$ bərabərsizliyini ödəyir. $F = \dot{P} \setminus G$ işarə edək.

$$F = \left([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]\right) \cap (R_n \setminus G)$$

bərabərliyindən çıxır ki, F qapalı çoxluqdur (burada bu fakt əsasdır!). $F \subset \dot{P} \setminus E$ bərabərsizliyindən çıxır ki,

$$m_*\left(\dot{P}\setminus E\right)\geq m(F)=m\left(\dot{P}\right)-m(G)>m\left(\dot{P}\right)-m^*(E)-\varepsilon .$$

Buradan ε -nun ixtiyarılığını nəzərə alsaq,

$$m^*(E)+m_*\left(\dot{P}\setminus E\right)\geq m\left(\dot{P}\right) \tag{10}$$

bərabərsizliyini almış olarıq. (9) və (10) bərabərsizliklərindən

$$m^*(E)+m_*\left(\dot{P}\setminus E\right)=m\left(\dot{P}\right)$$

bərabərliyi alınır. ⊲

N ə t i c ə. $m^*(E)-m_*(E)=m^*\left(\dot{P}\setminus E\right)-m_*\left(\dot{P}\setminus E\right)$

T ə r i f 2.9. *Tutaq ki, $E\subset R_n$ məhdud çoxluqdur. Əgər $m_*(E)=m^*(E)$ bərabərliyi ödənərsə, yəni onun daxili və xarici ölçüləri bərabər olarsa, onda E çoxluğuna ölçülən (Lebeq mənada) çoxluq deyilir.*

Daxili və xarici ölçülərin ortaq qiymətlərinə E çoxluğunun ölçüsü deyilir və $m(E)=m_*(E)=m^*(E)$ kimi işarə olunur.

M i s a l. Bir elementli çoxluğun ölçüsü sıfırdır.

Tutaq ki, $E=\{a:a\in R_n\}$. Mərkəzi a nöqtəsində ölçüsü ixtiyarı müsbət ε ədədinə bərabər olan açıq parallelepipedlər a nöqtəsini özündə saxlayan açıq çoxluqlar içərisində olduğu üçün $m^*(E)\leq\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənəcəkdir. $0\leq m_*(E)\leq m^*(E)\leq\varepsilon$ bərabərsizliklərindən və ε -nun ixtiyarı olmasından $m(E)=0$ bərabərliyi alınır.

Ölçünün və ölçülən çoxluqların xassələri öz əksini aşağıdakı teoremlərdə tapmışdır.

T e o r e m 2.10. *Qapalı və açıq çoxluqlar ölçüləndir və onların yeni təyin olunan ölçüsü əvvəlki ölçüsü ilə üst-üstə düşür.*

İsbatı daxili və xarici ölçülərin 1° və 2° xassələrindən çıxır.

T e o r e m 2.11. *Tutaq ki, E $\dot{P}$ açıq parallelepipedinin alt çoxluğudur. Onda E və $\dot{P}\setminus E$ çoxluqları eyni zamanda ya ölçülür, yada ki, ölçülmür.*

İsbatı daxili və xarici ölçülərin 7° xassəsinin nəticəsindən çıxır.

T e o r e m 2.12 *(Ölçünün tam additivlik xassəsi). Tutaq ki, məhdud E çoxluğu ən çoxu hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən ölçülən çoxluqların birləşməsi şəklində göstərilib, yəni*

$$E=\bigcup_{k=1}^{l\leq+\infty}E_k \ \left(E_k\cap E_{k'}=\varnothing,k\neq k'\right).$$

Onda E çoxluğu ölçüləndir və

$$m(E)=\sum_{k=1}^{l\leq+\infty}m(E_k)$$

bərabərliyi doğrudur.

İ s b a t ı. Daxili və xarici ölçülərin $1^\circ,5^\circ,6^\circ$ xassələrindən və ölçülən çoxluğun tərifindən

$$\sum_{k=1}^{l\leq+\infty}m(E_k)=\sum_{k=1}^{l\leq+\infty}m_*(E_k)\leq m_*(E)\leq m^*(E)\leq\sum_{k=1}^{l\leq+\infty}m^*(E_k)=\sum_{k=1}^{l\leq+\infty}m(E_k)$$

münasibətlərini, buradan da teoremin isbatını almış olarıq. ⊲

M i s a l. İstənilən parallelepipedin sərhəddinin ölçüsü sıfırdır.

Tutaq ki, P ixtiyarı növlü parallelepiped, $\dot{P}$ onun daxili, Γ isə onun sərhəddidir. Aydındır ki, $\dot{P}$(açıq), Γ(qapalı) çoxluqları ölçülür, $\dot{P}\cap\Gamma=\varnothing$ və $P=\dot{P}\cup\Gamma$. Teorem 2.12-dən çıxır ki,

$$m(P)=m\left(\dot{P}\right)+m(\Gamma).$$

Buradan, daxili hissəsi $\dot{P}=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times...\times(a_n,b_n)$ olan istənilən P parallelepipedinin Lebeq ölçüsü $m(P)=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot...\cdot(b_n-a_n)$ ədədinə bərabər olduğu üçün (bax, Tərif 2.5-dən sonra gələn ikinci misala), $m(\Gamma)=0$ bərabərliyi alınır.

M i s a l. Ən çoxu hesabi çoxluğun ölçüsü sıfırdır.

Tutaq ki, $E=\{a_1,a_2,\ldots,a_l\}_{l\le+\infty}\subset R_n$. $m(\{a_k\})=0\,(k=1,2,\ldots)$, $E=\bigcup_{k=1}^{l\le+\infty}\{a_k\}$ bərabərliklərindən və Teorem 2.12-dən $m(E)=0$ bərabərliyi alınır.

T E O R E M 2.13. *Sonlu sayda ölçülən çoxluqların birləşməsi ölçülən çoxluqdur.*

İ S B A T I. Sadəlik üçün iki çoxluq olan hala baxaq. Tutaq ki, $E=E_1\cup E_2$, belə ki, E_1 və E_2 çoxluqları ölçülən çoxluqlardır. Ölçünün tərifinə görə istənilən müsbət ε ədədi üçün

$$F_k\subset E_k\subset G_k,\ m(G_k)-m(F_k)<\frac{\varepsilon}{2}\ (k=1,2) \tag{11}$$

şərtlərini ödəyən qapalı $F_k(k=1,2)$ və açıq $G_k\ (k=1,2)$ çoxluqları vardır. $F_3=F_1\cup F_2$ və $G_3=G_1\cup G_2$ işarələmələri aparaq. Aydındır ki, aşağıdakılar doğrudur:

$i)\quad F_3\subset E\subset G_3$;

$ii)\quad m(F_3)\le m_*(E)\le m^*(E)\le m(G_3)$;

$iii)\quad G_k=F_k\cup(G_k\setminus F_k)(k=1,2,3)$;

$iv)\quad F_k\cap(G_k\setminus F_k)=\varnothing\ (k=1,2,3)$;

$v)\quad G_k\setminus F_k=G_k\cap(R_n\setminus F_k)(k=1,2,3)$;

$vi)$ $G_k\setminus F_k\,(k=1,2,3)$ çoxluqları açıqdır;

$vii)\quad m(G_k\setminus F_k)=m(G_k)-m(F_k)(k=1,2,3)$;

$viii)\quad G_3\setminus F_3\subset(G_1\setminus F_1)\cup(G_2\setminus F_2)$;

$ix)\quad m(G_3\setminus F_3)\le m(G_1\setminus F_1)+m(G_2\setminus F_2)$.

$ii), ix)$ və (11)-dən

$$m^*(E)-m_*(E)\le m(G_3)-m(F_3)<\varepsilon \tag{12}$$

bərabərsizliyi alınır. (12)-də ε-nun ixtiyarı olduğunu nəzərə alsaq teoremin isbatını almış olarıq. ◅

T E O R E M 2.14. *Sonlu sayda ölçülən çoxluqların kəsişməsi ölçülən çoxluqdur.*

İ S B A T I. Tutaq ki, $E=\bigcap_{k=1}^{l}E_k$, belə ki, $E_k\ (k=1,2,\ldots,l)$ çoxluqları ölçülən çoxluqlardır. $E_k\ (k=1,2,\ldots,l)$ çoxluqlarını özündə saxlayan $\dot{P}$ açıq parallelepipedini götürək. Aydındır ki, $\dot{P}\setminus E=\bigcup_{k=1}^{l}\left(\dot{P}\setminus E_k\right)$. Teorem 2.11-ə görə $\dot{P}\setminus E_k\ (k=1,2,\ldots,l)$ çoxluqları ölçüləndir. Teorem 2.13-ə görə $\dot{P}\setminus E$ çoxluğu ölçüləndir. Deməli Teorem 2.11-ə görə E çoxluğu ölçüləndir. ◅

T E O R E M 2.15. *İki ölçülən çoxluğun fərqi ölçüləndir.*

İ S B A T I. E_1 və E_2 ölçülən çoxluqların fərqini $E=E_1\setminus E_2$ ilə işarə edək. E_1 və E_2 ölçülən çoxluqlarını özündə saxlayan $\dot{P}$ açıq parallelepipedini götürək. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $E=E_1\cap\left(\dot{P}\setminus E_2\right)$. Teoremin isbatı bu bərabərliyə Teorem 2.14- ü tətbiq etməklə sona çatdırılır. ◅

N ə t i c ə. Əgər $E_2\subset E_1$ olarsa, onda $m(E_1\setminus E_2)=m(E_1)-m(E_2)$.

T E O R E M 2.16. *Hesabi sayda ölçülən çoxluqların birləşməsi şəklində göstərilə bilən hər bir məhdud çoxluq ölçüləndir.*

İ S B A T I. Tutaq ki, E məhdud çoxluq, $E_k\ (k=1,2,\ldots)$-lar ölçülən çoxluqlardır və $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$. $E_1'=E_1,\ E_k'=E_k\setminus\bigcup_{l=1}^{k-1}E_l\ (k=1,2,\ldots)$ çoxluqlarına baxaq. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu yeni daxil olunmuş $E_k'\ (k=1,2,\ldots)$ çoxluqları cüt-cüt kəsişmir, ölçüləndir və $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k'$ bərabərliyi doğrudur. Sonuncu bərabərliyə Teorem 2.12-ni tətbiq etsək teoremin isbatını almış olarıq. ◅

T E O R E M 2.17. *Hesabi sayda ölçülən çoxluqların kəsişməsi ölçüləndir.*

İSBATI. Tutaq ki, $E_k\ (k=1,2,\dots)$-lar ölçülən çoxluqlardır və $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$. E_1-i özündə saxlayan $\dot{P}$ açıq parallelepipedini götürək və $\tilde{E}_k=\dot{P}\cap E_k\ (k=1,2,\dots)$ çoxluqlarına baxaq. Onda

$$E=\dot{P}\cap E=\dot{P}\cap\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\dot{P}\cap E_k\right)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\tilde{E}_k .$$

Teoremin isbatı $\dot{P}\setminus E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\dot{P}\setminus\tilde{E}_k\right)$ bərabərliyindən, Teorem 2.11-dən və Teorem 2.16-dan alınır. ◁

SƏRBƏST İŞ. Tutaq ki, $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ölçülən çoxluqlar ardıcıllığı monoton artır, yəni

$$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\dots$$

şərtləri ödənir. Əgər $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ çoxluğu məhdud olarsa, onda o ölçülür və

$$m(E)=\lim_{k\to\infty}m(E_k) .$$

SƏRBƏST İŞ. Tutaq ki, $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ölçülən çoxluqlar ardıcıllığı monoton azalır, yəni

$$E_1\supset E_2\supset E_3\supset\dots$$

şərtləri ödənir. Onda $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$ çoxluğu ölçülür və $m(E)=\lim_{k\to\infty}m(E_k)$.

L_n^b ilə R_n fəzasının məhdud və ölçülən çoxluqlar fəzasını, 2^c ilə isə kontinuum güclü çoxluğun bütün alt çoxluqlar sisteminin gücünü işarə edək.

TEOREM 2.18. $\overline{L_n^b}=2^c$.

İSBATI. Ω_{R_n} ilə R_n-in bütün mümkün olan alt çoxluqlar sistemini işarə edək. $L_n^b\subset\Omega_{R_n}$ və $\overline{R_n}=c$ olduğunu nəzərə alsaq $\overline{L_n^b}\le 2^c$ bərabərsizliyini almış oluruq. R_n-in $m(M)=0$ və $\overline{M}=c$ şərtlərini ödəyən hər hansı bir məhdud M çoxluğunu götürək. M çoxluğunun bütün mümkün olan alt çoxluqlar sistemini Ω_M ilə işarə edək. $\Omega_M\subset L_n^b$ olduğu üçün $\overline{L_n^b}\ge 2^c$ bərabərsizliyi də doğrudur. Beləliklə $\overline{L_n^b}=2^c$. ◁

SƏRBƏST İŞ. Göstərin ki, istənilən müsbət ölçülü çoxluğun ölçülməyən alt çoxluğu var.

2.4. R_n fəzasında qeyri-məhdud çoxluqların Lebeq ölçüsü

İstənilən ν natural ədədi götürək və mərkəzi koordinat başlanğıcında tili ν-yə bərabər olan $K_\nu=\left(-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}\right)\times\left(-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}\right)\times\dots\times\left(-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}\right)$ kubuna baxaq. Aydındır ki, $R_n=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}K_\nu$.

TƏRİF 2.10. *Tutaq ki, E R_n-in ixtiyarı çoxluğudur. Əgər istənilən ν natural ədədi üçün məhdud $E_{K_\nu}=E\cap K_\nu$ çoxluğu ölçülən olarsa, onda E-yə ölçülən çoxluq deyilir və $\lim_{\nu\to\infty}m(E_{K_\nu})$ limitinə E çoxluğunun (Lebeq) ölçüsü deyilir.*

E çoxluğunun (Lebeq) ölçüsü $m(E)$ kimi işarə olunur. Beləliklə tərifə görə $m(E)=\lim_{\nu\to\infty}m(E_{K_\nu})$.

Qeyd edək ki, $0\le m(E)\le+\infty$.

SƏRBƏST İŞ. Tərifdə $\{K_\nu\}$ ardıcıllığı əvəzinə $R_n=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}M_\nu$ şərtini ödəyən istənilən monoton artan, məhdud və ölçülən $\{M_\nu\}$ çoxluqlar ardıcıllığını götürmək olar.

Misal. İstənilən n natural ədədi üçün R_n çoxluğu ölçüləndir və $m(R_n)=+\infty$.

Misalın doğruluğu $R_{K_\nu} = R_n \cap K_\nu = K_\nu$ və $m(K_\nu) = k^n$ bərabərliklərindən çıxır.

M i s a l. İstənilən hesab çoxluq (məhdud və ya qeyri-məhdud!) ölçüləndir və onun ölçüsü sıfra bərabərdir.

Tutaq ki, A hesabi çoxluqdur. Istənilən ν natural ədədi üçün $A_{K_\nu} = A \cap K_\nu$ çoxluğu məhdud və ən çoxu hesabi çoxluqdur. Onda 2.2 bəndindəki uyğun misala görə istənilən ν natural ədədi üçün $m(A_{K_\nu}) = 0$ olacaq. Buradan da, tərifə görə, $m(A) = 0$ bərabərliyi alınır.

M i s a l. Qeyri-məhdud $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[k, k + \frac{1}{2^k}\right]$ çoxluğunun ölçüsünü tapın.

Asanlıqla yoxlanılan

$$E_{K_\nu} = E \cap K_\nu = E \cap \left(-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{s} \left[k, k + \frac{1}{2^k}\right], \nu = 2s + 2 \; olarsq \\ \left(\bigcup_{k=1}^{s} \left[k, k + \frac{1}{2^k}\right]\right) \setminus \left\{s + \frac{1}{2^s}\right\}, \nu = 2s + 1 \; olarsq \\ s = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$m\left(E_{K_{2s+2}}\right) = m\left(E_{K_{2s+1}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \frac{1}{2^s}$$

bərabərliklərdən çıxır ki,

$$m(E) = \lim_{\nu \to \infty} m(E_{K_\nu}) = \lim_{s \to \infty} m\left(E_{K_{2s+2}}\right) = \lim_{s \to \infty} m\left(E_{K_{2s+1}}\right) =$$

$$= \lim_{s \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right) = 1$$

Aşağıdakı şərtləşmələri qəbul edək:
İstənilən müsbət a ədədi üçün
1). $a + (+\infty) = +\infty, \quad +\infty + a = +\infty$;
2). $+\infty - a = +\infty$;
3). $(+\infty) \cdot a = +\infty, \quad a \cdot (+\infty) = +\infty$;
4). $+\infty + (+\infty) = +\infty$;

5). $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$.

Asanlıqla göstərmək olar ki, bu şərtləşmələr daxilində, 2.2 bəndində isbat olunan teoremlər (Teorem 2.15-in nəticəsindən başqa) ölçülən qeyri-məhdud çoxluqlar üçün də doğrudur.

S Ə R B Ə S T İ Ş. 2.2 bəndindəki teoremləri ölçülən qeyri-məhdud çoxluqlar üçün isbat edin.

2.5. Çalışmalar

2.1.

1). $\bar{P} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ qapalı parallelepipedinin neçə a) təpəsi, b) tili,c) ikiüzlü bucağı və d) $n-1$ ölçülü üzü var?; onlardan neçəsi sağdan açıq $P = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_n, b_n)$ parallelepipedinə mənsubdur?

2). $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1 - \frac{1}{2^k}\right) \times \left[0, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$ çoxluğunun ölçüsünü tapın.

3). $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2^k}, 1\right) \times \left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$ çoxluğunun ölçüsünü tapın.

4). Tutaq ki, Q parallelepipedi P parallelepipedindən $Tx = \alpha x \; (\alpha > 0, x \in R_n)$ oxşarlıq çevirməsi ilə alınıb. Göstərin ki, $m(Q) = \alpha^n m(P)$.

5). Göstərin ki, R_2 fəzasının $A = \{x = (x_1, 0), x_1 \in R_1\}$ çoxluğunu örtən (yəni $A \subset \bigcup_k P_k$ şərtini ödəyən) və ölçülərinin cəmi istənilən müsbət ε ədədindən kiçik olan hesabi sayda sağdan açıq $P_k \; (k = 1, 2, \ldots)$ düzbucaqlılar sistemi vardır.

6). 5-ci məsələni R_2-ni R_n ilə , R_1-i R_{n-1}-lə və "düzbucaqlılar" ifadəsini "parallelepipedlər" ifadəsi ilə əvəz edərək həll edin.

7). Tutaq ki, $A = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ çoxluğu $[a, b]$ parçasında kəsilməz olan $f(x)$ funksiyasının qrafikidir. Göstərin ki, A çoxluğunu örtən (yəni $A \subset \bigcup_k P_k$ şərtini ödəyən) və ölçülərinin cəmi istənilən müsbət ε ədədindən kiçik olan ən çoxu hesabi sayda sağdan açıq P_k $(k=1,2,\ldots)$ düzbucaqlılar sistemi vardır.

8). Göstərin ki, R_2 fəzasının sağdan açıq P və Q parallelepipedlərinin $P\setminus Q$ fərqini 4-dən çox olmayan və cüt-cüt kəsişməyən sağdan açıq parallelepipedlərin birləşməsi şəklində göstərmək olar.

2.2.

1). Kantorun G_0 çoxluğunun ölçüsünü tapın.

2). Kantorun P_0 çoxluğunun ölçüsünü tapın.

3). Göstərin ki, Ox oxunda yerləşən istənilən E çoxluğu (hətta o düz xətdə ölçülən olmasa belə!) Oxy müstəvisində ölçüləndir və onun müstəvi ölçüsü sıfra bərabərdir.

4). Heç olmasa bir daxili nöqtəsi olan çoxluğun ölçüsü sıfır ola bilərmi?

5). $F\subset[a,b]\,(a<b)$, $F\neq[a,b]$ və $m(F)=b-a$ şərtlərini ödəyən qapalı F çoxluğu varmı?

6). Kantorun P_0 çoxluğundan istifadə edərək $A=\bigcup\limits_{x\in P_0}\left(x-\frac{1}{20},x+\frac{1}{20}\right)$ çoxluğu düzəldək. $m(A)=?$

7). $[0,1]$ parçasında, ölçüsü verilmiş $a\,(0<a<1)$ ədədinə bərabər olan, heç yerdə sıx mükəmməl çoxluq qurun.

8). Tutaq ki, $A\subset[0,1]$ ölçülən çoxluqdur. Göstərin ki, $f(x)=m(A\cap[0,x])$ funksiyası $[0,1]$ parçasında kəsilməzdir.

9). $G=(0,1)\setminus\left\{\frac{1}{k},k\in N\right\}$ açıq çoxluğunun ölçüsünü tapın.

10). R_2 fəzasının $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(0,1)\times\left[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right)$ açıq çoxluğunun ölçüsünü tapın.

11). R_3 fəzasının $F=\{(x,y,z):x^2\le 1;|y+1|\le 2;1\le z\le 4\}$ qapalı çoxluğunun ölçüsünü tapın.

12). R_3 fəzasının $F=\{(x,y,z):x^2-3x+2\le 0;|y|\le 1;|z|\le 2\}$ qapalı çoxluğunun ölçüsünü tapın.

13). R_3 fəzasının $F=\{(x,y,z):|x+2|\le 3;|y-1|\le 2;\ z=4\}$ qapalı çoxluğunun ölçüsünü tapın.

14). R_3 fəzasının

$$F=\left\{(x,y,z):x\in[0,3\pi]\cap\left\{x:0\le\sin x\le\frac{1}{2}\right\};0\le y\le\frac{1}{2};0\le z\le 1\right\}$$

qapalı çoxluğunun ölçüsünü tapın.

2.3.

Aşağıdakı çoxluqların ölçülərini tapın.

1). $E=\{(x,y)\in R:\ |x|+|y|\le 1\}$.

2). $E=\{(x,y)\in R_2:x\le y\le -x;|x|+|y|<2\}$.

3). $E=\{(x,y)\in R_2:\ |x|\le 1;|signx|\le y<2\}$.

4). $E=\{(x,y)\in R_2:\ |x|\le 1;\ x-1\le y<x+1\}$.

5). $E=\{(x,y)\in R_2:\ 0\le x\le\pi;|y|\le\sin x\}$.

6). $E=\{(x,y)\in R_2:\ 2|x|-1\le y<|x|+1\}$.

7). $E=\{(x,y)\in R_2:\ 0\le x\le\ln 5;|y|\le e^x\}$.

Göstərin ki, aşağıdakı çoxluqlar ölçüləndir və onların ölçülərini tapın.

8). $E=\left\{(x,y)\in R_2:\ 0\le x<\frac{1}{2};[x^2]\le y<[x^2+1]\right\}$ ($[a]$ simvolu ilə a ədədinin tam hissəsi işarə olunmuşdur).

9). $E=\left\{(x,y)\in R_2:\ 0\le x<4;[x]\le y<[x]+\frac{1}{2^{[x]}}\right\}$.

Göstərin ki, aşağıdakı çoxluqlar ölçüləndir.

10). $E=\{x\in R_1:\ \sin x>0\}$;

11). $E=\{x\in R_1:\ 0<\cos x<1\}$;

12). $E=\{x\in R_1:\ x^2\in Q\}$;

13). $E=\{x\in R_1:\ \sin x\notin Q\}$;

14). Tutaq ki, $E_k\subset(0,1)\ (k=1,2,\ldots p)$ və $\sum\limits_{k=1}^{p}m(E_k)>p-1$. Göstərin ki, $m\left(\bigcap\limits_{k=1}^{p}E_k\right)>0$.

Aşağıdakı çoxluqların ölçülərini tapın.

15). $E=\{x\in(-\infty,+\infty):|arctgx|\le\frac{\pi}{4}\}$.

16). $E=\{x\in[0,2\pi]:arcctgx\le 1\}$.

17). $E=\{x\in(-\infty,+\infty):\ln x-\ln 5<0\}$.

18). $E=\{x\in[3,4]:3\sin^2x+4\sin x-7\le 0\}$.

19). $E=\{x\in(-\infty,+\infty):3\sin^2x+4\sin x-7=0\}$.

20). $E=\{x\in[0,\pi]:4\sin 2x\cos 2x-\sqrt{2}\ge 0\}$.

21). $E=\{x\in(-\infty,+\infty):\sin x+\chi(x)\ge 1\}$,

burada $\chi(x)=\begin{cases}1, & x\ \textit{rasional olduqda},\\ 0, & x\ \textit{irrasional olduqda}.\end{cases}$ - Dirixle funksiyasıdır.

22). $E=\{x\in(-\infty,+\infty):|3-2x|\le 7\}$,

23). $E=\left\{x\in(-\infty,+\infty):\dfrac{23+22x-x^2}{(x-2)^2}>0\right\}$,

24). $E=\{x\in(-\infty,+\infty):\log_2(x-2)\le 3\}$.

2.4.

Göstərin ki, aşağıdakı çoxluqlar ölçüləndir və onların ölçülərini tapın.

1). $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left[2^k,2^k+\frac{1}{k}\right]$. 2). $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left[\sqrt{2k},\sqrt{2k+1}\right)$.

3). $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(k^k,k^k+\dfrac{1}{k\ln k}\right]$.

4). $E=\{(x,y)\in R_2:\ x\ge 0;[x]\le y<[x+1]\}$ ($[a]$ simvolu ilə a ədədinin tam hissəsi
işarə olunmuşdur).

5). $E=\{(x,y)\in R_2:\ x\ge 0;[x^2]\le y<[x^2+1]\}$.

6). $E=\left\{(x,y)\in R_2:\ x\ge 0;[x]\le y<[x]+\dfrac{1}{2^{[x]}}\right\}$.

7). Sonsuz ölçülü monoton azalan $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ çoxluqlar ardıcıllığı qurun ki, onların $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ kəsişməsinin ölçüsü

a) $+\infty$ -a; b) istənilən müsbət α ədədinə; c) 0 -a bərabər olsun.

8).Elə sonlu ölçülü monoton artan $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ çoxluqlar ardıcıllığı qurun ki, onların $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ birləşməsinin ölçüsü

a) $+\infty$ -a; b) istənilən müsbət α ədədinə bərabər olsun

2.6. Cavablar və göstərişlər

2.1

1). a) 2^n, b) $n2^{n-1}$, c) $n(n-1)2^{n-3}$, d) $2n$. Onlardan P-yə mənsub olanlar: a) 1, b) n, c) $\dfrac{n(n-1)}{2}$, d) n. 2). $m(A)=\dfrac{2}{3}$. 3). $m(B)=\dfrac{1}{3}$. 5). Sağdan açıq $P_k=\left[-\dfrac{k}{2},\dfrac{k}{2}\right)\times\left[0,\dfrac{\varepsilon}{k3^k}\right)(k=1,2,\ldots)$ düzbucaqlılar sisteminə baxın. 7). Kantor teoremindən istifadə edin.

2.2.

1). $m(G_0)=1$. 1). 2). $m(P_0)=0$. 3). 2.1-in 5-ci misalından istifadə edin. 4). Xeyr. 5). Xeyr. $[a,b]\setminus F$ çoxluğunun ən azı bir daxili nöqtəsi var. 6). $m(A)=\frac{38}{45}$. Göstərin ki,

$$A=\left(-\frac{1}{20},\frac{1}{9}+\frac{1}{20}\right)\cup\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{20},\frac{1}{3}+\frac{1}{20}\right)\cup$$
$$\cup\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{20},\frac{7}{9}+\frac{1}{20}\right)\cup\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{20},1+\frac{1}{20}\right)$$

7). $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=1-a$ şərtini ödəyən, müsbət hədli, hər hansı bir $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ardıcıllığı götürək. $[0,1]$ parçasından mərkəzi $\frac{1}{2}$-də uzunluğu a_1-ə bərabər intervalı ataq. Mərkəzləri qalan iki parçaların mərkəzlərində, uzunluqları isə $\frac{a_2}{2}$-yə bərabər intervalları ataq. Mərkəzləri qalan dörd parçaların mərkəzlərində, uzunluqları isə $\frac{a_3}{2^2}$-yə bərabər intervalları ataq və s. $[0,1]$ parçasının qalan alt çoxluğu tələb olunan çoxluqdur. 9). $m(G)=1$. 10). $m(G)=1$. 11). $m(F)=24$. 12). $m(F)=8$. 13). $m(F)=0$. 14). $m(F)=\frac{4\pi}{3}$.

2.3.

1). $m(E)=2$. 2). $m(E)=2$. 3). $m(E)=2$. 4). $m(E)=4$. 5). $m(E)=4$. 6). $m(E)=4$. 7). $m(E)=8$. 8). $m(E)=\frac{1}{2}$. Göstərin ki, $E=\left[0,\frac{1}{2}\right)\times[0,1)$.

9). $m(E)=1\frac{7}{8}$. Göstərin ki, $E=\bigcup_{k=0}^{3}\left([k,k+1)\times\left[k,k+\frac{1}{2^k}\right)\right)$.

14). $E_k'=(0,1)\setminus E_k\ (k=1,2,\dots p)$ çoxluqları daxil edib $m\left(\bigcup_{k=1}^{p}E_k'\right)<1$ bərabərsizliyini göstərdikdən sonra $\bigcap_{k=1}^{p}E_k=(0,1)\setminus\bigcup_{k=1}^{p}E_k'$ bərabərliyindən istifadə edin. 15). $m(E)=2$. 16). $m(E)=1{,}75\pi$. 17). $m(E)=5$. 18). $m(E)=1$. 19). $m(E)=0$. 20). $m(E)=0{,}25\pi$. 21). $m(E)=0$. 22). $m(E)=7$. 23). $m(E)=24$. 24). $m(E)=8$.

2.4.

1). $m(E)=+\infty$. 2). $m(E)=+\infty$. 3). $m(E)=+\infty$.

4). $m(E)=+\infty$. Göstərin ki, $E=\bigcup_{k=0}^{\infty}([k,k+1)\times[k,k+1))$.

5). $m(E)=+\infty$. Göstərin ki, $E=\bigcup_{k=0}^{\infty}([\sqrt{k},\sqrt{k+1})\times[k,k+1))$.

6). $m(E)=2$. Göstərin ki, $E=\bigcup_{k=0}^{\infty}\left([k,k+1)\times\left[k,k+\frac{1}{2^k}\right)\right)$. 7). a) $A_k=\left[-\frac{1}{k},+\infty\right)(k\in N)$ çoxluqlarına baxın; b) $(-\infty,0]$ aralığından ölçüsü α ədədinə bərabər olan hər hansı bir E çoxuğu götürüb $A_k=E\cup(k,+\infty)(k\in N)$ çoxluqlarına baxın; c) $A_k=(k,+\infty)(k\in N)$ çoxluqlarına baxın. 8). a) $A_k=[0,k](k\in N)$ çoxluqlarına baxın; b) $n_0>\frac{1}{\alpha}$ şərtini ödəyən natural ədəd götürb $A_k=\left[0,\alpha-\frac{1}{n_0+k}\right](k\in N)$ çoxluqlarına baxın.

III FƏSİL
ÖLÇÜLƏN FUNKSİYALAR VƏ ONLARIN XASSƏLƏRİ

3.1. Ölçülən funksiyanın tərifi və bəzi sadə teoremlər

ŞƏRTLƏŞMƏLƏR:

a) Burada (4-cü və 5-ci fəsillərdə də) R_n fəzasının alt çoxluqlarında təyin olunmuş həqiqi qiymətli funksiyalara baxılacaq;

b) ölçülən çoxluq dedikdə Lebeq mənada ölçülən çoxluq nəzərdə tutulacaq;

c) x ilə R_n fəzasının $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ elementi işarə ediləcək;

d) qapalı parallelepiped dedikdə, $n=1$ olanda $[a,b]$ tipli parçalar, $n=2$ olanda $[a,b]\times[c,d]$ tipli düzbucaqlılar, ümumi halda isə $P=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ tipli parallelepipedlər nəzərdə tutulacaq.

TƏRİF 3.1. *Əgər E çoxluğu və istənilən a həqiqi ədədi üçün $E(f>a)\equiv\{x\in E: f(x)>a\}$ çoxluqlarının hər biri ölçülən olarsa, onda deyirlər ki, E çoxluğunda təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndir.*

TEOREM 3.1. *Sıfır ölçülü çoxluqda verilmiş hər bir funksiya ölçüləndir.*

İSBATI. Sıfır ölçülü çoxluğun istənilən alt çoxluğu ölçülən olduğu üçün $E(f>a)\subset E$ bərabərsizliyindən çıxır ki, istənilən a həqiqi ədədi üçün $E(f>a)$ çoxluğu ölçüləndir. ◃

TEOREM 3.2. *Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndir. Onda $f(x)$ funksiyası E çoxluğunun istənilən ölçülən alt çoxluğunda ölçüləndir.*

İSBATI. Tutaq ki, A E-nin ölçülən alt çoxluğudur.

$$A(f>a)=\{x\in A: f(x)>a\}=A\cap E(f>a)$$

bərabərliklərindən çıxır ki, istənilən a həqiqi ədədi üçün $A(f>a)$ çoxluğu ölçüləndir. ◃

TEOREM 3.3. *Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası E_k $(k=1,2,\ldots,l\le+\infty)$ çoxluqlarının hər birində ölçüləndir və $E=\bigcup_{k=1}^{l\le+\infty}E_k$ ölçülən çoxluqdur. Onda $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda da ölçüləndir.*

İSBATI. $E(f>a)=\bigcup_{k=1}^{l\le+\infty}E_k(f>a)$ bərabərliyindən çıxır ki, istənilən a həqiqi ədədi üçün $E(f>a)$ çoxluğu ölçüləndir. ◃

TƏRİF 3.2. *Əgər ω xassəsi E çoxluğunun, ölçüsü sıfır olan alt çoxluğundan başqa, bütün nöqtələrində ödənərsə, onda deyirlər ki, ω xassəsi E çoxluğunda sanki hər yerdə ödənir.*

TƏRİF 3.3. *Əgər ölçülən E çoxluğunda verilmiş $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları üçün $mE(f\ne g)\equiv\{x\in E: f(x)\ne g(x)\}=0$ bərabərliyi ödənərsə, onda deyirlər ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları E çoxluğunda sanki hər yerdə bərabərdir.*

TƏRİF 3.4. *Sanki hər yerdə bərabər olan $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarına ekvivalent funksiyalar deyilir və $f\sim g$ kimi işarə olunur.*

TEOREM 3.4. *Əgər E çoxluğunda ekvivalent olan $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarından hər hansı biri ölçüləndirsə, onda digəri də ölçüləndir.*

İSBATI. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndir. $A=E(f\ne g)$ və $B=E\setminus A$ çoxluqlarına baxaq. Şərtə görə $m(A)=0$. Deməli $g(x)$ funksiyası A çoxluğunda ölçüləndir (Teorem 3.1-ə görə). B çoxluğunda isə $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları üst-üstə düşür. Deməli $g(x)$ funksiyası B çoxluğunda da ölçüləndir (çünkü $f(x)$ ölçüləndir!). Beləliklə $g(x)$ funksiyası $E=A\cup B$ çoxluğunda da ölçüləndir. ◃.

TEOREM 3.5. *Ölçülən çoxluqda sabit olan funksiya ölçüləndir.*

İSBATI. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası ölçülən E çoxluğunda C ədədinə bərabərdir. Teoremin isbatı istənilən a ədədi üçün doğru olan

$$E(f > a) = \begin{cases} E, \ a < C \ olarsa, \\ \varnothing, \ a \geq C \ olarsa \end{cases}$$

bərabərlikdən alınır. ◁

Nəticə 1. Ölçülən çoxluqda sanki hər yerdə sabit olan funksiya ölçüləndir.

Nəticə 2. $\overline{P}$ parallelepipedində hissə-hissə sabit (pilləvari) olan funksiya ölçüləndir.

Teorem 3.6. *Tutaq ki, ölçülən E çoxluğunda $f(x)$ funksiyası verilmişdir. Onda aşağıdakı hökmlər ekvivalentdir:*

(i) *istənilən a ədədi üçün $E(f > a)$ çoxluğu ölçüləndir;*

(ii) *istənilən a ədədi üçün $E(f \leq a)$ çoxluğu ölçüləndir;*

(iii) *istənilən a ədədi üçün $E(f < a)$ çoxluğu ölçüləndir;*

(iv) *istənilən a ədədi üçün $E(f \geq a)$ çoxluğu ölçüləndir.*

İsbatı. $(i) \Rightarrow (ii)$. $E(f \leq a) = E \setminus E(f > a)$ bərabərliyindən alınır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. $E(f < a) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E\left(f \leq a - \dfrac{1}{k}\right)$ bərabərliyindən alınır.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. $E(f \geq a) = E \setminus E(f < a)$ bərabərliyindən alınır.

$(iv) \Rightarrow (i)$. $E(f > a) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E\left(f \geq a + \dfrac{1}{k}\right)$ bərabərliyindən alınır. ◁

Qeyd 1. $E(f = a) = E(f \geq a) \setminus E(f > a)$ bərabərliyindən çıxır ki, əgər $f(x)$ funksiyası ölçüləndirsə, onda istənilən a ədədi üçün $E(f = a)$ çoxluğu ölçüləndir.

Qeyd 2. Bu teoremdən çıxır ki, onun hər bir hökmünü ölçülən funksiyanın tərifi kimi qəbul etmək olar.

Lakin aşağıdakı misal göstərir ki, istənilən a ədədi üçün $E(f = a)$ çoxluğunun ölçülməsindən $f(x)$ funksiyasının ölçülənliyi çıxmır.

Misal. $[0,1]$ parçasının hər hansı bir ölçülməyən A alt çoxluğunu götürək və $E = (-\infty, +\infty)$ aralığında

$$f(x) = \begin{cases} x, \ x \in A \ olarsa, \\ -x, \ x \notin A \ olarsa \end{cases}$$

kimi funksiya təyin edək.

$$A = [0,+\infty) \setminus \left(([0,1] \setminus A) \cup (1,+\infty)\right)$$

bərabərliyindən çıxır ki, $([0,1] \setminus A) \cup (1,+\infty)$ ölçülməyən çoxluqdur. Onda

$$E(f < 0) = ([0,1] \setminus A) \cup (1,+\infty)$$

bərabərliyindən çıxır ki, $f(x)$ ölçülməyən funksiyadır. Lakin $E(f = a)$ ya $\varnothing$, ya bir nöqtəli, ya da iki nöqtəli çoxluq olduğu üçün istənilən a ədədi üçün $E(f = a)$ ölçülən çoxluqdur.

Teorem 3.7. *$\overline{P}$ parallelepipedində verilmiş və kəsilməz olan $f(x)$ funksiyası ölçüləndir.*

İsbatı. Göstərək ki, istənilən a ədədi üçün $F = \overline{P}(f \leq a)$ qapalı çoxluqdur. Tutaq ki, $x^{(0)}$ bu çoxluğun limit nöqtəsidir və $x^{(k)} \to x^{(0)} \left(x^{(k)} \in F\right)$. $f(x)$ funksiyasının kəsilməzliyini, $f\left(x^{(k)}\right) \leq a \ (k \in N)$ bərabərsizliklərini və bərabərsizliklərdə limitə keçmə teoremini nəzərə alsaq $f\left(x^{(0)}\right) \leq a$, yəni $x^{(0)} \in F$ olduğunu almış olarıq. Beləliklə F çoxluğunun limit nöqtələri özünə daxildir, yəni o qapalı çoxluqdur. Qapalı çoxluqların ölçülən olmasını və Teorem 3.6-nı nəzərə alsaq teoremin isbatını almış olarıq. ◁

Tərif 3.5.

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, \ x \in M \ olarsa, \\ 0, \ x \notin M \ olarsa \end{cases}$$

funksiyasına M çoxluğunun xarakteristik funksiyası deyilir.

Teorem 3.8. Tutaq ki, M ölçülən E çoxluğunun hər hansı bir alt çoxluğudur. Onda M çoxluğunun ölçülən olması üçün zəruri və kafi şərt onun xarakteristik funksiyasının E çoxluğunda ölçülən olmasıdır. Teoremin isbatı

$$E(\chi_M(x)>a)=\begin{cases}\varnothing,\ a\ge 1 & olarsa,\\ M,\ 0\le a<1 & olarsa,\\ E,\ a<0 & olarsa\end{cases}$$

münasibətindən alınır. ◁

3.2. Ölçülən funksiyalar üzərində əməllər

TEOREM 3.9. *Tutaq ki, C sabit ədəd, $f(x)$ isə E çoxluğunda ölçülən funksiyadır. Onda 1) $f(x)+C$, 2) $Cf(x)$, 3) $|f(x)|$, 4) $f^2(x)$ və 5) $\dfrac{1}{f(x)}\ (f(x)\ne 0)$ funksiyaları da E çoxluğunda ölçülən funksiyalardır.*

İSBATI. 1) $E(f+C>a)=E(f>a-C)$ bərabərliyindən, 2) $C=0$ olduqda Teorem 3.5-dən, $C\ne 0$ olduqda isə

$$E(Cf>a)=\begin{cases}E\left(f>\dfrac{a}{C}\right), C>0 \ olarsa,\\ E\left(f<\dfrac{a}{C}\right), C<0 \ olarsa\end{cases}$$

bərabərliyindən, 3)

$$E(|f|>a)=\begin{cases}E, & a<0 \ olarsa,\\ E(f<-a)\cup E(f>a), & a\ge 0 \ olarsa\end{cases}$$

bərabərliyindən, 4)

$$E(f^2>a)=\begin{cases}E, & a<0 \ olarsa,\\ E(|f|>\sqrt{a}), & a\ge 0 \ olarsa\end{cases}$$

bərabərliyindən və 5)

$$E\left(\frac{1}{f}>a\right)=\begin{cases}E(f>0), & a=0 \ olarsa,\\ E(f>0)\cap E\left(f<\dfrac{1}{a}\right), & a>0 \ olarsa,\\ E(f>0)\cup\left(E(f<0)\cap E\left(f<\dfrac{1}{a}\right)\right), & a<0 \ olarsa\end{cases}$$

münasibətlərindən çıxır. ◁

QEYD. $|f(x)|$ (və ya $f^2(x)$) funksiyasının ölçülməsindən, ümumiyyətlə, $f(x)$-in ölçülməyi çıxmır.

Misal 1. $[0,1]$ parçasının hər hansı bir ölçülməyən A alt çoxluğunu götürək və

$$f(x)=\begin{cases}1,\ x\in A \ olarsa,\\ -1,\ x\in[0,1]\setminus A \ olarsa\end{cases}$$

kimi funksiya təyin edək. $|f(x)|$ funksiyası $[0,1]$ parçasında eynilik kimi vahid olduğu üçün ölçülən funksiyadır. $E(f>0)=A$ bərabərliyindən və A-nın təyinindən alınır ki, $f(x)$ ölçülməyən funksiyadır.

Növbəti teoremdə aşağıdakı lemmadan istifadə olunacaq.

LEMMA 3.1. *Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları E çoxluğunda ölçüləndirsə, onda $E(f>g)$ çoxluğu ölçüləndir.*

İSBATI. Q- rasional ədədlər çoxluğunun bütün elementlərini $r_1,r_2,r_3,\ldots$ şəklində nömrələyək. Asanlıqla yoxlanılan

$$E(f>g)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(E(f>r_k)\cap E(g<r_k)\right)$$

bərabərliyindən lemmanın isbatı alınır. ◁

TEOREM 3.10. *Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları E çoxluğunda ölçüləndir. Onda 1) $f(x)-g(x)$, 2) $f(x)+g(x)$, 3) $f(x)\cdot g(x)$ və*

4) $\frac{g(x)}{f(x)}(f(x)\neq 0)$ *funksiyaları da E çoxluğunda ölçüləndir.*

İSBATI. 1) $E(f-g>a)=E(f>a+g)$ bərabərliyindən və Lemma 3.1-dən, 2) $f(x)+g(x)=f(x)-[-g(x)]$ bərabərliyindən, 3)

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2\}$$

eyniliyindən və 4) $\frac{g(x)}{f(x)}=g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}$ bərabərliyindən çıxır. ◁

TEOREM 3.11. *Tutaq ki,* $f_k(x)\,(k=1,2,\ldots l,\ \ l\in N)$ *funksiyaları E çoxluğunda ölçüləndir. Onda*

$$\varphi(x)=\max_{\substack{1\le k\le l\\ l\in N}}\{f_k(x)\}\text{ və }\psi(x)=\min_{\substack{1\le k\le l\\ l\in N}}\{f_k(x)\}$$

funksiyaları da E çoxluğunda ölçüləndir.

İSBATI.

$$\psi(x)=\min_{\substack{1\le k\le l\\ l\in N}}\{f_k(x)\}=-\max_{\substack{1\le k\le l\\ l\in N}}\{-f_k(x)\}$$

bərabərliyinə görə teoremi $\varphi(x)$ funksiyası üçün isbat etmək kifayətdir. Ümumi hal riyazi induksiya prinsipindən və $l=2$ halından alındığı üçün $l=2$ olduqda $\varphi(x)$ funksiyasının ölçülən olmasını göstərmək kifayətdir. Bu hal isə

$$\varphi(x)=\max\{f_1(x),f_2(x)\}=\frac{f_1(x)+f_2(x)+|f_1(x)-f_2(x)|}{2}$$

bərabərliklərindən, Teorem 3.9 və 3.10-dan alınır. ◁

3.3. Çalışmalar

3.1.

1). İstənilən $[a,b]$ parçasında

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ rasional olarsa,}\\ 0, & x \text{ irrasional olarsa}\end{cases}$$

Dirixle funksiyasının ölçülən olmasını göstərin.

2). $E=[0,4]$ parçasında Dirixle funksiyası üçün aşağıdakı çoxluqların ölçülərini tapın:

a) $E(D>1)$, b) $E(D<1)$, c) $E(D>-2)$, d) $E(D=1)$, e) $E(0<D<1)$.

3). Göstərin ki, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ parçasında Dirixle funksiyasının $\cos x$ funksiyasına hasili ölçülən funksiyadır.

4). $f(x)=\sin x$ funksiyası $E=(0,\pi)$ çoxluğunda ölçüləndirmi?

5). $E=(0,\pi)$ intervalında $f(x)=\sin x$ funksiyası üçün aşağıdakı çoxluqların ölçülərini tapın:

a) $E(f\ge 0)$, b) $E\left(f>\frac{1}{2}\right)$, c) $E\left(f\le\frac{1}{2}\right)$, d) $E(f\ge 1)$, e) $E\left(\frac{1}{2}\le f\le\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6). $[0,1]$ parçasının hər hansı bir ölçülməyən A alt çoxluğunu götürək və $E=[0,1]$ aralığında

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in A \text{ olarsa,}\\ -x, & x\in[0,1]\setminus A \text{ olarsa}\end{cases}$$

kimi funksiya təyin edək.

i). Göstərin ki, istənilən a ədədi üçün $E(f=a)$ ən çoxu bir nöqtəli çoxluqdur.

ii). $E\left(f>\frac{1}{2}\right)=?$

iii). $f(x)$ funksiyası ölçüləndirmi?

7). Göstərin ki, $[a,b]$ parçasında monoton olan hər bir funksiya ölçüləndir.

8). $[0,1]$ parçasında kəsilməz olan elə $f(x)$ funksiyası qurun ki, $g(t)=mE(f>t)$ funksiyası kəsilən olsun.

9). $[0,1]$ parçasında kəsilməz olan elə $f(x)$ funksiyası qurun ki, $g(t)=mE(f>t)$ funksiyası kəsilməz olsun.

10). R_2 fəzasının $(0,1)\times(0,1)$ kvadratında ölçülən elə $f(x,y)$ funksiyası qurun ki, hər qeyd ounmuş $x_0\in(0,1)$ və $y_0\in(0,1)$ ədədləri üçün $f(x_0,y)$ və $f(x,y_0)$ funksiyaları $(0,1)$ intervalında ölçülən olsun, lakin

$$\varphi(x)=\sup_{y\in(0,1)} f(x,y) \text{ və } \psi(x)=\inf_{y\in(0,1)} f(x,y)$$

funksiyaları $(0,1)$ intervalında ölçülən olmasın.

11). $E=[-2,2]$ parçasında $f(x)=2-x$ funksiyası üçün aşağıdakı çoxluqları tapın:

a) $E(f>0)$, b) $E(f>4)$, c) $E(f=0)$, d) $E(f=4)$, e) $0<a<4$ olduqda $E(f>a)$.

12). $E=\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ parçasında $f(x)=tgx$ funksiyası üçün aşağıdakı çoxluqları tapın:

a) $E(f>0)$, b) $E(f>1)$, c) $E(f=0)$, d) $E(f>-1)$, e) $E(-1\le f\le 1)$.

13). $f(x)=e^{[x]}$ (burada $[x]$ ilə x ədədinin tam hissəsi işarə olunmuşdur) funksiyası $[0,10]$ parçasında ölçüləndirmi?

14). $f(x,y)=\sin\pi(x-y)$ funksiyası $(-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)$ kvadratında ölçüləndirmi?

15). $f(x,y)=sign\sin\pi(x+y)$ funksiyası $(0,1)\times(0,1)$ kvadratında ölçüləndirmi?

3.2.

1). $f(x)=\frac{\cos x}{x}$ funksiyası $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\cap J$ (burada J ilə irrasional ədədlər çoxluğu işarə olunmuşdur) çoxluğunda ölçüləndirmi?

2). Göstərin ki, əgər $f^3(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndirsə, onda $f(x)$ funksiyası da E çoxluğunda ölçüləndir.

3). Göstərin ki, əgər $f^{2k+1}(x)(k\in N)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndirsə, onda $f(x)$ funksiyası da E çoxluğunda ölçüləndir.

4). Göstərin ki, əgər $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndirsə, onda $e^{f(x)}$ funksiyası da E çoxluğunda ölçüləndir.

5). $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ funksiyası $(0,1)$ intervalında ölçüləndirmi?

6). Göstərin ki, Dirixle funksiyası ilə istənilən funksiyanın hasili istənilən məhdud çoxluqda ölçüləndir.

7). Göstərin ki,

$$f(x)=\begin{cases}2^x, x\in[-4,0) \text{ olarsa,}\\ \sqrt{x}, x\in[0,4] \text{ olarsa}\end{cases}$$

funksiyası $[-4,4]$ parçasında ölçüləndir.

8). Göstərin ki,

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3, x\in[-5,0] \text{ olarsa,}\\ \ln x, x\in(0,5] \text{ olarsa}\end{cases}$$

funksiyası $[-5,5]$ parçasında ölçüləndir.

9). Göstərin ki,

$$f(x)=\begin{cases}\cos x,\ x\in[-\pi,\pi]\ olarsa,\\ \sqrt{x-\pi},\ x\in(\pi,\pi+4]\ olarsa\end{cases}$$

funksiyası $[-\pi,\pi+4]$ parçasında ölçüləndir.

10). Aşağıdakı funksiyaların göstərilən çoxluqlarda ölçülən olduğunu göstərin.

a) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sin x}\quad (E=(0,\pi]),$

b) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+8}\quad (E=[0,8]),$

c) $f(x)=\dfrac{arctgx}{1+\sin x}\quad \left(E=\left[-\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)\right),$

d) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{tgx+1}}\quad \left(E=\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\right),$

11). Tutaq ki,

$$f(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 1,\\ 1, & 1<t<2,\\ t-1, & 2<t\le 3\end{cases}\quad \text{və}\quad t=g(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 1+x, & 1<x\le 2\end{cases}$$

funksiyaları verilmişdir. $[0,2]$ parçasında $\varphi(x)=f(g(x))$ mürəkkəb funksiyasının ölçülən olduğunu göstərin.

12). Tutaq ki, P_0- Kantorun mükəmməl çoxluğu, A isə $[0,1]$ parçasının ölçülməyən hər hansı bir alt çoxluğudur.

a) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in P_0\cap A,\\ x^3, & x\in[0,1]\setminus(P_0\cap A)\end{cases}$; b) $g(x)=\begin{cases}x^2, & x\in A,\\ x^3, & x\in[0,1]\setminus A\end{cases}$

funksiyaları $E=[0,1]$ parçasında ölçüləndirmi?

13). Tutaq ki,

$$f(t)=\sin t\quad \text{və}\quad t=g(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & x\in[0,2]\cap Q,\\ \pi, & x\in[0,2]\cap Q\end{cases}$$

funksiyaları verilmişdir. $[0,2]$ parçasında $\varphi(x)=f(g(x))$ mürəkkəb funksiyasının ölçülən olduğunu göstərin.

14). $[0,\pi]$ parçasında $f(x)=\cos x$ funksiyasının $g(t)=m\{x\in[0,\pi]: f(x)>t\}$ paylanma funksiyasını qurun.

3.4. Cavablar və göstərişlər

3.1.

2). a) 0, b) 4, c) 4, d) 0, e) 0. 5). a) π, b) $\dfrac{2\pi}{3}$, c) $\dfrac{\pi}{3}$, d) 0, e) $\dfrac{\pi}{3}$. 6). iii) Xeyr. 8). $f(x)\equiv 0$ funksiyasına baxın. 9). $f(x)=x$ funksiyasına baxın.

10). $(0,1)$ intervalından hər hansı bir ölçülməyən A alt çoxluğunu götürün və $(0,1)\times(0,1)$ kvadratında

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x=y\in A\ olarsa,\\ -1, & x=y\notin A\ olarsa,\\ 0, & qalan\ зoxluqda\end{cases}$$

kimi funksiyaya baxın.

11). e) $[-2,2-a)$. 12). d) $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right)$. 14). Bəli.

15). Bəli.

3.2.

1). Bəli. 2). $E(f>a)=E(f^3>a^3)$ bərabərliyindən istifadə edin. 3). $E(f>a)=E(f^{2k+1}>a^{2k+1})$ bərabərliyindən istifadə edin. 4). $a>0$ olduqda $E(e^f>a)=E(f>\ln a)$ bərabərliyindən istifadə edin.

7). $E(f>a)=E_1(f>a)\cup E_2(f>a)$ (burada $E=E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2=\varnothing$) bərabərliyindən istifadə edin. 11). $\varphi(x)=x$ olduğunu göstərin. 12). a) $f(x)\sim x^3$ olduğunu göstərin. b) $0<a<1$ olduqda $E(g<a)$ çoxluğunun ya $[0,\sqrt{a})\cap A$, ya da ki, $[0,\sqrt[3]{a})\cap A$ olduğunu və hər iki çoxluğun ölçülən olmadığını nəzərə alın. 13). $\varphi(x)=f(g(x))$ funksiyasının Dirixle funksiyası ilə üst-üstə düşməsindən istifadə edin.

14). $g(t)=\begin{cases}0, & t\ge 1,\\ \pi, & t\le -1,\\ \arccos t, & -1<t<1.\end{cases}$

IV F ə s i l
ÖLÇÜLƏN FUNKSİYALAR ARDICILLIĞI. SANKİ HƏR YERDƏ VƏ ÖLÇÜYƏ GÖRƏ YIĞILMA

4.1. Sanki hər yerdə və ölçüyə görə yığılma

T ə r i f 4.1. *Tutaq ki, R_n fəzasının müəyyən bir E çoxluğunda təyin olunmuş $f_k(x)\,(k\in N)$ və $f(x)$ funksiyaları verilmişdir. Əgər E çoxluğunun sanki bütün nöqtələrində*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$$

şərti ödənərsə, onda deyirlər ki, $\{f_k(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı (E çoxluğunda) sanki hər yerdə (s.h.y) $f(x)$ funksiyasına yığılır.

M i s a l. $\{f_k(x)=x^k\}$ funksiyalar ardıcıllığı $E=[0,1]$ çoxluğunda, $k\to\infty$ şərti daxilində, $f(x)\equiv 0$ funksiyasına sanki hər yerdə (daha dəqiq desək, $x=1$ nöqtəsindən başqa hər yerdə)yığılır.

M i s a l.

$$f_k(x)=\begin{cases}0, & x\in\left(\frac{1}{k},1\right],\\ k, & x\in\left[0,\frac{1}{k}\right].\end{cases}\quad (k=1,2,\ldots)$$

funksiyalar ardıcıllığı $E=[0,1]$ çoxluğunda, $k\to\infty$ şərti daxilində, $f(x)\equiv 0$ funksiyasına sanki hər yerdə (daha dəqiq desək, $x=0$ nöqtəsindən başqa hər yerdə)yığılır.

T E O R E M 4.1. *Tutaq ki, E çoxluğunda verilmiş, ölçülən $f_k(x)(k \in N)$ funksiyalar ardıcıllığı E çoxluğunda sanki hər yerdə hər hansı bir $f(x)$ funksiyasına yığılır. Onda $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndir.*

İ S B A T I. Ölçüsü sıfır olan çoxluqda hər bir funksiya ölçülən olduğu üçün, ümumiliyi pozmadan, fərz edək ki, $f_k(x)(k \in N)$ funksiyalar ardıcıllığı $\vec{E}$ çoxluğunda hər yerdə $f(x)$ funksiyasına yığılır. Onda teoremin isbatı istənilən a ədədi üçün doğru olan

$$E(f < a) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{p=l+1}^{\infty} E\left(f_p < a - \frac{1}{k}\right)$$

münasibətindən alınır. ◁

N Ə T İ C Ə. Tutaq ki, $f_k(x)(k = 1,2,\dots l,\ l \in N)$ funksiyaları E çoxluğunda ölçüləndir. Onda

$$\varsigma(x) = \sup_{k \in N}\{f_k(x)\} \text{ və } \upsilon(x) = \inf_{k \in N}\{f_k(x)\}$$

funksiyaları da E çoxluğunda ölçüləndir. $\varsigma(x)$ və $\upsilon(x)$ funksiyalarının ölçülənliyi

$$\varsigma(x) = \sup_{k \in N}\{f_k(x)\} = \lim_{k \to \infty} \max_{1 \le i \le k}(f_i(x))$$

və

$$\upsilon(x) = \inf_{k \in N}\{f_k(x)\} = \lim_{k \to \infty} \min_{1 \le i \le k}(f_i(x))$$

bərabərliklərindən, Teorem 3.11 və Teorem 4.1-dən alınır.

S ƏRBƏST İŞ. Teorem 4.1-dəki

$$E(f < a) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{p=l+1}^{\infty} E\left(f_p < a - \frac{1}{k}\right)$$

bərabərliyini isbat edin.

T Ə R İ F 4.2. *Tutaq ki, R_n fəzasının müəyyən bir E çoxluğunda ölçülən $f_k(x)(k \in N)$ və $f(x)$ funksiyaları verilmişdir. Əgər istənilən müsbət σ ədədi üçün*

$$\lim_{k \to \infty} mE(|f_k(x) - f(x)| \ge \sigma) = 0$$

şərti ödənərsə, onda deyirlər ki, $\{f_k(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı (E çoxluğunda) ölçüyə görə $f(x)$ funksiyasına yığılır.

M i s a l. Istənilən müsbət σ ədədi üçün doğru olan

$$mE(|f_k(x)| \ge \sigma) = mE(f_k(x) = k) = mE\left(\left[0, \frac{1}{k}\right]\right) = \frac{1}{k}$$

bərabərliklərindən çıxır ki,

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, x \in \left(\frac{1}{k}, 1\right], \\ k, x \in \left[0, \frac{1}{k}\right]. \end{cases} \quad (k = 1,2,\dots)$$

funksiyalar ardıcıllığı $E = [0,1]$ çoxluğunda, $k \to \infty$ şərti daxilində, $f(x) \equiv 0$ funksiyasına ölçüyə görə yığılır.

T E O R E M 4.2 *(Lebeq). Tutaq ki, sonlu ölçülü E çoxluğunda verilmiş, ölçülən və sanki hər yerdə sonlu olan $f_k(x)(k \in N)$ funksiyalar ardıcıllığı E çoxluğunda sanki hər yerdə hər hansı bir sanki hər yerdə sonlu olan $f(x)$ funksiyasına yığılır. Onda $\{f_k(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı ölçüyə görə də $f(x)$ funksiyasına yığılır.*

İ S B A T I. Teorem 4.1-dən çıxır ki, $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndir. Teoremin şərtlərindən çıxır ki,

$$Q = E(|f| = +\infty) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E(|f_k| = +\infty)\right) \cup E(f_k \nrightarrow f)$$

çoxluğu sıfır ölçülü çoxluqdur. Onda teoremin isbatı istənilən müsbət σ ədədi üçün doğru olan

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{l=k}^{\infty}E(|f_l-f|\geq\sigma)\right)\subset Q$$

münasibətindən alınır. ⊲

SƏRBƏST İŞ.

$$Q=E(|f|=+\infty)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E(|f_k|=+\infty)\right)\cup E(f_k\nrightarrow f)$$

çoxluğunun ölçüsünün sıfır olduğunu göstərin.

SƏRBƏST İŞ.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{l=k}^{\infty}E(|f_l-f|\geq\sigma)\right)\subset Q$$

münasibətinin doğru olduğunu göstərin.

QEYD. Lebeq teoremində E çoxluğunun sonlu ölçülü olması mühümdür!

Misal. $E=[0,\infty)$ çoxluğunda

$$f_k(x)=\begin{cases}1, & x\in[k-1,k),\\ 0, & x\notin[k-1,k)\end{cases}\quad(k=1,2,\dots)$$

funksiyalar ardıcıllığına baxaq. Aydındır ki, istənilən $x\in[0,\infty)$ nöqtəsində $\lim_{k\to\infty}f_k(x)=0$ bərabərliyi ödənir. Lakin istənilən müsbət σ ədədi üçün doğru olan

$$E(|f_k|\geq\sigma)=E(f_k=1)=[k-1,k)\ (k=1,2,\dots)$$

bərabərliklərindən çıxır ki, $\lim_{k\to\infty}mE(|f_k(x)|\geq\sigma)=1\neq0$, yəni $\{f_k(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı ölçüyə görə $f(x)=0$ funksiyasına yığılmır.

Növbəti misal göstərir ki, ölçüyə görə yığılmadan sanki hər yerdə yığılma çıxmır.

Misal. $E=[0,1)$ çoxluğunda

$$f_i^{(k)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right),\\ 0, & x\notin\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right)\end{cases}\quad(k=1,2,\dots;i=1,2,\dots k)$$

funksiyalar sisteminə baxaq. Bu funksiyaları

$$\varphi_1(x)=f_1^{(1)}(x),\ \varphi_2(x)=f_1^{(2)}(x),\ \varphi_3(x)=f_2^{(2)}(x),\ \varphi_4(x)=f_1^{(3)}(x),\ \varphi_5(x)=f_2^{(3)}(x),$$
$$\varphi_6(x)=f_3^{(3)}(x)\ \varphi_7(x)=f_1^{(4)}(x),\ \varphi_8(x)=f_2^{(4)}(x),\ \varphi_9(x)=f_3^{(4)}(x),\dots$$

şəklində ardıcıl nömrələsək, görərik ki, alınan $\{\varphi_i(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı $[0,1)$ çoxluğunda ölçüyə görə sıfra yığılır, lakin bu aralığın heç bir nöqtəsində yığılmır.

SƏRBƏST İŞ. Göstərin ki, $\{\varphi_i(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı $[0,1)$ çoxluğunda ölçüyə görə sıfra yığılır.

SƏRBƏST İŞ. Göstərin ki, $\{\varphi_i(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı $[0,1)$ çoxluğunun heç bir nöqtəsində yığılmır.

Bu misal göstərir ki, Lebeq teoreminin tərsi doğru deyil. Lakin, buna baxmayaraq, cox faydalı olan aşağıdakı teorem doğrudur.

TEOREM 4.3 *(Riss). Tutaq ki, sonlu ölçülü E çoxluğunda verilmiş ölçülən $\{f_k(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı $f(x)$ funksiyasına ölçüyə görə yığılır. Onda bu ardıcıllıqdan $f(x)$-ə sanki hər yerdə yığılan $\{f_{k_i}(x)\}$ alt ardıcıllığı ayırmaq olar.*

İSBATI. $\lim_{k\to\infty}\sigma_k=0$ və $\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i<+\infty$ şərtlərini ödəyən müsbət $\sigma_k,\eta_k\ (k\in N)$ ədədləri götürək və

$$mE\left(|f_{k_l}(x)-f(x)|\geq\sigma_l\right)<\eta_l \quad (l\in N)$$

şərtlərini ödəyən ciddi artan $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$ natural ədədlər ardıcıllığı quraq. Asanlıqla göstərmək olar ki, ölçüsü sıfır olan

$$Q=\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{l=i}^{\infty}E\left(|f_{k_l}-f|\geq\sigma_l\right)\right)$$

coxluğunun tamamlayıcı çoxluğunda, yəni $E\setminus Q$ çoxluğunda, $\{f_{k_l}(x)\}$ ardıcıllığı $f(x)$-ə sanki hər yerdə yığılır. ◁

Sərbəst iş.

$$Q=\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{l=i}^{\infty}E\left(|f_{k_l}-f|\geq\sigma_l\right)\right)$$

çoxluğunun ölçüsünün sıfır olduğunu göstərin.

Sərbəst iş. Göstərin ki, $E\setminus Q$ çoxluğunda $\{f_{k_l}(x)\}$ ardıcıllığı $f(x)$-ə sanki hər yerdə yığılır.

4.2. Ölçülən funksiyaların strukturu

Bu bənddə ölçülən funksiyanın əsas xassəsini özündə əks etdirən Luzin teoremini və onun əsaslandığı bəzi faydalı teoremləri isbatsız verəcəyik.

Teorem 4.4 *(D.F.Yeqorov). Tutaq ki, sonlu ölçülü E çoxluğunda verilmiş, ölçülən və sanki hər yerdə sonlu olan $f_k(x)$ $(k\in N)$ funksiyalar ardıcıllığı E çoxluğunda hər hansı bir sanki hər yerdə sonlu olan $f(x)$ funksiyasına sanki hər yerdə yığılır. Onda istənilən müsbət δ ədədi üçün E çoxluğunun ölçülən və $m(E_\delta)>m(E)-\delta$ şərtini ödəyən elə E_δ alt çoxluğunu tapmaq olar ki, həmin çoxluqda $\{f_k(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı $f(x)$ funksiyasına müntəzəm yığılar.*

Teorem 4.5 *(Borel). Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında ölçülən və sanki hər yerdə sonlu olan $f(x)$ funksiyası verilmişdir. Onda istənilən müsbət σ və ε ədədləri üçün $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan elə $\psi(x)$ funksiyası tapmaq olar ki,*

$$mE\left(|f-\psi|\geq\sigma\right)<\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənər. Əgər $f(x)$ funksiyası $|f(x)|\leq K$ şərtini ödəyərsə, onda $\psi(x)$ funksiyasını elə seçmək olar ki, $|\psi(x)|\leq K$ bərabərsizliyi ödənər.

Teorem 4.6 *(Freşe). $[a,b]$ parçasında ölçülən və sanki hər yerdə sonlu olan hər bir $f(x)$ funksiyasına hər yerdə yığılan kəsilməz funksiyalar ardıcıllığı vardır.*

Teorem 4.7 *(Luzin). Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında ölçülən və sanki hər yerdə sonlu olan $f(x)$ funksiyası verilmişdir. Onda istənilən müsbət δ ədədi üçün $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan elə $\psi(x)$ funksiyası tapmaq olar ki,*

$$mE(f\neq\psi)<\delta$$

bərabərsizliyi ödənər. Əgər $f(x)$ funksiyası $|f(x)|\leq K$ şərtini ödəyərsə, onda $\psi(x)$ funksiyasını elə seçmək olar ki, $|\psi(x)|\leq K$ bərabərsizliyi ödənər.

Qeyd. Teorem 4.5-4.7 n ölçülü Evklid fəzasının qapalı P parallelepipedində də doğrudur.

4.3. Çalışmalar

4.1.

Aşağıdakı ardıcıllıqların bütün oxda sanki hər yerdə hansı funksiyaya yığıldığını müəyyən edin və yığılmadığı nöqtələr çoxluğunu tapın.

1). $f_k(x)=\cos^k x\,(k\in N)$; 2). $f_k(x)=x^2\sin^k x^2\,(k\in N)$;

3). $f_k(x)=\dfrac{k^2\sin^2 x}{1+k^2\sin x}\,(k\in N)$; 4). $f_k(x)=\dfrac{\sin^k x}{2+\sin^k x}\,(k\in N)$;

5). $f_k(x)=\begin{cases}\cos^k\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\quad(k\in N)$; 6). $f_k(x)=e^{-k\left|x^2-1\right|}\,(k\in N)$;

7). $f_k(x)=\begin{cases}e^{-k\sin^{2k}\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\quad(k\in N)$;

8). $f_k(x)=\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^{2k}+\sin^{2k}x\,(k\in N)$;

Aşağıdakı ardıcıllıqların R_2 fəzasında sanki hər yerdə hansı funksiyaya yığıldığını müəyyən edin və yığılmadığı nöqtələr çoxluğunu tapın.

9). $f_k(x,y)=\cos^k\left(x^2+y^2\right)(k\in N)$; 10). $f_k(x,y)=e^{-k\left(x^2+y^2\right)}\,(k\in N)$;

11). $f_k(x,y)=\sqrt[k]{|x|^k+|y|^k}\,(k\in N)$;

12). $f_k(x,y)=k\ln\left(1+\dfrac{|x|+|y|}{k}\right)(k\in N)$;

13). $f_k(x,y)=e^{-k\left|x^2+y^2-1\right|}\,(k\in N)$; 14). $f_k(x,y)=e^{\sin^k x+\sin^k y}\,(k\in N)$;

Aşağıdakı ardıcıllıqlardan hansıları göstərilən çoxluqda ölçüyə görə yığılır? Ölçüyə görə yığılan ardıcıllıqların limitini tapın.

15). $f_k(x)=k^2\chi_{\left[0,\frac{1}{k}\right]}(x)\,(k\in N),\quad E=[0,1]$;

16). $f_k(x)=k^2\chi_{[k,k+1]}(x)\,(k\in N),\quad E=[0,+\infty)$;

17). $f_k(x)=2-k^2\chi_{\left(k^2,k^2+\frac{1}{k}\right)}(x)\,(k\in N),\quad E=[0,+\infty)$;

18). $f_k(x)=\dfrac{\sin x}{x}\chi_{[k,k+1]}(x)\,(k\in N),\quad E=(-\infty,+\infty)$;

19). $f_k(x)=\sin x\,\chi_{[\ln k,\ln(k+1)]}(x)\,(k\in N),\quad E=(-\infty,+\infty)$;

20). $f_k(x)=\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)^{2k}(k\in N),\quad E=(-\infty,+\infty)$;

21). $f_k(x)=\chi_{A_k}(x),\quad A_k=\bigcup\limits_{j=1}^{k}\left(j,j+\dfrac{1}{2^j}\right)(k\in N),\quad E=(-\infty,+\infty)$;

22). $f_k(x)=\begin{cases}k, & |x|<\dfrac{1}{k},\\ \dfrac{x}{k}, & |x|\geq\dfrac{1}{k}\end{cases}\quad(k\in N),\quad E=(-\infty,+\infty)$;

23). $f_k(x)=\begin{cases}k, & |x|<\dfrac{1}{k},\\ |x|, & |x|\geq\dfrac{1}{k}\end{cases}\quad(k\in N),\quad E=[-1,1]$;

24). $f_k(x)=\begin{cases}-2k^2, & |x|<\dfrac{1}{k^2},\\ 1-|x|, & |x|\geq\dfrac{1}{k^2}\end{cases}\quad(k\in N),\quad E=[-1,1]$. ($\chi_M(x)-M$ çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır).

4.2.

1).Göstərin ki, $[a,b]$ parçasında verilmiş, ölçülən və sanki hər yerdə sonlu olan istənilən $f(x)$ funksiyasına $[a,b]$ parçasında sanki hər yerdə yığılan çoxhədlilər ardıcıllığı tapmaq olar.

2).Göstərin ki, Yeqorov teoremində E çoxluğunun ölçüsünün sonlu olması mühüm şərtdir.

3).Luzin teoremini gücləndirmək olarmı? Yəni, $[a,b]$ parçasında ölçülən funksiyanın sıfır ölçülü çoxluqda qiymətlərini dəyişməklə onu həmin parçada kəsilməz etmək olarmı?

Aşağıdakı ardıcıllıqlar üçün E_δ-Yeqorov çoxluqlarını (yəni yığılmanın müntəzəm olduğu çoxluqları) tapın.

4). $f_k(x)=\frac{x^k}{1+x^k}$ $(k\in N)$, $E=[0,1]$.

5). $f_k(x)=\frac{2kx}{1+k^2x^2}$ $(k\in N)$, $E=(-\infty,+\infty)$.

6). $f_k(x)=x^k-x^{2k}$ $(k\in N)$, $E=[0,1]$.

7). $f_k(x)=e^{k(x-2)}$ $(k\in N)$, $E=[0,2]$.

8). $f_k(x)=x^k-x^{k^2}$ $(k\in N)$, $E=[0,1]$.

4.4. Cavablar və göstərişlər

4.1

1). $f(x)\equiv 0$, $\bigcup\limits_{l\in Z}\{\pi l\}$; 2). $f(x)\equiv 0$, $\bigcup\limits_{l=0}^{\infty}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}+\pi l}\right\}$;

3). $f(x)\equiv 0$, $\varnothing$; 4). $f(x)\equiv 0$, $\bigcup\limits_{l\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+\pi l\right\}$;

5). $f(x)\equiv 0$, $\bigcup\limits_{l\in Z\setminus\{0\}}\left\{\frac{1}{\pi l}\right\}$; 6). $f(x)\equiv 0$, $\{-1,1\}$;

7). $f(x)\equiv 0$, $\{0\}\cup\left(\bigcup\limits_{l\in Z}\left\{\frac{2}{\pi(2l+1)}\right\}\right)$; 8). $f(x)\equiv 0$, $\bigcup\limits_{l\in Z}\left\{\frac{\pi(2l+1)}{2}\right\}$

9). $f(x,y)\equiv 0$, $\bigcup\limits_{l=0}^{\infty}\left\{(x,y):\ x^2+y^2=\frac{\pi}{2}+\pi l\right\}$;

10). $f(x,y)\equiv 0$, $\{(0,0)\}$; 11). $f(x,y)=\max\{|x|,|y|\}$, $\varnothing$;

12). $f(x,y)=|x|+|y|$, $\varnothing$; 13). $f(x,y)\equiv 0$, $\{(x,y):\ x^2+y^2=1\}$;

14). $f(x,y)\equiv 1$, $\bigcup\limits_{l\in Z}\bigcup\limits_{p\in Z}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi p,\frac{\pi}{2}+\pi l\right)\right\}$. 15). $f(x)\equiv 0$ funksiyasına yığılır.

$E_k(\sigma)=\{x: |f_k(x)-f(x)|\ge\sigma\}=\left[0,\frac{1}{k}\right]$ $(0<\sigma<1)$ bərabərliyindən istifadə edin.

16). Yığılmır. $E_k(\sigma)=[k,k+1]$ bərabərliyindən istifadə edin.

17). $f(x)\equiv 2$ funksiyasına yığılır. $E_k(\sigma)=\left[k^2,k^2+\frac{1}{k}\right)$ bərabərliyindən istifadə edin.

18). $f(x)\equiv 0$ funksiyasına yığılır. $E_k(\sigma)=\varnothing$ bərabərliyindən istifadə edin.

19). $f(x)\equiv 0$ funksiyasına yığılır. $E_k(\sigma)\subset[\ln k,\ln(k+1)]$ bərabərsizliyindən istifadə edin.

20). Yığılmır. $f(x)\equiv 0$ funksiyasına sanki hər yerdə yığılır, lakin $E_k(\sigma)=\bigcup\limits_{l\in Z}\left[2l+\frac{2\arcsin\sigma^{\frac{1}{2k}}}{\pi},2(l+1)-\frac{2\arcsin\sigma^{\frac{1}{2k}}}{\pi}\right]$ münasibətindən çıxır ki, $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k(\sigma))=+\infty$.

21). $A=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\left(j,j+\frac{1}{2^j}\right)$ çoxluğunun $\chi_A(x)$ xarakteristik funksiyasına yığılır. $E_k(\sigma)=\bigcup\limits_{j=k+1}^{\infty}\left(j,j+\frac{1}{2^j}\right)$ bərabərliyindən istifadə edin.

22). Yığılmır. $f(x)\equiv 0$ funksiyasına sanki hər yerdə yığılır, lakin $E_k(\sigma)=\left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\cup(-\infty,-k\sigma)\cup(k\sigma,+\infty)$ münasibətindən çıxır ki, $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k(\sigma))=+\infty$.

23). $f(x)=|x|$ funksiyasına yığılır. $E_k(\sigma)=\left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$ bərabərliyindən istifadə edin.

24). $f(x)=1-|x|$ funksiyasına yığılır. $E_k(\sigma)=\left(-\frac{1}{k^2},\frac{1}{k^2}\right)$ bərabərliyindən istifadə edin.

4.2.

1). Freşe və Veyerştrass teoremlərindən istifadə edin.

2). $f_k(x)=\begin{cases}0, & x<k,\\ 1, & x\geq k\end{cases}$ $(k\in N)$, $E=(-\infty,+\infty)$ ardıcıllığına baxın. İstənilən natural k ədədi və sonlu ölçülü istənilən E_δ çoxluğu üçün doğru olan $\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)\setminus E_\delta}|f_k(x)-0|=1$ bərabərliyindən istifadə edin.

3). Ümumiyyətlə yox. a) $f(x)$ olaraq $[0,1]$ parçasının heç yerdə sıx olmayan müsbət ölçülü hər hansı bir A çoxluğunun $\chi_A(x)$ xarakteristik funksiyasını götürün.

b) $f(x)$ olaraq $D(x)=\begin{cases}1, x\in[0,1]\cap Q,\\ 0, x\in[0,1]\cap J.\end{cases}$ - Dirixle funksiyasını götürün. Göstərin ki, a) mümkün olmayan b) isə mümkün olan haldır.

4). $E_\delta=\left[0,1-\frac{\delta}{2}\right]$. $\sup\limits_{E_\delta}|f_k(x)|=\dfrac{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^k}{1+\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^k}$ bərabərliyini göstərin və ondan istifadə edin.

5). $E_\delta=(-\infty,+\infty)\setminus\left(-\frac{\delta}{3},\frac{\delta}{3}\right)$. $k>\frac{3}{\delta}$ üçün $\sup\limits_{E_\delta}|f_k(x)|=\dfrac{6k\delta}{9+k^2\delta^2}$ bərabərliyini göstərin və ondan istifadə edin.

6). $E_\delta=\left[0,1-\frac{\delta}{2}\right]$. $k>\dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{1-\frac{\delta}{2}}}$ üçün $\sup\limits_{E_\delta}|f_k(x)|=\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^k\left[1-\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^k\right]$ bərabərliyini göstərin və ondan istifadə edin.

7). $E_\delta=\left[0,2-\frac{\delta}{2}\right]$. $\sup\limits_{E_\delta}|f_k(x)|=e^{-\frac{k\delta}{2}}$ bərabərliyini göstərin və ondan istifadə edin.

8). $E_\delta=\left[0,1-\frac{\delta}{2}\right]$. $\sup\limits_{E_\delta}|f_k(x)|=\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^k\left[1-\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^{k^2-k}\right]$ bərabərliyini göstərin və ondan istifadə edin.

V Fəsil
LEBEQ İNTEQRALI

5.1. Sadə funksiyalar üçün Lebeq inteqralı

T ə r i f 5.1. *Sonlu ölçülü A çoxluğunda verilmiş, ölçülən və ən çoxu hesabi sayda həqiqi qiymət alan $f(x)$ funksiyasına sadə funksiya deyilir.*

Q e y d. Sadəlik üçün hesab etmək olar ki, A n ölçülü R_n Evklid fəzasının Lebeq ölçüsü sonlu olan alt çoxluğudur. Lakin bu tərif və bundan sonrakı təriflər və teoremlər σ additiv ölçü verilmiş sonlu ölçülü istənilən təbiətli A çoxluğunda da keçərlidir.

T e o r e m 5.1. *Sonlu ölçülü A çoxluğunda ən çoxu hesabi sayda müxtəlif*

$$y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$$

qiymətlər alan $f(x)$ funksiyasının ölçülən olması üçün zəruri və kafi şərt

$$A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\} \, (k = 1, 2, \ldots)$$

çoxluqlarının ölçülən olmasıdır.

İ s b a t ı. Zəruriliyin isbatı Teorem 3.6-dan sonra gələn Qeyd 1-də verilmişdir. Kafiliyin isbatı isə istənilən a ədədi üçün doğru olan

$$A(f > a) = \bigcup_{y_k > a} A_k$$

bərabərliyindən alınır. ◅

T ə r i f 5.2. *Tutaq ki, sonlu ölçülü A çoxluğunda ən çoxu hesabi sayda müxtəlif*

$$y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$$

qiymətlər alan $f(x)$ sadə funksiyası verilmişdir. Əgər

$$\sum_{k=1}^{l \le +\infty} |y_k| m(A_k) < +\infty$$

şərti ödənərsə, onda deyirlər ki, $f(x)$ sadə funksiyası A çoxluğunda inteqrallanandır(cəmlənəndir) və onun A çoxluğu üzrə Lebeq inteqralı

$$\int_A f(x)dx = \sum_{k=1}^{l \le +\infty} y_k m(A_k)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\} (k = 1, 2, \ldots)$.

T e o r e m 5.2. *Tutaq ki, A çoxluğu ən çoxu hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən, ölçülən B_k $(k = 1,2,\ldots)$ çoxluqlarının birləşməsi, yəni $A = \bigcup_{k=1}^{l \le +\infty} B_k$ kimi göstərilmişdir. $f(x)$ isə hər bir B_k çoxluğunda yalnız bir c_k qiyməti alır (c_k -ların müxtəlifliyi tələb olunmur!), yəni $f(x)$ ən çoxu hesabi sayda qiymət alan hissə-hissə sabit funksiyadır. Əgər*

$$\sum_{k=1}^{l \le +\infty} |c_k| m(B_k) < +\infty$$

şərti ödənərsə, onda $f(x)$ funksiyası A çoxluğunda inteqrallanandır(cəmlənəndir) və onun A çoxluğu üzrə Lebeq inteqralı üçün

$$\int_A f(x)dx = \sum_{k=1}^{l \le +\infty} c_k m(B_k)$$

bərabərliyi doğrudur.

İ s b a t ı. Asanlıqla göstərmək olar ki,

$$A_j = \{x \in A : f(x) = y_j\}$$

çoxluğu $c_k = y_j$ şərtini ödəyən B_k çoxluqlarının birləşməsidir, yəni $A_j = \bigcup_{c_k = y_j} B_k$. Onda

$$\sum_{j=1}^{p \le l \le +\infty} y_j m(A_j) = \sum_{j=1}^{p \le l \le +\infty} y_j \left(\sum_{c_k = y_j} m(B_k) \right) = \sum_{k=1}^{l \le +\infty} c_k m(B_k)$$

bərabərliyindən

$$\sum_{j=1}^{p \le l \le +\infty} |y_j| m(A_j) \le \sum_{k=1}^{l \le +\infty} |c_k| m(B_k) < +\infty$$

bərabərsizliklərini, buradan da teoremin isbatını almış oluruq. ◅

SADƏ FUNKSİYALARIN LEBEQ İNTEQRALININ BƏZİ XASSƏLƏRİ.

I XASSƏ. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ sonlu ölçülü A çoxluğunda verilmlş inteqrallanan sadə funksiyalardır. Onda istənilən α və β həqiqi ədədləri üçün onların xətti kombinasiyası olan $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ funksiyası da A çoxluğunda inteqrallanan sadə funksiyadır və

$$\int_A [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_A f(x) dx + \beta \int_A g(x) dx$$

bərabərliyi doğrudur.

İSBATI.

$$A_i = \{x \in A : f(x) = f_i\} \, (i = 1, 2, \ldots) \text{ və}$$
$$B_j = \{x \in A : g(x) = g_j\} \, (j = 1, 2, \ldots)$$

çoxluqlarına baxaq. Aydındır ki,

$$A = \bigcup_i A_i = \bigcup_j B_j \; (A_i \cap A_{i'} = \varnothing, i \ne i'; \;\; B_j \cap B_{j'} = \varnothing, j \ne j').$$

$C_{ij} = A_i \cap B_j$ çoxluqları daxil edək. Aydındır ki, C_{ij} çoxluqları kəsişmir və bu çoxluqlarda $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ funksiyasının qiymətləri $h_{ij} = \alpha f_i + \beta g_j$ ədədlərinə bərabərdir.

$$A_i = \bigcup_j C_{ij}, \; B_j = \bigcup_i C_{ij}$$

bərabərliklərindən və ölçünün σ-additivlik xassəsindən istifadə edərək

$$m(A_i) = \sum_j m(C_{ij}), \quad m(B_j) = \sum_i m(C_{ij})$$

bərabərliklərini almış oluruq. Beləliklə, teoremin şərtlərindən və mütləq yığılan sıraların xassələrindən istifadə edərək aşağıdakı bərabərlikləri yaza bilərik:

$$\int_A [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \sum_{i,j} (\alpha f_i + \beta g_j) m(C_{ij}) = \sum_{i,j} \alpha f_i m(C_{ij}) +$$
$$+ \sum_{i,j} \beta g_j m(C_{ij}) = \alpha \sum_i f_i \left(\sum_j m(C_{ij}) \right) + \beta \sum_j g_j \left(\sum_i m(C_{ij}) \right) =$$
$$= \alpha \sum_i f_i m(A_i) + \beta \sum_j g_j m(B_j) = \alpha \int_A f(x) dx + \beta \int_A g(x) dx.$$

Buradan da xassənin isbatını almış oluruq. ◅

II XASSƏ. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ sonlu ölçülü A çoxluğunda verilmlş inteqrallanan sadə funksiyalardır. Əgər $f(x) \le g(x)$ olarsa, onda

$$\int_A f(x) dx \le \int_A g(x) dx.$$

İSBATI. I xassədəki $f_i, A_i, g_j, B_j, C_{ij}$ işarələmələrindən istifadə etsək $f(x) \le g(x)$ şərtindən alarıq ki, C_{ij} çoxluğunda $f_i \le g_j$ bərabərsizliyi doğrudur. Bu bərabərsizliklərdən

$$\int_A f(x)dx = \sum_{i,j} f_i m(C_{ij}) \le \sum_{i,j} g_j m(C_{ij}) = \int_A g(x)dx$$

münasibətlərini, buradan da II xassənin isbatını almış olarıq. ◅

III Xassə. $f(x)$ və $|f(x)|$ funksiyaları eyni zamanda inteqrallanandır və sonlu ölçülü A çoxluğunda

$$\left|\int_A f(x)dx\right| \le \int_A |f(x)|dx$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. $f(x)$ və $|f(x)|$ funksiyalarının eyni zamanda inteqrallanması $\sum_{k=1}^{l\le+\infty} y_k m(A_k)$ sırasının mütləq yığılmasından çıxır. Bərabərsizliyin isbatı isə

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

bərabərsizliklərindən və I, II xassələrdən alınır. ◅

IV Xassə. Əgər $|f(x)| \le g(x)$ bərabərsizliyini ödəyən $g(x)$ funksiyası inteqrallanandırsa, onda $f(x)$ funksiyası da inteqrallanandır.

Xassənin isbatı müsbət hədli sıraların müqayisəsindən alınır.

V Xassə. Sonlu ölçülü A çoxluğunda məhdud olan $f(x)$ funksiyası A çoxluğunda inteqrallanandır, belə ki, əgər A çoxluğunda $|f(x)| \le M$ bərabərsizliyi ödənərsə, onda

$$\left|\int_A f(x)dx\right| \le Mm(A).$$

Xassənin isbatı bilavasitə tərifdən çıxır.

VI Xassə. Sonlu ölçülü A çoxluğunda sanki hər yerdə sıfır olan sadə $f(x)$ funksiyası A çoxluğunda inteqrallanandır və

$$\int_A f(x)dx = 0.$$

İsbatı aydındır.

5.2. Sonlu ölçülü çoxluqlarda Lebeq inteqralının ümumi tərifi və onun xassələri

Tərif. 5.3. *Əgər sonlu ölçülü A çoxluğunda verilmiş $f(x)$ funksiyasına müntəzəm yığılan, inteqrallanan sadə $\{f_k(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı olarsa, onda $f(x)$ funksiyasına A çoxluğunda inteqrallanan (cəmlənən) funksiya deyilir.* $\left\{a_k = \int_A f_k(x)dx\right\}$ *ardıcıllığının limitinə $f(x)$ funksiyasının A çoxluğu üzrə Lebeq inteqralı deyilir və* $\int_A f(x)dx$ *simvolu ilə işarə olunur. Beləliklə, tərifə görə,*

$$\int_A f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k(x)dx. \qquad (1)$$

Lemma 5.1 *(inteqralın tərifinin korrektliyi). 1. A-da $f(x)$-ə müntəzəm yığılan istənilən sadə, inteqrallanan $\{f_k(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı üçün* $\left\{a_k = \int_A f_k(x)dx\right\}$ *ardıcıllığı yığılandır. 2. $f(x)$ funksiyasının (1) düsturu ilə təyin olunan inteqralı $f(x)$-ə müntəzəm yığılan sadə inteqrallanan funksiyalar ardıcıllığından asılı deyil. 3. Sadə funksiyalar üçün bu tərif 5.1 bəndində verilən Tərif.5.2 ilə ekvivalentdir.*

İsbatı. 1-ci hökmün doğruluğunu göstərmək üçün inteqrallanan sadə funksiyaların I və V xassələrindən çıxan

$$|a_k - a_l| \le m(A)\cdot \sup_{x\in A} |f_k(x) - f_l(x)|$$

bərabərsizliyindən və Koşi meyarından istifadə etmək kifayətdir.

Fərz edək ki, $\{f_k(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı ilə yanaşı $\{g_k(x)\}$ sadə inteqrallanan funksiyalar ardıcıllığı da $f(x)$-ə müntəzəm yığılır. Onda sadə funksiyaların I və V xassələrindən istifadə edərək

$$\left|\int_A f_k(x)dx - \int_A g_k(x)dx\right| \leq m(A)\cdot\sup_{x\in A}|f_k(x)-g_k(x)| \leq$$

$$\leq m(A)\left\{\sup_{x\in A}|f_k(x)-f(x)| + \sup_{x\in A}|f(x)-g_k(x)|\right\}$$

bərabərsizliklərini almış olarıq. Buradan da

$$\int_A f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_A f_k(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_A g_k(x)dx$$

bərabərliklərini, yəni 2-ci hökmün isbatını alarıq. 3-cü hökmü isbat etmək üçün $f_k(x)=f(x)\,(k\in N)$ şərtini ödəyən ardıcıllıq götürmək kifayətdir. ◅

İndi isə Lebeq inteqralının, sadə inteqrallanan funksiyaların xassələrindən bilavasitə limitə keçməklə alınan, əsas xassələrini qeyd edək.

1. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ sonlu ölçülü A çoxluğunda verilmiş inteqrallanan funksiyalardır. Onda istənilən α və β həqiqi ədədləri üçün onların xətti kombinasiyası olan $h(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$ funksiyası da A çoxluğunda inteqrallanan funksiyadır və

$$\int_A[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_A f(x)dx + \beta\int_A g(x)dx$$

bərabərliyi doğrudur.

2. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ sonlu ölçülü A çoxluğunda verilmiş inteqrallanan funksiyalardır. Əgər $f(x)\leq g(x)$ olarsa, onda

$$\int_A f(x)dx \leq \int_A g(x)dx .$$

3. $f(x)$ və $|f(x)|$ funksiyaları eyni zamanda inteqrallanandır və sonlu ölçülü A çoxluğunda

$$\left|\int_A f(x)dx\right| \leq \int_A |f(x)|dx$$

bərabərsizliyi doğrudur.

4. Əgər $|f(x)|\leq g(x)$ bərabərsizliyini ödəyən $g(x)$ funksiyası inteqrallanandırsa, onda $f(x)$ funksiyası da inteqrallanandır.

5. Sonlu ölçülü A çoxluğunda məhdud olan $f(x)$ funksiyası A çoxluğunda inteqrallanandır, belə ki, əgər A çoxluğunda $|f(x)|\leq M$ bərabərsizliyi ödənərsə, onda

$$\left|\int_A f(x)dx\right| \leq Mm(A).$$

6. Sonlu ölçülü A çoxluğunda sanki hər yerdə sıfır olan $f(x)$ funksiyası A çoxluğunda inteqrallanandır və

$$\int_A f(x)dx = 0 .$$

Lebeq inteqralının bilavasitə tərifindən çıxan və praktikada istifadə olunan iki xassəni də qeyd edək.

7. Ekvivalent funksiyalardan biri inteqrallanandırsa, o biri də inteqrallanandır və onların inteqralları bərabərdir.

8. Əgər $m(A)=0$ olarsa, onda $\int_A f(x)dx = 0$.

Bu xassəyə Lebeq inteqralının mütləq kəsilməzliyi haqqında olan aşağıdakı mühüm teoremin limit halı kimi baxmaq olar.

TEOREM 5.3 *(inteqralın mütləq kəsilməzlik xassəsi). Əgər $f(x)$ A çoxluğunda inteqrallanan funksiyadırsa, onda istənilən müsbət ε ədədi* *üçün elə müsbət δ ədədi tapmaq olar ki, $m(e)<\delta$ şərtini ödəyən istənilən $e \subset A$ alt çoxluğu üçün*

$$\left|\int_e f(x)dx\right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənər.

Növbəti xassəni qeyd etməzdən əvvəl aşağıdakı lemmanı isbat edək.

L E M M A 5.2 *(Çebışev bərabərsizliyi). Tutaq ki, inteqrallanan $\varphi(x)$ funksiyası A çoxluğunda $\varphi(x)\geq 0$ şərtini ödəyir. Onda istənilən $c>0$ ədədi üçün*

$$mA(\varphi(x)\geq c)\leq \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)dx$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İ S B A T I. İnteqralın additivliyindən

$$\int_A \varphi(x)dx = \int_{A(\varphi(x)\geq c)} \varphi(x)dx + \int_{A\setminus A(\varphi(x)\geq c)} \varphi(x)dx \geq \int_{A(\varphi(x)\geq c)} \varphi(x)dx \geq cmA(\varphi(x)\geq c)$$

münasibətlərini, buradan da Çebışev bərabərsizliyini, almış oluruq. ◁

9. Əgər inteqrallanan $f(x)$ funksiyası A çoxluğunda $f(x)\geq 0$ və

$$\int_A f(x)dx = 0$$

şərtlərini ödəyirsə onda o sanki hər yerdə sıfra bərabərdir.

İ S B A T I. Çebışev bərabərsizliyinə görə istənilən k natural ədədi üçün

$$mA\left(f\geq \frac{1}{k}\right)\leq k\int_A f(x)dx = 0$$

münasibətləri doğrudur. Bu münasibətləri

$$mA(f\neq 0)\leq \sum_{k=1}^{\infty} mA\left(f\geq \frac{1}{k}\right)$$

bərabərsizliyində nəzərə alsaq xassənin isbatını almış olarıq. ◁

Daha iki xassəni (isbatsız) teorem şəklində verək.

T E O R E M 5.4 *(Lebeq inteqralının σ - additivlik xassəsi). Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası ən çoxu hesabi sayda, cüt-cüt kəsişməyən və ölçülən A_k $(k=1,2,\dots,l\leq +\infty)$ çoxluqlarının birləşməsi şəklində göstərilmiş A çoxluğunda inteqrallanandır. Onda o, hər bir A_k $(k=1,2,\dots,l\leq+\infty)$ çoxluğunda da inteqrallanandır və*

$$\int_A f(x)dx = \sum_{k=1}^{l\leq+\infty}\int_{A_k} f(x)dx$$

bərabərliyi doğrudur, belə ki, sağ tərəfdəki sıra ($l=+\infty$ olduqda) mütləq yığılır.

N Ə T İ C Ə. A çoxluğunda inteqrallanan funksiya onun istənilən ölçülən alt çoxluğunda da inteqrallanır.

T E O R E M 5.5. *Əgər $A=\bigcup_{k=1}^{l\leq+\infty} A_k$ $(A_k \cap A_{k'}, k\neq k')$ və*

$$\sum_{k=1}^{l\leq+\infty}\int_{A_k}|f(x)|dx < +\infty$$

şərtləri ödənərsə, onda $f(x)$ funksiyası A çoxluğunda inteqrallanandır və

$$\int_A f(x)dx = \sum_{k=1}^{l\leq+\infty}\int_{A_k} f(x)dx$$

bərabərliyi doğrudur.

5.3. Lebeq inteqralı altında limitə keçmə teoremləri

TEOREM 5.6 *(Lebeq).Tutaq ki, $\varphi(x)$ funksiyası A çoxluğunda inteqrallanandır və istənilən k natural ədədi üçün*

$$|f_k(x)| \le \varphi(x)$$

şərti ödənir. Əgər $\{f_k(x)\}$ ardıcıllığı A-da $f(x)$ funksiyasına yığılırsa, onda $f(x)$ də A-da inteqrallanandır və

$$\lim_{k\to\infty}\int_A f_k(x)dx = \int_A f(x)dx \qquad (2)$$

bərabərliyi doğrudur.

İSBATI. $\varphi(x)$-in inteqrallanan olmasından çıxır ki, istənilən müsbət ε ədədi üçün elə p ədədi var ki,

$$\int_{B_p}|f(x)|dx \le \int_{B_p}\varphi(x)dx < \frac{\varepsilon}{5}, \qquad (3)$$

burada $B_p = \{x\in A : \varphi(x)\ge p\}$. Yeqorov teoreminə görə B_p çoxluğunu $B_p = C\cup D$ şəklində göstərmək olar, belə ki, C çoxluğunda $\{f_k(x)\}$ ardıcıllığı $f(x)$- ə müntəzəm yığılır, D çoxluğunun ölçüsü isə $m(D) < \frac{\varepsilon}{5p}$ şərtini ödəyir. $\{f_k(x)\}$ ardıcıllığının $f(x)$- ə müntəzəm yığılmasından çıxır ki, elə k_0 ədədi vardır ki, $k > k_0$ şərtini ödəyən k-lar üçün

$$\sup_{x\in C}|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{5m(C)} \qquad (4)$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda

$$\int_A [f_k(x) - f(x)]dx = \int_{B_p} f_k(x)dx - \int_{B_p} f(x)dx +$$
$$+\int_D f_k(x)dx - \int_D f(x)dx + \int_C [f_k(x) - f(x)]dx$$

bərabərliklərindən, $m(D) < \frac{\varepsilon}{5p}$ və (3), (4) bərabərsizliklərindən

$$\int_A |f_k(x) - f(x)|dx < \varepsilon$$

bərabərsizliyini, buradan isə (2) bərabərliyini almış olarıq. ◃

SƏRBƏST İŞ. (3) bərabərsizliklərini isbat edin.

SƏRBƏST İŞ. Göstərin ki, $|f_k(x)| \le \varphi(x)$ şərtində $\varphi(x)$-i istənilən M sabiti ilə əvəz etmək olar.

SƏRBƏST İŞ. Göstərin ki, teorem sanki hər yerdə yığılan ardıcıllıqlar üçün də doğrudur.

SƏRBƏST İŞ. Göstərin ki, teorem ölçüyə görə yığılan ardıcıllıqlar üçün də doğrudur.

Aşağıdakı misal göstərir ki, $|f_k(x)| \le \varphi(x)$ ($|f_k(x)| \le M$) şərtini atmaq olmaz!

Misal. $A = (0,1)$ çoxluğunda

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & 0 < x < \frac{1}{k}, \\ 0, & \frac{1}{k} \le x < 1. \end{cases} \quad (k = 1,2,\ldots)$$

ardıcıllığına baxaq. Aydındır ki, A çoxluğunda $\{f_k(x)\}$ ardıcıllığı $f(x) = 0$ funksiyasına yığılır. Lakin

$$\int_{(0,1)} f_k(x)dx = 1 \quad (k = 1,2,\ldots)$$

bərabərliklərindən çıxır ki,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{(0,1)} f_k(x)dx = 1 \neq 0 = \int_{(0,1)} 0dx = \int_{(0,1)} f(x)dx.$$

İnteqral altında limitə keçmədə aşağıdakı teorem və ondan çıxan nəticə çox faydalıdır.

TEOREM 5.7 (B.Levi). *Tutaq ki, A çoxluğunda inteqrallanan və*

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_k(x) \le \ldots,$$
$$\sup_{k\in N}\int_A f_k(x)dx \le M$$

şərtlərini ödəyən $\{f_k(x)\}$ ardıcıllığı verilmişdir. Onda

a) A çoxluğunda sanki hər yerdə sonlu

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

limiti var;

b) $f(x)$ funksiyası A çoxluğunda inteqrallanır;

c)

$$\lim_{k\to\infty}\int_A f_k(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

NƏTİCƏ. Əgər A çoxluğunda

$$\psi_k(x) \ge 0 \quad (k = 1,2,\ldots)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_A \psi_k(x)dx < +\infty$$

şərtləri ödənirsə, onda

1) A çoxluğunda sanki hər yerdə $\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x)$ sırası yığılır;

2) $\int_A\left(\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_A \psi_k(x)dx$.

TEOREM 5.8 *(Fatu). Tutaq ki, ölçülən mənfi olmayan $\{f_k(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı A çoxluğunda sanki hər yerdə $f(x)$- ə yığılır və*

$$\sup_{k\in N}\int_A f_k(x)dx \le M$$

şərti ödənir. Onda

a) $f(x)$ funksiyası A çoxluğunda inteqrallanandır;

b) $\int_A f(x)dx \le M$.

İSBATI.

$$\varphi_l(x) = \inf_{l\ge k}(f_k(x)) \quad (l = 1,2,\ldots)$$

funksiyalarını daxil edək. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\{\varphi_l(x)\}$ ardıcıllığı A çoxluğunda sanki hər yerdə $f(x)$- ə yığılır və Levi teoreminin bütün şərtlərini ödəyir. Levi teoremini tətbiq edərək teoremin isbatını almış olarıq. ◁

SƏRBƏST İŞ. Göstərin ki, $\{\varphi_l(x)\}$ ardıcıllığı A çoxluğunda sanki hər yerdə $f(x)$- ə yığılır və Levi teoreminin bütün şərtlərini ödəyir.

5.4. Sonsuz ölçülü çoxluqlarda Lebeq inteqralı

Tutaq ki, n ölçülü R_n- Evklid fəzasının sonsuz ölçülü ($m(A) = +\infty$) A çoxluğunda ölçülən və mənfi olmayan ($f(x) \ge 0$) $f(x)$ funksiyası verilmişdir. Aydındır ki, istənilən k natural ədədi üçün $f(x)$ $A_k = P_k \cap A$ (burada $P_k = [-k,k]^n = [-k,k]\times[-k,k]\times\cdots\times[-k,k]$ tili $2k$ olan n ölçülü kubdur) çoxluğunda ölçülən funksiyadır və $\int_{A_k} f(x)dx$ integralı vardır (sonlu və ya sonsuz!). Deməli

$$\left\{\int_{A_k} f(x)dx\right\}$$

azalmayan ardıcıllıqdır. Qeyd edək ki, müəyyən k_0 nömrəsi üçün

$$\int_{A_{k_0}} f(x)dx = +\infty$$

olarsa, onda

$$\left\{ \int_{A_k} f(x)dx \right\}$$

ardıcıllığı hədləri $+\infty$ olan stasionar ardıcıllıq olur.

TƏRİF.5.4.

$$\left\{ \int_{A_k} f(x)dx \right\}$$

ardıcıllığının limitinə (sonlu və ya sonsuz!) $f(x)$ funksiyasının A çoxluğu üzrə Lebeq inteqralı deyilir və

$$\int_A f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f(x)dx$$

kimi işarə olunur. Əgər bu limit sonlu olarsa, $f(x)$-ə inteqrallanan (cəmlənən) funksiya deyilir.

Əgər $f(x)$ dəyişən işarəli funksiya olarsa,

$$f_+(x) = \max\{f(x),0\} \text{ və } f_-(x) = \max\{-f(x),0\}$$

funksiyalarından istifadə edərək onu

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

şəklində göstərə bilərik. Əgər

$$\int_A f_+(x)dx - \int_A f_-(x)dx$$

fərqinin mənası olarsa, bu fərqə $f(x)$-in A çoxluğu üzrə Lebeq inteqralı deyilir və

$$\int_A f(x)dx = \int_A f_+(x)dx - \int_A f_-(x)dx$$

kimi işarə olunur.

Asanlıqla göstərmək olar ki, Lebeq inteqralının sonlu ölçülü çoxluqlarda isbat olunan xassələri, o cümlədən Lebeq, Levi və Fatu teoremləri sonsuz ölçülü çoxluqlarda da (əsasən) doğrudur. Əsas fərq ondan ibarətdir ki, sonsuz ölçülü çoxluqlarda ölçülən və məhdud olan funksiya cəmlənməyə bilər. Xüsusi halda, $m(A) = +\infty$ olarsa, onda sıfırdan fərqli olan istənilən sabit funksiya A çoxluğunda cəmlənmir.

Qeyd edək ki, A çoxluğu R_n, $(-\infty,+\infty)$, $(a,+\infty)$ və $(-\infty,b)$ tipli çoxluqlar olduqda, onlar üzrə Lebeq inteqrallarını uyğun olaraq

$$\int_{R_n} f(x)dx, \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \ \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ və } \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

kimi işarə edirlər.

5.5. Lebeq inteqralının Riman inteqralı ilə müqayisəsi

TEOREM 5.9. *Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanandırsa, onda o, Lebeq mənada da inteqrallanır və hər iki inteqral bir-birinə bərabərdir:*

$$(L)\int_{[a,b]} f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx.$$

İSBATI. $[a,b]$ parçasının hər hansı bir

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

bölgüsünü və bu bölgüyə uyğun aşağı və yuxarı

$$\omega_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \quad \text{və} \quad \Omega_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

Darbu cəmlərini götürək, burada

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x),\ M_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f(x),\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Riman inteqralının tərifinə görə

$$(R)\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty(\lambda=\max\Delta x_k\to 0)} \Omega_n = \Omega = \omega = \lim_{n\to\infty(\lambda=\max\Delta x_k\to 0)} \omega_n . \qquad (5)$$

Aşağıdakı kimi sadə funksiyalara baxaq:

$$f_n^+(x) = M_k,\ f_n^-(x) = m_k;\ x \in [x_{k-1}, x_k) \quad (k = 1,2,\ldots n-1).$$

b nöqtəsinin ölçüsü sıfır olduğu üçün bu funksiyaları həmin nöqtədə istənilən şəkildə təyin etmək olar. Aydındır ki,

$$f_n^-(x) \le f(x) \le f_n^+(x),$$

$$\int_{[a,b]} f_n^-(x)dx = \sum_j m_j m([x_{j-1}, x_j)) = \omega_n,\ \int_{[a,b]} f_n^+(x)dx = \Omega_n,$$

belə ki, $\{f_n^-(x)\}$ ardıcıllığı monoton artan, $\{f_n^+(x)\}$ ardıcıllığı isə monoton azalandır. Buradan alarıq:

$$f^-(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^-(x) \le f(x) \le \lim_{n\to\infty} f_n^+(x) = f^+(x). \qquad (6)$$

$f(x)$ funksiyasının məhdudluğundan və Levi teoremindən çıxır ki, $f^+(x)$ və $f^-(x)$ funksiyaları Lebeq mənada inteqrallanandır və

$$\int_{[a,b]} f^-(x)dx = \omega,\ \int_{[a,b]} f^+(x)dx = \Omega. \qquad (7)$$

$\Omega = \omega$ olduğu üçün bu bərabərliklərdən çıxır ki,

$$\int_{[a,b]} (f^+(x) - f^-(x))dx = 0.$$

Bu bərabərlikdən, Lebeq inteqralının 9-cu xassəsinə görə, $f^+(x) - f^-(x)$ fərqinin sanki hər yerdə sıfır olduğu alınır. Buradan və (6) bərabərsizliklərindən

$$f^+(x) \sim f^-(x) \sim f(x) \quad x \in [a,b]$$

münasibətləri alınır. Bu o deməkdir ki, Riman mənada inteqrallanan $f(x)$ funksiyası ölçüləndir. $f(x)$ funksiyası məhdud olduğu üçün o, həm də, Lebeq mənada inteqrallanandır. (5) və (7) bərabərliklərindən isə isbatı tələb olunan

$$(L)\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f^-(x)dx = \omega = \int_{[a,b]} f^+(x)dx = \Omega = (R)\int_a^b f(x)dx$$

bərabərliyini almış olarıq. ◃

Praktikada bir çox Lebeq inteqrallarının hesablanması Riman inteqrallarının hesablanmasına gətirildiyi üçün funksiyanın Riman mənada inteqrallanmasını müəyyən etməkdə aşağıdakı teorem çox faydalıdır.

T E O R E M 5.10. *Funksiyanın Riman mənada inteqrallanması üçün zəruri və kafi şərt onun sanki hər yerdə kəsilməz olmasıdır.*

Qeyri-məxsusi Riman inteqralı ilə Lebeq inteqralının müqayisəsinə gəldikdə isə aşağıdakıları bilmək lazımdır.

1). Şərti yığılan qeyri-məxsusi inteqrala malik olan funksiya Lebeq mənada inteqrallanmır.

M i s a l l a r. $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx;\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$

2). Mütləq yığılan qeyri-məxsusi inteqrala malik olan funksiya Lebeq mənada inteqrallanandır.

S ə b ə b. $f(x)$ və $|f(x)|$ funksiyaları eyni zamanda Lebeq mənada inteqrallanandır.

S ə r b ə s t i ş. Aydındır ki, mənfi olmayan funksiyanın qeyri-məxsusi inteqralı onun Lebeq inteqralına bərabərdir. Mütləq yığılan qeyri-məxsusi inteqrala malik olan dəyişən işarəli funksiyanın qeyri-məxsusi inteqralı onun Lebeq inteqralına bərabərdirmi?

5.6. Çalışmalar

5.1.

1). Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ sonlu ölçülü A çoxluğunda verilmlş sadə funksiyalar, α və β isə həqiqi ədədlərdir. Göstərin ki, a) $\alpha f(x)+\beta g(x)$, b) $|f(x)|$, c) $f(x)\cdot g(x)$, d) $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(0\notin g(A))$ funksiyaları da A çoxluğunda sadə funksiyalardır.

2). Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ sonlu ölçülü A çoxluğunda verilmlş sadə funksiyalardır. Göstərin ki, $\max\{f(x),g(x)\}$ funksiyası da sadədir.

3). Göstərin ki, Dirixle funksiyası istənilən parçada inteqrallanan sadə funksiyadır.

4). Göstərin ki, $E_k=\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right)$ $(k=1,2,\ldots)$ çoxluqlarında $f(x)=k$ kimi təyin olunan $f(x)$ funksiyası $E=(0,1)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ çoxluğunda sadədir, lakin inteqrallanmır.

5). Göstərin ki, $A_k=\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\right)$ $(k=1,2,\ldots)$ çoxluqların-da $f(x)=-(k+1)$ kimi, $B_k=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right),\frac{1}{k}\right)$ $(k=1,2,\ldots)$ çoxluqla-rında isə $f(x)=k+1$ kimi təyin olunan $f(x)$ funksiyası hər bir $E_k=A_k\cup B_k$ $(k=1,2,\ldots)$ çoxluğunda inteqrallanan, $E=(0,1)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ çoxluğunda isə inteqrallanmayan sadə funksiyadır.

6). Göstərin ki, $E=(0,1)$ çoxluğunda verilmiş

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right),\\ -x^2, x=\frac{1}{k}.\end{cases}\quad (k=1,2,\ldots)$$

funksiyası sadə və inteqrallanandır. $\int_{(0,1)}f(x)dx$ inteqralını hesablayın.

7). Göstərin ki, $E_k=\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$ $(k=1,2,\ldots)$ çoxluqlarında $f(x)=\frac{1}{k+2}$ kimi təyin olunan $f(x)$ funksiyası $E=(0,1]=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ çoxluğunda inteqrallanır və $\int_E f(x)dx$ inteqralını hesablayın.

8). $E_k=\left(\frac{1}{2^{k+1}},\frac{1}{2^k}\right]$ $(k=0,1,2,\ldots)$ çoxluqlarında $f(x)=\sin\frac{\pi k}{2}$ kimi təyin olunan $f(x)$ funksiyasının $\int_{(0,1]}f(x)dx$ inteqralını hesablayın.

9). $E_k=\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$ $(k=1,2,\ldots)$ çoxluqlarında $f(x)=(-1)^k k$ kimi təyin olunan sadə $f(x)$ funksiyası $E=(0,1]=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ çoxluğunda inteqrallanandırmı?

10). $E_k=\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$ $(k=1,2,\ldots)$ çoxluqlarında $f(x)=\sqrt{k}$ kimi təyin olunan sadə $f(x)$ funksiyası $E=(0,1]=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ çoxluğunda inteqrallanandırmı?

11). $E_k=\left(\frac{1}{2^{k+1}},\frac{1}{2^k}\right]$ $(k=0,1,2,\ldots)$ çoxluqlarında $f(x)=(-1)^k$ kimi təyin olunan $f(x)$ funksiyası $E=(0,1]=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ çoxluğunda inteqrallanandırmı? Əgər inteqrallanırsa $\int_{[0,1]}f(x)dx$ inteqralını hesablayın.

12). $E_k=[k,k+1)$ $(k=1,2,\ldots)$ çoxluqlarında $f(x)=(-1)^k\frac{1}{k}$ kimi təyin olunan sadə $f(x)$ funksiyası $E=[1,+\infty)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ çoxluğunda cəmlənəndirmi?

13). $\int_{[-3,3]}sign(\cos\pi x)dx$ inteqralını hesablayın.

14). $\int_{[0,10]}[x]dx$ (burada $[x]$- ilə x-in tam hissəsi işarə edilmişdir) inteqralını hesablayın.

15). Göstərin ki,

$$f(x,y)=\begin{cases}-2^{k-1}, (x,y)\in A_k=\left[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right)\times\left[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right),\\ 2^{k+1}, (x,y)\in B_k=\left[\frac{1}{2^{k+1}},\frac{1}{2^k}\right)\times\left[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right), \quad (k=1,2,\ldots)\\ 0, E=[0,1]\times[0,1]\setminus\left\{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\right)\right\}.\end{cases}$$

$E=[0,1]\times[0,1]$ çoxluğunda inteqrallanan sadə funksiyadır. $\int_E f(x,y)dxdy$ inteqralını hesablayın.

5.2.

1). $f(x)=\begin{cases}1, & x\in P_0,\\ \frac{1}{2^n}, & G_0-\text{ın } n \text{ ranqlı intervallarında.}\end{cases}$

funksiyasının $(L)\int_{[0,1]}f(x)dx$ inteqralını hesablayın.

2). $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in J\cap[1,2],\\ 2x, x\in J\cap[0,1],\\ \sin x, x\in Q\cap[0,2]\end{cases}$

funksiyasının $(L)\int_{[0,1]}f(x)dx$ inteqralını hesablayın (J-irrasional, Q isə rasional ədədlər çoxluğudur).

3). $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in A\cap[0,2],\\ \sin\pi x, x\in CA\cap[0,1],\\ \cos\pi x, x\in CA\cap[1,2]\end{cases}$

funksiyasının $(L)\int_{[0,1]}f(x)dx$ inteqralını hesablayın (A-cəbri ədədlər çoxluğu, CA isə onun tamamlayıcı çoxluğudur).

4). $f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \sin\frac{1}{x}, & x\in[0,1]\setminus\left(\left\{\frac{1}{\pi n}\right\}_{n\in N}\cup\{0\}\right),\\ -1, & x\in\left\{\frac{1}{\pi n}\right\}_{n\in N}.\end{cases}$

funksiyasının $[0,1]$ parçasında Lebeq inteqralı varmı?

5). Tutaq ki, $f(x)$ kəsilməz, $g(x)$ isə Lebeq mənada inteqrallanan funksiyalardır. Demək olarmı ki, $F(x)=f(g(x))$ mürəkkəb funksiyası Lebeq mənada inteqrallanandır?

Aşağıdakı funksiyaların göstərilən çoxluqlar üzrə Lebeq inteqrallarını hesablayın.

6). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}, & x\in J\cap\left[\dfrac{1}{16},1\right], \\ \dfrac{4}{x}, & x\in J\cap\left[1,\dfrac{5}{4}\right], \\ \sin^2 x, & x\in Q\cap\left[\dfrac{1}{16},\dfrac{5}{4}\right]. \end{cases}$ $E=\left[\dfrac{1}{16},\dfrac{5}{4}\right]$.

7). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^3}, & x\in J\cap[0,1], \\ 7x, & x\in Q\cap[0,1]. \end{cases}$ $E=[0,1]$.

8). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}, & x\in J\cap[0,4], \\ \dfrac{2x-3}{x^2-3x+8}, & x\in J\cap[4,5], \\ \sin(3+x^2), & x\in Q\cap[0,5]. \end{cases}$ $E=[0,5]$.

9). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}, & x\in J\cap[0,\sqrt{3}], \\ \dfrac{1}{x^3}, & x\in J\cap[\sqrt{3},3], \\ \ln(1+x), & x\in Q\cap[0,3]. \end{cases}$ $E=[0,3]$.

10). $f(x)=\begin{cases} x\cos^2 x, & x\in J\cap[0,\pi], \\ x\sin^2 x, & x\in Q\cap[0,\pi]. \end{cases}$ $E=[0,\pi]$.

11). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{arctgx}{1+x^2}, & x\in J\cap[0,\sqrt{3}], \\ -\dfrac{1}{x+2}, & x\in J\cap[\sqrt{3},2], \\ \cos^2 x, & x\in Q\cap[0,2]. \end{cases}$ $E=[0,2]$.

12). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}}, & x\in J\cap\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right], \\ 8x^2+4, & x\in Q\cap\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$ $E=\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

13). $f(x)=\begin{cases} \sin x, & \left\{x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]:\cos x\in Q\right\} \\ \sin^2 x, & \left\{x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]:\cos x\in J\right\} \end{cases}$, $E=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

14). $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in J\cap\left[0,\dfrac{1}{3}\right), \\ \ln x, & x\in J\cap\left[\dfrac{1}{3},1\right], \\ 0, & x\in Q\cap[0,1]. \end{cases}$ $E=[0,1]$.

5.3.

1). $f_n(x)=2nxe^{-nx^2}$ ardıcıllığı $[0,1]$ parçasında cəmlənən majoranta malikdirmi?

2). $f_n(x)=2nxe^{-nx^2}$ ardıcıllığı $[0,+\infty)$ aralığında cəmlənən majoranta malikdirmi?

3). $f_n(x)=2nxe^{-nx^2}$ ardıcıllığı üçün

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)dx=\int_{[0,1]}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$$

bərabərliyi doğrudurmu?

4). $f_n(x)=2nxe^{-nx^2}$ ardıcıllığı üçün

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty)} f_n(x)dx=\int_{[0,+\infty)}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$$

bərabərliyi doğrudurmu?

5). $f_n(x)=\dfrac{\sin^n x}{1+x^2}$ ardıcıllığı $(-\infty,+\infty)$ aralığında cəmlənən majoranta malikdirmi?

6). $f_n(x)=\dfrac{\sin^n x}{1+x^2}$ ardıcıllığının $(-\infty,+\infty)$ aralığında 0-a yığılmadığı nöqtələr çoxluğunun ölçüsünü tapın.

7). $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{(\infty,+\infty)}\dfrac{\sin^n x}{1+x^2}dx$ limitini tapın.

8). $f_n(x)=\dfrac{n\left(e^{-\frac{x}{n}}-1\right)}{1+x^4}$ ardıcıllığı $[0,+\infty)$ aralığında cəmlənən majoranta malikdirmi?

9). Göstərin ki, $f_n(x)=\dfrac{n\left(e^{-\frac{x}{n}}-1\right)}{1+x^4}$ ardıcıllığı $[0,+\infty)$ aralığında nöqtəvi olaraq $f(x)=\dfrac{-x}{1+x^4}$ funksiyasına yığılır.

10). $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[0,+\infty)} n\left(e^{-\frac{x}{n}}-1\right)\dfrac{dx}{1+x^4}$ limitini tapın.

11). $f_n(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}\cos\left(\dfrac{xy}{n}\right)$ ardıcıllığı R_2 fəzasında cəmlənən majoranta malikdirmi?

12). $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}\cos\left(\dfrac{xy}{n}\right)dxdy$ limitini tapın.

13). $f_n(x)=\begin{cases} n, & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right],\\ 0, & x\in\left(\frac{1}{n},1\right]\end{cases}$

ardıcıllığı üçün

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty)} f_n(x)dx=\int_{[0,+\infty)}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$$

bərabərliyi doğrudurmu?

14). Göstərin ki, inteqral altında limitə keçmə haqqında Lebeq teoremində majorant funksiyanın varlığı zəruri şərt deyil.

15). Fatu teoreminin bütün şərtlərinin ödənməsindən

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx=\int\limits_E\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E |f_n(x)-f(x)|dx=0$

bərabərlikləri çıxırmı?

5.4.

1). α həqiqi ədədinin hansı qiymətində

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in Q\cap[0,+\infty),\\ \dfrac{1}{x^{\alpha}}, & x\in J\cap[0,+\infty)\end{cases}$$

funksiyası $[0,+\infty)$ aralığında cəmlənəndir?

2). Həqiqi oxun istənilən $[a,b]$ parçasında Lebeq inteqralı olan, lakin bütün oxda cəmlənməyən funksiya qurun.

3). α və β həqiqi ədədlərinin hansı qiymətində

$$f(x)=x^{\alpha}\sin\left(x^{\beta}\right)$$

funksiyası $[1,+\infty)$ aralığında cəmlənir?

4).

$$f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$$

funksiyası $[2,+\infty)$ aralığında cəmlənəndirmi?

5). $\int\limits_{[a,+\infty)}|f(x)|dx<+\infty$ bərabərsizliyindən $\int\limits_{[a,+\infty)}|f(x)|^p dx<+\infty\ (p>0)$ bərabərsizliyi çıxırmı?

6). İstənilən $c\geq a$ üçün $\int\limits_{[a,c]}f(x)dx=0$ şərtindən $f(x)$ funksiyasının $[a,+\infty)$ aralığında sanki hər yerdə sıfır olması çıxırmı?

7). $(-\infty,+\infty)$ aralığında dəyişən işarəli elə $f(x)$ funksiya qurun ki,

$$\int\limits_{(-\infty,+\infty)}f_+(x)dx<+\infty \text{ və } \int\limits_{(-\infty,+\infty)}f_-(x)dx=+\infty$$

(burada $f_+(x)=\max\{f(x),0\}$ və $f_-(x)=\max\{-f(x),0\}$) münasibətləri ödənsin.

8). $(-\infty,+\infty)$ aralığında dəyişən işarəli elə $f(x)$ funksiya qurun ki,

$$\int\limits_{(-\infty,+\infty)}f_+(x)dx=+\infty \text{ və } \int\limits_{(-\infty,+\infty)}f_-(x)dx=+\infty$$

(burada $f_+(x)=\max\{f(x),0\}$ və $f_-(x)=\max\{-f(x),0\}$) münasibətləri ödənsin.

9). $$f_n(x)=\begin{cases} n, & n<|x|\leq n+1,\\ 0, & n+1<|x|, \quad (n=1,2,\ldots)\\ 0, & |x|\leq n \end{cases}$$

ardıcıllığı üçün $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{(-\infty,+\infty)}f_n(x)dx$ limitini tapın.

10). $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & x\in J\cap(-\infty+\infty),\\ \dfrac{\sin x}{5^x}, & x\in Q\cap(-\infty+\infty) \end{cases}$$

funksiyasının $(-\infty+\infty)$ aralığı üzrə Lebeq inteqralını hesablayın.

5.5.

1). $[a,b]$ parçasında Riman mənada inteqrallanan funksiya, boş olmayan açıq $G\subset[a,b]$ çoxluğunun bütün nöqtələrində kəsilən ola bilərmi?

2). $$f(x)=\begin{cases} 2, & x\in Q\cap[0,1],\\ -x, & x\in J\cap[0,1] \end{cases}$$

funksiyası $[0,1]$ parçasında a) Riman mənada; b) Lebeq mənada inteqrallanırmı?

3) Dirixle funksiyası $[0,1]$ parçasında a) Riman mənada; b) Lebeq mənada inteqrallanırmı?

4). $[a,b]$ parçasının ölçüsü sıfır olan alt çoxluğunun xarakteristik funksiyası Riman mənada inteqrallanırmı?

5). $[a,b]$ parçasının ölçüsü sıfır olan qapalı alt çoxluğunun xarakteristik funksiyası Riman mənada inteqrallanırmı?

6). $$f(x)=\begin{cases} 1, & x\in P_0,\\ 2, & x\in G_0 \end{cases}$$

funksiyası $[0,1]$ parçasında a) Riman mənada; b) Lebeq mənada inteqrallanırmı?

7). $$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in Q\cap[0,1],\\ -x^2, & x\in J\cap[0,1] \end{cases}$$

funksiyası $[0,1]$ parçasında a) Riman mənada; b) Lebeq mənada inteqrallanırmı?

8). $f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\cap[0,1],\\ x^3, & x\in J\cap[0,1]\end{cases}$

funksiyası $[0,1]$ parçasında a) Riman mənada; b) Lebeq mənada inteqrallanırmı?

9) 2,3,6,7 və 8 məsələlərindəki funksiyaların Lebeq inteqrallarını hesablayın.

10). $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in(0,1)\times(0,1);\ xy\in Q,\\ 0, & (x,y)\in(0,1)\times(0,1);\ xy\notin Q\end{cases}$

funksiyasının Lebeq inteqralını $E=(0,1)\times(0,1)$ çoxluğunda hesablayın.

Aşağıdakı funksiyaların göstərilən çoxluqlar üzrə Lebeq inteqralını hesablayın.

11). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, & x\in J\cap(1,2),\\ \sin x, & x\in Q\cap(1,2),\end{cases}\quad E=(1,2).$

12). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x\in J\cap(-1,8),\\ \cos x, & x\in Q\cap(-1,8),\end{cases}\quad E=(-1,8).$

13). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x\in G_0\cap[0,1],\\ tgx, & x\in P_0\cap[0,1],\end{cases}\quad E=[0,1].$

14). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x\in J\cap(0,1),\\ ctgx, & x\in Q\cap(0,1),\end{cases}\quad E=(0,1).$

5.7. Cavablar və göstərişlər

5.1.

5). Göstərin ki, $\int\limits_{(0,1)} f(x)dx=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. 6). 1. $\int\limits_{(0,1)} f(x)dx=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ bərabərliyindən istifadə edin. 7). $\frac{1}{4}$. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ sırasının cəmini

tapmaq üçün $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$ bərabərliyindən istifadə edin. 8). $\frac{1}{5}$. $\int\limits_{(0,1]} f(x)dx=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4l+2}}-\sum\limits_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4p}}$ bərabərliyindən istifadə edin. 9). Xeyr. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)}$ sırası mütləq yığılmır. 10). Bəli. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k(k+1)}$ sırasının yığılan olduğunu göstərin. 11). Bəli. $\frac{1}{3}$. 12). Xeyr. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ sırası mütləq yığılmır. 13). 0. 14). 45. 15). $0,5$.

5.2.

1). $\frac{1}{4}$. A_n ilə ölçüləri $\frac{1}{3^n}$-ə bərabər olan 2^{n-1} sayda olan bütün n ranqlı intervallarının birləşməsini işarə edib $\int\limits_{A_n} f(x)dx=\frac{1}{2^n}2^{n-1}\frac{1}{3^n}\ (n=1,2,\ldots)$ və $\int\limits_{P_0} f(x)dx=0$ bərabərliklərindən istifadə edin.

2). $\frac{10}{3}$. Göstərin ki,

$$f(x)\sim g(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[1,2],\\ 2x, & x\in[0,1).\end{cases}$$

və $\int\limits_{[0,2]} g(x)dx$ inteqralını hesablayın.

3). $\frac{2}{\pi}$. Göstərin ki,

$$f(x)\sim g(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\in[0,1),\\ \cos\pi x, & x\in[1,2].\end{cases}$$

və $\int\limits_{[0,2]} g(x)dx$ inteqralını hesablayın.

4). Var. Funksiyanın məhdud və ölçülən olduğunu göstərin. 5). Ümumiyyətlə yox. $f(x)=x^2\ (x\in(-\infty,+\infty))$ və $g(x)=x^{-\frac{1}{2}}\ (x\in(0,1])$ funksiyalarına baxın. 6). $4\ln\frac{5}{3}-\frac{1}{2}$. 7). $\frac{3}{8}$. 8). $4-\ln 6$. 9). $\ln(\sqrt{3}+2)-\frac{8}{9}$. 10). $\frac{\pi^2}{4}$. 11). $\frac{\pi^2}{18}-\ln 4(2-\sqrt{3})$. 12). $2\sqrt{2}-2$. 13). $\frac{\pi}{4}$. Göstərin ki, $f(x)\sim\sin^2 x$. 14). $\frac{1}{3}\ln 3-\frac{53}{81}$.

5.3.

1). Xeyr. $\sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)=\sqrt{2n}e^{-\frac{1}{2}}$ bərabərliyindən istifadə edin. 2). Xeyr. $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} f_n(x)=\sqrt{2n}e^{-\frac{1}{2}}$ bərabərliyindən istifadə edin. 3). Xeyr. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ bərabərliyindən istifadə edin. 4). Xeyr. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ bərabərliyindən istifadə edin. 5). Bəli. $\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}$. 6). 0. 7). 0. 8). Bəli. $\varphi(x)=\frac{x}{1+x^4}$. 10). $-\frac{\pi}{4}$. İnteqral altında limitə keçin. 11). Bəli. $\varphi(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$. 12). π. İnteqral altında limitə keçin. 13). Xeyr. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ bərabərliyindən istifadə edin.

14). $E=[0,1]$ parçasında

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right],\\ 0,\ x\in[0,1]\setminus\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right], & \end{cases}\quad (n=1,2,\ldots)$$

ardıcıllığına baxın və $E=[0,1]$ parçasında $\frac{1}{x}$ funksiyasının Lebeq mənada inteqrallanmadığını nəzərə alın. 15). Heç biri çıxmır. 13-ci misala baxın.

5.4.

1). Heç bir qiymətində. 2). Məsələn, $f(x)=1$. 3). $\beta\geq 0$ olarsa, $\alpha<-1$ olanda; $\beta<0$ olarsa, $\alpha+\beta<-1$ olanda. 4). Bəli. 5). Ümumiyyətlə yox. $[1,+\infty)$ aralığında $f(x)=\frac{1}{x^2}$ funksiyasına və $p=\frac{1}{2}$ ədədinə baxın. 6). Bəli.

7). $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq 1,\\ -\frac{1}{|x|}, & |x|>1\end{cases}$ funksiyasına baxın.

8). $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|}, & 0<|x|\leq 1,\\ -\frac{1}{|x|}, & |x|>1,\\ 0, & x=0\end{cases}$ funksiyasına baxın. 9). $+\infty$. 10). π.

5.5.

1). Xeyr. 2). a) Xeyr. b) Bəli. 3). a) Xeyr. b) Bəli. 4). Ümumiyyətlə yox. Bax 3-ci misala. 5). Bəli. Xarakteristik funksiyanın kəsilmə nöqtələri qapalı çoxluğa daxildir. 6). Hər iki mənada inteqrallanır. Kəsilmə nöqtələr çoxluğu P_0-dır. 7) a) Xeyr. Göstərin ki, $x=0$ nöqtəsindən başqa hər yerdə kəsilir. b) Bəli. 8) a) Xeyr. Göstərin ki, $x=1$ nöqtəsindən başqa hər yerdə kəsilir. b) Bəli. 9). Uyğun olaraq: $-\frac{1}{2}, 0, 2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. 10). 0. Göstərin ki, $Q=\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ rasional ədədlər çoxluğundan olan istənilən r_n ədədi üçün $A_n = \{(x,y) \in E : xy = r_n\}$ əyrisinin ölçüsü sıfır olduğu üçün $f(x,y) \sim 0$. 11). 1,5. 12). 4,5. 13). 1,5. 14). 2.

II HİSSƏ

KOMPLEKS DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR NƏZƏRİYYƏSİ

VI Fəsil
GENİŞLƏNMİŞ KOMPLEKS MÜSTƏVİ. RİMAN SFERASI

6.1. Kompleks ədədlər və onlar üzərində əməllər

x və y həqiqi ədədlərinin nizamlı $z=(x,y)$ cütlərindən düzəlmiş çoxluğu C ilə işarə edək. C çoxluğunda aşağıdakı kimi bərabərlik anlayışı, toplama və vurma əməlləri təyin edək:

1. $z_1=(x_1,y_1)$ və $z_2=(x_2,y_2)$ elementləri yalnız və yalnız o zaman bərabər hesab edilir ki, $x_1=y_1$ və $x_2=y_2$ olsun.

2. C çoxluğunun (x_1+x_2, y_1+y_2) elementinə $z_1=(x_1,y_1)$ və $z_2=(x_2,y_2)$ elementlərinin cəmi deyilir və z_1+z_2 kimi işarə edilir.

3. C çoxluğunun $(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$ elementinə $z_1=(x_1,y_1)$ və $z_2=(x_2,y_2)$ elementlərinin hasili deyilir və z_1z_2 kimi işarə edilir.

Beləliklə
$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2),$$
$$(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1).$$

Bərabərlik anlayışı, toplama və vurma əməlləri 1-3 qaydası ilə təyin edilmiş C çoxluğuna kompleks ədədlər çoxluğu, bu çoxluğun hər bir ədədinə isə kompleks ədəd deyilir. $(0,0)$ elementinə C kompleks ədədlər çoxluğunun sıfrı, $(1,0)$ elementinə vahidi, $(0,1)$ elementinə isə xəyali vahidi deyilir və uyğun olaraq

$$0=(0,0),\ 1=(1,0) \text{ və } i=(0,1) \qquad (1)$$

kimi işarə olunur.

$z+z_2=z_1$ bərabərliyini ödəyən z ədədinə z_1 və z_2 ədədlərinin fərqi deyilir və $z=z_1-z_2$ kimi işarə edilir. Xüsusi halda $0-z=-z$ kimi işarə edilir.

$zz_2=z_1$ bərabərliyini ödəyən z ədədinə z_1 və z_2 ədədlərinin nisbəti deyilir və $z=\frac{z_1}{z_2}$ kimi işarə edilir.

(1) işarələmələrindən və kompleks ədədlərin vurulmasından bilavasitə alınır ki,

$$x=(x,0),\ iy=(0,y),\ i^2=-1,\ z=(x,y)=x+iy\ .$$

$x=(x,0)$ şəklində olan kompleks ədədə həqiqi ədəd, $iy=(0,y)$ $(y\neq 0)$ şəklində olan kompleks ədədə sırf (xalis) xəyali ədəd, $z=(x,y)$ kompleks ədədinin $z=(x,y)=x+iy$ təsvirinə isə onun cəbri şəkli deyilir.

x həqiqi ədədinə $z=(x,y)=x+iy$ kompleks ədədinin həqiqi hissəsi deyilir və $x=\operatorname{Re} z$ kimi işarə olunur. y həqiqi ədədinə $z=(x,y)=x+iy$ kompleks ədədinin xəyali hissəsi deyilir və $y=\operatorname{Im} z$ kimi işarə olunur.

$z=x+iy$ və $\bar z=x-iy$ ədədlərinə kompleks qoşma ədədlər deyilir. Aydındır ki, $z\bar z=x^2+y^2$ və z kompleks ədədinin həqiqi olması üçün zəruri və kafi şərt $z=\bar z$ olmasıdır.

Misal. $\frac{1-3i}{2+3i}$ bölmə əməlini yerinə yetirin.

$$\frac{1-3i}{2+3i}=\frac{(1-3i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{2-3i-6i-9}{4+9}=\frac{-7-9i}{13}=-\frac{7}{13}-i\frac{9}{13}.$$

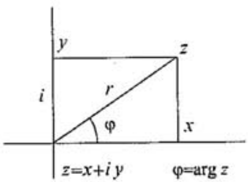
Misal. $z\bar z-z=6+2i$ tənliyini həll edin.

z məchulunu $z=x+iy$ şəklində axtaraq. Onda $x^2+y^2-x-iy=6+2i$ bərabərliyindən alarıq: $y=-2$ və $x^2+y^2-x=6$. Cavab: $z_1=2-2i,\ z_2=-1-2i$.

6.2. Kompleks ədədin həndəsi təsviri, modulu və arqumenti

Tutaq ki, (α) müstəvisində düzbucaqlı xOy koordinat sistemi daxil edilmişdir. Aydındır ki, C kompleks ədədlər çoxluğu ilə (α) müstəvisi arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olar. (α) müstəvisinin $z = x + iy$ kompleks ədədinə uyğun (x, y) nöqtəsinə z kompleks ədədinin təsviri deyilir və o da z hərfi ilə işarə olunur. Ona görə də çox zaman, "z kompleks ədədi" və "z nöqtəsi" terminləri sinonim kimi işlənir. Nöqtələri kompleks ədədlər təsvir edən müstəviyə kompleks müstəvi deyilir. Belə ki, həqiqi ədədlər Ox (həqiqi) oxunun, sırf xəyali ədədlər isə Oy (xəyali) oxunun nöqtələri ilə təsvir olunur.

$z = x + iy$ kompleks ədədinə koordinat oxları üzərində proyeksiyaları x və y olan z vektoru kimi də baxmaq olar (Şəkil 6.1). z vektorunun uzunluğuna z kompleks ədədinin modulu deyilir və $|z|$ kimi işarə olunur. Aydındır ki, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Şəkil 6.1.

Ox oxunun müsbət istiqaməti ilə sıfırdan fərqli z vektoru arasındakı φ bucağına z kompleks ədədinin arqumenti deyilir və $\varphi = \arg z$ kimi işarə olunur (Şəkil 6.1). Bu zaman hesablama saat əqrəbi hərəkətinin əks istiqamətində aparılarsa, bucağın qiyməti müsbət, saat əqrəbi istiqamətində aparılarsa – mənfi olur.

QEYD 1. $z = 0$ ədədi üçün arqument anlayışının mənası yoxdur.

QEYD 2. Sıfırdan fərqli ədədin arqumenti birqiymətli təyin olunmur. Əgər φ bucağı z-in hər hansı arqumenti isə, $\varphi + 2\pi k \ (k \in Z)$ bucaqları da onun arqumentidir.

QEYD 3. Bir çox hallarda birqiymətliliyi təmin etmək üçün ədədin arqumenti olaraq uzunluğu 2π-yə bərabər olan yarımqapalı aralığa düşən bucaq götürülür (məsələn, $(-\pi, \pi]$ və ya $[0, 2\pi)$). Belə aralığa düşən bucağa arqumentin baş qiyməti deyilir.

QEYD 4. Əgər z ədədinin arqumenti üzərinə heç bir məhdudiyyət qoyulmayıbsa, onda arqumentin baş qiyməti

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} \end{cases} (r = |z|) \qquad (2)$$

sistemindən tapılır və z-in arqumenti olaraq $\varphi + 2\pi k \ (k \in Z)$ bucağı götürülür.

Misal. a) Müsbət ədədlərin arqumenti 0 (və ya $2\pi k \ (k \in Z)$)-dır; b) mənfi ədədlərin arqumenti π (və ya $\pi + 2\pi k \ (k \in Z)$)-dır; c) $ib \ (b > 0)$ şəkilli ədədlərin arqumenti $\frac{\pi}{2}$ (və ya $\frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in Z)$)-dır; d)

c) $ib (b < 0)$ şəkilli ədədlərin arqumenti $-\frac{\pi}{2}$ (və ya $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in Z)$)-dır.

(2) düsturlarını $z = x + iy$ kompleks ədədinin cəbri formasında nəzərə alsaq,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (r = |z|) \qquad (3)$$

bərabərliyini almış olarıq. (3) düsturuna z kompleks ədədinin triqonometrik şəkli (forması) deyilir.

Misal. $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ kompleks ədədinin triqonometrik şəklini yazın.

$|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$. $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$ və $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ bərabərliklərindən çıxır ki, $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Beləliklə $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

Aydındır ki, z_1 və z_2 nöqtələri arasındakı məsafə mənfi olmayan $|z_1-z_2|$ ədədinə bərabərdir.

Üçbucaq bərabərsizliyindən, modulun, arqumentin təriflərindən və

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)= \\
&= r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]= \\
&= r_1r(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))
\end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

bərabərliklərindən aşağıdakı teoremlər alınır.

TEOREM 6.1. *İstənilən z_1 və z_2 kompleks ədədləri üçün*

a) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$; *b)* $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$;

bərabərsizlikləri,

c) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$; *d)* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$;

istənilən z kompleks və n natural ədədləri üçün

e) $|z^n|=|z|^n$; *f)* $|z^2|=z\bar{z}$

bərabərlikləri doğrudur.

a) bərabərsizliyindən və riyazi induksiya prinsipindən aşağıdakı nəticə alınır:

NƏTİCƏ. İstənilən $z_1,z_2,...,z_n$ kompleks ədədləri üçün

$$\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\le\sum_{k=1}^{n}|z_k|$$

bərabərsizliyi doğrudur.

TEOREM 6.2. *İstənilən z_1 və z_2 kompleks ədədləri üçün*

i) $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$; *ii)* $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$;

istənilən z kompleks və n natural ədədləri üçün

iii) $\arg z^n=n\arg z$

bərabərlikləri doğrudur.

QEYD. i)- iii) bərabərliklərində sol və sağ tərəflər bir birindən 2π-in misilləri qədər fərqlənə bilər.

Teorem 6.1-in e) və Teorem 6.2-in iii) bəndlərindən aşağıdakı nəticə alınır.

NƏTİCƏ *(Muavr düsturu). İstənilən $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ kompleks və n natural ədədləri üçün*

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

bərabərliyi doğrudur.

Misal. $a=(-1+i\sqrt{3})^{60}$ ədədini cəbri şəkildə göstərin.

$z=-1+i\sqrt{3}$ ədədini $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ triqonometrik şəkildə yazıb Muavr düsturunu tətbiq etsək alarıq:

$$a=\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{60}=2^{60}(\cos 40\pi+\sin 40\pi)=2^{60}.$$

Misal. $\cos3\varphi$-ni $\cos\varphi$, $\sin3\varphi$ ni isə $\sin\varphi$ ilə ifadə edin.

Muavr düsturundan çıxan $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos3\varphi+i\sin3\varphi$ bərabərliyini

$$\cos^3\varphi+i3\cos^2\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi-i\sin^3\varphi=\cos3\varphi+i\sin3\varphi$$

şəklində yazıb, kompleks ədədlərin bərabərliyindən istifadə edərək,

$$\begin{cases}\cos3\varphi=-3\cos\varphi+4\cos^3\varphi,\\ \sin3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi\end{cases}$$

bərabərliklərini almış olarıq.

$\cos\varphi + i\sin\varphi$ kompleks ədədi $e^{i\varphi}$ ilə işarə olunur, yəni $e^{i\varphi}$ funksiyası istənilən həqiqi φ ədədi üçün

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (4)$$

Eyler düsturu ilə təyin olunur. (4) və

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

bərabərliklərindən

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}$$

Eyler düsturları alınır.

(3) və (4) bərabərliklərindən çıxır ki, istənilən $z \neq 0$ kompleks ədədini

$$z = re^{i\varphi} \quad \left(r = |z|, \varphi = \arg z\right) \qquad (5)$$

şəklində göstərmək olar. Kompleks ədədin (5) şəklində yazılışına kompleks ədədin üstlü forması deyilir.

Verilmiş a kompleks və n natural ədədləri üçün

$$z^n = a \qquad (6)$$

tənliyinə baxaq.

TƏRİF 6.1. *(6) tənliyini ödəyən z ədədinə a kompleks ədədinin n-ci dərəcədən kökü deyilir və $\sqrt[n]{a}$ simvolu ilə işarə olunur.*

Aydındır ki, $a = 0$ ədədinin n-ci dərəcədən bütün kökləri sıfra bərabərdir. $a \neq 0$ olduqda aşağıdakı teorem doğrudur.

TEOREM 6.3. *Sıfırdan fərqli a kompleks ədədinin n-ci dərəcədən müxtəlif köklərinin sayı n-ə bərabərdir və həmin köklər*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + \sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \qquad (7)$$
$$k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

düsturu ilə tapılır, burada $\rho = |a|, \theta = \arg a$.

İSBATI. z və a ədədlərini triqonometrik şəkildə yazaq:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ a = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \left(r = |z|, \varphi = \arg z\right).$$

Muavr düsturundan və kompleks ədədlərin bərabərliyindən istifadə edərək

$$r^n = \rho,\ n\varphi = \theta + 2\pi k;\ k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

bərabərliklərini və buradan r və φ üçün

$r = \sqrt[n]{\rho}$ (ρ müsbət ədədinin hesabı kökü) $\varphi = \dfrac{\theta + 2\pi k}{n}$; $k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$

ifadələrini almış olarıq. Bu ifadələrdən (6) tənliyinin köklərinin

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + \sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0, \pm1, \pm2,\ldots \qquad (8)$$

şəklində olduğunu alarıq.

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n},\ \varphi_1 = \frac{\theta + 2\pi}{n},\ \varphi_2 = \frac{\theta + 4\pi}{n},\ \ldots,\ \varphi_{n-1} = \frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n}$$

bucaqları müxtəlif və fərqləri 2π-dən kiçik olduğu üçün (8) düsturu ilə təyin olunan $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ ədədləri müxtəlifdir. $\{0,1,\ldots,n-1\}$ çoxluğuna daxil olmayan hər hansı bir m tam ədədi götürək və onu, qalıqlı bölmə teoremindən istifadə edərək, $m = ns + k$ $(0 \leq k \leq n-1)$ şəklində yazaq.

$$\frac{\theta + 2\pi m}{n} - \frac{\theta + 2\pi k}{n} = 2\pi s$$

olduğundan, $z_m = z_k$ bərabərliyi alınır. Beləliklə (8) düsturu ilə təyin olunan ədədlərdən yalnız $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ ədədləri müxtəlifdir. ◁

Q E Y D 1. (6) tənliyinin (7) düsturu ilə verilən kökləri mərkəzi koordinat başlanğıcında, radiusu $\sqrt[n]{\rho}$ olan çevrə daxilinə çəkilmiş düzgün n bucaqlının təpə nöqtələridir, belə ki, hər növbəti gələn təpə əvvəlkindən $\frac{2\pi}{n}$ bucağı qədər dönmədən alınır.

Q E Y D 2. Əgər p və q ədədləri qarşılıqlı sadə ədədlər olarsa, $z^{\frac{p}{q}}$ $(z \neq 0)$-nın qiymətlər çoxluğu $\sqrt[q]{z^p}$ -in qiymətlər çoxluğu ilə üst-üstə düşür.

M i s a l. $\sqrt[4]{1}$ -in bütün qiymətlərini tapın.

1 ədədini triqonometrik şəkildə yazaq: $1 = \cos 0 + i \sin 0$.

$$\sqrt[4]{1} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4} = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}$$

düsturunda $k = 0,1,2,3$ yazaraq

$$\sqrt[4]{1} = 1, \sqrt[4]{1} = i, \sqrt[4]{1} = -1, \sqrt[4]{1} = -i$$

qiymətlərini almış olarıq.

M i s a l. $\sqrt[3]{-8}$ -in bütün qiymətlərini tapın.

-8 ədədini triqonometrik şəkildə yazaq: $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$.

$$\sqrt[3]{-8} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}$$

düsturunda $k = 0,1,2$ yazaraq

$$\sqrt[3]{-8} = 1 + i\sqrt{3}, \sqrt[3]{-8} = -2, \sqrt[3]{-8} = 1 - i\sqrt{3}$$

qiymətlərini almış olarıq.

M i s a l. $1^{\frac{2}{3}}$ -in bütün qiymətlərini tapın.

$$1^{\frac{2}{3}} = \cos\left(\frac{2}{3}2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}2k\pi\right)$$

və ya

$$1^{\frac{2}{3}} = 1^{\frac{1}{3}} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

düsturunda $k = 0,1,2$ yazaraq

$$1^{\frac{2}{3}} = 1, 1^{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1^{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

qiymətlərini almış olarıq.

6.3. Genişlənmiş kompleks müstəvi. Riman sferası

Bəzi məsələlərdə kompleks ədədlər çoxluğunu kompaktlaşdırmaq əlverişli olur. Bu məqsədlə C -kompleks ədədlər çoxluğuna sonsuzluq adlanan və ∞ simvolu ilə işarə olunan ideal bir element (qeyri-məxsusi kompleks ədəd) əlavə olunur və qapalı (tam) $\bar{C} = C \cup \{\infty\}$ çoxluğuna baxılır. ∞ kompleks ədəd olmadığından, onun üçün arqument, həqiqi və xəyali hissə anlayışlarının mənası yoxdur. Lakin $|\infty| = +\infty$ işarələməsi qəbul olunur. ∞ qeyri-məxsusi kompleks ədədi, kompleks ədəd kimi, cəbri əməllərdə iştirak etməsə də, aşağıdakı şərtləşmələr qəbul olunur: İstənilən a və $\alpha \neq 0$ kompleks ədədləri üçün

a)

$$\infty \pm a = a \pm \infty = \infty, \infty \cdot \alpha = \alpha \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty,$$

$$\frac{a}{\infty} = 0, \frac{\infty}{\alpha} = \infty, \frac{\alpha}{0} = \infty.$$

b) $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

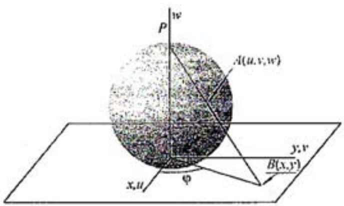
əməllərinin mənası yoxdur.

C çoxluğu ilə (z) kompleks müstəvisi arasında olan birqiymətli uyğunluğu $\overline{C}$ çoxluğuna davam etdirmək məqsədi ilə kompleks müstəviyə sonsuz uzaqlaşmış nöqtə adlanan ideal bir nöqtə əlavə olunur (irəlidə onu da ∞ simvolu ilə işarə edəcəyik) və qeyri-məxsusi kompleks ədəd olan ∞-a həmin sonsuz uzaqlaşmış nöqtə qarşı qoyularaq genişlənmiş kompleks müstəvi təyin edilir.

Bu deyilənləri əyani başa düşmək üçün kompleks ədədlərin sferik təsvrini verək. Bu məqsədlə üçölçülü fəzada u və v oxları (z) kompleks müstəvisinin x və y oxları ilə üst-üstə düşən $Ouvw$ düzbucaqlı koordinat sistemi seçək və koordinat başlanğıcında (z) müstəvisinə toxunan, diametri 1-ə bərabər olan

$$u^2 + v^2 + w^2 = w$$

S-sferasına baxaq (Şəkil 6.2).



Şəkil 6.2. Stereoqrafik proyeksiya(Riman sferası).

(z) kompleks müstəvisinin hər bir $z = x + iy \equiv B(x, y)$ nöqtəsinə S-sferasının, $B(x, y)$ nöqtəsi ilə sferanın $P(0,0,1)$ polyusundan keçən düz xəttin sfera ilə kəsişdiyi $A(u, v, w)$ nöqtəsini, sonsuz uzaqlaşmış nöqtəyə isə S-sferasının $P(0,0,1)$ polyusunu qarşı qoymaqla genişlənmiş kompleks müstəvi ilə S-sferası (Riman sferası) arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmış oluruq (Bu uyğunluğa stereoqrafik proyeksiya deyilir). Beləliklə, stereoqrafik proyeksiya vasitəsi ilə kompleks ədədləri sferanın nöqtələri ilə təsvir etmək olar.

Stereoqrafik proyeksiyanı analitik olaraq aşağıdakı kimi vermək olar: $z = x + iy \equiv B(x, y)$ nöqtəsi verildikdə $A(u, v, w)$ nöqtəsinin koordinatları

$$u = \frac{x}{1+|z|^2},\ v = \frac{y}{1+|z|^2},\ w = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

düsturları ilə, $A(u, v, w)$ nöqtəsi verildikdə isə $z = x + iy \equiv B(x, y)$ nöqtəsinin koordinatları

$$x = \frac{u}{1-w},\ y = \frac{v}{1-w}$$

düsturları ilə tapılır.

M i s a l. $z = -i$ kompleks ədədinin Riman sferası üzərindəki təsvirini verin.

$z = 0$, $y = -1$ ədədlərini

$$u = \frac{x}{1+|z|^2},\ v = \frac{y}{1+|z|^2},\ w = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

düsturlarında nəzərə alsaq, Riman sferası üzərində $z = -i$ kompleks ədədinə uyğun nöqtənin $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nöqtəsi olduğunu almış olarıq.

Qeyd edək ki, stereoqrafik proyeksiya zamanı çevrə çevrəyə (burada düz xətt də sonsuz radiuslu çevrə hesab olunur) inkas olunur və bucaqlar saxlanılır. Aydındır ki, sferanın $P(0,0,1)$ polyusundan keçən çevrəsi (z) kompleks müstəvisinin düz xəttinə inkas olunur.

Sonsuzluqla bağlı olan anlayışları yaxşı başa düşməkdə Riman sferası çox faydalıdır. Məsələn, P-polyus nöqtəsinin ətrafı olaraq sferanın P nöqtəsini özündə saxlayan və w oxuna perpendikulyar olan müstəvinin çevrəsi ilə məhdudlaşmış hissəsini götürsək, onda ∞-ın ətrafı olaraq sferanın bu hissəsinin stereoqrafik obrazını, yəni kompleks müstəvinin $U_R(\infty)=\{z:|z|>R\}$ nöqtələr çoxluğunu başa düşmək lazımdır.

6.4. Kompleks ədədi ardıcıllıqlar. Kompleks hədli ədədi sıralar

Tutaq ki, $\{z_n\}$ kompleks ədədlər ardıcıllığı, a kompleks ədəddir.

TƏRİF 6.2. *Əgər istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $n_0=n_0(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq olarsa ki, $n>n_0$ şərtini ödəyən bütün natural n ədədləri üçün $|z_n-a|<\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənərsə, onda a kompleks ədədinə $\{z_n\}$ ardıcıllığının limiti deyilir. $\{z_n\}$ ardıcıllığının limitinin a ədədinə bərabər olmasını $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$ kimi işarə edirlər.*

TƏRİF 6.3. *Əgər istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $n_0=n_0(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq olarsa ki, $n>n_0$ şərtini ödəyən bütün natural n ədədləri üçün $|z_n|>\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənərsə, yəni $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$ olarsa, onda ∞ qeyri-məxsusi kompleks ədədinə $\{z_n\}$ ardıcıllığının limiti deyilir. $\{z_n\}$ ardıcıllığının limitinin ∞-a bərabər olmasını $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$ kimi işarə edirlər.*

Misal. $z_n=(4+3i)^n$ ardıcıllığının limitini hesablayın.

$\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|(4+3i)^n|=\lim\limits_{n\to\infty}|(4+3i)|^n=\lim\limits_{n\to\infty}5^n=+\infty$ olduğuna görə $\lim\limits_{n\to\infty}(4+3i)^n=\infty$.

Bu təriflərə həndəsi məna vermək üçün nöqtənin ε-ətrafı anlayışını verək.

TƏRİF 6.4. *Tutaq ki, a kompleks ədəd, ε isə müsbət ədəddir.*

$$U_\varepsilon(a)=\{z\in C:|z-a|<\varepsilon\}$$

çoxluğuna, yəni mərkəzi a nöqtəsində radiusu ε olan açıq dairəyə, a nöqtəsinin ε ətrafı deyilir.

TƏRİF 6.5. *Tutaq ki, ε müsbət ədəddir.*

$$U_\varepsilon(\infty)=\{z\in C:|z|>\varepsilon\}$$

çoxluğuna ∞ nöqtəsinin ε ətrafı deyilir.

Tərif 6.2 və Tərif 6.3-i həndəsi terminlər ilə belə ifadə etmək olar.

Əgər a nöqtəsinin (məxsusi və ya qeyri-məxsusi) istənilən ε ətrafı üçün elə $n_0=n_0(\varepsilon)$ nömrəsi tapmaq olarsa ki, $n>n_0$ şərtini ödəyən bütün natural n ədədləri üçün $z_n\in U_\varepsilon(a)$ olarsa, onda a nöqtəsinə $\{z_n\}$ ardıcıllığının limiti deyilir.

TƏRİF 6.6. *Limiti kompleks ədəd olan ardıcıllığa yığılan, limiti olmayan və ya limiti ∞ olan ardıcıllığa isə dağılan ardıcıllıq deyilir.*

Aşağıdakı teorem göstərir ki, kompleks ədədlər ardıcıllığının öyrənilməsində həqiqi ədədlər ardıcıllığı üçün məlum olan teoremlərdən istfadə etmək olar.

TEOREM 6.4. *$\{z_n=x_n+iy_n\}$ ardıcıllığının $a=\alpha+i\beta$ kompleks ədədinə yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqlarının, uyğun olaraq, α və β ədədlərinə yığılan olmasıdır.*

İSBATI. Zəruriliyin isbatı

$$|x_n-\alpha|\le|z_n-a|,\ |y_n-\alpha|\le|z_n-a|$$

bərabərsizliklərindən, kafiliyin isbatı isə

$$|z_n-a|\le|x_n-\alpha|+|y_n-\alpha|$$

bərabərsizliyindən alınır. ◅

Misal. $z_n=e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\right)}$ ardıcıllığının limitini hesablayın.

Eyler düsturundan istifadə edərək bu ardıcıllığı

$$z_n=e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\right)}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=-\sin\frac{1}{2n}-i\cos\frac{1}{2n}=x_n+iy_n$$

şəklində yazaq, burada $x_n=-\sin\dfrac{1}{2n}$, $y_n=-\cos\dfrac{1}{2n}$.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=-\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{2n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=-\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{2n}=-1$$

bərabərliklərini nəzərə alsaq $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\right)} = -i$ bərabərliyini alarıq.

TEOREM 6.5. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |a|$.

İSBATI. $a=\infty$ halı tərifdən, a kompleks ədəd olan hal isə

$$||z_n|-|a|| \le |z_n - a|$$

bərabərsizliyindən alınır. ◁

QEYD. $\{z_n\}$ ardıcıllığının limitinin varlığından, ümumiyyətlə, $\{\arg(z_n)\}$ ardıcıllığının limitinin varlığı çıxmır.

Misal. $\left\{z_n = \dfrac{i^n}{n}\right\}$ ardıcıllığı 0-a yığılır, lakin $\left\{\arg\left(\dfrac{i^n}{n}\right)\right\}$ ardıcıllığının xüsusi limitlər çoxluğu $\left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ $(\arg z \in [0,2\pi))$ olduğu üçün onun limiti yoxdur.

Aşağıdakı kafi şərt doğrudur.

TEOREM 6.6. *Tutaq ki,* $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ $(r_n = |z_n|, \varphi_n = \arg z_n)$. *Əgər* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \rho$ *və* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \theta$ *olarsa, onda* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \rho e^{i\theta}$.

İSBATI. $\sin x$ və $\cos x$ funksiyalarının kəsilməzliyini nəzərə alsaq,

$$z_n = r_n \cos\varphi_n + i r_n \sin\varphi_n$$

bərabərliyinə Teorem 6.4-i tətbiq edib, Eyler düsturundan istifadə etsək teoremin isbatını almış olarıq. ◁

SƏRBƏST İŞ. Göstərin ki, əgər $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ $(a\neq 0)$ olarsa, onda z_n ədədlərinin arqumentlərini elə seçmək olar ki, $\{\arg(z_n)\}$ ardıcıllığının limiti a-nın arqumentinə bərabər olar.

Həqiqi ədədlər ardıcıllığı üçün məlum olan teoremlərdən və Teorem 6.4-dən aşağıdakı teoremlər alınır:

TEOREM 6.7. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = b$ $(a, b \in C)$. *Onda*

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm \zeta_n) = a \pm b,\ \lim_{n\to\infty}(z_n\zeta_n) = ab,\ \lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{\zeta_n} = \frac{a}{b}\ (b\neq 0)$$

bərabərlikləri doğrudur.

TEOREM 6.8 *(Koşi meyarı).* $\{z_n\}$ *ardıcıllığının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in N, \forall n>n_0, \forall m>n_0 \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$$

və ya

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in N, \forall n>n_0, \forall p\in N \Rightarrow |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

şərtinin ödənməsidir.

TEOREM 6.9 *(Veyerştrass). İstənilən məhdud ardıcıllıqdan yığılan alt ardıcıllıq ayırmaq olar.*

Qeyd edək ki, $\exists M>0, \forall n\in N \Rightarrow |z_n| \le M$ şərti ödənərsə, onda $\{z_n\}$ ardıcıllığına məhdud ardıcıllıq deyilir.

TEOREM 6.9. *Yığılan ardıcıllıq məhduddur və onun birdən artıq limiti ola bilməz.*

İndi isə kompleks hədli sıralar haqqında bəzi məlumatları verək.

Tutaq ki, $\{z_n\}$ kompleks ədədlər ardıcıllığıdır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \qquad (9)$$

ifadəsinə kompleks hədli sıra, z_n $(n=1,2,\ldots)$ ədədlərinə isə sıranın hədləri deyilir.

TƏRİF 6.7. *Əgər (9) sırasının* $\left\{s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right\}$*-xüsusi cəmlər ardıcıllığı yığılırsa, onda (9) sırasına yığılan sıra deyilir. Xüsusi cəmlər ardıcıllığının* $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ *limitinə (9) sırasının cəmi deyilir və*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \equiv z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = s$$

kimi işarə olunur.

Bilavasitə tərifdən çıxır ki, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Bu şərtə sıraların yığılması üçün zəruri şərt deyilir.

Əgər xüsusi cəmlər ardıcıllığı dağılırsa, onda (9) sırasına dağılan sıra deyilir.

M i s a l. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ sırası $|q| \geq 1$ olduqda dağılır, çünki zəruri şərt ödənmir.

Kompleks ədədlər ardıcıllığı üçün isbat olunmuş (Teorem 6.4, 6.7,6.8) teoremlərdən aşağıdakı teoremlər alınır:

TEOREM 6.10. *Kompleks hədli (9) sırasının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt onun $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ hədlərinin həqiqi və xəyalı hissələrindən düzəldilmiş $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ və $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ sıralarının eyni zamanda yığılan olmasıdır. (9) sırasının cəmi üçün*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sigma + i\tau$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\sigma = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\tau = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

TEOREM 6.11. *Əgər $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ və $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \zeta_n$ sıraları yığılandırsa, onda*

1) istənilən a kompleks ədədi üçün $\sum\limits_{n=1}^{\infty} az_n$ sırası yığılır və

$$\sum_{n=1}^{\infty} az_n = a\sum_{n=1}^{\infty} z_n;$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n \pm \zeta_n)$ sıraları yığılır və

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm \zeta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n$$

bərabərlikləri doğrudur.

TEOREM 6.12 *(sıralar üçün Koşi meyarı). Kompleks hədli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ sırasının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N, \forall n > n_0, \forall p \in N \Rightarrow |s_{n+p} - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| < \varepsilon$$

şərtinin ödənməsidir.

TƏRİF 6.8. *Əgər $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$ şərti ödənərsə $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ sırasına mütləq (şərtsiz) yığılan sıra deyilir.*

Aydındır ki, mütləq yığılan sıra yığılır.

M i s a l. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ sırası $|q| < 1$ olduqda mütləq yığılır.

Kompleks hədli sıraların mütləq yığılmasını tədqiq edərkən $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ sırasına (və ya $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|$ $(x_n = \operatorname{Re} z_n, y_n = \operatorname{Im} z_n)$ sıralarının hər birinə) müsbət hədli sıralar üçün məlum olan əlamətləri, məsələn, Koşi və ya Dalamber əlamətlərini tətbiq etmək olar.

SƏRBƏST İŞ. Göstərin ki, aşağıdakı şərtlərdən hər hansı biri ödənərsə, onda kompleks hədli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ sırası mütləq yığılar:

a) $|z_n| < M\rho^n$ $(n > n_0)$, burada $M < +\infty, 0 < \rho < 1$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \rho < 1$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}=\rho<1$.

d) $|z_n|<Mn^{-\alpha}\ (n>n_0)$, burada $M<+\infty, \alpha>1$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(1-\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right)\right]=\beta>1$.

f) $|z_n|<M\dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}\ (n>n_0)$, burada $M<+\infty, \alpha>1$.

TƏRİF 6.9. *Əgər* $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n\right|<+\infty$ *və* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|=+\infty$ *şərtləri ödənərsə* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ *sırasına şərti yığılan sıra deyilir.*

Misal. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ şərti yığılan sıradır. Bu sıranın yığılan olması dəyişən işarəli sıralar haqqında Leybnis teoremindən çıxır. Bu sıranın hədlərinin modullarından düzəldilmiş $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ sıra dağılan harmonik sıradır.

TEOREM 6.13. *Tutaq ki,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ *və* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\zeta_n$ *sıraları mütləq yığılır və onların cəmi, uyğun olaraq,* s *və* σ *ədədləridir. Onda onların hasili olan*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}z_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(z_1\zeta_n+z_2\zeta_{n-1}+z_3\zeta_{n-2}+\ldots+z_n\zeta_1)$$

sırası da mütləq yığılır və onun cəmi $s\cdot\sigma$ *ədədinə bərabərdir.*

Qeyd edək ki, bu teorem şərti yığılan sıralar üçün (əlavə şərtlər qoyulmazsa!) doğru deyil.

Misal. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots$ və

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$$

şərti yığılan sıraların vurulmasından alınan sıranın n-ci həddi

$$(-1)^n\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\frac{1}{n-2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]$$

üçün zəruri şərt ödənmədiyindən hasil sıra yığılan deyildir.

6.5. Çalışmalar

6.1.

Aşağıdakı kompleks ədədlərin həqiqi və xəyali hissələrini tapın.

1). $z=\dfrac{1}{1-i}$. 2). $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$. 3). $z=\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

4). $z=\left(\dfrac{2+i^5}{1+i^{19}}\right)^2$. 5). $z=\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

Lazımı əməliyyatları yerinə yetirərək, verilmiş kompleks ədədləri cəbri şəkildə yazın.

6). $i^3+i^{13}+i^{23}+\ldots+i^{53}$. 7). $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{100}$. 8). $(2i-1)^4-(2i+1)^4$.

9). i^{2018}. 10). $(1+i)^{10}$. 11). $\dfrac{(2+3i)(5-i)}{2+i}$.

12). $\dfrac{8(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)}{16(\cos(-50^\circ)+i\sin(-50^\circ))}$. 13). $\dfrac{(1+i)^{28}}{(1-i)^{24}-i(1+i)^{24}}$.

14). $(1-i)(-3+2i)$. 15). $\dfrac{1+2i}{3-i}+(1-i)^2$. 16). $\dfrac{2+3i}{4-2i}+\dfrac{1-3i}{2i}$.

17). $\dfrac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}$.

18). x və y-in hansı həqiqi qiymətlərində $z_1 = x^2 + 4y - iy$ və $z_2 = 4 + y - \dfrac{2}{i} - ix^2$ ədədləri kompleks qoşma olar?

19). Kvadratı qoşmasına bərabər olan kompleks ədədləri tapın.

20). $z^2 + 8z + 41 = 0$ tənliyini həll edin.

21). $\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6 \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8 \end{cases}$ sisteminin həqiqi köklərini tapın.

22). $z^2 + \bar{z} = 0$ tənliyini həll edin.

23). $(1+i)x + (1-i)y = 3 - i$ tənliyinin həqiqi köklərini tapın.

24). $x + y + ixy = i$ tənliyinin həqiqi köklərini tapın.

25). x və y-in hansı həqiqi qiymətlərində $z_1 = x + 2i$ və $z_2 = 4 + i\sqrt{3}y$ kompleks ədədləri a) bərabər olar? b) qoşma olar?

Aşağıdakı şərtləri ödəyən bütün z nöqtələrini kompleks müstəvidə təsvir edin.

26). $-2 \le \operatorname{Re} z \le \dfrac{5}{2}$. 27). $|\operatorname{Re} z| \le 2, |\operatorname{Im} z| < 1$. 28). $-\sqrt{3} \le \operatorname{Im} z \le 0$.

29). $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$. 30). $\operatorname{Im} z^2 > 2$.

Aşağıdakı şərtləri ödəyən bütün z nöqtələrini tapın və kompleks müstəvidə təsvir edin.

31). $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$. 32). $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$. 33). $\operatorname{Im} \dfrac{z}{1+i} = 0$. 34). $\operatorname{Re} \dfrac{z}{i} = 0$.

35). $z = 2(\cos t + i \sin t), 0 \le t \le \pi$..

6.2.

Aşağıdakı kompleks ədədlərin modulunu və $(-\pi, \pi]$ aralığına düşən arqumentini tapın.

1). $z = -5$. 2). $z = 2{,}3i$. 3). $z = -1 - i$. 4). $z = 3 - i$.

5). $z = \dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$. 6). $z = \dfrac{\left(\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right)^4}{\left(\sin \dfrac{3\pi}{10} + i \cos \dfrac{7\pi}{10}\right)^2}$. 7). $z = 4 + 3i$.

8). $z = -2 - 2\sqrt{3}i$. 9). $z = -\cos \dfrac{\pi}{5} + i \sin \dfrac{\pi}{5}$.

10). $z = 1 + i^{123}$. 11). $z = \dfrac{1-i}{1+i}$. 12). $z = (1+i)^8 \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-6}$.

Aşağıdakı kompleks ədədləri triqonometrik və üstlü şəkildə yazın.

13). $z = 2 + 2i$. 14). $z = -1 + i\sqrt{3}$. 15). $z = -5i$.

16). $z = -3\left(\cos \dfrac{\pi}{5} - i \sin \dfrac{\pi}{5}\right)$. 17). $z = -2$. 18). $z = 2i$.

19). $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$. 20). $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Aşağıdakı əməlləri yerinə yetirin.

21). $\left(\sqrt{2} e^{\frac{2\pi}{9} i}\right)^3$. 22). $3e^{\frac{\pi}{5} i} 4e^{\frac{4\pi}{5} i}$. 23). $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{60}$.

24). $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{40}$. 25). $(2 - 2i)^7$. 26). $\left(\sqrt{3} - 3i\right)^6$. 27). $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$.

Aşağıdakı kompleks ədədlərin göstərilən dərəcədən bütün köklərini tapın.

28). $\sqrt[3]{-i}$. 29). $\sqrt[4]{8 - i8\sqrt{3}}$. 30). $\sqrt[4]{-16}$. 31). $\sqrt[5]{1+i}$. 32). $\sqrt[4]{-1}$.

33). $\sqrt{i}$. 34). $\sqrt[3]{i}$. 35). $\sqrt[4]{1}$. 36). $\sqrt{2 - i2\sqrt{3}}$.

Aşağıdakı tənlikləri həll edin.

37). $|z| - 3z = -12i$. 38). $|\bar{z}| - 2z = 2i - 1$.

39). $z^{n-1} = \bar{z} \quad (z \ne 0, n \in N)$. 40). $z^3 = z$. 41). $|z| - z = 1 + 2i$.

Aşağıdakı şərtləri ödəyən nöqtələri kompleks müstəvidə həndəsi təsvir edin.

42). $|z| = 2$. 43). $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$. 44). $|z| > 2$. 45). $-\dfrac{\pi}{4} < \arg z \le 0$.

46). $|z-5i|=8$. 47). $\begin{cases}|z+i|<1,\\ |z+1|\geq 1\end{cases}$. 48). $\begin{cases}|z|\leq 1,\\ \dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3}{4}\pi\end{cases}$.

49). $\begin{cases}1\leq |z|\leq 4,\\ |\operatorname{Re} z|\geq \sqrt{2},\\ |\operatorname{Im} z|\leq 0{,}7\end{cases}$.

6.3.

Aşağıdakı kompleks ədədləri Riman sferası üzərində təsvir edin.

1). $z=1$. 2). $z=-1$. 3). $z=i$. 4). $z=-i$. 5). $z=1+i$.

6). $\arg z=\alpha$ şüasının Riman sferası üzərindəki proyeksiyasını tapın.

7). z və $\bar{z}$ nöqtələrinə uyğun olan nöqtələrin sfera üzərində qarşılıqlı yerləşmələri necədir?

8). Xəyali oxa nəzərən simmetrik olan nöqtələrə uyğun olan nöqtələrin sfera üzərində qarşılıqlı yerləşmələri necədir?

9). z və $-z$ nöqtələrinə uyğun olan nöqtələrin sfera üzərində qarşılıqlı yerləşmələri necədir?

10). $\operatorname{Re} z>0$ oblastına Riman sferasının hansı oblastı uyğundur?

11). $\operatorname{Im} z>0$ oblastına Riman sferasının hansı oblastı uyğundur?

12). $\operatorname{Re} z=K$ xəttinə Riman sferasının hansı əyrisi uyğundur?

6.4.

Aşağıdakı ardıcıllıqların limitlərini tapın.

1). $z_n=\dfrac{n+1}{n}+i\dfrac{n-1}{n}$. 2). $z_n=\dfrac{in+1}{1-ni}$. 3). $z_n=\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$.

4). $z_n=\dfrac{n}{2n+1}+i\dfrac{n}{n+1}$. 5). $z_n=\dfrac{(n+i)^2}{2n^2i}$.

6). $z_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{n}\right)$. 7). $z_n=\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$ $(|a|<1)$.

8). $z_n=\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$ $(|a|>1)$. 9). $z_n=\dfrac{(2i)^n-1}{(2i)^n}$. 10). $z_n=\dfrac{1+2n^2+in^2}{n^2+i}$.

11). $z_n=\left(\dfrac{2+i}{5}\right)^n$. 12). $z_n=i^n$. 13). $z_n=\left(\dfrac{e^{in}}{2}\right)^n$. 14). $z_n=\arg\left(-1+\dfrac{i^n}{n}\right)$

a kompleks parametrinin hansı qiymətlərində aşağıdakı ardıcıllıqların (sonlu və ya sonsuz!) limiti vardır?

15). $z_n=a^n$. 16). $z_n=\dfrac{a^n}{n}$. 17). $z_n=na^n$. 18). $z_n=\dfrac{a^n}{1+a^n}$.

19). $z_n=\dfrac{e^{in}}{i^n n^a}$.

Aşağıdakı sıraların yığılmasını araşdırın.

20). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n$. 21). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(1+i+ni)}{n(n+1)}$. 22). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}+i}$.

23). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(3+4i)^n}$. 24). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[i]{n}}{n^2+i2\sqrt{n}}$. 25). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}+i}$.

26). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+3i}$. 27). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{in}}{n^3}$. 28). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5in^2+i^n}{3n^2-2ni}$. 29). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2i-ni^{2n}}{n^2+1}$.

30). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$. 31). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos in}{2^n}$.

Göstərin ki, aşağıdakı sıralar mütləq yığılandır.

32). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(in)^n}{3^n n!}$. 33). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^{3n}}{i+n^2}$. 34). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(3i)^n}$. 35). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{in^2}}{n!}$.

36). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^n n!}{n^n}$. 37). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2i)^{n^2}}$. 38). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(in)^n}{(2n)!}$. 39). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(in)^n}{(n!)^2}$.

40). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(2i)^n}$. 41). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{(5in-4)(4in+1)}$.

Aşağıdakı sıraların cəmini tapın.

42). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left(3^{n-1}+i2^{n-1}\right)}{6^{n-1}}$. 43). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left(3^{n-1}+i5^{n-1}\right)}{15^{n-1}}$. 44). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n$.

45). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}+i\frac{1}{n(n+3)}\right)$. 46). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{9^n}+i\frac{n}{7^n}\right)$.

47). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}+i\frac{1}{2^n}\right)$. 48). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(2n-1)+in]}{2^n}$.

6.6. Cavablar və göstərişlər

6.1.

1). $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}, \operatorname{Im} z=\frac{1}{2}$. 2). $\operatorname{Re} z=0, \operatorname{Im} z=1$. 3). $\operatorname{Re} z=-1, \operatorname{Im} z=0$. 4). $\operatorname{Re} z=-2, \operatorname{Im} z=\frac{3}{2}$. 5). $\operatorname{Re} z=2, \operatorname{Im} z=0$. 6). 0. 7). -1. 8). $48i$. 9). -1. 10). $32i$. 11). $\frac{39}{5}+i\frac{13}{5}$. 12). $i\frac{1}{2}$. 13). $-2-2i$.

14). $-1+5i$. 15). $\frac{1}{10}-i\frac{13}{10}$. 16). $-\frac{7}{5}+i\frac{3}{10}$. 17). $\frac{1}{4}-i\frac{1}{4}$. 18). $(1;1)$ və $(-1;1)$. 19). $z_1=0; z_2=1; z_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20). $z_1=-4+5i; z_2=-4-5i$. 21). $x=\frac{3}{2}; y=\frac{3}{2}$. 22). $z_1=0; z_2=-1;$ $z_{3,4}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 23). $x=1; y=2$. 24). $\varnothing$. 25). a) $x=4; y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $x=4; y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 31). Mərkəzi $(0;-1)$ nöqtəsində radiusu 1 olan çevrə. 32). Mərkəzi $(0;0)$ nöqtəsində radiusu 1 olan çevrə. 33). $x-y=0$. 34). $y=0$. 35). Mərkəzi $(0;0)$ nöqtəsində radiusu 2 olan çevrənin yuxarı yarım müstəvidə qalan hissəsi.

6.2.

1). $5;\ \pi$. 2). $2{,}3;\ \frac{\pi}{2}$. 3). $\sqrt{2};\ -\frac{3\pi}{4}$. 4). $\sqrt{10};\ -arctg\frac{1}{3}$. 5). 0; arqument təyin olunmayıb. 6). $64;\ -\frac{4}{15}\pi$. 7). $5;\ arctg\frac{3}{4}$.

8). $4;\ \frac{2\pi}{3}$. 9). $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$. 10). $\sqrt{2};\ -\frac{\pi}{4}$. 11). $1;\ -\frac{\pi}{2}$.

12). $\frac{1}{4};\ 0$. 13). $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

14). $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

15). $5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=5e^{-i\frac{\pi}{2}}$. 16). $3\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)=3e^{i\frac{4\pi}{5}}$. 17). $2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{i\pi}$. 18). $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

19). $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

20). $2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. 21). $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$. 22). -12.

23). 2^{60}. 24). $-2^{19}\left(1+i\sqrt{3}\right)$. 25). $2^{10}(1+i)$. 26). $\left(\sqrt{3}-3i\right)^6$. 27). 1.

28). $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i; i$. 29). $2e^{\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k\right)i}$, $k=0,1,2,3$. 30). $2e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\pi k\right)i}$, $k=0,1,2,3$.

31). $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi+8\pi k}{20}+i\sin\frac{\pi+8\pi k}{20}\right)$, $k=0,1,2,3,4$. 32). $\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$.

33). $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. 34). $\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{3}+i\right), -i$. 35). $\pm 1; \pm i$. 36). $\pm\left(\sqrt{3}-i\right)$.

37). $z=\sqrt{2}+4i$. 38). $z=\frac{4}{3}-i$. 39). $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k=0,1,\ldots,n-1$.

40). $z_1=0, z_2=1, z_3=-1, z_4=i, z_5=-i$. 41). $z=\frac{3}{2}-2i$.

6.3.

1). $\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$. 2). $\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$. 3). $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. 4). $\left(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

5). $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

6). $\arg z=\alpha$ və Ow xətlərindən keçən müstəvi ilə sferanın kəsişməsindən alınan yarım çevrə. 7). uOw müstəvisinə nəzərən simmetrikdirlər. 8). vOw müstəvisinə nəzərən simmetrikdirlər. 9). Ow oxuna nəzərən simmetrkdirlər. 10). $u>0$ yarım müstəvisi. 11). $v>0$ yarım müstəvisi. 12). $u+Kw-K=0$ çevrəsi.

6.4.

1). $1+i$. 2). -1. 3). 0. 4). $\frac{1}{2}+i$. 5). $-\frac{i}{2}$. 6). $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. 7). 0. 8). 0. 9). 0. 10). $2+i$. 11). 0. 12). Limiti yoxdur. 13). 0. 14). Limiti yoxdur. 15). $|a|<1, |a|>1$ və $a=1$ olduqda. 16). Bütün a-lar üçün. 17). Bütün a-lar üçün. 18). $|a|<1, |a|>1$ və $a=1$ olduqda. 19). $\operatorname{Re} a\neq 0$ olduqda.

20). Dağılır. Göstərin ki, zəruri şərt ödənmir. 21). Yığılır. Həqiqi və xəyali hissələrinə Leybnis teoremini tətbiq edin. 22). Dağılır. Göstərin ki, həqiqi hissə dağılır. 23). Mütləq yığılır. 24). Mütləq yığılır. 25). Dağılır. Göstərin ki, zəruri şərt ödənmir. 26). Dağılır. 27). Mütləq yığılır. 28). Dağılır. Göstərin ki, zəruri şərt ödənmir. 29). Yığılır. 30). Şərti yığılır. 31). Dağılır. 42). $4+\frac{9}{4}i$. 43). $\frac{25}{16}+i\frac{9}{4}$. 44). $\frac{4}{5}+i\frac{2}{5}$.

45). $1+\frac{11}{18}i$. 46). $\frac{9}{64}+i\frac{7}{36}$. 47). $e+2i$. 48). $3+2i$.

VII F ə s i l
KOMPLEKS DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYANIN LİMİTİ, KƏSİLMƏZLİYİ VƏ TÖRƏMƏSİ. KOŞİ-RİMAN ŞƏRTLƏRİ

7.1. Əyri və oblast

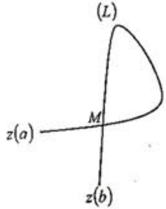
Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan, həqiqi qiymətli, $x(t)$ və $y(t)$ funksiyaları verilmişdir. t parametri a-dan başlayıb b-yə doğru artan istiqamətdə dəyişdikdə, $(x(t),y(t))$ cütü $z(a)=(x(a),y(a))$ nöqtəsindən başlayaraq $z(b)=(x(b),y(b))$ nöqtəsinə doğru hərəkət edərək, kompleks müstəvidə müəyyən nizamlı çoxluq təsvir edir. Bu nizamlı çoxluğa müsbət oriyentasiyalı (istiqamətli) (L) əyrisi (konturu) deyilir.

$$z(t)=(x(t),y(t))=x(t)+iy(t),\ a\le t\le b$$

tənliyinə isə (L) əyrisinin parametrik tənliyi deyilir. (L) əyrisi ilə bu əyrinin keçdiyi

$$M_L=\{z\in C: z=x(t)+iy(t),\ a\le t\le b\}$$

çoxluğunu qarışdırmaq olmaz. Əvvəla ona görə ki, (L) əyrisi nizamlanmış nöqtələr çoxluğudur. İkincisi ona görə ki, (L) əyrisinin müxtəlif nöqtələrinə M_L çoxluğunun eyni bir nöqtəsi uyğun ola bilər (Şəkil7.1).



Səkil 7.1.

Şəkildən göründüyü kimi M nöqtəsində (L) əyrisi öz-özünü kəsir. (L) əyrisinin t parametrinin iki müxtəlif qiymətinə uyğun iki müxtəlif nöqtəsinə M_L çoxluğunun eyni bir M nöqtəsi uyğundur. Əgər M_L çoxluğu üzrə $z(b)$ nöqtəsindən başlayıb $z(a)$ nöqtəsinə doğru hərəkət etsək, onda yeni bir (L^-) əyrisi almış olarıq. M_L çoxluğu hər iki əyri üçün eyni olsa da onlar əks oriyentasiyalı müxtəlif əyrilərdir.

T ə r i f 7.1. *Əgər (L) əyrisi öz-özünü kəsmirsə, yəni onun elə $z(t)=(x(t),y(t))=x(t)+iy(t),\ a\le t\le b$ parametrik tənliyini tapmaq olarsa ki, $[a,b)$ aralığından olan, bir birindən fərqli, istənilən t_1,t_2 ədədləri üçün $z(t_1)\ne z(t_2)$ şərti ödənsin, onda ona sadə əyri deyilir.*

T ə r i f 7.2. *Başlanğıcı ilə sonu üst-üstə düşən əyriyə qapalı əyri deyilir.*

T ə r i f 7.3. *Əgər (L) əyrisinin elə $z(t)=(x(t),y(t))=x(t)+iy(t),\ a\le t\le b$ parametrik tənliyini tapmaq olarsa ki, $z(t)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında sıfırdan fərqli ($\forall t\in[a,b]$, $|z'(t)|^2=x'^2(t)+y'^2(t)>0$) kəsilməz törəməsi olsun, onda ona hamar əyri deyilir. Əgər (L) əyrisi qapalı olarsa, əlavə olaraq $z'(a)=z'(b)$ şərti də tələb olunur.*

T ə r i f 7.4. *Əgər (L) əyrisini sonlu sayda hamar hissələrə bölmək olarsa, ona hissə-hissə hamar əyri deyilir.*

Q e y d. Əyrinin parametrik tənliyində $[a,b]$ parçası istənilən (açıq, yarım qapalı, məhdud, qeyri-məhdud) aralıqla əvəz oluna bilər.


Şəkil 7.4.

Şəkil 7.3.

Şəkil 7.2.

M i s a l. $z(t)=\cos t\ (\pi\le t\le 2\pi)$ əyrisi, $z=-1$-nöqtəsindən $z=1$ nöqtəsinə yönəlmiş $[-1,1]$ parçasıdır (Şəkil 7.2).

M i s a l. $z(t)=\cos t\ (-\pi\le t\le\pi)$ əyrisi, $(-1,1)$ intervalının hər bir nöqtəsində öz-özünü kəsən qapalı əyridir (Şəkil 7.3). Bu əyri $z=-1$-

nöqtəsindən başlayaraq $[-1,1]$ parçasının bütün nöqtələrindən keçərək $z=1$ nöqtəsinə çatır və yenidən $z=1$ nöqtəsindən həmin parça üzrə $z=-1$ son nöqtəsinə qayıdır.

M i s a l. $z(t)=\cos t+i\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$. Bu $z=1$ nöqtəsindən başlayıb, mərkəzi $z=0$ nöqtəsində radiusu $r=1$ olan çevrənin nöqtələrini saat əqrəbinin əks istiqamətində keçərək yenidən $z=1$ nöqtəsinə qayıdan sadə qapalı əyridir (Şəkil 7.4).

M i s a l. $z(t)=\cos t+i\sin t\ (0\le t\le 4\pi)$. Bu $z=1$ nöqtəsindən başlayıb, mərkəzi $z=0$ nöqtəsində radiusu $r=1$ olan çevrənin nöqtələrini saat əqrəbinin əks istiqamətində iki dəfə keçərək yenidən $z=1$ nöqtəsinə qayıdan öz-özünü kəsən qapalı əyridir.

Tutaq ki, G kompleks ədədlər çoxluğudur.

T ə r i f 7.5. *Əgər elə müsbət ε ədədi tapmaq olarsa ki, $a\in G$ nöqtəsinin $U_\varepsilon(a)=\{z\in C:|z-a|<\varepsilon\}$ ε ətrafı tamamilə G çoxluğuna daxil olsun, onda a nöqtəsinə G çoxluğunun daxili nöqtəsi deyilir.*

T ə r i f 7.6. *Əgər G çoxluğunun bütün nöqtələri daxili nöqtə olarsa, onda ona açıq çoxluq deyilir.*

S ə r b ə s t i ş 1. Göstərin ki, aşağıdakı çoxluqların hər biri açıq çoxluqdur.

a) $G=\{z\in C:|z-a|<R\ \ (R>0,a\in C)\}$. b) $G=\{z\in C:\operatorname{Im}z>0\}$.
c) $G=C$. d) $G=\{z\in C:|z-a|<R\ \ (R>0,a\in C)\}\setminus\{a\}$. e) $G=C\setminus[-1,1]$.
f) $G=\{z\in C:r<|z-a|<R\ \ (0<r<R,a\in C)\}$.

T ə r i f 7.7. *Əgər G çoxluğunun istənilən iki nöqtəsini tamamilə G çoxluğuna daxil olan kəsilməz əyri ilə (xüsusi halda sınıq xətlə) birləşdirmək olarsa, onda G çoxluğuna rabitəli çoxluq deyilir.*

T ə r i f 7.8. *Rabitəli açıq G çoxluğuna oblast deyilir.*

S ə r b ə s t i ş 2. Göstərin ki, Sərbəst iş.1-dəki çoxluqların hamısı oblastdır.

T ə r i f 7.9. *Əgər G oblastına daxil olan istənilən qapalı sadə əyrinin (Jordan əyrisinin) daxili də G oblastına daxil olarsa, onda G oblastına birrabitəli oblast deyilir. Bu xassəyə malik olmayan oblasta isə çoxrabitəli oblast deyilir.*

S ə r b ə s t i ş 3. Göstərin ki, a) $G=\{z\in C:|z-a|<R\ \ (R>0,a\in C)\}$, b) $G=\{z\in C:\operatorname{Im}z>0\}$. c) $G=C$. d) $G=\{zx+iy\in C:\alpha<x<\beta,\gamma<y<\delta\}$ oblastları birrabitəlidir, lakin e) $G=\{z\in C:|z-a|<R\ \ (R>0,a\in C)\}\setminus\{a\}$. f) $G=C\setminus[-1,1]$. g) $G=\{z\in C:r<|z-a|<R\ \ (0<r<R,a\in C)\}$ oblastları isə çoxrabitəlidir.

T ə r i f 7.10. *Əgər a nöqtəsinin istənilən $U_\varepsilon(a)=\{z\in C:|z-a|<\varepsilon\}$ ε ətrafında həm G çoxluğuna daxil olan həm də G çoxluğuna daxil olmayan nöqtə olarsa, onda a nöqtəsinə G çoxluğunun sərhəd nöqtəsi deyilir.*

Aydındır ki, oblastın sərhəd nöqtəsi özünə daxil deyil.

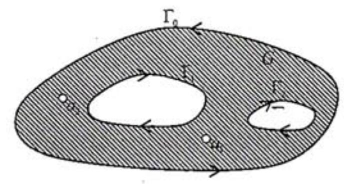
T ə r i f 7.11. *G çoxluğunun sərhəd nöqtələri çoxluğuna onun sərhəddi deyilir və (∂G) kimi işarə edilir.*

Aydındır ki, (∂G) qapalı çoxluqdur.

Əgər G Γ_0, Γ_1 və Γ_2 əyriləri ilə hüdudlanmış çoxluqdan a_1 və a_2 nöqtələrini atandan sonra alınan oblast olarsa (Şəkil 7.5), onda o sərhəddi $(\partial G)=\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\{a_1,a_2\}$ olan 5 - rabitəli oblast olacaqdır.

T ə r i f 7.12. *G oblastı ilə onun (∂G) sərhəddinin birləşməsindən alınan $G\cup\partial G$ çoxluğuna qapalı oblast deyilir və $\bar{G}$ kimi işarə olunur.*

Ş ə r t l ə ş m ə l ə r: 1). Biz sərhəddi bir neçə hissə-hissə hamar əyridən və təcrid olunmuş nöqtələrdən ibarət oblastlara baxacağıq. 2). Hesab edəcəyik ki, G oblastının sərhəd əyriləri (konturları) elə istiqamətlənmişdir ki, bu istiqamətdə onlar üzərində hərəkət etdikdə G oblastı müşahidəçiyə nəzərən solda qalır (Şəkil 7.5). Bu istiqamətə müsbət istiqamət deyəcəyik.



Şəkil 7.5.

Sonda, dəfələrlə istifadə edəcəyimiz, faydalı bir lemmanı qeyd edək.

L E M M A 7.1 *(Borel). Qapalı məhdud* $\overline{G}$ *oblastının sonsuz* $\{U_{\rho_z}(z)\}_{z\in\overline{G}}$ *ətraflarla örtüyündən sonlu* $\{U_{\rho_{z_k}}(z_k)\}_{k=1}^{l}$ *örtüyünü ayırmaq olar.*

Qeyd edək ki, $A\subset\bigcup_{B\in\Omega}B$ şərtini ödəyən Ω çoxluqlar sisteminə A çoxluğunun örtüyü deyilir.

7.2. Kompleks dəyişənli funksiya, onun limiti və kəsilməzliyi

T Ə R İ F 7.13. *Əgər E kompleks ədədlər çoxluğunun hər bir z ədədinə, müəyyən qayda ilə, bir və ya bir neçə w kompleks ədədi qarşı qoyularsa, onda deyirlər ki, E çoxluğunda kompleks dəyişənli kompleks qiymətli $w=f(z)$ funksiyası təyin olunmuşdur. Əgər hər bir z-ə qarşı yeganə w kompleks ədədi qarşı qoyularsa, onda $w=f(z)$ funksiyasına birqiymətli funksiya deyilir. Əgər hər hansı bir z-ə qarşı birdən artıq w kompleks ədədi qarşı qoyularsa, onda $w=f(z)$ funksiyasına çoxqiymətli funksiya deyilir.*

M i s a l. a) $w=z^2$, $w=\operatorname{Re}z$ və $w=\bar{z}^2$ funksiyaları bütün z müstəvisində təyin olunmuş birqiymətli funksiyalardır.

b) $w=Argz$, $E=C\setminus\{0\}$ çoxluğunda, $w=\sqrt[n]{z}$ $(n\ge 2)$ funksiyası bütün z müstəvisində təyin olunmuş çoxqiymətli funksiyalardır.

Biz, əsas etibarı ilə, birqiymətli funksiyaları öyrənəcəyik.

Əgər z və w ədədlərinin $z=x+iy$ və $w=u+iv$ cəbri şəkillərindən istifadə etsək, görərik ki, kompleks dəyişənli $w=f(z)$ funksiyasına bir cüt iki həqiqi dəyişənli həqiqi qiymətli $u(x,y)=\operatorname{Re}f(x+iy)$ və $v(x,y)=\operatorname{Im}f(x+iy)$ funksiyaları kimi baxmaq olar.

Bir çox məsələlərdə $w=f(z)$ funksiyasına bir kompleks müstəvinin nöqtələrini digər kompleks müstəvinin nöqtələrinə keçirən inkas kimi baxmaq əlverişli olur. $D=\{w=f(z): z\in E\}$ çoxluğuna E çoxluğunun obrazı deyilir və $D=f(E)$ kimi işarə olunur. $w=f(z)$ bərabərliyini ödəyən hər bir z nöqtəsinə w nöqtəsinin proobrazı, w nöqtəsinə isə

belə z-lərin obrazı deyilir. Əgər $D=f(E)$ çoxluğunun hər bir w nöqtəsinə onun E-dən olan proobrazını (proobrazlarını) qarşı qoysaq, $D=f(E)$ çoxluğundan E çoxluğuna təsir edən funksiya almış olarıq. Bu funksiyaya $w=f(z)$ funksiyasının tərsi deyilir və $z=f^{-1}(w)$ kimi işarə olunur. $z=f^{-1}(w)$ funksiyası, ümumiyyətlə, çoxqiymətli funksiyadır (hətta $w=f(z)$ birqiymətli olsa belə!). Məsələn, $w=|z|$ funksiyasının tərsi, hər bir müsbət $w=r$ ədədinə qarşı $|z|=r$ çevrəsinin nöqtələrini qarşı qoyan, kontinuum qiymətli funksiyadır.

Əgər həm $w=f(z)$, həm də $z=f^{-1}(w)$ birqiymətli funksiyalar olarsa, onda E çoxluğunun $D=f(E)$ çoxluğuna inkası qarşılıqlı birqiymətli olar.

İndi isə kompleks dəyişənli kompleks qiymətli funksiyanın limiti və kəsilməzliyi haqqında bəzi əsas məlumatları şərh edək.

Fərz edək ki, $w=f(z)$ funksiyası, limit nöqtəsi z_0 olan ($z_0=\infty$-da ola bilər!), E çoxluğunda təyin olunub.

T Ə R İ F 7.14. *Əgər genişlənmiş kompleks müstəvinin elə A nöqtəsi varsa ki, onun istənilən $U_\varepsilon(A)(\varepsilon>0)$ ətrafı üçün z_0 nöqtəsinin elə $U_\delta(z_0)(\delta>0)$ ətrafını tapmaq olarsa ki, $E\cap(U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\})$ çoxluğundan olan bütün z-lər üçün $f(z)\in U_\varepsilon(A)$ şərti ödənsin, onda A-ya, z ədədi z_0-a yaxınlaşdıqda ($z\to z_0$), $f(z)$ funksiyasının limiti deyilir və $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ kimi işarə olunur.*

Q E Y D. Əgər A kompleks ədəd (yəni $A\neq\infty$) olarsa, onda deyəcəyik ki, $f(z)$ funksiyası sonlu limitə malikdir.

Aşağıdakı teoremdə fərz olunur ki, bütün funksiyalar eyni bir çoxluqda təyin olunub və sonlu limitlərə malikdir!

T E O R E M 7.1. *a) Sonlu sayda funksiyaların cəbri cəminin limiti onların limitlərinin cəbri cəminə bərabərdir.*

b) Sonlu sayda funksiyaların hasilinin limiti onların limitlərinin hasilinə bərabərdir.

c) İki funksiyanın nisbətinin limiti (məxrəcin limiti sıfırdan fərqli olduqda!) onların limitləri nisbətinə bərabərdir.

Teoremin isbatı $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ limitinin varlığının iki ədəd ikiqat

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a \text{ və } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b$$

limitlərin varlığına ekvivalent olmasından çıxır, burada

$$z_0=x_0+iy_0,\ A=a+ib\ (A\neq\infty),\ f(z)=\operatorname{Re} f+i\operatorname{Im} f=u(x,y)+iv(x,y).$$

TƏRİF 7.15. *Tutaq ki, $w=f(z)$ funksiyası E çoxluğunda təyin olunmuşdur və $z_0\in E$. Əgər $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ bərabərliyi ödənərsə, onda deyirlər ki, $w=f(z)$ funksiyası z_0 nöqtəsində kəsilməzdir.*

TƏRİF 7.16. *Əgər $w=f(z)$ funksiyası E çoxluğunun bütün nöqtələrində kəsilməz olarsa, onda deyirlər ki, $w=f(z)$ funksiyası E çoxluğunda kəsilməzdir.*

Bilavasitə Teorem 7.1-dən çıxan aşağıdakı teoremdə fərz olunur ki, bütün funksiyalar eyni bir çoxluqda təyin olunub və mürəkkəb funksiyanın mənası var.

TEOREM 7.2. *a) Sonlu sayda kəsilməz funksiyaların cəbri cəmi kəsilməzdir.*

b) Sonlu sayda kəsilməz funksiyaların hasili kəsilməzdir.

c) İki kəsilməz funksiyanın nisbəti (məxrəcdəki funksiyanın sıfırdan fərqli nöqtələrində!) kəsilməzdir.

d) İki kəsilməz funksiyanın mürəkkəb funksiyası kəsilməzdir.

e) $w=f(z)$ funksiyasının kəsilməzliyi iki həqiqi dəyişənli həqiqi qiymətli $u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+iy)$ və $v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+iy)$ funksiyalarının kəsilməzliyinə ekvivalentdir.

Misal. z dəyişəninin arqumentinin $(-\pi,\pi]$ aralığına düşən baş qiyməti olan $w=\arg z$ funksiyasına baxaq. Bu $E=C\setminus\{0\}$ çoxluğunda təyin olunmuş birqiymətli funksiyadır. Tutaq ki, $z_0=x_0<0$.

$$\lim_{\substack{z\to x_0\\ (y>0)}} \arg(x+iy)=\pi \text{ və } \lim_{\substack{z\to x_0\\ (y<0)}} \arg(x+iy)=-\pi$$

bərabərliklərindən alınır ki, $w=\arg z$ funksiyası $(-\infty,0)$ aralığının hər bir nöqtəsində kəsilir. Asanlıqla göstərmək olar ki, $w=\arg z$ funksiyası $C\setminus(-\infty,0]$ çoxluğunun hər bir nöqtəsində kəsilməzdir.

Qeyd edək ki, z dəyişəninin arqumentinin $(-\pi,\pi]$ aralığına düşən baş qiyməti olan $w=\arg z$ funksiyasına yalnız $E=(-\infty,0)$ aralığında baxsaq, onda o, bu aralığın bütün nöqtələrində kəsilməz olacaq ($E=(-\infty,0)$ aralığında π sabitinə bərabər olduğu üçün!).

TƏRİF 7.17. *Əgər istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün (yalnız ε-dan asılı olan!) elə $\delta(\varepsilon)>0$ ədədi tapmaq olarsa ki, E şərtlərini ödəyən istənilən E və z' ədədləri üçün $|f(z)-f(z')|<\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənərsə, onda $f(z)$ funksiyasına E çoxluğunda müntəzəm kəsilməz funksiya deyilir.*

E çoxluğunda müntəzəm kəsilməz olan funksiyanı E-nin sərhəddində elə təyin etmək olar ki, alınan funksiya $\bar{E}$ çoxluğunda kəsilməz olar.

Aydındır ki, müntəzəm kəsilməzlikdən kəsilməzlik çıxır. Bu faktın tərsi,ümumiyyətlə, doğru deyil. Lakin aşağıdakı faydalı teorem doğrudur.

TEOREM 7.3 *(Kantor). Qapalı məhdud (kompakt) çoxluqda kəsilməz funksiya müntəzəm kəsilməzdir.*

İSBATI. Fərz edək ki, $f(z)$ qapalı məhdud K çoxluğunda kəsilməz funksiyadır. Onda K çoxluğunu $\Omega=\left\{U_{\frac{\rho_z}{2}}(z)\right\}_{z\in K}$ ətraflar sistemi ilə örtmək olar, belə ki, $U_{\rho_z}(z)$ ətrafından olan istənilən z və z' ədədləri üçün $|f(z)-f(z')|<\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənir. Onda Borel lemmasına görə K çoxluğunu Ω sisteminin sonlu

$$\Omega_l=\left\{U_{\frac{\rho_{z_i}}{2}}(z_i)\right\}_{z_i\in K;\ i=1,2,\dots,l}$$

sistemi ilə örtmək olar. δ-nı $\dot{\delta} = \min\left\{\frac{\rho_{z_i}}{2}\right\}_{i=1}^{l}$ kimi seçsək, görərik ki, $z \in K, z' \in K, |z - z'| < \delta$ şərtlərini ödəyən istənilən z və z' ədədləri üçün $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənir. ◁

7.3. Kompleks dəyişənli funksiyanın törəməsi. Koşi-Riman şərtləri

Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası G oblastında təyin olunmuş funksiyadır. Bu oblastdan hər hansı bir z_0 nöqtəsi götürək və bu nöqtənin kifayət qədər kiçik ətrafında (ola bilsin ki, z_0-ın özündən başqa!) təyin olunmuş

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

funksiyasına baxaq.

TƏRİF 7.18. *Əgər sonlu*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, onda $f(z)$-ə $z = z_0$ nöqtəsində diferensiallanan funksiya, həmin limitə isə $f(z)$ funksiyasının $z = z_0$ nöqtəsində törəməsi deyilir və

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

kimi işarə olunur.

$\Delta w = f(z) - f(z_0)$ (funksiyanın artımı) və $\Delta z = z - z_0$ (sərbəst dəyişənin artımı) işarələmələrindən istifadə etsək, diferensiallanma şərtini

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) + \varepsilon(z_0, \Delta z) \quad (\varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0, \Delta z \to 0)$$

kimi yaza bilərik. Buradan da

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z \quad (\varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0, \Delta z \to 0)$$

bərabərliyini almış olarıq. Tərsinə: artımı

$$\Delta w = A\Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z \quad (\varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0, \Delta z \to 0) \qquad (1)$$

şəklində göstərilə bilən (A Δz-dən asılı deyil!) funksiya diferensiallanandır və onun törəməsi A-ya bərabərdir. Qeyd edək ki, (1) düsturundan çıxır ki, $z = z_0$ nöqtəsində diferensiallanan funksiya həmin nöqtədə kəsilməzdir. (1) düsturundakı $A\Delta z$ ifadəsinə $w = f(z)$ funksiyasının diferensialı deyilir və dw kimi işarə olunur. $A = f'(z_0)$ olduğunu nəzərə alsaq və $\Delta z = dz$ işarələməsindən istifadə etsək funksiyasının diferensialını $dw = f'(z_0)dz$ şəklində yaza bilərik.

TEOREM 7.4. *Tutaq ki, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiyası G oblastının $z_0 = x_0 + iy_0$ nöqtəsində diferensiallanandır. Onda $u(x, y)$ və $v(x, y)$ funksiyaları (x_0, y_0) nöqtəsində diferensiallanandır və onların xüsusi törəmələri (x_0, y_0) nöqtəsində*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad (C.\text{-}R.)$$

şərtlərini ödəyirlər.

İSBATI. $w = f(z)$ funksiyası $z_0 = x_0 + iy_0$ nöqtəsində diferensiallandığı üçün onun artımını

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z \quad (\varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0, \Delta z \to 0) \qquad (2)$$

şəklində yaza bilərik, burada

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v, \; f'(z_0) = a + ib, \; \Delta z = \Delta x + i\Delta y, \; \varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 .$$

(2) münasibətində həqiqi və xəyalı hissələri ayırsaq

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y,$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_2\Delta x + \varepsilon_1\Delta y$$

bərabərliklərini alarıq. Buradan $\lim\limits_{\Delta x,\Delta y\to 0}\varepsilon_1 = \lim\limits_{\Delta x,\Delta y\to 0}\varepsilon_2 = 0$ olduğunu nəzərə alsaq, $u(x,y)$ və $v(x,y)$ funksiyalarının (x_0,y_0) nöqtəsində diferensiallanan və onların xüsusi törəmələrinin (x_0,y_0) nöqtəsində

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -b,\ \frac{\partial v}{\partial x} = b,\ \frac{\partial v}{\partial y} = a,$$

ədədlərinə bərabər olduğunu görərik. Bu münasibətlərdən də (C.-R.) şərtlərini almış olarıq. ◁

QEYD. (C.-R.) şətlərinə Koşi-Riman şərtləri deyilir.

SƏRBƏST İŞ. Göstərin ki, teoremin şərtləri daxilində $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiyasının $z_0 = x_0 + iy_0$ nöqtəsində törəməsi aşağıdakı düsturların istənilən biri ilə hesablana bilər.

1. $f'(z_0) = \dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + i\dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$.

2. $f'(z_0) = \dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} - i\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$.

3. $f'(z_0) = \dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} - i\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$.

4. $f'(z_0) = \dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} + i\dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$

SƏRBƏST İŞ. Göstərin ki, r,φ polyar koordinat sistemində Koşi-Riman şərtləri

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases}$$

şəklindədir.

Yuxarıda isbat olunan Teorem 7.4-dən çıxır ki, $w = f(z)$ funksiyasının z_0 nöqtəsində törəməsinin olması üçün zəruri şərt həmin nöqtədə Koşi-Riman şərtlərinin ödənməsidir. Təbii olaraq belə bir sual yaranır: bu şərtlər funksiyanın z_0 nöqtəsində törəməsinin olması üçün kafidirmi? Aşağıdakı misal göstərir ki, ümumiyyətlə, Koşi-Riman şərtləri kafi deyil.

M i s a l.

$$w = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^4}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x e^{\frac{1}{(\Delta x)^4}}} = 0,$$

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial y} + i\frac{\partial v(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{(\Delta y)^4}}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y e^{\frac{1}{(\Delta y)^4}}} = 0$$

münasibətlərindən çıxır ki, $z = 0$ nöqtəsində

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial v(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial u(0,0)}{\partial y} = \frac{\partial v(0,0)}{\partial y} = 0$$

bərabərlikləri doğrudur. Bu bərabərliklərdən çıxır ki, baxılan funksiya üçün, $z = 0$ nöqtəsində Koşi-Riman şərtləri ödənir. $z = (1+i)x\ (x \in R\setminus\{0\})$ xətti üzrə $z = 0$ nöqtəsinə yaxınlaşsaq

$$\lim_{z\to 0} w = \lim_{z\to 0} e^{-\frac{1}{z^4}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{(1+i)^4 x^4}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{4x^4}} = \infty$$

bərabərliklərini almış olarıq. Buradan alınır ki, baxılan funksiya $z=0$ nöqtəsində kəsilir. Bu misal göstərir ki, Koşi-Riman şərtlərinin ödənməsindən nəinki törəmənin varlığı, hətta kəsilməzliyi çıxmır.

D.Y.Menşev 1933-ci ildə isbat etmişdir ki, əgər $u(x,y)$ və $v(x,y)$ funksiyaları kəsilməz olarsa, onda Koşi-Riman şərtlərinin ödənməsindən $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ funksiyasının törəməsinin varlığı çıxır.

Aşağıdakı teoremdə $u(x,y)$ və $v(x,y)$ funksiyalarının diferensiallandığı hal üçün, Menşev teoreminə istinad etmədən, törəmənin varlığı üçün Koşi-Riman şərtlərinin kafiliyi isbat olunur.

TEOREM 7.5. *Tutaq ki, $u(x,y)$ və $v(x,y)$ funksiyaları (x_0,y_0) nöqtəsində diferensiallanır və $z_0=x_0+iy_0$ nöqtəsində Koşi-Riman şərtləri ödənir. Onda z_0 nöqtəsində $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ funksiyasının törəməsi var və bu nöqtədəki törəmə*

$$f'(z_0)=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$$

düsturu ilə hesablanır.

İSBATI. $u(x,y)$ və $v(x,y)$ funksiyaları (x_0,y_0) nöqtəsində diferensiallandıqları üçün onların artımlarını

$$\Delta u=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y,$$
$$\Delta v=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y+\beta_1\Delta x+\beta_2\Delta y$$

şəklində göstərə bilərik, burada $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ Δx və Δy-dan asılı olan, Δx və Δy sıfra yaxınlaşdıqda, sıfra yaxınlaşan funksiyalardır. Koşi-Riman şərtlərindən alınan

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}\equiv a,\qquad -\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\equiv b$$

bərabərlikləri $u(x,y)$ və $v(x,y)$ funksiyalarının artımlarında nəzərə alsaq,

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y,$$
$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\beta_1\Delta x+\beta_2\Delta y$$

bərabərliklərini, buradan da

$$\Delta w=\Delta u+i\Delta v=a(\Delta x+i\Delta y)+ib(\Delta x+i\Delta y)+(\alpha_1+i\beta_1)\Delta x+(\alpha_2+i\beta_2)\Delta y=$$
$$=(a+ib)\Delta z+\left\{(\alpha_1+i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\alpha_2+i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right\}\Delta z=A\Delta z+\varepsilon\Delta z \tag{3}$$

münasibətlərini alarıq.

$$|\varepsilon|=\left|(\alpha_1+i\beta)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\alpha_2+i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\le|\alpha_1+i\beta_1|\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|+$$
$$+|\alpha_2+i\beta_2|\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\le|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\beta_1|+|\beta_2|$$

bərabərsizliklərindən alınır ki, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ sıfra yaxınlaşdıqda $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$-lərlə bərabər ε-da sıfra yaxınlaşır. Buradan və (3) münasibətindən çıxır ki, $f(z)$ funksiyası $z=z_0$ nöqtəsində diferensiallanır və onun $z=z_0$ nöqtəsində törəməsi

$$f'(z_0)=A=a+ib=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$$

düsturu ilə hesablanır. ◁

TƏRİF 7.19. *G oblastının hər bir nöqtəsində sonlu törəməsi olan $w=f(z)$ funksiyasına G oblastında analitik funksiya deyilir.*

Ş ə r t l ə ş m ə. Əgər $w = f(z)$ funksiyası z_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında analitik olarsa, onda deyəcəyik ki, $w = f(z)$ funksiyası z_0 nöqtəsində analitikdir.

M i s a l. Göstərin ki, $w = az + b$ (a və b- kompleks ədədlərdir) funksiyası bütün kompleks müstəvidə analitik funksiyadır və $w' = a$.

Kompleks ədədin cəbri şəklindən istifadə edib

$$w = (a_1 + ia_2)(x + iy) + b_1 + ib_2 = a_1x - a_2y + b_1 + \\ + i(a_1y + a_2x + b_2) = u(x,y) + iv(x,y)$$

bərabərliyini yazsaq və

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_1, \frac{\partial u}{\partial y} = -a_2, \frac{\partial v}{\partial x} = a_2, \frac{\partial v}{\partial y} = a_1$$

xüsusi törəmələri hesablasaq, görərik ki, kompleks müstəvinin hər bir nöqtəsində Koşi-Riman şərtləri ödənir. $u(x,y) = a_1x - a_2y + b_1$ və $v(x,y) = a_1y + a_2x + b_2$ funksiyalarının kəsilməzliyini nəzərə alsaq $w = az + b$ funksiyasının bütün kompleks müstəvidə analitik funksiya olduğunu görərik.

$$w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

düsturundan istifadə etsək

$$w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = a_1 + ia_2 = a$$

bərabərliyini almış olarıq.

M i s a l. Həqiqi hissəsi $u(x,y) = e^x \cos y$, xəyali hissəsi isə $v(x,y) = e^x \sin y$ olan $e^x \cos y + ie^x \sin y$ funksiyasına baxaq. Bu funksiya $y = 0$ olduqda e^x ilə üst-üstə düşdüyündən yeni funksiyanı e^z ilə işarə edək. Beləliklə yeni bir

$$w = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

funksiya almış olduq. Göstərək ki, bu funksiya bütün kompleks müstəvidə analitik funksiyadır və $w' = (e^z)' = e^z$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

bərabərliklərindən, görürük ki, kompleks müstəvinin hər bir nöqtəsində Koşi-Riman şərtləri ödənir və bu bərabərliklərdəki xüsusi törəmələr xOy müstəvisinin bütün nöqtələrində kəsilməzdir. Deməli $w = e^z$ funksiyası bütün kompleks müstəvidə analitik funksiyadır.

$$w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

düsturundan istifadə etsək

$$(e^z)' = w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$

bərabərliyini almış olarıq.

S ə r b ə s t i ş. Törəmənin tərifindən və limitin xassələrindən istifadə edərək göstərin ki, aşağıdakı qaydalar doğrudur.

1. Əgər $f(z) \equiv c$ (sabit) olarsa, onda $f'(z) = 0$.
2. $[cf(z)]' = cf'(z)$ (c-sabit ədəddir).
3. $[c_1f_1(z) + c_2f_2(z)]' = c_1f_1'(z) + c_2f_2'(z)$ (c_1, c_2-sabit ədədlərdir).
4. $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.
5. $\{[f(z)]^n\}' = n[f(z)]^{n-1} f'(z)$.
6. $[f(az + b)]' = af'(az + b)$ (a, b-sabit ədədlərdir).
7. $(z^n)' = nz^{n-1}$.

8. $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$.

9. $[g(f(z))]' = g'_w f'_z \quad (w = f(z))$ (mürəkkəb funksiyanın törəməsi).

10. $[f^{-1}(w)]'_w = \dfrac{1}{f'_z(z)} \quad (f'_z(z) \neq 0)$ (tərs funksiyanın törəməsi).

İndi isə törəmənin həndəsi mənasını aydınlaşdıraq.

Tutaq ki, qiymətləri uv kompleks müstəvisinin nöqtələri ilə təsvir olunan, $w = f(z) = u + iv$ funksiyası xy kompleks müstəvisinin G oblastında analitikdir. Tamamilə G oblastına daxil olan, $z_0 \in G$ nöqtəsindən keçən və bu nöqtədə toxunana malik olan γ_1 əyrisinə baxaq (Şəkil 7.6). uv kompleks müstəvisində γ_1-in obrazı $w_0 = f(z_0)$ nöqtəsindən keçən Γ_1 əyrisi olacaqdır (Şəkil 7.6). Şərtə görə $w = f(z)$ funksiyasının z_0 nöqtəsində törəməsi var. Fərz edək ki, $f'(z_0) \neq 0$ və onun

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

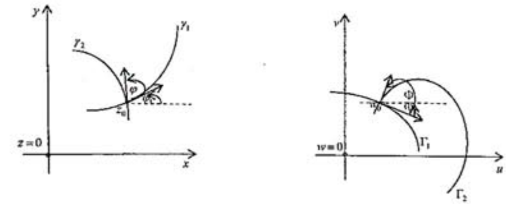
triqonometrik şəklindən alınan

$$r = \lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| \tag{4}$$

və

$$\alpha = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{5}$$

bərabərliklərini yazaq, burada $r = |f'(z_0)|$, $\alpha = \arg f'(z_0)$ (2π-nin misilləri dəqiqliyi ilə).



Şəkil 7.6.

Aydındır ki, $z = z_0 + \Delta z$ nöqtəsi γ_1 əyrisi üzrə z_0 nöqtəsinə yaxınlaşdıqda, ona uyğun $w = w_0 + \Delta w$ nöqtəsi Γ_1 əyrisi üzrə w_0 nöqtəsinə yaxınlaşır. Bu zaman γ_1 və Γ_1 əyrilərinin Δz və Δw kəsən vektorları z_0 və w_0 nöqtələrində, uyğun əyrilərə toxunan vektorlara keçəcəkdir. (5)-dən çıxan

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \Phi_1 - \varphi_1 \tag{6}$$

bərabərliyi göstərir ki, Γ_1 əyrisinə w_0 nöqtəsində toxunanın u oxu ilə əmələ gətirdiyi Φ_1 bucağı ilə (Şəkil 7.6), z_0 nöqtəsində γ_1 əyrisinə toxunanın x oxu ilə əmələ gətirdiyi (hesab olunur ki, u və x oxlarının müsbət istiqamətləri eynidir) φ_1 bucağının (Şəkil 7.6) fərqi, $w = f(z)$ funksiyasının z_0 nöqtəsindəki törəməsinin arqumentinə bərabərdir. (6) bərabərliyi $w = f(z)$ inkası zamanı z_0 nöqtəsində γ_1 əyrisinə çəkilmiş toxunanın α bucağı qədər döndüyünü göstərir. $f'(z_0)$ törəməsi z-in z_0-a yaxınlaşma yolundan asılı olmadığı üçün $\Phi_1 - \varphi_1$ fərqi z_0 nöqtəsindən keçən bütün əyrilər üçün eyni olacaqdır (Φ_1 və φ_1-in dəyişməsinə baxmayaraq!). Buradan alınır ki, $f'(z_0) \neq 0$ şərtini ödəyən analitik $f(z)$ funksiyası ilə inkas zamanı z_0 nöqtəsindən keçən γ_1 və γ_2 əyriləri arasındakı $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ bucağı, həm qiymətcə, həm də istiqamətcə, onların w_0 nöqtəsindən keçən Γ_1 və Γ_2 obrazları arasındakı $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ bucağına bərabər olacaqdır (Şəkil 7.6). Bu xassəyə bucaqların saxlanılması xassəsi deyilir.

(4) bərabərliyindən çıxır ki, $r = |f'(z_0)|$ ədədinə ($w = f(z)$ funksiyası vasitəsi ilə inkas zamanı) z_0 nöqtəsində miqyasın kəmiyyəti kimi baxmaq olar. $r > 1$ olduqda miqyas böyüyür (z_0 nöqtəsində dartılma baş verir), $r < 1$ olduqda miqyas kiçilir (z_0 nöqtəsində sıxılma baş verir) və $r = 1$ olduqda miqyas dəyişməz qalır. $r = |f'(z_0)|$ ədədi z-in z_0-a yaxınlaşma yolundan asılı olmadığı üçün, $f'(z_0) \neq 0$ şərtini ödəyən $w = f(z)$ inkası zamanı, z_0 nöqtəsində bütün istiqamətlərdə dartılma (sıxılma) eyni olacaqdır. Bu xassəyə dartılmanın (sıxılmanın) saxlanılması xassəsi deyilir. Həndəsi olaraq bu o deməkdir ki, $f'(z_0) \neq 0$ şərtini ödəyən $w = f(z)$ inkası zamanı z_0-ın kifayət qədər kiçik ətrafındakı fiqurlar (oxşarlıq əmsalı $r = |f'(z_0)|$ olan) oxşar fiqurlara inkas olunur.

7.4. Çalışmalar

7.1.

Aşağıdakı tənliklərlə hansı əyrilər verilmişdir?

1). $z = t^2 + \frac{i}{t^2}, t \in (0, +\infty)$. 2). $z = a\cos t + ib\sin t, a > 0, b > 0, t \in [0, 2\pi]$. 3). $|z - i| + |z + i| = 3$. 4). $|z - i| - |z + i| = 1$. 5). $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} 3z = 1$.
6). $z = te^{i\varphi}, t > 0, \varphi -$ həqiqi sabit ədəddir. 7). $z = t + it^2, t \in (-\infty, +\infty)$.
8). $z = e^{it} \sin 2t, t \in [0, 2\pi]$. 9). $z = i + 2e^{it}, t \in [3\pi, 5\pi]$.
10). $z = it + 2, t \in (-\infty, +\infty)$.
11). $z = it + \frac{1}{t}, t \in (-\infty, +\infty)$. 12). $z = \frac{4}{(1 + e^{it})}, t \in [-\pi, \pi]$.

Kompleks müstəvinin aşağıdakı bərabərsizliklərlə verilən nöqtələr çoxluğunu tapın.

13). $\left|\frac{z}{z+1}\right| < 1$. 14). $\left|\frac{1}{z} + 1\right| > 2$. 15). $\operatorname{Im}(z^2) < 1$. 16). $|z| + \operatorname{Im} z \le 1$.
17). $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| > 2$. 18). $|z - 1| > 3|z - 3|$. 19). $|z - i| + |z + i| \ge 4$.
20). $\left|\frac{1}{z} + z\right| \ge 2$. 21). $1 < |z + i| < 2, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

7.2.

Aşağıdakı limitləri hesablayın.

1). $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z^2}{z}$. 2). $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{z^2}{z}$. 3). $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{z}{z - i}$. 4). $\lim\limits_{z \to -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$.
5). $\lim\limits_{z \to -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i}$. 6). $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}$. 7). $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z}$.

Aşağıdakı limitlər varmı?

8). $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$. 9). $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}$. 10). $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z}{|z|}$. 11). $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{|z|}$. 12). $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$.
13). $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z \operatorname{Im} z}{|z|}$. 14). $\lim\limits_{z \to 0} \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{\operatorname{Im} z}$.

Aşağıdakı funksiyalar $\{z : |z| < 1\}$ oblastında müntəzəm kəsilməzdirlərmi?

15). $\frac{1}{1 - z}$. 16). $\frac{1}{1 + z^2}$. 17). $e^{-\frac{1}{1-z}}$. 18). $e^{-\frac{1}{|1-z|}}$. 19). $e^{\frac{1}{|i-z|}}$. 20). $e^{-\frac{1}{(z-i)^2}}$
21). $\sin z$. 22). $\sin \frac{1}{z - 1}$. 23). chz

Aşağıdakı funksiyalar $\{z : 0 < |z| < 1\}$ oblastında müntəzəm kəsilməzdirlərmi?

24). $\dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$. 25). $\dfrac{\operatorname{Im} z}{z}$. 26). $\dfrac{\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z}{z}$. 27). $\dfrac{z^2}{|z|^2}$. 28). $\dfrac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|}$.

29). $\dfrac{(\operatorname{Im} z)^2}{|z|}$. 30). $\dfrac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$. 31). $\dfrac{z \operatorname{Im} z}{|z|}$. 32). $e^{-\frac{1}{|z|}}$. 33). $e^{-\frac{1}{z^2}}$.

7.3.

Aşağıdakı funksiyaların törəməsi olduğu nöqtələri və bu nöqtələrdə törəmələrini tapın.

1). $f(z) = iz$. 2). $f(z) = z + 2i$. 3). $f(z) = iz^2 - 3z + 1$.

4). $f(z) = z \operatorname{Re} z$. 5). $f(z) = z + 2i$. 6). $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$. 7). $f(z) = \ln(z^2)$.

8). $f(z) = Ln(z^2)$. 9). $f(z) = chz$. 10). $f(z) = \sin z$.

11). $f(z) = \sin(z + 2i)$. 12). $f(z) = \cos(iz)$.

Aşağıdakı funksiyalar hansı nöqtələrdə analitikdir?

13). $f(z) = z^2 z$. 14). $f(z) = ze^z$. 15). $f(z) = |z| z$. 16). $f(z) = e^{z^2}$.

17). $f(z) = |z| \operatorname{Re} z$. 18). $f(z) = \sin 3z - i$. 19). $f(z) = z \operatorname{Re} z$.

20). $f(z) = z \operatorname{Im} z$. 21). $f(z) = |z| \sin z$. 22). $f(z) = chz$.

23). $f(z) = zz$. 24). $f(z) = z$.

$u(x, y)$-həqiqi (və ya $v(x, y)$-xəyali) hissəsi və $f(z_0) = c_0$ -qiyməti məlum olan analitik $f(z)$ funksiyanı tapın.

Göstəriş. Bu verilənlərə görə $f(z)$ funksiyası aşağıdakı üsullardan istənilən biri ilə tapıla bilər:

a) Koşi-Riman şərtlərindən istifadə etməklə;

b). $f(z) = 2u\left(\dfrac{z + \bar{z}_0}{2}, \dfrac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - \bar{c}_0$ düsturu ilə;

c) $f(z) = 2iv\left(\dfrac{z + \bar{z}_0}{2}, \dfrac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) + \bar{c}_0$ düsturu ilə.

25). $u(x, y) = 2e^x \cos y$, $f(0) = 2$. 26). $v(x, y) = 3x + 2xy$, $f(-i) = 2$.

27). $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$.

28). $v(x, y) = arctg \dfrac{y}{x}\ (x > 0)$, $f(1) = 0$.

29). $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$, $f(i) = 2i - 1$.

30). $u(x, y) = x^3 + 6x^2 y - 3xy^2 - 2y^3$, $f(0) = 0$.

31). $u(x, y) = 2 \sin x chy - x$, $f(0) = 0$.

32). $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$, $f(0) = 0$.

33). $v(x, y) = -2 \sin 2x sh2y + y$, $f(0) = 2$.

34). $v(x, y) = 2 \cos x chy - x^2 + y^2$, $f(0) = 2$.

Verilmiş $w = f(z)$ inkasları üçün, verilmiş nöqtələrdə, dartılma (sıxılma) əmsalı r -i və dönmə bucağı φ-ni tapın.

35). $w = z^2$, $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. 36). $w = e^z$, $z_0 = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}$.

37). $w = e^z$, $z_0 = -1 - i\dfrac{\pi}{2}$. 38). $w = \sin z$, $z_0 = 0$.

39). $w = z^3$, $z_0 = 2 - i$.

Aşağıdakı inkaslar zamanı müstəvinin dartıldığı və sıxıldığı hissələrini tapın.

40). $w = e^z$. 41). $w = \ln z$. 42). $w = \dfrac{1}{z}$. 43). $w = z^3$.

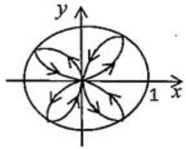
7.5. Cavablar və göstərişlər

7.1.

1). $y=\frac{1}{x}\,(x>0)$ - hiperbolanın I rübdəki qolu. 2). $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - müsbət istiqamətli ellips. 3). $36x^2+20y^2=3$ ellipsi. 4). $4x^2-12y^2=-3$ hiperbolası. 5). $x+3y=1$ düz xətti. 6). x- i $\cos\varphi$ ilə eyni işarəli olan şüa. 7). $y=x^2,\ x\in(-\infty,+\infty)$ - parabola. 8). Verilən əyrinin tənliyini

$$\begin{cases} x=\cos t\sin 2t, \\ y=\sin t\sin 2t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

şəklində yazsaq, görərik ki, əyri üzərindəki nöqtələr $x^2+y^2=\sin^2 2t$ tənliyini ödəyir. $x=r\cos t,\quad y=r\sin t$ çevirmələrindən istifadə etsək əyrinin polyar koordinat sistemində tənliyinin $r=\sin 2t\quad (0\le t\le 2\pi)$ şəklində olduğunu görərik. Sonuncu tənlikdən görünür ki, bu əyri koordinat başlanğıcında öz-özünü üç dəfə (ucları nəzərə almadan) kəsən qapalı əyridir. Bu əyriyə dörd ləçəkli qızılgül deyilir (Şəkil 7.7). 9). $x^2+(y-1)^2=4$ çevrəsi. 10). $x=2$ düz xətti. 11). Hiperbola. 12). Parabola. 13). $\operatorname{Re} z>-\frac{1}{2}$ yarımmüstəvisi. 14). $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2<\frac{4}{9}$ dairəsi. 15). $y=\frac{1}{2x}$ hiperbolasının iki budağı arasındakı oblast. 16). $y=\frac{1-x^2}{2}$ parabolasının "daxili". 17). $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2<\frac{8}{9}$ dairəsi. 18). $\left(x-\frac{13}{4}\right)^2+y^2<\frac{9}{16}$ dairəsi. 19). Fokusları i və $-i$ nöqtələrində, yarımoxları 2 və $\sqrt{3}$ olan ellipsin



Şəkil 7.7.

xarici. 20). $|z+i|\le\sqrt{2}$ və $|z-i|\le\sqrt{2}$ dairələrinin kəsişməsi və onların birləşməsinin xarici (dairələrin sərhədləri də daxil olmaqla). 21). Mərkəzi $z=-i$ nöqtəsində, radiusları $r=1$ və $r=2$ olan çevrələr ilə məhdudlaşmış halqanın $\arg z=\frac{\pi}{4}$ və $\arg z=\frac{\pi}{2}$ şüaları arasında qalan hissəsi.

7.2.

1). 0. 2). ∞. 3). 1. 4). i. 5). $-2i$. 6). 1. 7). 1. 8).Yox. 9).Yox. 10).Yox. 11).Yox. 12).Yox. 13).Yox. 14).Yox. $z_n=\frac{i}{n}$ və $z'_n=\frac{1}{n}+i\frac{1}{n^2}$ ardıcıllıqlarına baxın. 15).Yox. 16).Yox. 17).Yox. 18).Bəli. Göstərin ki, funksiyanı $\{z:|z|\le 1\}$ qapalı oblastına kəsilməz davam etdirmək olar. 19).Bəli. Göstərin ki, funksiyanı $\{z:|z|\le 1\}$ qapalı oblastına kəsilməz davam etdirmək olar.20).Yox. 21).Bəli. Göstərin ki, funksiyanı $\{z:|z|\le 1\}$ qapalı oblastına kəsilməz davam etdirmək olar. 22).Yox. 23). Bəli. Göstərin ki, funksiyanı $\{z:|z|\le 1\}$ qapalı oblastına kəsilməz davam etdirmək olar. 24). Yox. 25). Yox. 26).Bəli. Göstərin ki, funksiyanı $\{z:|z|\le 1\}$ qapalı oblastına kəsilməz davam etdirmək olar. 27). Yox. 28). Bəli. Göstərin ki, funksiyanı $\{z:|z|\le 1\}$ qapalı oblastına kəsilməz davam etdirmək olar. 29). Bəli. Göstərin ki, funksiyanı $\{z:|z|\le 1\}$ qapalı oblastına kəsilməz davam etdirmək olar. 30). Bəli. Göstərin ki, funksiyanı $\{z:|z|\le 1\}$ qapalı oblastına kəsilməz davam etdirmək olar.31). Bəli. Göstərin ki, funksiyanı $\{z:|z|\le 1\}$ qapalı oblastına kəsilməz davam etdirmək olar.32). Bəli. Göstərin ki, funksiyanı $\{z:|z|\le 1\}$ qapalı oblastına kəsilməz davam etdirmək olar. 33).Yox.

7.3.

1). $\forall z \in C,\ f'(z)$ yoxdur. 2). $\forall z \in C,\ f'(z) = 1$.

3). $\forall z \in C,\ f'(z) = 2iz - 3$.

4). $f'(0) = 0$; $\forall z \in C \setminus \{0\},\ f'(z)$ yoxdur. 5). $\forall z \in C,\ f'(z) = 6z^5$.

6). $\forall z \in C \setminus \{0\},\ f'(z) = -\frac{3}{z^4}$. 7). $\forall z \in C \setminus \{0\},\ f'(z) = \frac{2}{z}$.

8). $\forall z \in C \setminus \{0\},\ f'(z) = \frac{2}{z}$. 9). $\forall z \in C,\ f'(z) = shz$.

10). $f'\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0, k \in N; \forall z \in C \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in N\right\}, f'(z)$ yoxdur.

11). $\forall z \in C,\ f'(z) = \cos(z + 2i)$. 12). $\forall z \in C,\ f'(z) = -i\sin(iz)$.
13). Heç bir nöqtədə. 14). Kompleks müstəvinin bütün nöqtələrində.
15). Heç bir nöqtədə. 16). Kompleks müstəvinin bütün nöqtələrində.
17). Heç bir nöqtədə. 18). Kompleks müstəvinin bütün nöqtələrində.
19). Heç bir nöqtədə. 20). Heç bir nöqtədə. 21). Heç bir nöqtədə.
22). Kompleks müstəvinin bütün nöqtələrində. 23). Heç bir nöqtədə.

24). Heç bir nöqtədə. 25). $f(z) = 2e^z$. $f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - c_0$

düsturunda $c_0 = 2,\ z_0 = 0,\ u(x, y) = 2e^x \cos y$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$f(z) = 2 \cdot 2e^{\frac{z}{2}} \cos\frac{z}{2i} - 2 = 4e^{\frac{z}{2}} \cos\left(-\frac{iz}{2}\right) - 2 =$$

$$= 4e^{\frac{z}{2}} ch\frac{z}{2} - 2 = 4e^{\frac{z}{2}} \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{2} - 2 = 2e^z$$

olduğunu almış olarıq. 26). $f(z) = 3iz + z^2$. 27). $f(z) = \frac{1}{z}$.
28). $f(z) = \ln z$. 29). $f(z) = z^2 + 2z$. 30). $f(z) = (1 - 2i)z^3$.
31). $f(z) = 2\sin z - z$. 32). $f(z) = ze^z$. 33). $f(z) = 2\cos 2z + z$.
34). $f(z) = 2i(\cos z - 1) - iz^2 + 2$. 35). $r = 4, \varphi = \frac{\pi}{4}$. 36). $r = 2, \varphi = \frac{\pi}{4}$.
37). $r = \frac{1}{e}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$. 38). $r = 1, \varphi = 0$. 39). $r = 15, \varphi = -arctg\frac{4}{3}$.
40). $\operatorname{Re} z > 0$ yarımmüstəvisi dartılır, $\operatorname{Re} z < 0$ yarımmüstəvisi isə sıxılır. 41). $|z| = 1$ çevrəsinin daxili hissəsi ($z = 0$ nöqtəsindən başqa!) dartılır, xarici hissəsi isə sıxılır. 42).41-ci misaldakı kimi . 43). $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ çevrəsinin daxili hissəsi sıxılır, xarici hissəsi isə dartılır .

VIII Fəsil

KOMPLEKS DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYANIN İNTEQRALI. KOŞİNİN İNTEQRAL TEOREMİ

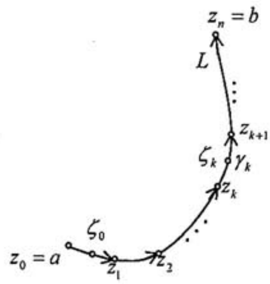
8.1. Kompleks dəyişənli funksiyanın inteqralı

Tutaq ki, L-başlanğıcı a, sonu isə b nöqtələrində olan, kompleks müstəvidə yerləşən, sadə, hamar və qapalı olmayan əyridir. Fərz edək ki, L əyrisinin parametrik tənliyi $z = z(t) = x(t) + iy(t)\,(t \in [\alpha, \beta], \alpha < \beta)$ şəklindədir, belə ki, $a = z(\alpha), b = z(\beta)$ və L əyrisinin istiqaməti t-nin monoton artmasına uyğun seçilmişdir. $[\alpha, \beta]$ parçasının hər hansı bir

$$\tau = \{t_k\}_{k=0}^{n} : \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_n = \beta$$

bölgüsünü götürək. Onda $T = \{z_k = z(t_k)\}_{k=0}^{n}$ nöqtələr çox luğu L əyrisinin (L əyrisini $\gamma_k = (z_k z_{k+1}), k = 0,1,\ldots,n-1$ qövslərinə bölən) bölgüsü olacaqdır (Şəkil 8.1).

Tutaq ki, L əyrisi üzərində $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiyası təyin olunmuşdur. Hər bir



Şəkil 8.1.

$\gamma_k = (z_k z_{k+1}), k = 0,1,\ldots,n-1$ qövsündən, $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ ədədinə uyğun, ζ_k nöqtəsi götürüb (Şəkil 8.1) $f(\zeta_k)$ ədədini tapıb, onu $z_{k+1} - z_k$ fərqinə vurub alınan hasilləri toplayaraq

$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)$ inteqral cəmi düzəldək.

T ə r i f 8.1. *Əgər $\lambda = \max_{k\in[0,1,\ldots,n-1]} |z_{k+1} - z_k|$ sıfra yaxınlaşdıqda ($\lambda \to 0$), L əyrisinin $T = \{z_k = z(t_k)\}_{k=0}^{n}$ bölgüsündən və ζ_k nöqtələrinin seçilişindən asılı olmayaraq, σ inteqral cəminin sonlu limiti olarsa, onda bu limitə $f(z)$ funksiyasının L əyrisi üzrə inteqralı deyilir və*

$$\int_L f(z)dz \tag{1}$$

kimi işarə olunur. Beləliklə, tərifə görə

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\max\limits_{k\in[0,1,\ldots,n-1]}|z_{k+1}-z_k|\to 0} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) \right\}.$$

L əyrisinə inteqrallama yolu və ya inteqrallama konturu deyilir.

(1) inteqralının varlıq məsələsi, $f(z)$ funksiyasının həqiqi və xəyali hissələri olan $u(x,y)$ və $v(x,y)$ funksiyalarından düzəldilmiş $(u(x,y), -v(x,y))$ və $(v(x,y), u(x,y))$ cütlərinə uyğun

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

şəkilli II növ ümumiləşmiş əyrixətli inteqralların varlıq məsələsinə gətirilir. Doğrudan da,

$$z_k = x_k + iy_k, \Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k, \zeta_k = \xi_k + i\eta_k$$
$$f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k) = u_k + iv_k$$

işarələmələrindən istifadə etsək, σ inteqral cəmini

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k)=\sum_{k=0}^{n-1}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k+i\Delta y_k)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}[u_k\Delta x_k-iv_k\Delta y_k]+i\left\{\sum_{k=0}^{n-1}[v_k\Delta x_k+u_k\Delta y_k]\right\} \qquad (2)$$

şəklində yaza bilərik. (2) bərabərliyinin sağındakı cəmlər, uyğun olaraq,

$$\int_L u(x,y)dx-v(x,y)dy \text{ və } \int_L v(x,y)dx+u(x,y)dy \qquad (3)$$

II növ ümumiləşmiş əyrixətli inteqralların inteqral cəmləridir. (2) və (3) bərabərliklərindən alınır ki, əgər (2) və (3) inteqralları varsa, (1) inteqralı da var və tərsinə. Riyazi analiz-2-dən məlumdur ki, əgər $u(x,y)$ və $v(x,y)$ hissə-hissə kəsilməz funksiyalar, L isə hamar əyri olarsa, onda (3) inteqralları vardır. Deməli bu halda (1) inteqralı da var və

$$\int_L f(z)dz=\int_L(u+iv)(dx+idy)=\int_L u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_L v(x,y)dx+u(x,y)dy \qquad (4)$$

bərabərliyi doğrudur.

Əgər parametrik tənliyi $z=z(t)=x(t)+iy(t)\,(t\in[\alpha,\beta],\ \alpha<\beta)$ olan L əyrisi hamar, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ funksiyası kəsilməz olarsa, onda (1) inteqralının hesablanması məsələsi

$$\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

adi Riman inteqralının hesablanmasına gətirilir. Doğrudan da əyrixətli inteqralların Riman inteqralı vasitəsi ilə hesablanması qaydasından və (4) düsturundan istifadə etsək

$$\int_L f(z)dz=\int_\alpha^\beta\{[u(z(t))]x'(t)-[v(z(t))]y'(t)\}dt+$$
$$+i\int_\alpha^\beta\{[v(z(t))]x'(t)+[u(z(t))]y'(t)\}dt=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt \qquad (5)$$

düsturunu almış olarıq.

Q E Y D 1. Əgər L əyrisi $L_1, L_2, \dots, L_n$ hamar əyrilərindən ibarət hissə-hissə hamar əyri olarsa, onda L əyrisi üzərində təyin olunmuş kompleks dəyişənli $f(z)$ funksiyasının L əyrisi boyunca inteqralı

$$\int_L f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k} f(z)dz$$

kimi təyin olunur.

Q E Y D 2. Əgər L əyrisi qapalı və ya öz-özünü kəsən hissə-hissə hamar əyri olarsa, onu sonlu sayda öz-özünü kəsməyən və qapalı olmayan hissə-hissə hamar $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ əyrilərinin birləşməsi şəklində göstərib, onun üzərində təyin olunmuş kompleks dəyişənli $f(z)$ funksiyasının L əyrisi boyunca inteqralını

$$\int_L f(z)dz=\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j} f(z)dz$$

kimi təyin etmək lazımdır.

Q E Y D 3. 1-ci və 2-ci qeydlərdə olan hallar üçün də (4) və (5) düsturları doğrudur.

M i s a l. Tutaq ki, L-başlanğıcı a sonu isə b nöqtələrində olan, kompleks müstəvidə yerləşən hissə-hissə hamar əyridir. Fərz edək ki, L əyrisinin parametrik tənliyi $z=z(t)=x(t)+iy(t)\,(t\in[\alpha,\beta],\ \alpha<\beta)$ şəklindədir, belə ki, $a=z(\alpha), b=z(\beta)$ və L əyrisinin istiqaməti t-nin monoton artmasına uyğun seçilmişdir. Göstərin ki, qeyd olunmuş z_0 kompleks ədədi üçün

$$\int_L (z-z_0)^n dz = \begin{cases} \dfrac{(b-z_0)^{n+1}-(a-z_0)^{n+1}}{n+1}, & n \in Z\setminus\{-1\}, \\ \ln\dfrac{b-z_0}{a-z_0}, & n=-1 \end{cases} \quad (6)$$

bərabərliyi doğrudur. Fərz olunur ki, mənfi tam ədədlər üçün L əyrisi $z=z_0$ nöqtəsindən keçmir.

H ə l l i. Fərz edək ki, $n \neq -1$. (5) düsturundan istifadə etsək

$$\int_L (z-z_0)^n dz = \int_\alpha^\beta [z(t)-z_0]^n z'(t)dt = \int_\alpha^\beta [z(t)-z_0]^n d[z(t)-z_0] =$$
$$= \frac{[z(t)-z_0]^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{t=\alpha}^{t=\beta} = \frac{[z(\beta)-z_0]^{n+1}-[z(\beta)-z_0]^{n+1}}{n+1} = \frac{(b-z_0)^{n+1}-(a-z_0)^{n+1}}{n+1}$$

bərabərliklərini yaza bilərik. İndi $n=-1$ halına baxaq. (5) düsturundan istifadə etsək

$$\int_L (z-z_0)^{-1} dz = \int_\alpha^\beta [z(t)-z_0]^{-1} z'(t)dt = \int_\alpha^\beta [z(t)-z_0]^{-1} d[z(t)-z_0] =$$
$$= \ln[z(t)-z_0]_{t=\alpha}^{t=\beta} = \ln[z(\beta)-z_0] - \ln[z(\alpha)-z_0] = \ln\frac{b-z_0}{a-z_0}$$

münasibətlərini alarıq. Beləliklə (6) bərabərliyinin doğru olduğunu göstərdik.

Xüsusi hallar. a).

$$\oint_L (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \in Z\setminus\{-1\}, \\ 2\pi i, n=-1, z_0\ L-\text{in daxili oblastında olduqda}, \\ 0, n=-1, z_0\ L-\text{in xarici oblastında olduqda}, \end{cases}$$

burada $\oint$ simvolu onu göstərir ki, inteqrallama yolu saat əqrəbinin əksinə yönəlmiş qapalı konturdur.

b). $$\oint_L z^n dz = \begin{cases} 0, & n \in Z\setminus\{-1\}, \\ 2\pi i, n=-1, 0\ L-\text{in daxili oblastında olduqda}, \\ 0, n=-1, 0\ L-\text{in xarici oblastında olduqda}. \end{cases}$$

c). $$\oint_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0, n \in Z\setminus\{-1\}, \\ 2\pi i, \quad n=-1. \end{cases}$$

İndi isə (4) düsturundan və

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

şəkilli II növ ümumiləşmiş əyrixətli inteqralların məlum xassələrindən istifadə edərək $\int_L f(z)dz$ inteqralının bəzi xassələtini qeyd edək.

1°. $\int_L f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz$, burada L^- ilə L-dən yalnız istiqaməti ilə fərqlənən kontur işarə edilmişdir.

2°. $\int_L [c_1 f(z) + c_2 g(z)]dz = c_1\int_L f(z)dz + c_2\int_L g(z)dz$, burada c_1, c_2 - sabitlərdir.

3°. $\int_{L_1\cup L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz$, burada, hissə-hissə hamar L_1 konturunun sonu hissə-hissə hamar L_2 konturunun başlanğıcı ilə üst-üstə düşür.

4°. Tutaq ki, sonlu l uzunluğuna malik hissə-hissə hamar L konturu boyunca $|f(z)| \leq M$ bərabərsizliyi ödənir. Onda $\left|\int_L f(z)dz\right| \leq Ml$.

8.2. Koşinin inteqral teoremi

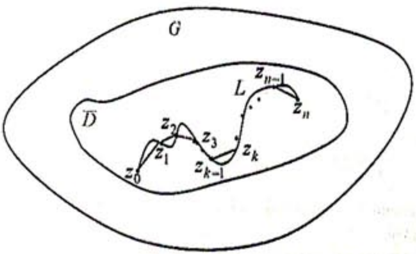
Əvvəlcə, analitik funksiyalar nəzəriyyəsində fundamental əhəmiyyətə malik olan Koşinin inteqral teoreminin isbatında lazım olacaq, aşağıdakı lemmanı isbat edək.

L E M M A 8.1. *Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası, düzlənə bilən (yəni, sonlu uzunluğa malik olan) L əyrisini özündə saxlayan, G oblastında kəsilməz funksiyadır. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün L əyrisinə çəkilmiş elə P_ε sınıq xətti tapmaq olar ki,*

$$\left|\int_L f(z)dz - \int_{P_\varepsilon} f(z)dz\right| < \varepsilon \tag{7}$$

bərabərsizliyi ödənər.

İ S B A T I. L konturunu özündə saxlayan, tamamilə G-yə daxil olan qapalı $\overline{D}$ oblastına baxaq (Şəkil 8.2). Kantor teoreminə görə $f(z)$ funksiyası $\overline{D}$ oblastında



Şəkil 8.2.

müntəzəm kəsilməz olacaqdır. L əyrisini bir birinin ardınca gələn $z_0, z_1, \ldots, z_n$ nöqtələri ilə $L_k = (z_{k-1}z_k)$, $k = 1,\ldots,n$ hissələrinə bölək. L_k əyrisinin uzunluğunu l_k ilə, L əyrisinin uzunluğunu l ilə işarə edək. Verilmiş $\varepsilon > 0$ ədədi üçün, Kantor teoremindən istifadə edərək, l_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ ədədlərini o qədər kiçik götürək ki, $U_{l_k}(z_{k-1}) = \{z : |z - z_{k-1}| < l_k\}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ dairələri tamamilə $\overline{D}$ oblastına daxil olsun və bu dairələrdə

$$|f(z) - f(z_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{2l} \quad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{8}$$

bərabərsizlikləri ödənsin. Təpələri $z_0, z_1, \ldots, z_n$ nöqtələrində (nizamı saxlamaq şərti ilə) olan, L əyrisinə çəkilmiş sınıq xətti P_ε (Şəkil 8.2) ilə, onun z_{k-1} və z_k təpələrini birləşdirən qolunu isə $P_{\varepsilon,k}$ ilə işarə edək.

$$\int_{L_k} f(z_{k-1})dz = \int_{P_{\varepsilon,k}} f(z_{k-1})dz = f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1})$$

bərabərliyini (misaldakı (6) düsturuna bax) nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} \int_L f(z)dz - \int_{P_\varepsilon} f(z)dz &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{L_k} f(z)dz - \int_{P_{\varepsilon,k}} f(z)dz\right\} = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{L_k}[f(z) - f(z_{k-1})]dz - \sum_{k=1}^{n}\int_{P_{\varepsilon,k}}[f(z) - f(z_{k-1})]dz \end{aligned} \tag{9}$$

bərabərliklərini yaza bilərik. (8), (9) bərabərliklərindən və 4° xassəsindən

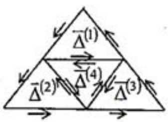
$$\left|\int_L f(z)dz - \int_{P_\varepsilon} f(z)dz\right| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2l}l_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2l}l_k \le \varepsilon$$

bərabərsizliyi alınır. ◁

TEOREM 8.*1 (Birrabitəli oblastlarda Koşi teoremi). Tutaq ki, $f(z)$, sonlu kompleks müstəvinin birrabitəli G oblastında analitik funksiyadır. Onda onun, tamamilə G oblastında yerləşən, istənilən düzlənə bilən qapalı L konturu üzrə inteqralı sıfra bərabərdir.*

İSBATI. I mərhələ. Göstərək ki, $f(z)$ funksiyasının, tamamilə G oblastında yerləşən, istənilən müstəvi üçbucağın konturu üzrə inteqralı sıfra bərabərdir. Əksini fərz edək. Tutaq ki, elə $\bar{\Delta}$ müstəvi üçbucağı var ki, onun Δ konturu (Δ - müsbət oriyentasiyalı adi üçbucaqdır, yəni onun üzəri ilə hərəkət edən müşahidəçi $\bar{\Delta}$-nı özünün solunda görür) üzrə $f(z)$ funksiyasının inteqralı sıfır deyil, yəni

$$\left|\oint_{\Delta} f(z)dz\right| = M > 0. \tag{10}$$



Şəkil 8.3.

Δ üçbucağının ortalarını cüt-cüt birləşdirib $\bar{\Delta}$ müstəvi üçbucağını dörd dənə $\bar{\Delta}^{(1)},\bar{\Delta}^{(2)},\bar{\Delta}^{(3)}$ və $\bar{\Delta}^{(4)}$ müstəvi üçbucaqlarına bölək (Şəkil 8.3) və onların müsbət oriyentasiyalı konturlarını $\Delta^{(1)},\Delta^{(2)},\Delta^{(3)}$ və $\Delta^{(4)}$ ilə işarə edək. Qeyd edək ki,

$$\sum_{k=1}^{4}\int_{\Delta^{(k)}} f(z)dz = \int_{\Delta} f(z)dz \tag{11}$$

bərabərliyi doğrudur. Doğrudan da, (11) bərabərliyinin sol tərəfi $\bar{\Delta}$ üçbucağı üzrə inteqral ilə $\Delta^{(4)}$ üçbucağının hər bir tərəfi üzrə iki dəfə götürülmüş inteqralların cəminə bərabərdir. $\Delta^{(4)}$ üçbucağının tərəfləri üzrə götürülmüş inteqrallar əks istiqamətli parçalar üzrə götürüldüyü üçün onların cəmi sıfır olacaqdır.(10) və (11) bərabərliklərindən çıxır ki, (11) bərabərliyinin solundakı inteqrallardan heç olmasa biri üçün (uyğun üçbucağı Δ_1 ilə işarə edək)

$$\left|\oint_{\Delta_1} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Əks halda mümkün olmayan

$$M = \left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| \le \sum_{k=1}^{4}\left|\int_{\Delta^{(k)}} f(z)dz\right| < 4\frac{M}{4} = M,$$

yəni $M < M$ bərabərsizliyi alınardı.

Yuxarıdakı qayda ilə Δ_1 üçbucağını dörd üçbucağa bölərək və əvvəlki mühakiməni təkrarlayaraq elə Δ_2 üçbucağı tapaq ki,

$$\left|\oint_{\Delta_2} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4}$$

bərabərsizliyi ödənsin.

Bu prosesi davam etdirərək, bir-birinə daxil olan $\{\bar{\Delta}_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(\bar{\Delta}_0 \equiv \Delta)$ müstəvi üçbucaqlar ardıcıllığı almış olarıq, belə ki, onların Δ_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ konturları üzrə

$$\left|\oint_{\Delta_n} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4^n} \quad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{12}$$

bərabərsizlikləri ödənir.

Δ üçbucağının perimetrini P ilə işarə etsək Δ_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ üçbucağının perimetri $P_n = \dfrac{P}{2^n}$ olar, deməli $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$. Bir-birinə daxil olan qapalı məhdud çoxluqlar haqqında olan prinsipə görə $\bar{\Delta}_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$-lərin hər birinə daxil olan z_0 nöqtəsi vardır. $\bar{\Delta} \subset G$ olduğu üçün $z_0 \in G$. $f(z)$ funksiyasının z_0 nöqtəsində sonlu $f'(z_0)$ törəməsi olduğu üçün istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi tapmaq olar ki, $|z - z_0| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən $z \in G$ nöqtələri üçün

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \varepsilon|z - z_0| \tag{13}$$

bərabərsizliyi doğru olar.

z_0 nöqtəsinin təyininə görə elə $n_0 \in N$ nömrəsi var ki, $n > n_0$ şərtini ödəyən istənilən n natural ədədi üçün

$$\Delta_n \subset \overline{\Delta}_n \subset U_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| < \delta\}. \qquad (14)$$

$\int\limits_{\Delta_n} dz = \int\limits_{\Delta_n} z dz = 0$ bərabərliklərini (misaldakı (6) düsturuna bax) nəzərə alsaq, (14) şərtini ödəyən n-lər üçün yazılmış

$$\oint\limits_{\Delta_n} f(z)dz = \oint\limits_{\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)]dz$$

bərabərliyə (13) bərabərsizliyini tətbiq etsək

$$\left|\oint\limits_{\Delta_n} f(z)dz\right| < \oint\limits_{\Delta_n} \varepsilon |z - z_0||dz|$$

bərabərsizliyini, buradan da $|z - z_0| < \frac{P}{2^n}$ bərabərsizliyini nəzərə almaqla

$$\left|\oint\limits_{\Delta_n} f(z)dz\right| < \varepsilon \frac{P^2}{4^n} \qquad (15)$$

bərabərsizliyini almış olarıq. (12) və (15) bərabərsizliklərini müqayisə etsək

$$\frac{M}{4^n} < \varepsilon \frac{P^2}{4^n} \ \text{ və ya } \ M < \varepsilon P^2$$

bərabərsizliyini almış olarıq. Buradan da, ε-nu ixtiyari olduğunu nəzərə alsaq, $M = 0$ olduğu alınır. Bu isə $M > 0$ şərtinə ziddir. Deməli əks fərziyyəmiz səhvdir. Beləliklə teorem üçbucaqlar üçün doğrudur.

II mərhələ. Tutaq ki, L tamamilə G oblastında yerləşən ixtiyarı qapalı çoxbucaqlıdır. Əgər L çoxbucaqlısı qabarıq olarsa, onu bir

təpədən çıxan diaqonallar ilə üçbucaqlara bölüb (Şəkil 8.4. a)) I mərhələdən istifadə etsək

$\oint\limits_L f(z)dz = 0$ bərabərliyini alarıq.

Şəkil 8.4.

Əgər L ixtiyarı qapalı çoxbucaqlı olarsa, onu sonlu sayda qabarıq çoxbucaqlara bölüb (Şəkil 8.4. b)), bundan əvvəlki mühakiməni tətbiq etməklə, yenə də $\oint\limits_L f(z)dz = 0$ bərabərliyini alarıq.

III mərhələ. Tutaq ki, L, tamamilə G oblastında yerləşən, ixtiyarı düzlənə bilən qapalı konturdur. Onda Lemma 8.1-ə görə istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün L əyrisinə çəkilmiş elə qapalı P_ε sınıq xətti tapmaq olar ki,

$$\left|\oint\limits_L f(z)dz - \int\limits_{P\varepsilon} f(z)dz\right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənər. II mərhələləyə görə $\oint\limits_{P_\varepsilon} f(z)dz = 0$ olduğu üçün sonuncu bərabərsizlik $\left|\oint\limits_L f(z)dz\right| < \varepsilon$ görkəmini alır. Buradan ε-nu ixtiyari olduğunu nəzərə alsaq $\oint\limits_L f(z)dz$ bərabərliyini almış olarıq. ◁

QEYD 1. İsbat Qursaya məxsusdur.

QEYD 2. Oblastın birrabitəli olması mühüm şərtdir. MİSAL. İkirabitəli $G=\{z:0<|z|<2\}$ oblastında analitik olan $f(z)=\frac{1}{z}$ funksiyasının qapalı $|z|=1$ çevrəsi üzrə inteqralı sıfır deyil (bax, misal (6)-nın c) variantına).

QEYD 3. Əgər qapalı L əyrisi çoxrabitəli G oblastının hər hansı bir birrabitəli D oblastından olarsa, yenə teorem öz qüvvəsində qalır.

QEYD 4. Birrabitəli oblastda analitik olan $f(z)$ funksiyasının inteqralı inteqrallama yolundan asılı deyil. Daha dəqiq desək, başlanğıc və son nöqtələri üst-üstə düşən və $f(z)$ funksiyasının analitik olduğu birrabitəli G oblastından olan L_1 və L_2 əyriləri boyunca $\int_{L_1} f(z)dz=\int_{L_2} f(z)dz$ bərabərliyi doğrudur.

QEYD 5. Tutaq ki, birrabitəli G oblastının ∂G sərhəddi hissə-hissə hamar əyridir. $f(z)$ funksiyası G oblastında analitik, qapalı $\overline{G}$ oblastında isə kəsilməzdir. Onda $\oint_{\partial G} f(z)dz=0$ bərabərliyi doğrudur.

LEMMA 8.2. *Tutaq ki, L düzlənə bilən qapalı əyridir. $f(z)$ funksiyası L əyrisinin hər bir nöqtəsində və L əyrisinin daxili hissəsi olan G oblastında analitikdir. Onda* $\oint_L f(z)dz=0$.

İSBATI. Qapalı $\overline{G}=G\cup L$ oblastının istənilən z nöqtəsi üçün elə müsbət ρ_z ədədi var ki, $f(z)$ funksiyası $U_{\rho_z}(z)=\{\xi:|\xi-z|<\rho_z\}$ dairəsində analitikdir. $\Omega=\{U_{\rho_z}(z)\}_{z\in G}$ ətraflar sistemi qapalı $\overline{G}$ oblastı üçün örtük təşkil edir. Borel lemmasına görə bu sistemdən $\overline{G}$ oblastı üçün sonlu $\Omega_n=\{U_{\rho_{z_k}}(z_k)\}_{k=1}^{n}$ örtüyü ayırmaq olar. $D=\bigcup_{k=1}^{n} U_{\rho_{z_k}}(z_k)$ işarə edək. Aydındır ki, $f(z)$ funksiyası $\overline{G}$ oblastını öz daxilinə alan D oblastında analitikdir. L əyrisi tamamilə D oblastına daxil olduğundan Koşi teoreminə görə $\oint_L f(z)dz=0$. ◁.

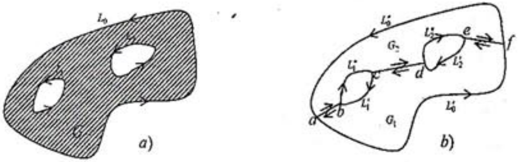
XATIRLAMA. Bir daha yada salaq ki, L və L^+ simvolları eyni məna kəsb edir və onu göstərir ki, L əyrisi üzərində müsbət istiqamət seçilib. L^- simvolı onu göstərir ki, L əyrisi üzərində mənfi istiqamət seçilib.

TEOREM 8.2 *(Çoxrabitəli oblastlarda Koşi teoremi). Tutaq ki, hər biri qalanlarının xaricində yerləşən, düzlənə bilən qapalı L_i $(i=1,2,\dots,n)$ əyriləri, düzlənə bilən qapalı L_0 əyrisinin daxili oblastında yerləşirlər. $f(z)$ funksiyası L_i $(i=0,1,2,\dots,n)$ əyrilərinin hər bir nöqtəsində və bu əyrilər ilə hüdudlanmış $n+1$-rabitəli G oblastında analitikdir. Onda*

$$\oint_{\partial G} f(z)dz=0,$$

burada ∂G ilə G oblastının sərhəddi işarə olunmuşdur. O, müsbət istiqamətli L_0^+ və mənfi istiqamətli L_i^- $(i=1,2,\dots,n)$ əyrilərinin birləşməsindən alınan mürəkkəb konturdur.

İSBATI. Mühakimələri, sadəlik üçün, $n=2$ halı üçün aparaq. Tutaq ki, üçrabitəli G oblastı, müsbət oriyentasialı düzlənə bilən qapalı L_0, L_1, L_2 əyriləri ilə hüdudlanıb (Şəkil 8.5, a)). L_0 əyrisi üzərində a və f, L_1 əyrisi üzərində b və c və L_2 əyrisi üzərində d və e nöqtələri götürək. L_0, L_1, L_2 əyrilərini köməkçi ab, cd və ef xətləri ilə birləşdirərək G oblastını iki birrabitəli G_1 və G_2 oblastlarına bölək. G_1 və G_2 oblastlarının, müsbət oriyentasialı düzlənə bilən qapalı konturlardan ibarət, sərhədlərini, uyğun olaraq, $\gamma'=aL_0'feL_2'dcL_1'ba$ və $\gamma''=abL_1''cdL_2''efL_0''a$ ilə işarə edək (Şəkil 8.5, b)). $f(z)$ funksiyası G_1, G_2 oblastlarında və γ', γ'' əyriləri üzərində analitik olduğu üçün Lemma 8.2-yə görə



Şəkil 8.5.

$$\oint_{\gamma'} f(z)dz=0\,,\ \oint_{\gamma''} f(z)dz=0$$

bərabərlikləri doğrudur.

$$0=\oint_{\gamma'} f(z)dz=\int_{L_0''} f(z)dz+\int_{fe} f(z)dz+\int_{L_2''} f(z)dz+$$
$$+\int_{dc} f(z)dz+\int_{L_1''} f(z)dz+\int_{ba} f(z)dz$$
$$0=\oint_{\gamma''} f(z)dz=\int_{ab} f(z)dz+\int_{L_1'} f(z)dz+\int_{cd} f(z)dz+$$
$$+\int_{L_2'} f(z)dz+\int_{ef} f(z)dz+\int_{L_0'} f(z)dz$$

bərabərliklərini tərəf-tərəfə toplasaq alarıq:

$$\left(\int_{L_0'} f(z)dz+\int_{L_0''} f(z)dz\right)+\left(\int_{ab} f(z)dz+\int_{ba} f(z)dz\right)+\left(\int_{L_1'} f(z)dz+\int_{L_1''} f(z)dz\right)+$$
$$+\left(\int_{cd} f(z)dz+\int_{dc} f(z)dz\right)+\left(\int_{L_2'} f(z)dz+\int_{L_2''} f(z)dz\right)+\left(\int_{ef} f(z)dz+\int_{fe} f(z)dz\right)=0.$$

Buradan da, inteqralın xassəsindən çıxan,

$$\int_{ab} f(z)dz+\int_{ba} f(z)dz=0,\ \int_{cd} f(z)dz+\int_{dc} f(z)dz=0,\ \int_{ef} f(z)dz+\int_{fe} f(z)dz=0$$

bərabərlikləri nəzərə alsaq

$$\left(\int_{L_0'} f(z)dz+\int_{L_0''} f(z)dz\right)+\left(\int_{L_1'} f(z)dz+\int_{L_1''} f(z)dz\right)+\left(\int_{L_2'} f(z)dz+\int_{L_2''} f(z)dz\right)=0. \quad (16)$$

bərabərliyini alarıq.

$$L_0^+=L_0'\cup L_0'',\ L_1^-=L_1'\cup L_1'',\ L_2^-=L_2'\cup L_2'',$$

$$\int_{L_0'} f(z)dz+\int_{L_0''} f(z)dz=\int_{L_0^+} f(z)dz,$$
$$\int_{L_1'} f(z)dz+\int_{L_1''} f(z)dz=\int_{L_1^-} f(z)dz,$$
$$\int_{L_2'} f(z)dz+\int_{L_2''} f(z)dz=\int_{L_2^-} f(z)dz$$

bərabərliklərindən istifadə etsək (16) bərabərliyini

$$\int_{L_0^+} f(z)dz+\int_{L_1^-} f(z)dz+\int_{L_2^-} f(z)dz=0 \quad (17)$$

şəklində yaza bilərik. Müsbət istiqamətli L_0^+, mənfi istiqamətli L_1^- və L_2^- əyrilərinin birləşməsindən alınan $L_0^+\cup L_1^-\cup L_2^-$ mürəkkəb konturun G oblastının ∂G sərhəddi olduğunu nəzərə alsaq, (17) bərabərliyini

$$\oint_{\partial G} f(z)dz=0$$

kimi yazaraq, $n=2$ halı üçün, teoremi isbat etmiş oluruq. Ümumi hal eyni qayda ilə isbat olunur. ◅

Q E Y D 1. Teoremdəki "$f(z)$ funksiyası $L_i\,(i=0,1,2,\dots,n)$ əyrilərinin hər bir nöqtəsində analitikdir" şərtini "$f(z)$ funksiyası, qapalı $\bar{G}$

oblastında kəsilməzdir" şərti ilə əvəz etsək, yenə də teoremin hökmü öz qüvvəsində qalır.

QEYD 2.

$$\oint_{\partial G} f(z)dz = 0$$

bərabərliyi ümumi hal üçün

$$\int_{L_0^-} f(z)dz + \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz + \ldots + \int_{L_n} f(z)dz = 0$$

görkəmini alır. Buradan da, xatırlamamızı nəzərə alsaq,

$$\oint_{L_0} f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \oint_{L_2} f(z)dz + \ldots + \oint_{L_n} f(z)dz \qquad (18)$$

bərabərliyi alınır. Xüsusi halda, $n=1$ olarsa,

$$\oint_{L_0} f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz . \qquad (19)$$

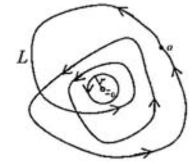
(19) düsturundan istifadə edib inteqrllama konturunu lazım olan şəkildə deformasiya etmək olar. Məsələn, $(z-z_0)^m$ $(m \in \mathrm{Z})$ funksiyasının $z = z_0$ nöqtəsini öz daxilində saxlayan istənilən düzlənə bilən qapalı (sadə) L konturu boyunca olan inteqralını, onun istənilən $|z-z_0| = r$ $(r>0)$ çevrəsi üzrə inteqralı ilə əvəz etmək olar, yəni

$$\oint_L (z-z_0)^m dz = \oint_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 0, & m \neq -1, \\ 2\pi i, & m=-1. \end{cases}$$

Əgər $z = z_0$ nöqtəsini öz daxilində saxlayan düzlənə bilən qapalı L konturu saat əqrəbinin əksinə $z = z_0$ nöqtəsinin başına k dəfə fırlanıbsa (öz-özün kəsən hal!), onda

$$\oint_L (z-z_0)^m dz = k \cdot \oint_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^m dz =$$

$$= k \cdot \begin{cases} 0, & m \neq -1, \\ 2\pi i, & m=-1. \end{cases} \qquad (*)$$



Şəkil 8.6.

Şəkil 8.6-da L konturu a nöqtəsindən çıxıb saat əqrəbinin əksinə $z = z_0$ nöqtəsinin başına 3 dəfə fırlandıqdan sonra yenidən a nöqtəsinə qayıdıb.

8.3. Kompleks dəyişənli funksiyanın ibtidai funksiyası. Qeyri-müəyyən inteqral

TƏRİF 8.2. *Tutaq ki, $f(z)$ və $F(z)$ funksiyaları G oblastında təyin olunmuş funksiyalardır, belə ki, $F(z)$ funksiyası G oblastında analitikdir. Əgər G oblastının bütün z nöqtələrində $F'(z) = f(z)$ bərabərliyi ödənərsə, onda $F(z)$-ə $f(z)$-in ibtidai funksiyası deyilir.*

TEOREM 8.3. *Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası G oblastında kəsilməzdir və onun G oblastından olan istənilən düzlənə bilən qapalı kontur üzrə inteqralı sıfra bərabərdir. Onda onun G oblastında (G oblastının birrabitəli və ya çoxrabitəli olmasından asılı olmayaraq!) ibtidai funksiyası vardır.*

İSBATI. Tutaq ki, z_0 G oblastının qeyd olunmuş, z isə ixtiyari nöqtəsidir. Onda $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ inteqralı z_0 və z nöqtələrini birləşdirən yollardan asılı olmadığı üçün $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$, G oblastında təyin olunmuş birqiymətli funksiyadır. Göstərək ki, $F(z)$ funksiyasının G oblastının hər bir z nöqtəsində, $f(z)$-ə bərabər, törəməsi var. z nöqtəsinin kifayət qədər yaxın ətrafından $z + \Delta z$ nöqtəsi götürək, $F(z)$ funksiyasını təyin edən inteqralın yoldan asılı olmadığından və inteqralın xassəsindən istifadə edərək

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left\{\int_{z_0}^{z+\Delta z}f(\xi)d\xi-\int_{z_0}^{z}f(\xi)d\xi\right\}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}f(\xi)d\xi$$

bərabərliyini yazaq. Sonuncu inteqralda z və $z+\Delta z$ nöqtələrini birləşdirən yol olaraq düz xətt parçası götürək. $\int_{z}^{z+\Delta z}d\xi=\Delta z$ və yuxarıdakı bərabərliklərdən istifadə edərək

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\xi)-f(z)]d\xi$$

fərqini qiymətləndirək:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\xi)-f(z)]d\xi\right|\le$$

$$\le\frac{1}{|\Delta z|}\max_{\xi\in[z,z+\Delta z]}|f(\xi)-f(z)|\cdot|\Delta z|=\max_{\xi\in[z,z+\Delta z]}|f(\xi)-f(z)|.$$

$f(\xi)$ funksiyasının z nöqtəsində kəsilməzliyinə görə istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $\delta>0$ ədədi tapmaq olar ki, $|\Delta z|<\delta$ olduqda, $\max_{\xi\in[z,z+\Delta z]}|f(\xi)-f(z)|<\varepsilon$ olar. Beləliklə, istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $\delta>0$ ədədi tapmaq olar ki, $|\Delta z|<\delta$ olduqda,

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənir. Bu o deməkdir ki,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=F'(z)=f(z).$$

Beləliklə $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\xi)d\xi$ düsturu ilə təyin olunan analitik $F(z)$ funksiyası G oblastında $f(z)$-in ibtidai funksiyasıdır. ◁

S ə R B ə S T İ Ş. Göstərin ki, $f(z)$ funksiyasının G oblastındakı ibtidai funksiyalar çoxluğu $F(z)+C$ düsturu ilə təyin olunur, burada $F(z)$ $f(z)$-in hər hansı bir ibtidai funksiyası, C isə ixtiyarı kompleks ədəddir.

T ə R İ F 8.3. *İbtidai funksiyanın ümumi şəkildə olan $F(z)+C$ ifadəsinə $f(z)$ funksiyasının qeyri-müəyyən inteqralı deyilir, burada $F(z)$ $f(z)$-in hər hansı bir ibtidai funksiyası, C isə ixtiyarı kompleks ədəddir.*

Teorem 8.3-dən çıxan bəzi nəticələri qeyd edək.

N ə T İ C ə 8.1. Sonlu kompleks müstəvinin birrabitəli G oblastında analitik olan $f(z)$ funksiyanın bu oblastda ibtidai funksiysı var.

Birrabitəli oblastlarda Koşi teoremindən (Teorem 8.1) çıxır ki, Teorem 8.3-ün bütün şərtləri ödənir.

N ə T İ C ə 8.2. Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası iki düzlənə bilən qapalı L_0 və L_1 əyriləri arasıda qalan ikirabitəli G oblastında analitik, qapalı $\overline{G}$ oblastında isə kəsilməzdir. Əgər $\oint_{L_0}f(z)dz$, $\oint_{L_1}f(z)dz$ inteqrallarının ikisindən biri sıfır olarsa, onda $f(z)$ funksiyanın bu oblastda ibtidai funksiysı var.

Çoxrabitəli oblastlar üçün olan Koşi teoremindən (Teorem 8.2) və ondan sonra gələn Qeyd 1-dən çıxır ki, əgər $\oint_{L_0}f(z)dz$, $\oint_{L_1}f(z)dz$ inteqrallarının ikisindən biri sıfır olarsa, onda digəri də sıfır olacaq və beləliklə, Teorem 8.3-ün bütün şərtləri ödənəcək.

N ə T İ C ə 8.3. Tutaq ki, Teorem 8.2-nin və ya ondan sonra gələn Qeyd 1-in bütün şərtləri ödənir. Əgər $\oint_{L_i}f(z)dz$ $(i=1,2,\dots,n)$ inteqrallarının hamısı sıfır olarsa, onda $f(z)$ funksiyanın $n+1$ rabitəli G oblastında ibtidai funksiysı var.

Çoxrabitəli oblastlar üçün olan Koşi teoremindən (Teorem 8.2) çıxır ki, əgər $\int_{l_i} f(z)dz \quad (i=1,2,\ldots,n)$ inteqrallarının hamısı sıfır olarsa,onda $\int_{l_0} f(z)dz$ inteqralı da sıfır olar və beləliklə, Teorem 8.3-ün bütün şərtləri ödənilər.

N ə t i c ə 8.4. Əgər Teorem 8.3-ün və ya Nəticə 8.k -ların ($k=1,2,3$) hər hansı birinin şərtləri ödənərsə, onda $f(z)$-in istənilən $\Phi(z)$ ibtidai funksiyası

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi + C \tag{20}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada C - kompleks ədəddir.

N ə t i c ə 8.5. Əgər Teorem 8.3-ün və ya Nəticə 8.k -ların ($k=1,2,3$) hər hansı birinin şərtləri ödənərsə, onda

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = \Phi(z)-\Phi(z_0), \tag{21}$$

Nyuton-Leybnis, düsturu doğrudur. Yəni, müəyyən inteqral qeyri-müəyyən inteqralla ifadə olunur.

(20) düsturunda z-in yerinə z_0 yazaraq, $C=\Phi(z_0)$ bərabərliyini, buradan da (21) düsturunu alarıq.

N ə t i c ə 8.6. Əgər $f(z)$ və $g(z)$ funksiyaları Teorem 8.3-ün və ya Nəticə 8.k -ların ($k=1,2,3$) hər hansı birinin şərtlərini ödəyərlərsə, onda

$$\int_a^b f(\xi)g'(\xi)d\xi = [f(\xi)g(\xi)]_a^b - \int_a^b f'(\xi)g(\xi)d\xi, \tag{22}$$

hissə-hissə inteqrallama, düsturu doğrudur.

$$fg' = (fg)' - gf'$$

eyniliyini inteqrallasaq və

$$\int_a^b (fg)' d\xi = f(b)g(b) - f(a)g(a) = [f(\xi)g(\xi)]_a^b$$

düsturundan istifadə etsək, (22) bərabərliyini alarıq.

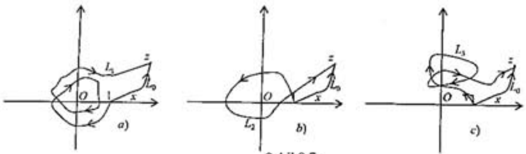
M i s a l. Loqarifmik funksiya. $f(z)=\frac{1}{z}$ funksiyasına baxaq. Aydındır ki, bu funksiya ikirabitəli $D=\{z: 0<|z|<+\infty\}$ oblastında analitikdir. Lakin

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}dz = 2\pi i \neq 0$$

olduğu üçün onun D oblastında ibtidai funksiyası yoxdur. D oblastının ixtiyarı birrabitəli $\Omega \subset D$ oblastında isə ibtidai funksiyası var. Xüsusi halda birrabitəli $G=C\setminus(-\infty,0]$ oblastında $f(z)=\frac{1}{z}$ funksiyasının ibtidai funksiyası var. Məsələn, $\frac{1}{\xi}$ funksiyasının 1 və z nöqtələrini birləşdirən, tamamilə G oblastına daxil olan, istənilən düzlənə bilən əyri bounca götürülmüş inteqralı ilə təyin olunan

$$F(z)=\int_1^z \frac{d\xi}{\xi} \tag{23}$$

funksiyası $f(z)=\frac{1}{z}$-in G oblastında ibtidai funksiyasıdır.



Şəkil 8.7.

Əgər $z=x>0$, 1 və x nöqtələrini birləşdirən yol olaraq $[1,x]$ parçasını seçsək, onda (23) düsturu ilə təyin olunan $F(z)$ funksiyası həqiqi analizdə öyrənilən $\ln x$ funksiyası ilə üst-üstə düşür. Ona görə də G oblastında (23) düsturu ilə təyin olunan $F(z)$ funksiyasını $\ln z$ ilə işarə edirlər. Beləliklə, şərtləşməyə görə

$$\ln z=\int_1^z\frac{d\xi}{\xi},\ z\in G=C\setminus(-\infty,0]. \tag{24}$$

$\frac{1}{\xi}$ funksiyasının 1 və z nöqtələrini birləşdirən, tamamilə $D=\{z:0<|z|<+\infty\}$ oblastına daxil olan və 0 nöqtəsindən keçməyən, istənilən düzlənə bilən əyri boyunca götürülmüş inteqralı ilə təyin olunan

$$\Phi(z)=\int_1^z\frac{d\xi}{\xi},\ z\in D=\{z:0<|z|<+\infty\} \tag{25}$$

funksiyasına baxaq. Bu funksiya çoxgiymətli funksiyadır. 1 və z nöqtələrini birləşdirən konturlar olaraq, L_0,L_1,L_2,L_3 əyrilərini götürək (Şəkil 8.7). (25) düsturu ilə təyin olunan $\Phi(z)$ funksiyasının L_k $(k=0,1,2,3)$ əyriləri üzrə hesablanmış qiymətlərini $\Phi_{L_k}(z)$ ilə işarə edək. $L_0^-\cup L_1$ qapalı konturunun, saat əqrəbi istiqamətində (Şəkil 8.7 a)), 0-ın başına iki dəfə fırlandığını və 8.2-ci bənddəki (*) düsturunu

nəzərə alsaq, $\Phi_{L_1}(z)=\Phi_{L_0}(z)-4\pi i$ bərabərliyini alarıq. $L_0^-\cup L_2$ qapalı konturu, saat əqrəbinin əks istiqamətində (Şəkil 8.7 b)), 0-ın başına bir dəfə fırlandığı üçün $\Phi_{L_2}(z)=\Phi_{L_0}(z)+2\pi i$. Saat əqrəbi istiqamətində dövr edən qapalı $L_0^-\cup L_3$ konturu (Şəkil 8.7. c)) 0-ın başına fırlanmadığı üçün $\Phi_{L_3}(z)=\Phi_{L_0}(z)$.

1 və z nöqtələrini birləşdirən, tamamilə $D=\{z:0<|z|<+\infty\}$ oblastına daxil olan və 0 nöqtəsindən keçməyən, istənilən düzlənə bilən əyri bounca (25) düsturu ilə təyin olunan $\Phi(z)$ funksiyasını ((24)-ə analoq olaraq) $Ln\,z$ ilə işarə etsək, $G=C\setminus(-\infty,0]$ oblastında, sonsuz sayda birqiymətli

$$Ln\,z=\ln z+i2\pi k,\ k\in Z,\quad z\in G=C\setminus(-\infty,0] \tag{26}$$

funksiyalarını alarıq (bunlara $D=\{z:0<|z|<+\infty\}$ oblastında təyin olunmuş çoxqiymətli $Ln\,z$ funksiyasının $G=C\setminus(-\infty,0]$ oblastındakı birqiymətli budaqları deyilir).

Göstərək ki, hər bir $k\in Z$ ədədi üçün (26) düsturu ilə təyin olunan $w=Ln\,z$ funksiyası e^w funksiyasının tərsidir. e^w funksiyası $2\pi i$ dövrlü olduğu üçün isbatı yalnız $k=0$ halı üçün aparmaq kifayətdir. Beləliklə, göstərək ki,

$$e^w=e^{\ln z}=z,\ z\in G=C\setminus(-\infty,0]. \tag{27}$$

(27) tənliyində, w ədədini $w=u+iv$, G oblastından olan z ədədini isə $z=\rho e^{i\varphi}$ $(\rho=|z|>0,-\pi<\varphi<\pi)$ şəklində yazsaq,

$$\begin{cases} e^u=\rho \\ v=\varphi+2\pi k,k\in Z\end{cases}$$

bərabərliklərini alarıq. (27) tənliyini ödəyən w funksiyasının birqiymətliliyini təmin etmək üçün $k=0$ götürək. Həqiqi analizdən məlumdur ki, $e^u=\rho$ tənliyini ödəyən yeganə $u=\ln\rho$ funksiyası vardır. Beləliklə, G oblastında (27) tənliyini ödəyən birqiymətli $w=\ln|z|+i\arg z$ funksiyası vardır. $e^w=z$ eyniliyini diferensiallasaq, $e^w\dfrac{dw}{dz}=1$ bərabərliyini, buradan da $\dfrac{dw}{dz}=\dfrac{1}{z}$ düsturunu alarıq. Deməli (27) tənliyini ödəyən w funksiyası, G oblastında, $\dfrac{1}{z}$ funksiyasının $z=1$ nöqtəsində sıfra çevrilən ibtidai funksiyasıdır. Digər tərəfdən, (24) düsturu ilə təyin olunan $\ln z=\int_1^z\dfrac{d\xi}{\xi}$ funksiyası, $\dfrac{1}{z}$ funksiyasının $z=1$ nöqtəsində sıfra çevrilən ibtidai funksiyasıdır. Nəticə olaraq alırıq ki, G oblastında

$$w=\int_1^z\frac{d\xi}{\xi} \tag{28}$$

bərabərliyi doğrudur. $w=\ln|z|+i\arg z\,(-\pi<\arg z<\pi)$ bərabərliyindən və $\ln z=\int_1^z\dfrac{d\xi}{\xi}$ işarələməsindən istifadə etsək (28)-dən

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z\,(-\pi<\arg z<\pi) \tag{29}$$

düsturunu almış olarıq. $Ln\,z$ funksiyasının digər budaqları üçün

$$Ln\,z=\ln|z|+i\arg z+i2\pi k,\ k\in Z$$

düsturu doğrudur.

8.4. Çalışmalar

8.1.

1). $\int_L(1+i-2\bar{z})dz$ inteqralını hesablayın, burada L, $z_1=0$ və $z_2=1+i$ nöqtələrini birləşdirən a) parçadır; b) $y=x^2$ parabolasının qövsüdür; c) $z_1z_2z_3$ $(z_3=1)$ sınıq xəttidir.

2). $\int_L(z^2+z\bar{z})dz$ inteqralını hesablayın, burada L- $|z|=1(0\le\arg z\le\pi)$ yarımçevrəsidir.

3). $|z|=2$ çevrəsinin aşağı yarımmüstəvidə qalan, $z_1=-2$ nöqtəsindən $z_2=2$ nöqtəsinə doğru yönəlmiş, L yarımçevrəsi üzrə aşağıdakı inteqralları hesablayın.

a) $\int_L\bar{z}dz$; b) $\int_L\dfrac{1}{z}dz$; c) $\int_L|z|dz$; d) $\int_L\bar{z}|z|dz$; e) $\int_L(2x-3iy)dz$;

f) $\int_Lf(z)dz$, burada $f(z)$ ilə $\sqrt[4]{z}\ (\operatorname{Im}z\le 0)$ çoxqiymətli funksiyasının $\sqrt[4]{1}=i$ şərtini ödəyən kəsilməz budağı işarə olunmuşdur.

4). Başlanğıcı $z_1=-2$ və sonu $z_2=i$ nöqtələrində olan L parçası üzrə aşağıdakı funksiyaların inteqrallarını hesablayın.

a) z; b) $\operatorname{Im}z$; c) $\dfrac{1}{|z|}$.

5). Başlanğıcı $z_1=0$ və sonu $z_2=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nöqtələrində olan L parçası üzrə aşağıdakı funksiyaların inteqrallarını hesablayın.

a) e^z; b) $e^{|z|^2}\operatorname{Re}z$; c) $e^{z^2}\operatorname{Re}z$; d) $\dfrac{|z|}{1+|z|}$.

6). $|z|=1$ çevrəsinin yuxarı yarımmüstəvidə qalan, $z_1=1$ nöqtəsindən $z_2=-1$ nöqtəsinə doğru yönəlmiş, L yarımçevrəsi üzrə $\int_Lf(z)dz$

inteqralını hesablayın, burada $f(z)$ ilə $\frac{1}{\sqrt{z}}\ (\operatorname{Im} z \geq 0)$ çoxqiymətli funksiyasının $f(1) = -1$ şərtini ödəyən kəsilməz budağı işarə olunmuşdur.

7). Aşağıdakı inteqralları hesablayın.

a) $\oint\limits_{|z|=1} z\bar{z}dz$; b) $\oint\limits_{|z|=2} z \operatorname{Im} z^2 dz$; c) $\oint\limits_{|z-1|=1} \operatorname{Re} z dz$.

8). $\int\limits_L (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz$ inteqralını hesablayın, burada L, $z_1 = 0$ və $z_2 = 1 + 2i$ nöqtələrini birləşdirən a) parçadır; b) $z_1 z_2 z_3$ $(z_3 = 1)$ sınıq xəttidir.

8.2.

1). Başlanğıcı $z_1 = 0$ və sonu $z_3 = \frac{\pi}{2}$ nöqtələrində olan $L = (z_1 z_2 z_3)$ $(z_2 = \pi + i\pi)$ sınıq xətti üzrə aşağıdakı funksiyaların inteqrallarını hesablayın.

a) $\sin z$; b) $\cos z$; c) z^2; d) $z \sin z$; e) $z \cos z$; f) $z \sin z \cos z$.

2). Koşi teoreminin köməyi ilə aşağıdakı inteqralları hesablayın (Qapalı konturlar müsbət oriyentasiyalıdır).

a) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z}{1+z^2}$; b) $\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^5}$; c) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}$; d) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)(z-3)}$;

e) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z-1)(z-3)}$; f) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{(z+i)(z-i)z}$; g) $\oint\limits_{|z-i|=1,5} \frac{dz}{(z+i)(z-i)z}$;

h) $\oint\limits_{|z+i|=1,5} \frac{dz}{(z+i)(z-i)z}$;

3). $z_1 = -i$ və $z_2 = i$ nöqtələrini birləşdirən ixtiyari L əyrisi üzrə $\int\limits_L z e^{\sin^2 z} dz$ inteqralını hesablayın.

4). Başlanğıcı $z_1 = -\frac{\pi}{2}$ və sonu $z_2 = \frac{\pi}{2}$ nöqtələrində olan $L = \left\{z : |z| = \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z \geq 0\right\}$ yarımçevrəsi üzrə $\int\limits_L \cos z e^{\sin z} dz$ inteqralını hesablayın.

5). Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası qapalı $\{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$ oblastında analitikdir və $\oint\limits_{|z|=2} f(z)dz = 2i$. $\oint\limits_{|z|=1} f(z)dz$ inteqralının qiyməti nəyə bərabərdir?

6). Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası birrabitəli G oblastında analitikdir və L G oblastına daxil olan qapalı konturdur. $\oint\limits_L \overline{f(\bar{z})} dz$ inteqralının qiyməti nəyə bərabərdir?

7). $\oint\limits_{|x|+|y|=1} \frac{1}{5+2iz} dz = ?$

8). Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası $-a < \operatorname{Im} z < a$ $(a > 0)$ zolağında analitikdir və

$$f(z) \to 0 \quad (z \to \infty, -a < \operatorname{Im} z < a)$$

şərti ödənir. Göstərin ki, əgər

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

yığılırsa, onda $\forall \alpha \in (-a, a)$ üçün

$$\int\limits_{-\infty + i\alpha}^{+\infty + i\alpha} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

9). $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ olduğunu bilərək

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x dx, \; -\infty < \alpha < +\infty$$

inteqralını hesablayın.

10). Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası $-a < \arg z < a$ $(a > 0)$ bucağında analitikdir və

$$zf(z) \to 0 \quad (z \to 0, |\arg z| < a), \quad zf(z) \to 0 \quad (z \to \infty, |\arg z| < a)$$

şərtləri ödənir. Göstərin ki, əgər

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

yığılırsa, onda $\forall \alpha \in (-a, a)$ üçün

$$\int_{\arg z = \alpha} f(z)dz = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

11). $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ olduğunu bilərək

$$J_1 = \int_0^{+\infty}\cos x^2 dx, \; J_2 = \int_0^{+\infty}\sin x^2 dx$$

Frenel inteqrallarını hesablayın.

8.3.

1). Aşağıdakı funksiyaların göstərilən oblastlarda ibtidai funksiyası varmı?

a) $f(z) = \frac{1}{z-1}$, $(G = C \setminus \{1\})$;

b) $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$, $(G = \{z : 0 < |z| < 1\})$;

c) $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$, $(G = \{z : |z| < 1\})$;

d) $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$, $(G = \{z : |z| > 1\})$;

e) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $(G = \{z : |z| < 1\})$;

f) $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $(G = C \setminus \{0\})$;

g) $f(z) = z$, $(G = C)$;

2). Aşağıdakı funksiyaların ibtidai funksiyasını tapın ($a \neq 0, b$ kompleks ədədlərdir).

a) e^{az}; b) $ch az$; c) $sh az$; d) $\cos az$; e) $\sin az$; f) $e^{az}\cos bz$; g) ze^{az}; h) $z\cos az$.

3). Başlanğıcı $z_1 = 0$ və sonu $z_2 = \pi + i\pi$ nöqtələrində olan L parçası üzrə $\int_L \sin z dz$ inteqralını hesablayın.

4). Başlanğıcı $z_1 = 0$ və sonu $z_2 = i$ nöqtələrində olan L parçası üzrə $\int_L (z^2 - z)dz$ inteqralını hesablayın.

5). Başlanğıcı $z_1 = 0$ və sonu $z_2 = 1 + i$ nöqtələrində olan L parçası üzrə $\int_L (2i - z)dz$ inteqralını hesablayın.

6). Başlanğıcı $z_1 = 1$ və sonu $z_2 = i$ nöqtələrində olan L parçası üzrə $\int_L (z^2 - 3iz)dz$ inteqralını hesablayın.

7). $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ellipsin, başlanğıcı $z_1 = 2i$ və sonu $z_2 = -3$ nöqtələrində olan, L qövsü üzrə $\int_L z^3 dz$ inteqralını hesablayın.

8). $y^2 = 1 + x$ parabolasının, başlanğıcı $z_1 = -i$ və sonu $z_2 = i$ nöqtələrində olan, L qövsü üzrə $\int_L \frac{dz}{z}$ inteqralını hesablayın.

9). $|z| = 1$ çevrəsinin , başlanğıcı $z_1 = -i$, sonu $z_2 = i$ nöqtələrində və $\operatorname{Re} z \geq 0$ yarımmüstəvisində olan, L qövsü üzrə $\int_L \frac{dz}{z}$ inteqralını hesablayın.

8.5. Cavablar və göstərişlər

8.1.

1). a) $2(i-1)$; b) $-2+\frac{4}{3}i$; c) -2. 2). $-\frac{8}{3}$. 3). a) $4\pi i$; b) πi; c) 8; d) 0; e) $10\pi i$; f) $\frac{4}{5}\sqrt[4]{2}\left[\sqrt{2}+i\left(\sqrt{2}+2\right)\right]$. H ə l l i. $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{|z|}e^{i\frac{t+2\pi k}{4}}$, $k = 0,1,2,3$ $(\pi \leq t = \arg z \leq 2\pi)$ düsturundan alınır ki, $k=0$ olduqda, $\arg 1 = 2\pi$ olduğuna görə, $\sqrt[4]{1} = i$ olur. Deməli $f(z) = \sqrt[4]{|z|}e^{i\frac{t}{4}}$. Beləliklə, $\int_L f(z)dz = \sqrt[4]{2}\int_\pi^{2\pi} e^{i\frac{t}{4}} 2e^{it} i dt = \frac{8\sqrt[4]{2}}{5}\left(e^{i\frac{5\pi}{2}} - e^{i\frac{5\pi}{4}}\right) = \frac{4}{5}\sqrt[4]{2}\left[\sqrt{2}+i\left(\sqrt{2}+2\right)\right]$. 4). a) i; b) $\frac{-1+i}{2}$; c) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$. H ə l l i. L parçasının $z(t) = x(t) + iy(t) = t + (1-t)i$, $(t \in [1,0])$ parametrik tənliyindən istifadə edərək aşağıdakı hesablamaları aparaq:

$$\int_L \frac{dz}{|z|} = -\int_{L^-} \frac{dz}{|z|} = -\int_0^1 \frac{z'(t)dt}{\sqrt{z(t)\overline{z(t)}}} = -\int_0^1 \frac{(1-i)dt}{\sqrt{t^2+(1-t)^2}} =$$

$$= \frac{i-1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4}+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{i-1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{4}+s^2}} = \frac{i-1}{\sqrt{2}}2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{4}+s^2}} =$$

$$= \frac{i-1}{\sqrt{2}}2\ln\left(s+\sqrt{\frac{1}{4}+s^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{i-1}{\sqrt{2}}2\left[\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln\frac{1}{2}\right] =$$

$$= \frac{i-1}{\sqrt{2}}2\ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)^{-2} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1-i}{\sqrt{2}}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

5). a) $e^{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} - 1$; b) $\frac{e-1}{8}\left(1+i\sqrt{3}\right)$; c) $\frac{1}{8}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} - 1\right)$; d) $\frac{e-1}{8}\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

6). $2(1-i)$.Göstəriş. L əyrisinin $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ parametrik tənliyindən və $\sqrt{z} = \sqrt{e^{i\theta}} = e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$ münasibətindən istifadə edib $\int_L f(z)dz = \int_L \frac{1}{\sqrt{z}}dz$ inteqralını $\int_0^1 \frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}}$ Riman inteqralına gətirin. 7). a) 0; b) -16π; c) πi. 8). a) $\frac{3}{2}+3i$; b) $\frac{1}{2}+4i$.

8.2.

1). a) 1; b) 1; c) $\frac{\pi^3}{8}$; d) 1; e) $\frac{\pi}{2}-1$; f) $\frac{\pi}{8}$. 2). a) 0; b) 0; c) 0; d) $-\pi i$; e) 0; f) 0;

g) πi; h) πi. H ə l l i. Çoxrabitəli oblastlar üçün olan Koşi teoreminə görə

$$J=\oint\limits_{|z+i|=1,5}\frac{dz}{(z+i)(z-i)z}=\oint\limits_{|z+i|=\frac{1}{4}}\frac{dz}{(z+i)(z-i)z}+\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}}\frac{dz}{(z+i)(z-i)z}\equiv J_1+J_2$$

$$\frac{1}{(z+i)(z-i)z}=-\frac{1}{2}\frac{1}{z+i}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z}$$

ayrılışından istifadə etsək

$$J_1=-\frac{1}{2}\oint\limits_{|z+i|=\frac{1}{4}}\frac{dz}{z+i}-\frac{1}{2}\oint\limits_{|z+i|=\frac{1}{4}}\frac{dz}{z-i}+\oint\limits_{|z+i|=\frac{1}{4}}\frac{dz}{z}=-\pi i,$$

$$J_2=-\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}}\frac{dz}{z+i}-\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}}\frac{dz}{z-i}+\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}}\frac{dz}{z}=2\pi i$$

bərabərliklərini yaza bilərik. Buradan da $J=\pi i$ bərabərliyi alınır.

3). 0. G ö s t ə r i ş. $f(z)=ze^{\sin^2 z}$ funksiyası analitik olduğuna görə inteqrallama yolu olaraq, tənliyi $z(t)=it, t\in[-1,1]$ düsturu ilə verilən $[-i,i]$ parçasını götürün və inteqralaltı funksiyanın təkliyindən istifadə edin. 4). $2sh1$. 5). $2i$. 6). 0. 7). 0. 9). $\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}\alpha^2}$. G ö s t ə r i ş.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\cos\alpha x dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\cos\alpha x dx-i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\sin\alpha x dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{-i\alpha x}dx=e^{-\frac{1}{4}\alpha^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x+i\frac{\alpha}{2}\right)^2}dx=e^{-\frac{1}{4}\alpha^2}\int\limits_{-\infty+i\frac{\alpha}{2}}^{+\infty+i\frac{\alpha}{2}}e^{-z^2}dz$$

münasibətlərindən və 8-ci məsələdən istifadə edin. 11). $J_1=J_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

G ö s t ə r i ş. 10-cu məsələdən istifadə edin.

8.3.

1). a)yoxdur; b)yoxdur; c)var; d)var; e)var; f) var; g) yoxdur.

2). a) $\frac{1}{a}e^{az}+C$; b) $\frac{1}{a}shaz+C$; c) $\frac{1}{a}chaz+C$; d) $\frac{1}{a}\sin az$; e) $-\frac{1}{a}\cos az+C$; f) $e^{az}\frac{a\cos bz+b\sin bz}{a^2+b^2}+C$; g) $\frac{1}{a}\left(z-\frac{1}{z}\right)e^{az}+C$; h) $\frac{z}{a}\sin az+\frac{1}{a^2}\cos az+C$.

3). $ch\pi+1$. 4). $-\frac{i}{6}$. 5). $-2+i$. 6). $-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$. 7). $\frac{65}{4}$. 8). $-i\pi$. H ə l l i. $y^2=1+x$ parabolasının başlanğıcı $z_1=-i$ və sonu $z_2=i$ nöqtələrində olan, L qövsü $G=C\setminus[0,+\infty)$ oblastında yerləşir. Bu oblastda $\frac{1}{z}$ funksiyasının ibtidai funksiyası olaraq Lnz funksiyasının $\ln(-1)=i\pi$ şərtini ödəyən $\ln z$ budağını götürsək, $\int\limits_L\frac{dz}{z}=\ln i-\ln(-i)=i\frac{\pi}{2}-i\frac{3\pi}{2}=-i\pi$ olduğunu görərik. Aydındır ki, cavab Lnz funksiyasının budağının seçilişindən asılı deyil! 9). $i\pi$.

IX Fəsil
KOŞİ İNTEQRALI. KOŞİ TİPLİ İNTEQRAL

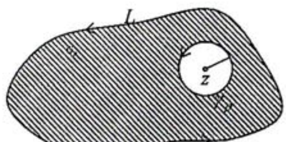
9.1. Koşinin inteqral düsturu

TEOREM 9.1 *(Birrabitəli oblastlarda Koşi düsturu). Tutaq ki,* $f(z)$*-sonlu kompleks müstəvinin birrabitəli* G *oblastında və onun düzlənə bilən müsbət oriyentasiyalı qapalı* L *sərhəddi üzərində analitik funksiyadır. Onda* G *oblastından olan istənilən* z *nöqtəsi üçün*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \qquad (1)$$

düsturu doğrudur.

İSBATI. Köməkçi $\varphi(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}$ funksiyasına baxaq. Müsbət ρ ədədini elə seçək ki, mərkəzi z nöqtəsində, radiusu ρ-ya bərabər olan γ_ρ çevrəsi öz daxili ilə birlikdə G oblastına daxil olsun. $\varphi(\xi)$ funksiyası



Şəkil 9.1.

G oblastının L və γ_ρ konturları arasındakı G_ρ (Şəkil 9.1) oblastında analitik olduğu üçün, Koşinin mürəkkəb konturlar haqqındakı teoreminə görə

$$\oint_L\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \qquad (2)$$

bərabərliyi doğrudur. (2) bərabərliyinin sol tərəfi ρ-dan asılı deyil. Deməli sağ tərəfdəki inteqralın qiyməti ρ-dan asılı deyil. Bu qiyməti tapmaq üçün (2) bərabərliyinin sağındakı inteqralda $\xi=z+\rho e^{i\varphi}$ əvəzləməsi aparsaq

$$\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=i\int_0^{2\pi}f\left(z+\rho e^{i\varphi}\right)d\varphi$$

bərabərliyini alarıq. Bu bərabərlikdən və

$$\int_0^{2\pi}f\left(z+\rho e^{i\varphi}\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left[f\left(z+\rho e^{i\varphi}\right)-f(z)\right]d\varphi+\int_0^{2\pi}f(z)d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[f\left(z+\rho e^{i\varphi}\right)-f(z)\right]d\varphi+2\pi f(z)$$

münasibətlərindən istifadə etsək (2) bərabərliyini

$$\oint_L\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=i\int_0^{2\pi}\left[f\left(z+\rho e^{i\varphi}\right)-f(z)\right]d\varphi+2\pi i f(z)$$

şəklində yaza bilərik. Bu bərabərlikdə $\rho\to 0$ şərti daxilində limitə keçsək alarıq:

$$\oint_L\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=i\lim_{\rho\to 0}\left\{\int_0^{2\pi}\left[f\left(z+\rho e^{i\varphi}\right)-f(z)\right]d\varphi\right\}+2\pi i f(z). \qquad (3)$$

$f(z)$ funksiyasının kəsilməzliyindən çıxır ki,

$$\lim_{\rho\to 0}\left\{\int_0^{2\pi}\left[f\left(z+\rho e^{i\varphi}\right)-f(z)\right]d\varphi\right\}=0. \qquad (4)$$

(3) və (4) bərabərliklərindən (1) düsturu alınır. ◁

Q E Y D 1. $\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$ ifadəsinə Koşi inteqralı, (1) düsturuna isə Koşi düsturu deyilir.

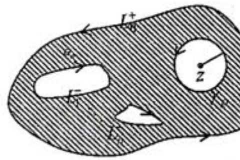
Q E Y D 2. Koşi düsturu göstərir ki, analitik funksiyanın qiymətləri bir-biri ilə sıx bağlıdır. Onun L konturu üzərindəki qiymətləri G oblastının nöqtələrindəki qiymətləri tamamilə birqiymətli olaraq təyin edir.

Q E Y D 3. $f(z)$ funksiyası G oblastında analitik, qapalı $\bar{G}$ oblastında isə kəsilməz olduqda da teoremin hökmü öz qüvvəsində qalır.

T E O R E M 9.2 *(Çoxrabitəli oblastlarda Koşi düsturu). Tutaq ki, hər biri qalanlarının xaricində yerləşən, düzlənə bilən qapalı $L_i\ (i=1,2,\dots,n)$ əyriləri, düzlənə bilən qapalı L_0 əyrisinin daxili oblastında yerləşirlər. $f(z)$ funksiyası $L_i\ (i=0,1,2,\dots,n)$ əyrilərinin hər bir nöqtəsində və bu əyrilər ilə hüdudlanmış $n+1$-rabitəli G oblastında analitikdir. Onda G oblastından olan istənilən z nöqtəsi üçün*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \qquad (5)$$

düsturu doğrudur, burada L ilə G oblastının sərhəddi işarə olunmuşdur. O, müsbət istiqamətli L_0^+ və mənfi istiqamətli $L_i^-\ (i=1,2,\dots,n)$ əyrilərinin birləşməsindən alınan mürəkkəb konturdur (Şəkil 9.2).



Şəkil 9.2.

İ S B A T I. Müsbət ρ ədədini elə seçək ki, mərkəzi z nöqtəsində, radiusu ρ-ya bərabər olan γ_ρ çevrəsi öz daxili ilə birlikdə G

oblastına daxil olsun (Şəkil 9.2). $\varphi(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi-z}$ funksiyası G oblastının $L=L_0^+\cup L_1^-\cup\dots\cup L_n^-$ və γ_ρ konturları arasındakı $\overline{G_\rho}$ (Şəkil 9.1) oblastında analitik olduğu üçün, Koşinin mürəkkəb konturlar haqqındakı teoreminə görə

$$\oint_L\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \qquad (6)$$

bərabərliyi doğrudur. Teorem 9.1-ə görə doğru olan

$$\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=2\pi i f(z)$$

bərabərliyi, (6) düsturunun sağ tərəfində nəzərə alsaq, (5) düsturunun isbatını almış olarıq. ◁

Q E Y D 1. Teoremdəki "$f(z)$ funksiyası $L_i\ (i=0,1,2,\dots,n)$ əyrilərinin hər bir nöqtəsində analitikdir" şərtini "$f(z)$ funksiyası, qapalı $\bar{G}$ oblastında kəsilməzdir" şərti ilə əvəz etsək, yenə də teoremin hökmü öz qüvvəsində qalır.

Q E Y D 2. Əgər $z\in C\setminus\bar{G}$ olarsa, $\frac{f(\xi)}{\xi-z}$ funksiyası $\bar{G}$ oblastında analitik olduğuna görə, Koşinin mürəkkəb konturlar haqqındakı teoremindən çıxır ki,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=0.$$

Beləliklə

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\begin{cases}f(z), & z\in G,\\ 0, & z\notin G.\end{cases}$$

9.2. Koşi tipli inteqral

TƏRİF 9.1. *Tutaq ki, L düzələ bilən əyri (qapalı olması tələb olunmur!), $\varphi(\xi)$ isə L əyrisi üzərində təyin olunmuş kəsilməz (analitik olması tələb olunmur!) funksiyadır.*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

ifadəsinə Koşi tipli inteqral deyilir.

TEOREM 9.3. *Koşi tipli inteqral ilə təyin olunan*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

funksiyasının, L konturuna daxil olmayan, hər bir z nöqtəsində istənilən tərtibdən törəməsi var və həmin törəmələr

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi \quad (n\in N) \tag{7}$$

düsturu ilə hesablanır.

İSBATI. Teoremi, sadəlik üçün, $n=1$ və $n=2$ halları üçün isbat edək. İstənilən n-üçün tam riyazi induksiya prinsipi ilə isbat olunur. Tutaq ki, $z\notin L$. z nöqtəsinin kifayət qədər yaxın ətrafından olan və L konturuna daxil olmayan $z+h$ ($|h|$- kifayət qədər kiçikdir) nöqtəsi üçün

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}$$

nisbətini

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} \tag{8}$$

şəklində yazaq. (8) bərabərliyində, formal olaraq, $h\to 0$ şərti daxilində limitə keçsək

$$F'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2} \tag{9}$$

düsturunu alarıq. Bu formal limitə keçməni əsaslandırmaq üçün

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z-h)(\xi - z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z-h)(\xi - z)^2} \tag{10}$$

düsturundan istifadə edək. $2d\,(d>0)$ ilə z nöqtəsindən L konturuna qədər olan məsafəni, l ilə L konturunun uzunluğunu və M ilə L konturu üzərində $|\varphi(\xi)|<M$ bərabərsizliyini ödəyən ədədi (belə ədədin varlığı $\varphi(\xi)$ funksiyasının kəsilməzliyindən çıxır) işarə etsək, (10) bərabərliyindən

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z-h)(\xi - z)^2}\right|<\frac{|h|M}{2\pi}\int_L \frac{|d\xi|}{|\xi - z-h||\xi - z|^2}\le\frac{|h|Ml}{2\pi d^3}$$

qiymətləndirməsini alarıq. Bu qiymətləndirmədən və (10) bərabərliyindən çıxır ki,

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z-h)(\xi - z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2}\right]=0.$$

Alınan bərabərlik göstərir ki, (8) bərabərliyində $h\to 0$ şərti daxilində limitə keçmək olar. Beləliklə (7) düsturunun $n=1$ üçün doğru olduğunu göstərdik.

$F(z)$ funksiyasının ikinci tərtib törəməsini hesablamaq üçün (9) düsturundan istifadə edib

$$\frac{F'(z+h)-F'(z)}{h}-\frac{2!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)^3}$$

ifadəsini

$$\frac{F'(z+h)-F'(z)}{h}-\frac{2!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi-z)^3}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi(\xi)\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\xi-z-h)^2}-\frac{1}{(\xi-z)^2}\right)-\frac{2}{(\xi-z)^3}\right]d\xi \qquad (11)$$

şəklində yazaq.

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\xi-z-h)^2}-\frac{1}{(\xi-z)^2}\right)-\frac{2}{(\xi-z)^3}=h\frac{3(\xi-z)-2h}{(\xi-z-h)^2(\xi-z)^3}$$

bərabərliyini nəzərə alsaq (11) düsturunu

$$\frac{F'(z+h)-F'(z)}{h}-\frac{2!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi-z)^3}=$$
$$=\frac{h}{2\pi i}\int_L\varphi(\xi)\frac{3(\xi-z)-2h}{(\xi-z-h)^2(\xi-z)^3}d\xi \qquad (12)$$

kimi yaza bilərik.

$$\tau(h,\xi)=\frac{3(\xi-z)-2h}{(\xi-z-h)^2(\xi-z)^3} \quad (\xi\in L)$$

funksiyası $h=0$ nöqtəsində

$$\sup_{\xi\in L}|\tau(0,\xi)|\le\frac{3}{d^4}$$

bərabərsizliyini ödədiyi üçün $|h|$-ın kifayət qədər kiçik qiymətlərində (kəsilməz funksiyanın xassəsinə görə)

$$\sup_{\xi\in L}|\tau(h,\xi)|=K<+\infty \qquad (13)$$

şərtini ödəyəcəkdir. (13) bərabərsizliyindən və (12) bərabərliyindən

$$\left|\frac{F'(z+h)-F'(z)}{h}-\frac{2!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi-z)^3}\right|\le\frac{|h|l}{2\pi}MK \qquad (14)$$

qiymətləndirməsi alınır. (14) qiymətləndirməsindən alınan

$$\lim_{h\to 0}\frac{F'(z+h)-F'(z)}{h}=F''(z)=\frac{2!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi-z)^3}$$

bərabərlik, teoremin $n=2$ üçün də doğru olduğunu göstərir. Qeyd etdiyimiz kimi, ümumi hal tam riyazi induksiya prinsipi ilə isbat olunur. ⊲

SƏRBƏST İŞ. İsbatı istənilən n natural ədədi üçün yerinə yetirin.

9.3. Koşinin inteqral düsturundan çıxan bəzi nəticələr

9.3.1. Oblastda analitik olan funksiyanın istənilən tərtibdən törəməsinin varlığı

TEOREM 9.4. *Oblastda analitik olan funksiyanın istənilən tərtibdən törəməsi vardır.*

İSBATI. Tutaq ki, $f(z)$ funksiyasının G oblastının hər bir nöqtəsində birinci tərtib törəməsi vardır. Göstərək ki, G oblastının istənilən z nöqtəsində onun istənilən tərtibdən törəməsi vardır. z nöqtəsini öz daxilinə alan və daxili hissəsi tamamilə G oblastında yerləşən, düzlənə bilən qapalı L əyrisi götürək. Koşi düsturundan istifadə edərək

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z} \qquad (15)$$

bərabərliyini yazaq. Aydındır ki, hər bir Koşi inteqralı Koşi tipli inteqraldır. (15) düsturuna Teorem 9.3-i tətbiq etsək teoremin isbatını alarıq. ⊲.

Q E Y D 1. G oblastında analitik olan $f(z)$ funksiyasının istənilən $z\in G$ nöqtəsində n-ci tərtib törəməsi

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{l}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi \quad (n\in N) \tag{16}$$

düsturu ilə hesablanır.

Q E Y D 2. (16) düsturundan kontur boyunca olan inteqralları hesablayanda istifadə olunur.

M i s a l. $\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$ inteqralını hesablayın.

(16) düsturundan istifadə etsək

$$\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz=-2\pi i\frac{1}{2!}\left(\frac{e^z}{z}\right)''\Bigg|_{z=1}=-\pi i\frac{e^z\left(z^2-2z+2\right)}{z^3}\Bigg|_{z=1}=-\pi i e$$

olar.

9.3.2. Morera teoremi

T E O R E M 9.5. *Əgər birrabitəli G oblastında kəsilməz olan $f(z)$ funksiyasının, bu oblastdan olan, istənilən düzlənə bilən qapalı kontur boyunca inteqrqalı sıfra bərabər olarsa, onda o, bu oblastda analitikdir.*

İ S B A T I. Teoremin şərtlərindən çıxır ki, $\int\limits_{z_0}^{z}f(\xi)d\xi$ inteqralı G oblastının z_0 və z nöqtələrini birləşdirən və G oblastından olan yolların formasından asılı deyil. Onda Teorem 8.3-ə görə $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z}f(\xi)d\xi$ funksiyası $f(z)$-in, G oblastında, ibtidai funksiyasıdır, yəni $F'(z)=f(z)$ $(z\in G)$. Teorem 9.4-ə görə $F(z)$-in istənilən tərtibdən törəməsi olduğu üçün $f(z)$-in də G oblastının hər

bir nöqtəsində törəməsi (hətta istənilən tərtibdən!) var. Deməli $f(z)$ funksiyası G oblastında analitikdir. ◁

Q E Y D. "istənilən düzlənə bilən qapalı kontur" ifadəsini "istənilən üçbucaq" ifadəsi ilə əvəz etdikdə də teorem öz qüvvəsində qalır.

9.3.3. Modulun maksimum prinsipi

T E O R E M 9.10. *Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası G oblastında analitikdir. Əgər $f(z)$ funksiyası G oblastında sabit deyilsə, onda G oblastının istənilən z nöqtəsi üçün*

$$f(z)<\sup_{\xi\in G}f(\xi) \tag{17}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İ S B A T I. $\sup\limits_{\xi\in G}f(\xi)=+\infty$ halı aydın olduğu üçün $M=\sup\limits_{\xi\in G}f(\xi)<+\infty$ halını nəzərdən keçirək və əksini fərz etmə üsulundan istifadə edək. Tutaq ki, elə $z_0\in G$ nöqtəsi var ki, $M=f(z_0)$. Göstərək ki, belə olan halda, mərkəzi z_0 nöqtəsində radius ρ-ya bərabər olan və G oblastından olan, istənilən $\gamma_\rho=\{\xi:|\xi-z_0|=\rho\}$ çevrəsinin hər bir nöqtəsində $M=|f(\xi)|$ $(\xi\in\gamma_\rho)$ bərabərliyi ödənəcək. $\gamma_\rho=\{\xi:|\xi-z_0|=\rho\}$ çevrəsinə Koşi düsturunu tətbiq etsək,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z_0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+\rho e^{i\varphi}\right)d\varphi \tag{18}$$

düsturunu alarıq. Əgər γ_ρ çevrəsinin hər hansı bir ξ_0 $(\varphi=\varphi_0)$ nöqtəsində $|f(\xi)|<M$ bərabərsizliyi ödənərsə, $f(\xi)$ funksiyasının kəsilməzliyinə görə, bu bərabərsizlik γ_ρ çevrəsinin müəyyən bir $\gamma_\rho^{(1)}$ $(\varphi\in(\varphi_0-\delta,\varphi_0+\delta),\delta>0)$ qövsü üzərində də doğru olar. Bunları (18) düsturunda nəzərə alsaq

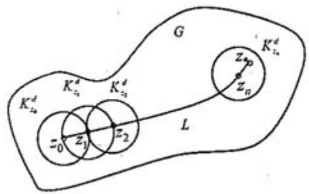
$$|f(z_0)| = M \le \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta}|f(z_0+\rho e^{i\varphi})|d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{\substack{|\varphi-\varphi_0|\ge\delta \\ \varphi\in[0,2\pi]}}|f(z_0+\rho e^{i\varphi})|d\varphi \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta}|f(z_0+\rho e^{i\varphi})|d\varphi + \frac{1}{2\pi}(2\pi-2\delta)M < \frac{1}{2\pi}2\delta M + \frac{1}{2\pi}(2\pi-2\delta)M = M$$

Alınan $M < M$ bərabərsizliyi onu göstərir ki, $\gamma_\rho = \{\xi : |\xi - z_0| = \rho\}$ çevrəsinin hər bir nöqtəsində $M = |f(\xi)|$ $(\xi \in \gamma_\rho)$ bərabərliyi ödənir. Buradan və

$$\overline{K_r} = \{z : |z - z_0| \le r\} = \bigcup_{0\le\rho\le r}\gamma_\rho$$

bərabərliyindən çıxır ki, mərkəzi z_0 nöqtəsində radiusu r-ə bərabər olan və G oblastından olan, istənilən qapalı $\overline{K_r}$ dairəsinin hər bir nöqtəsində $M = |f(z)|$ bərabərliyi ödənəcək. Göstərək ki, $M = |f(z)|$ bərabərliyi G oblastından olan bütün nöqtələrdə də ödənir. Bu məqsədlə, G oblastından, z_0 nöqtəsindən fərqli, ixtiyari z_* nöqtəsi götürək. z_0 və z_* nöqtələrini G oblastının daxilində yerləşən, düzlənə bilən, L əyrisi ilə birləşdirək. L əyrisi ilə G oblastının ∂G sərhəddi arasındakı məsafəni $2d$ ilə işarə edək ($dist(L,\partial G) = \inf_{s\in L, t\in\partial G}|s-t| = 2d$ $(d>0)$). Yuxarıda göstərdiyimiz kimi, mərkəzi z_0 nöqtəsində radiusu d-yə bərabər olan qapalı $K_{z_0}^d$ dairəsinin hər bir nöqtəsində $M = |f(z)|$ bərabərliyi ödənir. $K_{z_0}^d$ dairəsi ilə L



Şəkil 9.3.

əyrisinin kəsişməsinə daxil olan nöqtələrdən z_* nöqtəsinə yaxın olanını z_1 ilə işarə edək (Şəkil 9.3). Yuxarıda apardığımız mühakimələri mərkəzi z_1 nöqtəsində radiusu d-yə bərabər olan qapalı $K_{z_1}^d$ dairəsi üçün aparsaq, $K_{z_1}^d$ dairəsinin hər bir nöqtəsində $M = |f(z)|$ bərabərliyini alarıq. $K_{z_1}^d$ dairəsi ilə L əyrisinin kəsişməsinə daxil olan nöqtələrdən z_* nöqtəsinə yaxın olanını z_2 ilə işarə edək. Yuxarıda apardığımız mühakimələri mərkəzi z_2 nöqtəsində radiusu d-yə bərabər olan qapalı $K_{z_2}^d$ dairəsi üçün aparsaq, $K_{z_2}^d$ dairəsinin hər bir nöqtəsində $M = |f(z)|$ bərabərliyini alarıq və s. Bu prosesi davam etdirsək, sonlu (n) sayda addımdan sonra, z_*-u öz daxilinə alan $K_{z_*}^d$ (Şəkil 9.3) dairəsində $M = |f(z)|$ bərabərliyinin ödəndiyini görərik. Buradan da, xüsusi halda, $M = |f(z_0)| = |f(z_*)|$ bərabərliklərini alarıq. Beləliklə, z_*-un ixtiyari olmasından alarıq ki, G oblastının hər bir z nöqtəsində $M = |f(z)|$ bərabərliyi ödənir. Aydındır ki, $f(z)$ funksiyası sabit olmadığı üçün, $M > 0$.

$$f(z) = |f(z)|e^{i\arg f(z)} \equiv r(x,y)e^{i\varphi(x,y)} = Me^{i\varphi(x,y)}$$

və Koşi-Riman şərtlərindən çıxan

$$0 = \frac{\partial r(x,y)}{\partial x} = r(x,y)\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}$$
$$0 = \frac{\partial r(x,y)}{\partial y} = -r(x,y)\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}$$

bərabərliklərdən alınır ki, modulu sabit olan analitik $f(z)$ funksiyanın arqumenti də sabitdir, yəni özü də sabitdir. Bu isə teoremin şərtinə ziddir. Deməli, əks fərziyə səhv olduğu üçün, (17) bərabərsizliyi doğrudur. ◁

N ə t i c ə 9.1. *Tutaq ki, G oblastında analitik olan* $f(z)$ *funksiyasının bu oblastda sıfrı yoxdur. Əgər* $f(z)$ *funksiyası G oblastında sabit deyilsə, onda G oblastının istənilən* z *nöqtəsi üçün*

$$|f(z)| > \inf_{\xi \in G} |f(\xi)| \qquad (19)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

(19) bərabərsizliyini isbat etmək üçün $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ analitik funksiyasına modulun maksimum prinsipini tətbiq etmək kifayətdir.

Q E Y D 1. Nəticə 9.1-də $f(z)$ funksiyasının G oblastında sıfrı olmaması mühüm şərtdir.

M i s a l. $f(z) = z$ funksiyasının modulu öz minimumunu $U_1(0) = \{z : |z| < 1\}$ dairəsinin $z = 0$ nöqtəsində alır!

N ə t i c ə 9.2. *Əgər* $f(z)$ *funksiyası məhdud G oblastında analitik, qapalı* $\bar{G}$ *oblastında isə kəsilməz olarsa, onda* $|f(z)|$ *funksiyası öz maksimumunu G oblastının* ∂G *sərhəddində alır.*

İ S B A T I. $f(z)$ funksiyası sabit olsa hökm aydındır. Sabit olmasa $|f(z)|$ funksiyası öz maksimumunu G oblastının daxilində ala bilməz. Veyerştrass teoreminə görə $|f(z)|$ funksiyası qapalı və məhdud G oblastında öz maksimumunu alır. Beləliklə

$$\max_{z \in \bar{G}} |f(z)| = |f(\xi_0)| \quad (\xi_0 \in \partial G).$$

N ə t i c ə 9.3. *Tutaq ki, məhdud G oblastında analitik, qapalı G oblastında isə kəsilməz olan* $f(z)$ *funksiyasının bu oblastda sıfrı yoxdur. Onda* $|f(z)|$ *funksiyası öz minimumunu G oblastının* ∂G *sərhəddində alır.*

Q E Y D 2. Nəticə 9.2 və 9.3-ün şərtləri daxilində ∂G sərhəddində sıfır olan $f(z)$ funksiyası $\bar{G}$ oblastında eynilik kimi sıfır olacaqdır.

N ə t i c ə 9.4. *Məhdud G oblastında*

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

Laplas tənliyini ödəyən, ∂G *sərhəddində isə verilmiş kəsilməz* $\psi(\xi,\eta)$ *funksiyasına bərabər olan,* $C^{(2)}(G) \cap C(\bar{G})$ *sinfindən olan* $u(x,y)$ *funksiyası yeganədir.*

Q E Y D 3. Laplas tənliyini ödəyən funksiyaya harmonik funksiya,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, (x,y) \in G \\ u|_{\partial G} = \psi(\xi,\eta), (\xi,\eta) \in \partial G \end{cases}$$

məsələsinə isə Dirixle məsələsi deyilir.

9.4. Çalışmalar

9.1.

Aşağıdakı inteqralları hesablayın (inteqrallama konturları müsbət oriyentasiyalıdır).

1). $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z^2 - 5z + 8}{z-2} dz$. 2). $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+1} dz$, burada C- çevrədir:

a) C: $|z| = \dfrac{1}{2}$; b) C: $|z - i| = 1$; c) C: $|z + i| = 1$; d) C: $|z| = 3$.

3). $\displaystyle\oint_{|z-i|=4} \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^4} dz$ .4). $\displaystyle\oint_C \frac{z^2}{(z-2)(z+i)} dz$, burada: a) C – $|z+i| = 1$ çevrəsidir; b) C – $|z-3| = 2$ çevrəsidir.

5). $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+4} dz$, burada C- təpələri 1, $1+3i$, $-1+3i$, -1 nöqtələrində olan düzbucaqlıdır.

6). $\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z^2-1)z}dz$. 7). $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}dz$. 8). $\oint\limits_{C} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz$, burada C - təpələri 4, $-4+i$, $-4-i$ nöqtələrində olan üçbucaqdır.

9). $\oint\limits_{C} \frac{z^3+5z-4}{(1-z)^3}dz$, burada C - $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ ellipsdir.

10). $\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$. 11). $\oint\limits_{C} \frac{1}{z^2+9}dz$, burada: a) C, $3i$ nöqtəsi daxilində, $-3i$ nöqtəsi isə xaricində olan, qapalı konturdur; b) C, $-3i$ nöqtəsi daxilində, $3i$ nöqtəsi isə xaricində olan, qapalı konturdur; c) C, $\pm 3i$ nöqtələrini öz daxilində saxlayan, qapalı konturdur;

12). $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$.

9.2.

1). $|z|<1$ oblastında $\oint\limits_{|\xi|=1} \frac{1}{(\xi-2)\xi(\xi-z)}d\xi$ inteqralının təyin etdiyi funksiyanı tapın.

2). $|z|>1$ oblastında $\oint\limits_{|\xi|=1} \frac{1}{(\xi-2)\xi(\xi-z)}d\xi$ inteqralının təyin etdiyi funksiyanı tapın.

3). $\left|z+\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{3}$ oblastında $\oint\limits_{\partial G} \frac{1}{(2\xi^2+5\xi+2)\xi(\xi-z)}d\xi$ inteqralının təyin etdiyi funksiyanı tapın, burada ∂G, G: $\left\{|z|<1,\ \left|z+\frac{2}{3}\right|>\frac{1}{3}\right\}$ oblastının sərhəddidir.

4). $|z|>1$ oblastında $\oint\limits_{\partial G} \frac{1}{(2\xi^2+5\xi+2)\xi(\xi-z)}d\xi$ inteqralının təyin etdiyi funksiyanı tapın, burada ∂G, G: $\left\{|z|<1,\ \left|z+\frac{2}{3}\right|>\frac{1}{3}\right\}$ oblastının sərhəddidir.

5). $\left\{|z|<1,\ \left|z+\frac{2}{3}\right|>\frac{1}{3}\right\}$ oblastında $\oint\limits_{\partial G} \frac{1}{(2\xi^2+5\xi+2)\xi(\xi-z)}d\xi$ inteqralının təyin etdiyi funksiyanı tapın, burada ∂G, G: $\left\{|z|<1,\ \left|z+\frac{2}{3}\right|>\frac{1}{3}\right\}$ oblastının sərhəddidir.

6). $\left|\arg\frac{z-1}{z}\right|<\pi$ oblastında $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\xi-z}$ inteqralının təyin etdiyi funksiyanı tapın.

7). $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi-z}$ inteqralının təyin etdiyi funksiyanı tapın.

8). $|z|<5$ oblastında $\oint\limits_{|\xi|=5} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi = 2\cos z$ və $f(\pi)=1$ şərtlərini ödəyən $f(z)$ funksiyanı tapın.

9). $\oint\limits_{L} \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi = z\sin z$ $(z\notin L)$ olduğunu bilərək $\int\limits_{L} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^3}d\xi$ $(z\notin L)$ funksiyasını tapın, burada $f(\xi)$, hamar L əyrisi üzərində, kəsilməz funksiyadır.

9.3.

1). Tutaq ki, eynilik kimi sabit olmayan, $f(z)$ funksiyası məhdud G oblastında analitik, $\bar{G}$ oblastında isə kəsilməzdir. Göstərin ki, əgər $|f(z)|$ funksiyası G oblastının ∂G sərhəddində sabitdirsə, onda $f(z)$ funksiyasının G oblastında ən azı bir sıfrı var.

2). Göstərin ki, istənilən a,b,c ədədləri üçün $u(x,y)=ax+by+c$ funksiyası harmonikdir.

3). Göstərin ki, istənilən d,e,f ədədləri və $a+c=0$ şərtini ödəyən a,c ədədləri üçün $u(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ funksiyası harmonikdir.

4). $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0, (x,y)\in G=\{(x,y):0<x<\pi;0<y<\pi\}\\ u|_{\partial G}=1, \qquad (\xi,\eta)\in\partial G\end{cases}$$

Dirixle məsələsinin, $G=\{(x,y):0<x<\pi;0<y<\pi\}$ kvadratında sıfrı olmayan həllini tapın.

5). Tutaq ki, G oblastında analitik olan $f(z)$ funksiyası üçün $\inf\limits_{z\in G}|f(z)|=\mu>0$ bərabərsizliyi ödənir. Göstərin ki, ya $\forall z\in G$ üçün $|f(z)|>\mu$ bərabərsizliyi ödənir, yada ki, $f(z)$ funksiyası $f(z)=\mu e^{i\alpha}$ $(\alpha\in(-\infty,+\infty))$ şəklindədir.

6). Tutaq ki, $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_{n-1}z+a_n$ $(a_k\in C, k=1,2,\ldots,n)$. Göstərin ki, $|z|=1$ çevrəsi üzərində $|f(z)|>1$ bərabərsizliyini ödəyən nöqtə yoxdursa, onda $f(z)=z^n$.

9.5. Cavablar və göstərişlər

9.1.

1). $4\pi i$. 2). a) 0; b) π; c) $-\pi$; d) 0. H ə l l i. Koşinin mürəkkəb konturlar haqqındakı teoreminə görə

$$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z^2+1}dz=\oint_{|z-i|=1}\frac{1}{z^2+1}dz+\oint_{|z+i|=1}\frac{1}{z^2+1}dz \qquad (*)$$

bərabərliyi doğrudur. Sağ tərəfdəki inteqrallara Koşi düsturunu tətbiq etsək

$$\oint_{|z-i|=1}\frac{1}{z^2+1}dz=\oint_{|z-i|=1}\frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}dz=2\pi i\cdot\frac{1}{z+i}\Big|_{z=i}=\pi,$$

$$\oint_{|z+i|=1}\frac{1}{z^2+1}dz=\oint_{|z+i|=1}\frac{\frac{1}{z-i}}{z+i}dz=2\pi i\frac{1}{z-i}\Big|_{z=-i}=-\pi$$

bərabərliklərini alarıq. Bunları (*) düsturunda nəzərə alsaq

$$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z^2+1}dz=0$$

bərabərliyini almış olarıq.

3). $-\frac{\pi i}{6}$. H ə l l i. Bu inteqralı hesablamaq üçün analitik funksiyanın törəmələri üçün olan Koşinin inteqral düsturunu $f(z)=\sin z$ funksiyasına tətbiq etsək alarıq:

$$\oint_{|z-i|=4}\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}\sin''' z\Big|_{z=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi i}{6}.$$

4). a) $-\frac{2\pi i(2-i)}{5}$; b) $-\frac{8\pi i(2-i)}{5}$. 5). $\frac{\pi}{2}$. 6). πi. 7). $\frac{2\pi i(e^2-1)}{e}$.

8). 0. 9). $-6\pi i$. 10). 0. 11). a) $\frac{\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{3}$; c) 0. 12). $-\pi i\,ch1$.

9.2.

1). $\frac{1}{2(z-2)}$. 2). $\frac{1}{2z}$. 3). $-\frac{1}{2z}$. 4). $-\frac{1}{2z}$. 5). $\frac{2z+5}{2(2z^2+5z+2)}$.

6). $\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-1}{z}$. 7). $\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-1}{z+1}$. 8). $2\sin z+1$. 9). $\cos z-\frac{1}{2}z\sin z$.

9.3.

4). $u(x,y)=1$. 6). Tutaq ki, $-\lambda_k \in C$ $(k=1,2,...,n)$ ədədləri $f(z)$ çoxhədlisinin kökləridir, yəni onu $f(z)=(z+\lambda_1)(z+\lambda_2)...(z+\lambda_n)$ şəklində göstərmək olar. Fərz edək ki, $|z|=1$ çevrəsi üzərindəki bütün nöqtələrdə $|f(z)|\le 1$ bərabərsizliyi ödənir. Onda elə $k\in\{1,2,...,n\}$ nömrəsi var ki, $|z|=1$ çevrəsi üzərindəki bütün nöqtələrdə $|z+\lambda_k|\le 1$ bərabərsizliyi ödənir. Onda maksimal modul prinsipinə görə $|z|\le 1$ dairəsində də $|z+\lambda_k|\le 1$ bərabərsizliyi öz qüvvəsində qalmalıdır. $\phi_k(z)=z+\lambda_k$ funksiyası sabit olmadığına görə $|z|<1$ dairəsində onun kökü olmalıdır. $-\lambda_k$ ədədi $\phi_k(z)=z+\lambda_k$-in kökü olduğu üçün $|\lambda_k|<1$ olmalıdır. Onda $\phi_k(\lambda_k)=2\lambda_k$ bərabərliyindən çıxır ki, $|\phi_k(\lambda_k)|=2|\lambda_k|\le 1$. Deməli, $|\lambda_k|\le \frac{1}{2}$. Eyni qayda ilə $|\phi_k(2\lambda_k)|=3|\lambda_k|\le 1$ münasibətindən çıxır ki, $|\lambda_k|\le\frac{1}{3}$. Bu prosesdən çıxır ki, istənilən $m\in N$ üçün $|\lambda_k|\le\frac{1}{m}$. Beləliklə, $\lambda_k=0$. Bu bərabərliyi $f(z)=(z+\lambda_1)(z+\lambda_2)...(z+\lambda_n)$ ayrılışında nəzərə alsaq, $f(z)=(z+\lambda_1)(z+\lambda_2)...(z+\lambda_{k-1})z(z+\lambda_{k+1})\cdots(z+\lambda_n)$ düsturunu alarıq. $|f(z)|=|(z+\lambda_1)(z+\lambda_2)...(z+\lambda_{k-1})z(z+\lambda_{k+1})\cdots(z+\lambda_n)|\le 1$ bərabərsizliyindən çıxır ki, $|z|=1$ çevrəsi üzərindəki bütün nöqtələrdə $|f_1(z)|=|(z+\lambda_1)(z+\lambda_2)...(z+\lambda_{k-1})(z+\lambda_{k+1})\cdots(z+\lambda_n)|\le 1$ bərabərsizliyi doğrudur. Deməli, elə $l\in\{1,2,...,n\}\setminus\{k\}$ nömrəsi var ki, $|z|=1$ çevrəsi üzərindəki bütün nöqtələrdə $|z+\lambda_l|\le 1$ bərabərsizliyi ödənir. Yuxarıdakı mühakiməni təkrarlasaq, $\lambda_l=0$ bərabərliyini alarıq. Bu prosesi davam etdirsək λ_k $(k=1,2,...,n)$-ların hamısının sıfır olduğunu almış olarıq. Beləliklə $f(z)=z^n$ bərabərliyini alırıq.

X F ə s i l
MÜNTƏZƏM YIĞILAN FUNKSİONAL SIRALAR. TEYLOR SIRASI. REQULYAR FUNKSIYA

10.1. Kompleks hədli müntəzəm yığılan funksional sıralar

Tutaq ki, hər bir həddi kompleks müstəvinin G oblastında təyin olunmuş $\{u_n(z)\}$ funksional ardıcıllığı verilmişdir.

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)=u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z)+\ldots \qquad (1)$$

ifadəsinə kompleks hədli funksional sıra deyilir.

Fərz edək ki, G oblastının hər bir qeyd olunmuş z nöqtəsində (1) sırası yığılır. G oblastının hər bir qeyd olunmuş z nöqtəsinə qarşı, həmin nöqtədə (1) sırasının cəmini qarşı qoyaraq, G oblastında yeni bir $f(z)$ funksiyası təyin edək. $f(z)$ funksiyasına (1) sırasının cəmi deyilir və

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)=u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z)+\ldots$$

kimi işarə olunur.

Tərif 10.1. *Əgər*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{z\in G}\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n}u_k(z)\right|\right\}=0 \qquad (2)$$

şərti ödənərsə, onda deyirlər ki, (1) funksional sırası G oblastında $f(z)$ funksiyasına müntəzəm yığılır.

(2) şərtini, ona ekvivalent formada, aşağıdakı kimi vermək olar:

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon)\in N, \forall n>n_0(\varepsilon) \text{ və } \forall z\in G \Rightarrow$$
$$\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n}u_k(z)\right|<\varepsilon .$$

T E O R E M 10.1 *(Koşi meyarı). (1) funksional sırasının G oblastında, müntəzəm yığılması üçün zəruri və kafi şərt*

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon)\in N, \forall n>n_0(\varepsilon), \forall m\in N \text{ və } \forall z\in G \Rightarrow$$
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}u_k(z)\right|<\varepsilon$$

münasibətinin ödənməsidir.

Meyarın isbatı həqiqi analizdə olduğu kimidir.

T E O R E M 10.2 *(Veyerştrass əlaməti). Tutaq ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:*

$$a)\ \forall z\in G, \forall n\in N \Rightarrow |u_n(z)|\le|a_n|, \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty .$$

Onda (1) sırası G oblastında müntəzəm yığılır.

İ S B A T I. b) şərtinə görə

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon)\in N, \forall n>n_0(\varepsilon), \forall m\in N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+m}u_k(z)\right|<\varepsilon \qquad (3)$$

münasibəti doğrudur. a) şərtindən və (3) münasibətindən çıxır ki, (1) sırası üçün G oblastında Koşi meyarının bütün şərtləri ödənir. ◁

T E O R E M 10.3. *Əgər müntəzəm yığılan (1) sırasının hər bir $u_n(z)$ $(n=1,2,...)$ həddi G oblastında kəsilməz olarsa, onda onun cəmi olan $f(z)$ funksiyası da G oblastında kəsilməz olar.*

İ S B A T I. Tutaq ki, z və $z+h$ G oblastının ixtiyari nöqtələridir. (1) sırası G oblastında müntəzəm yığıldığı üçün, istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün,

$$|r_{n_0}(z)|<\frac{\varepsilon}{3} \text{ və } |r_{n_0}(z+h)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (4)$$

bərabərsizliklərini ödəyən, yalnız ε-dan asılı olan, n_0 natural ədədi tapmaq olar, burada $r_{n_0}(t)=f(t)-\sum_{k=1}^{n_0}u_k(t)\equiv f(t)-S_{n_0}(t)$- (1) sırasının qalıq sırasıdır. Sonlu sayda kəsilməz funksiyanın cəmi olan $S_{n_0}(z)$ funksiyası G oblastında kəsilməz olduğuna görə elə $\delta>0$ ədədi tapmaq olar ki, $|h|<\delta$ şərtini ödəyən istənilən h kompleks ədədi üçün

$$|S_{n_0}(z+h)-S_{n_0}(z)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (5)$$

bərabərsizliyi ödənər. (4) və (5) bərabərsizliklərini

$$|f(z+h)-f(z)|\le|S_{n_0}(z+h)-S_{n_0}(z)|+|r_{n_0}(z+h)|+|r_{n_0}(z)|$$

bərabərsizliyində nəzərə alsaq $f(z)$ funksiyasının G oblastının hər bir z nöqtəsində kəsilməz olduğunu görərik. ◁

T E O R E M 10.4. *Tutaq ki, hədləri G oblastında kəsilməz olan (1) sırası, G oblastında $f(z)$ funksiyasına müntəzəm yığılır. Onda G oblastından olan, istənilən hissə-hissə hamar L əyrisi üzrə*

$$\int_L f(\xi)d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\int_L u_n(\xi)d\xi$$

hədbəhəd inteqrallama düsturu doğrudur.

İ S B A T I. (1) sırası L əyrisi üzərində də müntəzəm yığıldığı üçün, istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün, yalnız ε-dan asılı olan, elə n_0 natural ədədi tapmaq olar ki, $n\ge n_0$ şərtini ödəyən istənilən natural n ədədi və istənilən $\xi\in L$ nöqtəsi üçün

$$|r_n(\xi)|<\frac{\varepsilon}{l}$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada l ilə L əyrisinin uzunluğu işarə edilmişdir. Bu bərabərsizlikdən istifadə etsək

$$\left|\int_L f(\xi)d\xi - \sum_{k=1}^{n}\int_L u_k(\xi)d\xi\right| \le \int_L |r_n(\xi)||d\xi| < \varepsilon$$

bərabərsizliyini, buradan da teoremin isbatını almış olarıq. ◁

TEOREM 10.5. *(Müntəzəm yığılan sıralar haqqında Veyerştrassın I teoremi). Tutaq ki, hədləri G oblastında analitik olan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ sırası, G oblastının hər bir qapalı $\overline{\Omega}$ alt oblastında $f(z)$ funksiyasına müntəzəm yığılır. Onda aşağıdakılar doğrudur:*

1) $f(z)$ funksiyası G oblastında analitikdir.

2) $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z) \quad (k \in N, z \in G)$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z) \quad (k \in N)$ sırası, G oblastının hər bir qapalı $\overline{\Omega}$ alt oblastında, müntəzəm yığılır.

İSBATI.

1) İxtiyari $z_0 \in G$ nöqtəsi götürək və onu öz daxilinə alan hər hansı bir birrabitəli $\Omega \subset G$ alt oblastını seçək. Ω alt oblastına daxil olan ixtiyari, düzlənə bilən qapalı, L konturuna baxaq. Teorem 10.3-ə görə $f(z)$ funksiyası G oblastında kəsilməzdir. Deməli, L konturu üzərində $f(z)$ funksiyası sonlu inteqrala malikdir. Teorem 10.4-ə görə bu inteqralı

$$\int_L f(\xi)d\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\int_L u_n(\xi)d\xi$$

düsturu ilə hesablamaq olar. Koşi teoreminə görə $\int_L u_n(\xi)d\xi = 0 \quad (n \in N)$.

Bu bərabərlikləri yuxarıdakı bərabərlikdə nəzərə alsaq, $f(z)$ funksiyasının Ω alt oblastına daxil olan ixtiyari, düzlənə bilən qapalı, L konturu üzrə inteqralının sıfra bərabər olduğunu görərik. Onda Morera teoremindən çıxır ki, $f(z)$ funksiyası z_0-ın Ω ətrafında

analitikdir. z_0-ın ixtiyariliyindən alırıq ki, $f(z)$ funksiyası G oblastında analitikdir.

2) İxtiyari $z \in G$ nöqtəsi və ixtiyari k natural ədədi götürək. z nöqtəsini öz daxilinə alan ixtiyari düzlənə bilən qapalı $L \subset G$ konturu seçək. $\min_{\xi \in L}|\xi - z| = d > 0$ olduğuna və teoremin şərtinə görə

$$\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \quad (k \in N)$$

sırası L konturu üzərində müntəzəm yığılır. Bu sıranı hədbəhəd inteqrallasaq

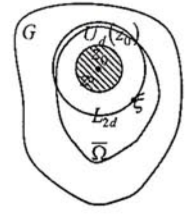
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{u_n(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} \quad (k \in N)$$

bərabərliyini almış olarıq. $f(z)$ və $u_n(z)$ $(n \in N)$ funksiyalarının analitikliyini və Koşi düsturunu nəzərə alsaq, sonuncu bərabərlikdən

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z) \quad (k \in N, z \in G)$$

hədbəhəd diferensiallama düsturunu almış olarıq.

3) Göstərək ki, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z) \quad (k \in N)$ sırasının qalıq sırası $r_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z) - \sum_{j=1}^{n} u_j^{(k)}(z) \quad (k \in N)$ G oblastının hər bir qapalı $\overline{\Omega}$ alt oblastında müntəzəm olaraq sıfra yığılır. İxtiyari $z_0 \in \overline{\Omega}$ nöqtəsi götürək və müsbət d ədədini elə seçək ki, $L_{2d} = \{\xi : |\xi - z_0| = 2d\}$ çevrəsi, öz daxili ilə birlikdə, tamamilə G oblastına daxil olsun (Şəkil 10.1). $U_d(z_0)$



Şəkil 10.1.

ilə z_0-ın d ətrafını işarə edək. $r_n^{(k)}(z)$ G oblastında analitik funksiya olduğu üçün, Koşi düsturuna görə

$$r_n^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_{|\xi-z_0|=2d}\frac{r_n(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{k+1}} \quad (z\in U_d(z_0)) \qquad (6)$$

düsturu doğrudur. $\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{\xi\in L_{2d}}|r_n(\xi)|\right\}=0$ olduğuna görə istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün, yalnız ε-dan asılı olan, elə n_0 natural ədədi tapmaq olar ki, $n\geq n_0$ şərtini ödəyən istənilən natural n ədədi və istənilən $\xi\in L_{2d}$ nöqtəsi üçün

$$|r_n(\xi)|<\frac{\varepsilon d^k}{2k!}$$

bərabərsizliyi ödənər. Bu bərabərsizliyi (6) –da nəzərə alsaq

$$|r_n^{(k)}(z)|\leq\frac{k!}{2\pi}\frac{1}{d^{k+1}}4\pi d\frac{\varepsilon d^k}{2k!}=\varepsilon \quad (z\in U_d(z_0))$$

bərabərsizliyini almış olarıq. Beləliklə ixtiyari $z_0\in\overline{\Omega}$ nöqtəsinin $U_d(z_0)$ ətrafında $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}(z)$ $(k\in N)$ sırası müntəzəm yığılır. Borel lemmasına görə $\overline{\Omega}$ oblastını, hər birində $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}(z)$ $(k\in N)$ sırasının müntəzəm yığıldığı, sonlu sayda $U_{d_j}(z_j)$ $(j=1,2,...,m)$ ətrafları ilə örtmək olar. Bununla da $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}(z)$ $(k\in N)$ sırasının $\overline{\Omega}$ oblastında müntəzəm yığıldığını göstərdik. $\overline{\Omega}$-ın ixtiyarılığından teoremin 3-cü bəndinin isbatı alınır. ◁

Q E Y D. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ sırasının G oblastında müntəzəm yığılmasından $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}(z)$ sıralarının G oblastında müntəzəm yığılması çıxmır.

M i s a l. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ sırası Veyerştrass əlamətinə görə $|z|\leq 1$ oblastında müntəzəm yığılır. Lakin $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}$ sırası $|z|\leq r<1$ oblastında müntəzəm yığılmasına baxmayaraq $|z|<1$ oblastında müntəzəm yığılmır.

Modulun maksimumu prinsipindən çox əhəmiyyətli olan aşağıdakı teorem çıxır.

T E O R E M 10.6. *(Müntəzəm yığılan sıralar haqqında Veyerştrassın II teoremi). Tutaq ki, hədləri G oblastında analitik, qapalı $\overline{G}$ oblastında kəsilməz olan $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ sırası, G oblastının ∂G sərhəddində müntəzəm yığılır. Onda $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ sırası qapalı $\overline{G}$ oblastında müntəzəm yığılır.*

10.2. Qüvvət sıraları

T Ə R İ F 10.2.

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots \qquad (7)$$

şəklində olan funksional sıraya qüvvət sirası deyilir, burada $c_0, c_1, c_2,\ldots$ əmsalları kompleks ədədlər, a qeyd olunmuş kompleks ədəd, z isə kompleks dəyişəndir.

Aydındır ki, qüvvət sırası $z=a$ nöqtəsində yığılır. Elə qüvvət sırası var ki, yalnız $z=a$ nöqtəsində yığılır.

M i s a l. $\sum_{n=0}^{\infty}n!(z-a)^n$.

Elə qüvvət sırası var ki, kompleks müstəvinin bütün nöqtələrində yığılır.

Misal. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{n!}$.

Elə qüvvət sırası var ki, kompleks müstəvinin bəzi nöqtələrində yığılır, bəzi nöqtələrində isə dağılır, M i s a l. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$. Bu sıra $|z|<1$ dairəsində yığılır, $|z|\geq 1$ çoxluğunda isə dağılır.

T Ə R İ F 10.3. *Qüvvət sırasının yığıldığı nöqtələr çoxluğuna qüvvət sırasının yığılma oblastı deyilir.*

Qüvvət sırasının yığılma oblastının quruluşunu müəyyən etmək üçün aşağıdakı teorem xüsusi əhəmiyyətə malikdir.

T E O R E M 10.7 *(Abel). Əgər qüvvət sırası hər hansı $z_1 \neq a$ nöqtəsində yığılırsa, onda o, $|z-a|<|z_1-a|$ şərtini ödəyən bütün z nöqtələrində mütləq yığılır.*

İ S B A T I. $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z_1-a)^n$ sırası yığıldığı üçün, zəruri şərtə görə $\lim_{n\to\infty}c_n(z_1-a)^n=0$. Yığılan ardıcıllıq məhdud olduğuna görə elə $M>0$ ədədi var ki, $|c_n||z_1-a|^n\leq M \quad (n=0,1,2,\ldots)$. Bu bərabərsizlikdən istifadə etsək

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\right|\leq\sum_{n=0}^{\infty}|c_n||z-a|^n\leq M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n$$

qiymətləndirməsini alarıq. $\left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|=q<1$ şərtindən çıxır ki, $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n$ sırası yığılır. Müsbət hədli sıraların müqayisə teoremindən alırıq ki, $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ sırası $|z-a|<|z_1-a|$ şərtini ödəyən bütün z nöqtələrində mütləq yığılır. ◁

N Ə T İ C Ə 10.1. *Əgər qüvvət sırası hər hansı $z=z_1$ nöqtəsində dağılırsa, onda o, $|z-a|>|z_1-a|$ şərtini ödəyən, bütün z nöqtələrində dağılır.*

T Ə R İ F 10.4. $R=\sup\left\{|z-a|:\ \left|\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\right|<+\infty\right\}$ *düsturu ilə tapılan R ədədinə qüvvət sırasının yığılma radiusu deyilir.*

Aydındır ki, $0\leq R\leq+\infty$. $R=0$ olduqda qüvvət sırasının yığılma oblastı bir nöqtəli $\{a\}$ çoxluğuna cırlaşır. $R=+\infty$ olduqda qüvvət sırasının yığılma oblastı bütün kompleks ədədlər çoxluğudur. $0<R<+\infty$ olduqda qüvvət sırasının yığılma oblastı $U_R(a)=\{z:\ |z-a|<R\}$ dairəsidir.

Yığılma radiusunun qüvvət sırasının əmsalları ilə ifadəsi öz əksini aşağıdakı teoremdə tapmışdır.

T E O R E M 10.8 *(Koşi-Adamar). Qüvvət sırasının yığılma radiusu*

$$R=\begin{cases}\frac{1}{l}, & 0<l<+\infty\ olarsa,\\ 0, & l=+\infty\ olarsa,\\ +\infty, & l=0\ olarsa\end{cases} \qquad (8)$$

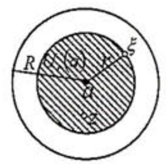
düsturu ilə hesablanır, burada $l=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$.

Teoremin isbatı həqiqi analizdə olduğu kimidir.

Q E Y D 1. (8) düsturuna Koşi-Adamar düsturu deyilir.

Q E Y D 2. Əgər $\left\{\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}\right\}$ ardıcıllığının limiti (sonlu və ya sonsuz!) olarsa, onda $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$.

Q E Y D 3. Əgər $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$ ardıcıllığının limiti (sonlu və ya sonsuz!) olarsa, onda $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$.



Şəkil 10.2.

T E O R E M 10.9. *Tutaq ki, $R>0$ ədədi (7) qüvvət sırasının yığılma radiusudur. Onda (7) qüvvət sırası istənilən qapalı $\overline{U}_r(a)=\{z:|z-a|\leq r\}$ $(r<R)$ dairəsində müntəzəm yığılır.*

İ S B A T I. $|\xi-a|=r$ şərtini ödəyən ixtiyari ξ nöqtəsi götürək (Şəkil 10.2). Abel teoreminə görə

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n||\xi-a|^n<+\infty$$

münasibəti doğrudur. $|c_n||z-a|^n\le|c_n||\xi-a|^n=|c_n|r^n$ münasibətləri göstərir ki, $U_r(a)$ dairəsində $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ sırası yığılan majorant $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$ ədədi sıraya malikdir. Veyerştrassın əlamətini tətbiq edərək teoremin isbatını tamamlamış oluruq. ⊲

Т Е О R Е М 10.10. *1) Müsbət yığılma radiusuna malik (7) qüvvət sırasının cəmi olan $f(z)$ funksiyası yığılma oblastında analitikdir. 2) $f(z)$ funksiyasının istənilən k tərtibli törəməsi*

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n(z-a)^n\right]^{(k)}=\sum_{n=k}^{\infty}c_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-a)^{n-k} \qquad (9)$$

düsturu ilə hesablanır. 3). Yığılma radiusu törəmə alma əməliyyatına nəzərən invariantdır.

İ S B A T I. 1-ci və 2-ci hökmlər Teorem 10.9-dan və müntəzəm yığılan sıralar haqqında olan Veyerştrassın I teoremindən (Teorem 10.5) alınır. 3-cü hissəni isbat edək. R ilə $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ sırasının, R' ilə isə $\sum_{n=1}^{\infty}c_n n(z-a)^{n-1}$ sırasının yığılma radiusunu işarə edək. Aydındır ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n n(z-a)^{n-1} \text{ və } (z-a)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}c_n n(z-a)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n n(z-a)^n$$

sıralarının yığılma radiusları eynidir.

$$l'=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\,\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=l$$

bərabərliklərini və Koşi- Adamar düsturunu nəzərə alsaq $R'=R$ olduğunu almış olarıq. ⊲

N Ə T İ C Ə 10.2. (9) düsturunda $z=a$ yazsaq $f^{(k)}(a)=k!c_k$ düsturunu alarıq. Bu düsturdan praktikada geniş istifadə olunur.

M i s a l. $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)^n z^n$ funksiyasının $z=0$ nöqtəsindəki ikinci tərtib törəməsini tapın. Həlli. $f''(0)=2!c_2=2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)^2=2$.

N Ə T İ C Ə 10.3. Tutaq ki, $R>0$ ədədi (7) qüvvət sırasının yığılma radiusudur. Onda müsbət oriyentasiyalı $L_r=\{z:|z-a|=r\}$ $(r<R)$ çevrəsinə Koşi düsturunu tətbiq etsək

$$f^{(k)}(a)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_{L_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}d\xi \quad (k=0,1,2,...)$$

bərabərliyini alarıq. Buradan

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}d\xi \quad (k=0,1,2,...) \qquad (10)$$

düsturunu almış olarıq.

Т Е О R Е М 10.11. *(Qüvvət sırasının əmsalları üçün Koşi bərabərsizliyi). Tutaq ki, müsbət R yığılma radiusuna malik $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ qüvvət sırasının cəmi olan $f(z)$ funksiyası $U_R(a)=\{z:|z-a|<R\}$ yığılma oblastında $\sup_{z\in U_R(a)}|f(z)|=M<+\infty$ şərtini ödəyir. Onda*

$$|c_n|\le\frac{M}{R^n} \quad (n=0,1,2,...) \qquad (11)$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

İ S B A T I. İxtiyari $0<r<R$ ədədi üçün doğru olan (10) düsturundan alınan

$$|c_k| \le \frac{M}{2\pi} \oint_{|\xi-a|=r} \frac{|d\xi|}{|\xi-a|^{k+1}} \le \frac{M}{r^n} \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

düsturunda $r \to R$ şərti daxilində limitə keçsək (11) bərabərsizliklərini almış olarıq. ◁

Q E Y D. (11) bərabərsizliklərinə qüvvət sırasının əmsalları üçün Koşi bərabərsizliyi deyilir.

10.3. Requlyar funksiya. Teylor sırası. Liuvill teoremi

T Ə R İ F 10.5. *Əgər $f(z)$ funksiyası $z=a$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında $(z-a)$-ya nəzərən qüvvət sırasına ayrılırsa, onda ona $z=a$ nöqtəsində requlyar (holomorf) funksiya deyilir.*

T Ə R İ F 10.6. *G oblastının hər bir nöqtəsində requlyar olan $f(z)$ funksiyasına bu oblastda requlyar funksiya deyilir.*

T Ə R İ F 10.7. *Tutaq ki, $f(z)$ funksiyasının $z=a$ nöqtəsində istənilən tərtibdən törəməsi var. Əmsalları $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ şəklində təyin olunmuş*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots$$

qüvvət sırasına $f(z)$ funksiyasının $z=a$ nöqtəsində Teylor sırası deyilir.

Q E Y D. $f(z)$ funksiyasının $z=0$ nöqtəsindəki Teylor sırasına, yəni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \ldots$$

sırasına Makloren sırası deyilir.

10.2 punktunda göstərdik ki, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ qüvvət sırasının cəmi olan $f(z)$ funksiyası yığılma oblastında analitik funksiyadır. Nəticə 10.2-də alınan $f^{(k)}(a) = k!c_k$ düsturu göstərir ki, hər bir qüvvət sırası öz cəmi olan $f(z)$ funksiyasının $z=a$ nöqtəsində Teylor sırasıdır. Bu deyilənlərdən belə nəticəyə gəlirik ki, oblastda requlyar olan funksiya həmin oblastda analitikdir. Aşağıdakı teorem bu hökmün tərsinin də doğru olduğunu göstərir.

T E O R E M 10.12. *G oblastında analitik olan $f(z)$ funksiyası həmin oblastda requlyardır.*

İ S B A T I. Tutaq ki, $z=a$ G oblastının ixtiyari nöqtəsidir. $L_r = \{z : |z-a| = r\}$ sərhəddi ilə birlikdə tamamilə G oblastına daxil olan $U_r(a) = \{z : |z-a| < r\}$ dairəsini götürək. Koşinin inteqral düsturundan istfadə edərək $U_r(a)$ dairəsinin istənilən z nöqtəsi üçün

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_r} \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi \tag{12}$$

düsturunu yazaq. Sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi düsturuna görə

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\xi-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} \tag{13}$$

ayrılışı doğrudur.

$$|\xi - a| = r, \left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| = \frac{|z-a|}{r} < 1$$

münasibətlərindən və Veyerştrass əlamətindən alınır ki, (13) sırası L_r çevrəsi üzərində müntəzəm yığılır. $f(z)$ funksiyası kəsilməz olduğu üçün o, L_r çevrəsi üzərində məhdududur. Ona görə də

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{\xi-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n \tag{14}$$

sırası da L_r çevrəsi üzərində müntəzəm yığılır. (14) düsturunu L_r çevrəsi üzrə inteqrallasaq və (12) düsturunu nəzərə alsaq

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \quad (z\in U_r(a)) \tag{15}$$

ayrılışını almış olarıq, burada

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi \quad (n=0,1,2,...). \tag{16}$$

(15) düsturu göstərir ki, $f(z)$ funksiyası $z=a$ nöqtəsində requlyardır. a-nın oblastın ixtiyari nöqtəsi olduğunu nəzərə alsaq teoremin doğru olduğunu alarıq. ◁

N ə t i c ə 10.4. $f(z)$ funksiyasının G oblastında requlyar olması üçün zəruri və kafi şərt onun həmin oblastda analitik olmasıdır.

T e o r e m 10.13 *(Liuvill). Bütün kompleks müstəvidə analitik və məhdud olan $f(z)$ funksiyası eynilik kimi sabitdir.*

İ s b a t ı. $f(z)$ funksiyası məhdud olduğu üçün elə $M>0$ ədədi var ki, ixtiyari $z\in C$ nöqtəsi üçün $|f(z)|\le M$ bərabərsizliyi ödənir. $f(z)$ funksiyası bütün kompleks müstəvidə analitik olduğu üçün onun

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+...+c_nz^n+... \tag{17}$$

qüvvət sırası kompleks müstəvinin bütün nöqtələrində yığılır. (16) düsturundan alınan

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_r}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi \quad (n=0,1,2,...)$$

düsturdan və qüvvət sırasının əmsalları üçün olan Koşi bərabərsizliyindən çıxır ki,

$$|c_n|\le\frac{M}{r^n} \quad (n=0,1,2,...) \tag{18}$$

bərabərsizlikləri istənilən müsbət r ədədi üçün doğrudur. (18)-də $r\to\infty$ şərti daxilində limitə keçsək $c_n=0$ $(n=1,2,...)$ bərabərliklərini alarıq. Bu bərabərlikləri (17) ayrılışında nəzərə alsaq $f(z)=c_0$ $(\forall z\in C)$ eyniliyini almış olarıq. ◁

Q e y d. Bütün kompleks müstəvidə analitik olan funksiyaya tam funksiya deyilir.

N ə t i c ə 10.5. *Tutaq ki, $f(z)$ tam funksiyadır. Fərz edək ki, elə $R_0>0, M>0$ ədədləri və elə k_0 natural ədədi var ki, $|z|>R_0$ şərtini ödəyən bütün z-lər üçün*

$$|f(z)|\le M|z|^{k_0}$$

bərabərsizliyi ödənir. Onda $f(z)$ dərəcəsi k_0-dan böyük olmayan çoxhədlidir.

S ə r b ə s t i ş. Bu nəticəni isbat edin.

N ə t i c ə 10.6. *(Cəbrin əsas teoremi).*

$$P_n(z)=c_0+c_1z+...+c_nz^n \quad (c_n\ne 0, n\in N)$$

şəklində olan hər bir çoxhədlinin heç olmasa bir sıfrı var.

İ s b a t ı. Əksini fərz etsək, alarıq ki, $f(z)=\dfrac{1}{P_n(z)}$ tam funksiyadır. $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$ olduğu üçün $f(z)$ həm də bütün kompleks müstəvidə məhduddur. Onda Liuvill teoremindən alarıq ki, $f(z)$ bütün kompleks müstəvidə eynilik kimi sabitdir. Bu isə o deməkdir ki, $P_n(z)$ bütün kompleks müstəvidə eynilik kimi sabitdir. $n\ge1$ olduğu üçün bu mümkün deyil. Deməli, əks fərziyə səhv olduğu üçün nəticənin hökmü doğrudur. ◁

10.4 . Çalışmalar

10.1.

1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|}{n^2+|z|^2}$ sırasının a) yığılma oblastını tapın; b) cəminin analitikliyini tədqiq edin.

2). Aşağıdakı sıraların, mötərizələrdə göstərilən oblastlarda, müntəzəm yığıldığını göstərin.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^{-2n}$ $\left(G:|z|\geq 1\right)$. b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-zn}$ $\left(G:\operatorname{Re} z\geq\delta>0\right)$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n+z^{-n}}$ $\left(G:|z|\leq\rho<\frac{1}{2}\right)$. d) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}$ $\left(G:\operatorname{Re} z\geq\delta>1\right)$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-z}$ $\left(G:\operatorname{Re} z\geq\delta>0\right)$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cos nz$ $\left(G:|\operatorname{Im} z|\leq\delta<\ln 2\right)$.

3). Sonlu sayda hədlərinin sonsuzluğa çevrilməsinə baxmayaraq, Aşağıdakı sıraların, mötərizələrdə göstərilən oblastlarda, müntəzəm yığıldığını göstərin.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2}$ $\left(G:|z|\leq R<+\infty\right)$. b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{e^z-n}$ $\left(G:|z|\leq R<+\infty\right)$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nz}}{n(z-n)}$ $\left(G:\operatorname{Re} z\leq 0\right)$. d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^z}{n+z}$ $\left(G:\operatorname{Re} z\leq\delta<-1\right)$.

4). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nz}}{n^2}$ sırasının müntəzəm yığılma oblastını tapın.

5). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-2i}{z+i}\right)$ sırasının yığılma oblastını tapın.

6). $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2}{(1+z^2)^n}$ sırası $|z|<1$ dairəsində müntəzəm yığıla bilərmi?

10.2.

1). Aşağıdakı qüvvət sıralarının yığılma radiusunu tapın.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$. b) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}(z-i)^n$. c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-i}\right)^n(z+5i)^n$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$. e) $\sum_{n=0}^{\infty}\cos in(z+i)^n$. f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}(z+3i)^n$.

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(z-1)^n$. h) $\sum_{n=0}^{\infty}n!e^{-n^\alpha}z^n$ $(\alpha>1)$.

2) Aşağıdakı qüvvət sıralarının mötərizələrdə göstərilən nöqtələrdə yığılmasını araşdırın.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+in\right)(z+1+i)^n$ $\left(z_1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i;\quad z_2=i\right)$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{2^n}$ $\left(z_1=2i;\quad z_2=4-3i\right)$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ $\left(z_1=1+\frac{1}{2}i;\quad z_2=-1\right)$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{10}(z-2i)^n$ $\left(z_1=\frac{1}{2}+2i;\quad z_2=2+2i\right)$.

e) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}(z+3)^n$ $\left(z_1=-3+\frac{1}{2}i;\quad z_2=-4-4i\right)$.

3) Qüvvət sıralası ilə təyin olunmuş aşağıdakı funksiyaların mötərizələrdə göstərilən törəmələrini tapın.

a) $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+in\right)(z+1+i)^n$ $\left(f'(-1-i)=?;\quad f''(-1-i)=?\right)$.

b) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$ $\left(f'(-1)=?;\quad f''(-1)=?\right)$.

c) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n$ $\left(f'(-1+i)=?;\ f''(-1+i)=?\right)$.

d) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{(n+1)2^n}$ $\left(f'(2)=?;\ f''(2)=?\right)$.

e) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)^n (z+2)^n$ $\left(f'(-2)=?;\ f''(-2)=?\right)$.

4) Göstərin ki, $\{c_n\}$ ardıcıllığı monotondursa, onda $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ qüvvət sırasının yığılma radiusu 1-dir.

5) Aşağıdakı qüvvət sıralarının yığılma çevrəsi üzərində yığılmasını araşdırın.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$. b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n\sqrt{n}}$. d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{\pi i n^2}{2}}}{n} z^n$. e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{\pi i n^2}{2}}}{\sqrt{n}} z^n$.

10.3.

1). Aşağıdakı funksiyaların mötərizələrdə göstərilən nöqtələrdə Teylor sırasını yazın və yığılma radiusunu tapın.

a) $f(z)=\sin(2z+1)$ $(a=-1)$. b) $f(z)=\cos z$ $\left(a=-\frac{\pi}{4}\right)$.

c) $f(z)=e^z$ $\left(a=\frac{1}{2}\right)$. d) $f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z-5}$ $(a=0)$.

e) $f(z)=\frac{1}{3z+1}$ $(a=-2)$. f) $f(z)=\frac{z}{z^2+i}$ $(a=0)$.

g) $f(z)=\cos^2\frac{iz}{2}$ $(a=0)$. h) $f(z)=\ln(2+z-z^2)$ $(a=0)$.

l) $f(z)=\frac{z}{z^2-2z-3}$ $(a=0)$. m) $f(z)=\frac{1}{3-2z}$ $(a=3)$.

2). Aşağıdakı funksiyaların Makloren sırasını yazın.

a) $f(z)=\frac{1}{(1+z)^2}$. b) $f(z)=\frac{1}{(1-z^2)^2}$. c) $f(z)=\frac{1}{(1+z^3)^2}$.

d) $f(z)=\frac{1}{(1+z)(z-2)}$. e) $f(z)=\frac{2z-5}{z^2-5z+6}$. f) $f(z)=\frac{z}{(1+z^2)(z^2-4)}$.

g) $f(z)=\frac{z^3}{(1+z^2)(z-1)}$. h) $f(z)=\frac{1}{(4+z^2)(z^2-1)^2}$. l) $f(z)=\frac{1}{z^2+z+1}$.

m) $f(z)=\frac{2z-1}{4z^2-2z+1}$. n) $f(z)=\frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}$.

3). Qeyri-müəyyən əmsallar üsulundan istifadə edərək, aşağıdakı funksiyaların Makloren sırasının sıfırdan fərqli ilk üç həddini tapın.

a) $f(z)=\frac{z}{\ln(1+z)}$. b) $f(z)=tgz$. c) $f(z)=\frac{z}{arctgz}$.

d) $f(z)=\frac{z}{\arcsin z}$. e) $f(z)=\frac{z}{(1-z^2)\sin z}$. f) $f(z)=e^{z\cos z}$.

4). $z=0$ nöqtəsində requlyar olan və göstərilən şərtləri ödəyən funksiyaların Makloren sırasını yazın.

a) $\begin{cases} f'(z)=f(z) \\ f(0)=1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1+z^2)f'(z)=1 \\ f(0)=0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} f''(z)+\lambda^2 f(z)=0, \\ f(0)=0, \\ f'(0)=\lambda. \end{cases}$ d) $\begin{cases} f''(z)+zf(z)=0, \\ f(0)=1, \\ f'(0)=0. \end{cases}$

10.5. Cavablar və göstərişlər

10.1.

1). a) C. Göstərin ki, sıra hər bir məhdud çoxluqda müntəzəm yığılır.

b) $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|}{n^2+|z|^2}$ funksiyası bütün kompleks müstəvidə kəsilməzdir, lakin heç bir nöqtədə analitik deyil. S ə b ə b: $\operatorname{Im} f(z)=0$.

2). f) $\cos nz=\frac{e^{inz}+e^{-inz}}{2}=\frac{e^{inx}e^{-ny}+e^{-inx}e^{ny}}{2}$ $(z=x+iy)$ düsturundan və $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}e^{|y|n}$ sırasının $|y|<\ln 2$ şərti daxilində yığıldığından istifadə edin. 3). sonsuzluğa çevrilən sonlu sayda hədləri atandan sonra alınan sıraları tədqiq edin.

4). $\operatorname{Re} z\le 0$. 5). $\operatorname{Im} z>\frac{1}{2}$. $|z-2i|<|z+i|$ bərabərsizliyini həll edin. 6). Xeyr. Göstərin ki, sıranın cəmi $z=0$ nöqtəsində kəsilir.

10.2.

1). a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. b) 1. c) $\sqrt{2}$. d) $+\infty$. e) $\frac{1}{e}$. f) $\frac{1}{e}$. g) $\frac{1}{4}$. h) $+\infty$. 2). Göstərilən nöqtələrin yığılma oblastına daxil olub olmamasını yoxlayın. a) z_1 nöqtəsində yığılır, z_2 nöqtəsində isə dağılır. b) z_1 nöqtəsində yığılır, z_2 nöqtəsində isə dağılır. c) z_1 nöqtəsində yığılır, z_2 nöqtəsində isə dağılır. d) z_1 nöqtəsində yığılır, z_2 nöqtəsində isə dağılır. e) z_1 nöqtəsində yığılır, z_2 nöqtəsində isə dağılır. 3) $f^{(k)}(a)=k!c_k$ düsturundan istifadə edin. a) $f'(-1-i)=1+i$; $f''(-1-i)=-7{,}5+4i$.

b) $f'(-1)=\frac{1-i}{2}$; $f''(-1)=\frac{6-8i}{25}$. c) $f'(-1+i)=1$; $f''(-1+i)=4$

d) $f'(2)=\frac{1}{4}$; $f''(2)=\frac{1}{6}$. e) $f'(-2)=0$; $f''(-2)=2$. 5). a) bütün nöqtələrində yığılır. b) $z=1$ nöqtəsindən başqa, bütün nöqtələrində yığılır. c) bütün nöqtələrində yığılır. d) $z=1, i, -i$ nöqtələrindən başqa, bütün nöqtələrində yığılır.

e) $z=1, i, -i$ nöqtələrindən başqa, bütün nöqtələrində yığılır.

10.3.

1). a) $-\sin 1+2(z+1)\cos 1+\frac{2^2}{2!}(z+1)^2\sin 1-\frac{2^3}{3!}(z+1)^3\cos 1-\ldots,\quad R=+\infty$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(z+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots\right],\quad R=+\infty.$

c) $\sqrt{e}\left[1+\frac{1}{2}(2z-1)+\frac{1}{2!2^2}(2z-1)^2+\frac{1}{3!2^3}(2z-1)^3+\ldots\right],\quad R=+\infty.$

d) $-\frac{1}{5}-\frac{9}{25}z-\frac{41}{125}z^2-\ldots,\quad R=1.$

e) $-\frac{1}{5}\left[1+\frac{3}{5}(z+2)+\frac{3^2}{5^2}(z+2)^2+\frac{3^3}{53}(z+2)^3+\ldots\right],\quad R=\frac{5}{3}.$

f) $-iz+z^3+iz^5-z^7-\ldots,\quad R=1.$

g) $1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\ldots\right),\quad R=+\infty.$

h) $\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}z+\frac{1}{2\cdot 4}z^2+\frac{1}{3\cdot 8}z^3+\ldots\right),\quad R=2.$

l) $-\frac{z}{3}+\frac{2}{3^2}z^2-\frac{7}{3^3}z^3+\ldots,\quad R=1$. H ə l l i. Verilən funksiyanı sadə kəsrlərə ayıraq:

$$\frac{z}{z^2-2z-3}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+z}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}. \tag{*}$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots,$$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=1+\frac{z}{3}+\left(\frac{z}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{3}\right)^3+\ldots,$$

düsturlarını (*)-da nəzərə alsaq məsələni həll etmiş olarıq.

m) $-\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}(z-3)-\frac{2^2}{3^3}(z-3)^2+\frac{2^3}{3^4}(z-3)^3-\ldots,\quad R=\frac{3}{2}$. H ə l l i. Verilən funksiyanı

$$\frac{1}{3-2z}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)} \qquad (**)$$

şəklində yazıb

$$\frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)}=1-\frac{2}{3}(z-3)+\left[\frac{2}{3}(z-3)\right]^2-\left[\frac{2}{3}(z-3)\right]^3+\ldots,$$

düsturunu (**)-da nəzərə alsaq məsələni həll etmiş olarıq.

2). a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$. b) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{2n}$. c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{3n}$. d) $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-\frac{1}{2^{n+1}}\right]z^n$. e) $-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right]z^n$. f) $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-\frac{1}{4^{n+1}}\right]z^{2n+1}$.

g) $-\sum_{n=1}^{\infty}\left(z^{4n}+z^{4n-1}\right)$. h) $\frac{1}{25}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{1}{4^{n+1}}+5n+6\right]z^{2n}$. l) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{3n}-z^{3n+1}\right)$.

m) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(2^{3n+2}z^{3n+2}-2^{3n}z^{3n}\right)$. n) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{8n}-z^{8n+1}\right)$.

H ə l l i. $\frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}$ kəsrinin surət və məxrəcini $(1-z)$-ə vursaq

$$f(z)=\frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}=\frac{1-z}{1-z^8}=(1-z)\frac{1}{1-z^8}$$

bərabərliyini alarıq. Bu bərabərlikdə

$$\frac{1}{1-z^8}=1+z^8+z^{2\cdot 8}+z^{3\cdot 8}+z^{8n}+\ldots$$

ayrılışını nəzərə alsaq $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{8n}-z^{8n+1}\right)$ düsturunu almış olarıq.

3). a) $1+\frac{z}{2}-\frac{z^2}{12}+\ldots$.. b) $z+\frac{2z^3}{3!}+\frac{16z^5}{5!}+\ldots$.. c) $1+\frac{z^2}{3}-\frac{4z^4}{45}+\ldots$..

d) $1-\frac{z^2}{6}-\frac{17z^4}{360}+\ldots$.. e) $1+\frac{7}{6}z^2+\frac{427}{360}z^4\ldots$. H ə l l i. $f(z)=\frac{z}{(1-z^2)\sin z}$ funksiyasının Makloren sırasını aşağıdakı kimi yazaq:

$$\frac{z}{(1-z^2)\sin z}=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots\ .$$

Buradan

$$\frac{z}{(1-z^2)}=\sin z\left(c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots\right)$$

bərabərliyini alarıq.

$$\frac{1}{1-z^2}=1+z^2+z^4+\ldots$$

$$\sin z=1-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\ldots$$

düsturlarından istifadə etsək

$$z + z^3 + z^5 + \ldots \quad = \left(1 - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \ldots\right)\left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots\right)$$

bərabərliyini alarıq. Sonuncu bərabərlikdə $z^k\ (k = 0,1,2,\ldots)$-ların əmsallarını bərabərləşdirsək

$$\begin{cases} z: & c_0 = 1 \\ z^2: & 0 = c_1 \\ z^3: & 1 = c_2 - \frac{1}{6}c_0 \\ z^4: & 0 = c_3 - \frac{1}{6}c_1 \\ z^5: & 1 = c_4 - \frac{1}{6}c_2 + \frac{1}{120}c_0 \end{cases}$$

tənliklər sistemini alarıq. Buradan da $c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = \frac{7}{6}$, $c_3 = 0, c_4 = \frac{427}{360}$ bərabərlikləri alınır. Beləliklə

$$\frac{z}{(1 - z^2)\sin z} = 1 + \frac{7}{6}z^2 + \frac{427}{360}z^4 \ldots$$

düsturunu almış olduq.

f) $1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots\ldots$

4). a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$. c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{2n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

d) $1 - \frac{z^3}{2\cdot 3} + \frac{z^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \frac{z^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \ldots$.

XI F ə s i l
YEGANƏLİK TEOREMİ. ANALİTİK FUNKSİYANIN SIFIRLARI

11.1. Yeganəlik teoremi

T E O R E M 11.1. *Tutaq ki, G oblastında requlyar olan $f(z)$ və $g(z)$ funksiyaları G oblastının hər hansı bir sonsuz E çoxluğunda bərabər qiymətlər alır. Əgər E çoxluğunun G oblastına daxil olan heç olmasa bir limit nöqtəsi varsa, onda $f(z)$ və $g(z)$ funksiyaları G oblastında bir-birinə bərabərdir.*

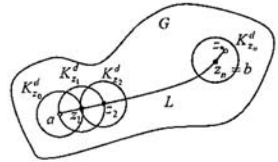
İ S B A T I. Tutaq ki, a E çoxluğunun G oblastına daxil olan limit nöqtəsidir. Göstərək ki, $f(a) = g(a)$. a ədədi E çoxluğunun limit nöqtəsi olduğu üçün, E-dən olan və a-ya yığılan $\{\xi_k\}$ $(\xi_k \neq \xi_k', k \neq k'; \xi_k \neq a, k = 1,2,\ldots)$ ardıcıllığı var. Şərtə görə $f(\xi_k) = g(\xi_k)$ $(k = 1,2,\ldots)$ olduğundan bu bərabərlikdə $k \to \infty$ şərti daxilində limitə keçsək, ($f(z)$ və $g(z)$ funksiyaları a nöqtəsində kəsilməzdir!) onda $f(a) = g(a)$ bərabərliyini alarıq. Göstərək ki, G oblastının a-dan fərqli istənilən b nöqtəsində də $f(b) = g(b)$ bərabərliyi ödənir. Bu məqsədlə, a və b nöqtələrini G oblastının daxilində yerləşən, düzlənə bilən L əyrisi ilə birləşdirək (Şəkil 11.1). L əyrisi ilə G oblastının ∂G sərhəddi arasındakı məsafəni $2d$ ilə işarə edək

$$(dist(L, \partial G) = \inf_{s \in L, t \in \partial G}|s - t| = 2d \quad (d > 0)).$$

$f(z)$ və $g(z)$ funksiyaları a nöqtəsində requlyar olduğuna görə onları yığılma oblastları, uyğun olaraq, $U_{R_1}(a)$ və $U_{R_2}(a)$ olan

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n \text{ və } g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n$$

qüvvət sıralarına ayırmaq olar. Aydındır ki, $K_{z_0}^d \subset U_{R_f}(a)\cap U_{R_g}(a)$, burada $K_{z_0}^d$ ilə mərkəzi $z_0=a$ nöqtəsində radiusu d-yə bərabər olan açıq dairə işarə olunmuşdur (Şəkil 11.1). $f(a)=g(a)$ bərabərliyindən çıxır ki, $a_0=b_0$. Bu bərabərliyi



Şəkil 11.1.

E çoxluğunun bütün nöqtələrində doğru olan $f(z)=g(z)$ $(z\in E)$ bərabərliyində nəzərə alsaq

$$a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\ldots=b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\ldots$$

bərabərliyini alarıq. Bu bərabərlikdən E çoxluğunun bütün nöqtələrində doğru olan

$$a_1+a_2(z-a)+a_3(z-a)^2+\ldots=b_1+b_2(z-a)+b_3(z-a)^2+\ldots \quad (1)$$

bərabərliyi alınır. (1)-də z-in yerinə ξ_k yazıb $k\to\infty$ şərti daxilində limitə keçsək $a_1=b_1$ bərabərliyini alarıq. Prosesi bu qayda ilə davam etdirsək, istənilən $n\in\{0,1,2,\ldots\}$ üçün $a_n=b_n$ olduğunu görərik. Bu isə o deməkdir ki, $K_{z_0}^d$ dairəsində $f(z)$ və $g(z)$ funksiyaları eynilik kimi bir-birinə bərabərdir.

L əyrisi üzərində $0<|z_i-z_j|<d$ $(i\neq j)$ şərtlərini ödəyən $z_0=a, z_1, z_2, \ldots, z_n=b$ nöqtələri götürək və onu (Borel lemmasına əsaslanaraq!) $\{K_{z_j}^d\}_{j=0}^n$ dairələri ilə örtək (Şəkil 11.1). Göstərək ki, bu dairələrin hər birində $f(z)$ və $g(z)$ funksiyaları eynilik kimi bir-birinə bərabərdir. Tutaq ki, $K_{z_j}^d$ dairəsində $f(z)$ və $g(z)$ funksiyaları eynilik

kimi bir-birinə bərabərdir. Aydındır ki, $z_{j+1}\in K_{z_j}^d$ nöqtəsi $f(z)$ və $g(z)$ funksiyalarının eynilik kimi bir-birinə bərabər olduğu $E_j=K_{z_j}^d\cap K_{z_j}^d$ çoxluğunun limit nöqtəsidir. $z_0=a$ nöqtəsi üçün yuxarıdakı mühakiməni z_{j+1} nöqtəsi üçün aparsaq, $K_{z_{j+1}}^d$ dairəsində də $f(z)$ və $g(z)$ funksiyalarının eynilik kimi bir-birinə bərabər olduğunu görərik. Nəticə etibarı ilə alırıq ki, $K_{z_*}^d$ dairəsinin hər bir z_* nöqtəsində $f(z)$ və $g(z)$ funksiyaları bərabər qiymətlər alır. Xüsusi halda $z_*=b$ götürsək $f(b)=g(b)$ bərabərliyini almış olarıq. Beləliklə, b-nin ixtiyariliyindən alarıq ki, G oblastının hər bir z nöqtəsində $f(z)=g(z)$ bərabərliyi doğrudur. ◁

N ə t i c ə 11.1. E çoxluğu olaraq

a) G oblastının müxtəlif nöqtələrindən düzəldilmiş və limiti G-dən olan istənilən $\{z_k\}$ ardıcıllığını;

b) G oblastının istənilən L əyrisini;

c) G oblastının istənilən nöqtəsinin istənilən ətrafını;

d) G oblastının istənilən ω alt oblastını götürmək olar.

Q E Y D. Bütün hallarda deyirlər ki, $f(z)$ funksiyası E çoxluğundan G oblastına analitik davam olunmuşdur.

Beləliklə, deyilənlərdən çıxır ki, analitik funksiyanı G oblastında təyin etmək üçün onun E çoxluğundakı qiymətləri kifayətdir.

D İ Q Q Ə T! Analitik funksiyanın E çoxluğundakı qiymətlərini necə vermək lazımdır ki, bu qiymətlər G oblastında analitik olan funksiyanın qiymətləri olsun? Bu, hələlik cavabsız qalan suallardan biridir!

M i s a l. $f(z)=\cos^2 z+\sin^2 z$ və $g(z)=1$ funksiyaları $G=C$ kompleks müstəvisində analitikdirlər. Hər bir nöqtəsi limit nöqtəsi olan $E=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\subset C$ çoxluğunda bu funksiyalar üst-üstə düşürlər (Pifaqor teoreminə görə!). Deməli, yeganəlik teoreminə görə, istənilən $z\in C$ üçün $\cos^2 z+\sin^2 z=1$ eyniliyi doğrudur.

S Ə R B Ə S T İ Ş. Göstərin ki,

a) həm dairəvi, həm də hiperbolik triqonometrik funksiyalar üçün toplama teoremləri kompleks müstəvidə də doğrudur;

b) həm dairəvi, həm də hiperbolik triqonometrik funksiyalar üçün ikiqat və üçqat arqumentin triqonometrik düsturları kompleks müstəvidə də doğrudur;

c) dairəvi triqonometrik funksiyalar üçün çevirmə düsturları kompleks müstəvidə də doğrudur;

d) $\sin z$ və $\cos z$ 2π dövrlü funksiyalardır;

e) tgz və $ctgz$ π dövrlü funksiyalardır.

M i s a l. a) $x \in (0,+\infty)$ aralığında təyin olunmuş (Eylerin "Qamma" funksiyası)

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

və $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ oblastında təyin olunmuş

$$F(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

funksiyalarına baxaq. $F(z)$ funksiyası $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ oblastında analitikdir və $(0,+\infty)$ aralığında $\Gamma(x)$ funksiyası ilə üst-üstə düşür. Deməli $F(z)$ $\Gamma(x)$-in $(0,+\infty)$ aralığından $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ oblastına analitik davamıdır.

b) $G = C \setminus \{-n\}_{n=0}^{+\infty}$ oblastında təyin olunmuş

$$F(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

funksiyasına baxaq. $\Psi(z)$ funksiyası $G = C \setminus \{-n\}_{n=0}^{+\infty}$ oblastında analitikdir. O, $(0,+\infty)$ aralığında $\Gamma(x)$ funksiyası ilə, $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ oblastında isə $F(z)$ ilə üst-üstə düşür. Deməli $\Psi(z)$ $\Gamma(x)$-in $(0,+\infty)$ aralığından, $F(z)$-ın isə $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ oblastından analitik davamıdır. Ona görədə həm $F(z)$-i, həm də $\Psi(z)$-i $\Gamma(z)$ ilə işarə edirlər. Beləliklə,

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \left(z \in G = C \setminus \{n\}_{n=0}^{+\infty}\right).$$

Q E Y D. Davam formaları müxtəlif olsa da, analitik davam yeganədir.

M i s a l. $U_1(0) = \{z : |z| < 1\}$ oblastında analitik olan və

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},\ n = 2,3,...$$

şətlərini ödəyən funksiya varmı?

Aydındır ki, $z = 0$ $E = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty} \subset U_1(0)$ çoxluğunun limit nöqtəsidir və $h(z) = z$ analitik funksiyası $h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ şərtini ödəyir. Əgər misalın şərtini ödəyən $g(z)$ funksiyası olsa idi o, $h(z) = z$ funksiyası ilə üst-üstə düşərdi. Lakin $h\left(-\frac{1}{n}\right) \neq \frac{1}{n}$ olmadığı üçün belə funksiya yoxdur.

M I S A L. $U_1(0) = \{z : |z| < 1\}$ oblastında analitik olan və

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n},\ n = 2,3,...$$

şətlərini ödəyən funksiya varmı? $f(z) = 1 + z$ misalın şərtlərini ödəyir. Cavab: Bəli.

11.2. Analitik funksiyanın sıfırları

T Ə R İ F 11.1. *Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası kompleks müstəvinin G oblastında təyin olunmuşdur. G oblastının $f(a) = 0$ bərabərliyini ödəyən $z = a$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının sıfrı deyilir.*

Tərif 11.2. *Tutaq ki, G oblastının $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının sıfrıdır. Əgər $z=a$ nöqtəsinin G oblastından olan müəyyən ətrafında $f(z)$ funksiyasını $f(z)=(z-a)^{\alpha}g(z)$ $(\alpha>0, g(a)\neq 0)$ şəklində göstərmək mümkün olarsa, onda $z=a$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının α tərtibli sıfrı deyilir. Əgər α natural ədəd olarsa, onda $z=a$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının tam tərtibli sıfrı deyilir. Xüsusi halda, əgər $\alpha=1$ olarsa, onda $z=a$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının sadə sıfrı deyilir.*

Teorem 11.2. *G oblastında eynilik kimi sıfır olmayan analitik $f(z)$ funksiyasının hər bir sıfrı tam tərtiblidir.*

İsbatı. Tutaq ki, G oblastının $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının sıfrıdır. Analitik funksiya requlyar olduğu üçün $z=a$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında $f(z)$ funksiyasını

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots \tag{2}$$

qüvvət sırası şəklində göstərə bilərik. $f(a)=0$ olduğu üçün $c_0=0$. $f(z)$ funksiyası eynilik kimi sıfır olmadığı üçün c_k əmsallarının hamısı sıfır ola bilməz. Deməli, elə natural m ədədi var ki, $c_0=c_1=\ldots=c_{m-1}=0; c_m\neq 0$ münasibətləri ödənir. Bu münasibətləri (2)-də nəzərə alsaq

$$f(z)=c_m(z-a)^m+c_{m+1}(z-a)^{m+1}+\ldots=(z-a)^m g(z)$$

bərabərliyini alarıq, burada

$$g(z)=c_m+c_{m+1}(z-a)+\ldots+c_{m+k}(z-a)^k+\ldots.$$

Aydındır ki, $g(z)$ funksiyası $z=a$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında analitikdir və $g(a)=c_m\neq 0$. ◃

$f(z)$ funksiyasının $z=a$ nöqtəsində qüvvət sırasına ayrılışında iştirak edən Teylor əmsallarının $c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ şəklində olduğunu nəzərə alsaq, bu teoremdən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə 11.2. $z=a$ nöqtəsinin $f(z)$ funksiyasının m tərtibli sıfrı olması üçün zəruri və kafi şərt $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(m-1)}(a)=0$, $f^{(m)}(a)\neq 0$ münasibətlərinin ödənməsidir.

Misal. $f(z)=z^2\sin z$ funksiyasının sıfırlarını və onların tərtiblərini tapın.

Həlli. $z^2\sin z=0$ tənliyini ödəyən ədədlər

$$z^2=0 \text{ və } \sin z=0$$

tənliklərini ödəyən ədədlərdir.

$$0=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

tənliyindən alınan $e^{2iz}=1$ tənliyində e^z funksiyasının $2\pi i$ dövrlü olduğunu nəzərə alsaq $\sin z=0$ tənliyinin köklərinin $z_n=n\pi, n\in Z$ olduğunu görərik. $\sin z$-in

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots$$

Makloren sırasından istifadə etsək

$$z^2\sin z=z^3\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots\right)$$

ayrılışından görərik ki, $z=0$ nöqtəsi $f(z)=z^2\sin z$ funksiyasının 3 tərtibli sıfrıdır.

$$f'(z_n)=2z_n\sin z_n+z_n^2\cos z_n=(\pi n)^2\cos\pi n=(\pi n)^2(-1)^n$$

bərabərliklərindən və Nəticə 11.2-dən alırıq ki, $z_n = n\pi, n \in Z \setminus \{0\}$ nöqtələri $f(z) = z^2 \sin z$ funksiyasının sadə sıfırlarıdır.

T ə r i f 11.3. *Tutaq ki, G oblastının $z = a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının sıfrıdır və bu nöqtənin elə bir ətrafı var ki, həmin ətrafda $f(z)$ funksiyası, $z = a$ nöqtəsindən başqa, heç bir nöqtədə sıfra çevrilmir. Onda $z = a$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının təcrid olunmuş (izolə edilmiş) sıfrı deyilir.*

T e o r e m 11.3. *Eynilik kimi sıfır olmayan analitik funksiyanın hər bir sıfrı təcrid olunmuş sıfırdır.*

İ s b a t ı. Tutaq ki, G oblastının $z = a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının m tərtibli sıfrıdır. Onda $z = a$ nöqtəsinin G oblastından olan müəyyən ətrafında $f(z)$ funksiyasını $f(z) = (z-a)^m g(z)$ $(g(a) \neq 0)$ şəklində göstərmək olar. $g(z)$ funksiyası həmin ətrafda kəsilməz olduğuna görə $g(a) \neq 0$ bərabərsizliyi $z = a$ nöqtəsinin kifayət qədər kiçik $U_\delta(a)$ $(\delta > 0)$ ətrafında da öz qüvvəsində qalacaqdır. Bu isə o deməkdir ki, $f(z)$ funksiyası $U_\delta(a)$ ətrafında $z = a$ nöqtəsindən başqa heç bir nöqtədə sıfra çevrilmir. ◁

M i s a l. $$f(z) = \begin{cases} f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

funksiyasına baxaq. $z = 0$ bu funksiyanın təcrid olunmamış sıfrıdır. Çünki o, bu funksiyanın $z_n = \dfrac{1}{\pi n}$ $(n \in Z \setminus \{0\})$ sıfırlarının limit nöqtəsidir. Burada teoremə zidd bir şey yoxdur. Çünki, baxılan $f(z)$ funksiyası $z = 0$ nöqtəsində analitik deyil. Doğrudan da $z = 0$ nöqtəsinə xəyali ox boyunca yaxınlaşsaq

$$\lim_{0<x\to 0} f(ix) = \lim_{0<x\to 0} x^2 \sin\frac{i}{x} = \lim_{0<x\to 0} x^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}}{2i} = \infty$$

olduğunu görərik.

Yeganəlik teoremindən aşağıdakı teorem alınır.

T e o r e m 11.4. *G oblastında eynilik kimi sıfır olmayan analitik funksiya*

a) G oblastının, heç olmasa bir limit nöqtəsi G-yə daxil olan, heç bir sonsuz E çoxluğunda;

b) G oblastının müxtəlif nöqtələrindən düzəldilmiş və limiti G-dən olan heç bir $\{z_k\}$ ardıcıllığında;

c) G oblastının heç bir L əyrisi üzərində;

d) G oblastının heç bir nöqtəsinin heç bir ətrafında;

e) G oblastının heç bir ω alt oblastınında

sıfır ola bilməz.

N ə t i c ə 11.3. G oblastında eynilik kimi sıfır olmayan analitik funksiyanın sıfırlarının limit nöqtələri G oblastının ∂G sərhəddində ola bilər.

M i s a l. $G = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$ oblastında analitik olan $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ funksiyanın $z_n = \dfrac{1}{\pi n}$ $(n \in Z \setminus \{0\})$ sıfırlarının limit nöqtəsi G oblastının ∂G sərhəddinə daxil olan $z = 0$ nöqtəsidir.

T e o r e m 11.5. *G oblastında eynilik kimi sıfır olmayan analitik funksiyanın sıfırları ən çoxu hesabidir.*

İ s b a t ı. Tutaq ki, $f(z)$ G oblastında eynilik kimi sıfır olmayan analitik funksiyadır. Bir-birinə ciddi daxil olan və $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ şərtini ödəyən qapalı məhdud $\{K_n\}$ çoxluqlar ardıcıllığı seçək. A ilə $f(z)$ funksiyasının G oblastına, A_n ilə isə $E_n = K_n \setminus K_{n-1}$ $(E_1 = K_1)$ çoxluğuna düşən sıfırlar çoxluğunu işarə edək. Aydındır ki, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Teorem 11.4-ə görə hər bir n üçün A_n sonlu çoxluqdur (bəzi A_n-lər boş da ola bilər!). Hesabi sayda sonlu çoxluqların birləşməsi ən çoxu hesabi çoxluqdur teoreminə istinad etsək teoremi isbat etmiş olarıq. ◁

S ə r b ə s t i ş. Göstərin ki, teoremin isbatında istifadə olunan $\{K_n\}$ ardıcıllığı vardır.

Bu vaxta qədər olan mühakimələrdə fərz olunurdu ki, $f(z)$ funksiyasının sıfrı olan $z=a$ nöqtəsi kompleks ədəddir. İndi fərz edək ki, a sonsuz uzaqlaşmış nöqtədir, yəni $a=\infty$.

TƏRİF 11.4. *$f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$ olarsa, onda $a=\infty$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının sıfrı deyilir.*

TƏRİF 11.5. *Əgər hər hansı bir müsbət R ədədi üçün, $a=\infty$ nöqtəsinin $U_R(\infty)=\{z:|z|>R\}$ ətrafında, $f(z)$ funksiyasını*

$$f(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots+\frac{c_n}{z^n}+\ldots \qquad (3)$$

şəklində olan qüvvət sırasına ayırmaq mümkün olarsa, onda deyirlər ki, $f(z)$ funksiyası $a=\infty$ nöqtəsində analitikdir (requlyardır).

TƏRİF 11.6. *Əgər (3) ayrılışında $c_0=c_1=\ldots=c_{m-1}=0,\quad c_m\neq 0$ münasibətləri ödənərsə, onda $a=\infty$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının m tərtibli sıfrı deyilir.*

Bilavasitə tərifdən çıxır ki, əgər $a=\infty$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının m tərtibli sıfrıdırsa, onda onu $a=\infty$ nöqtəsinin $U_R(\infty)=\{z:|z|>R\}$ ətrafında

$$f(z)=\frac{1}{z^m}\left(c_m+\frac{c_{m+1}}{z}+\frac{c_{m+2}}{z^2}+\ldots+\frac{c_{m+n}}{z^n}+\ldots\right)=\frac{g(z)}{z^m}$$

şəklində yazmaq olar, burada $g(z)$ funksiyası $a=\infty$ nöqtəsinin $U_R(\infty)=\{z:|z|>R\}$ ətrafında analitikdir və $g(\infty)=c_m\neq 0$.

TEOREM 11.6. *Tutaq ki, $a=\infty$ nöqtəsi, onun $U_R(\infty)=\{z:|z|>R\}$ ətrafında eynilik kimi sıfır olmayan, analitik $f(z)$ funksiyasının sıfrıdır. Onda $a=\infty$ nöqtəsi $f(z)$-in təcrid olunmuş sıfrıdır.*

İSBATI. $\varphi(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ funksiyaşı daxil edək. Teoremin şərtindən çıxır ki, $\varphi(z)$ funksiyası $z=0$ nöqtəsində analitikdir, eynilik kimi sıfır deyil və $z=0$ nöqtəsi onun sıfrıdır. Onda Teorem 11.3-ə görə $z=0$

nöqtəsi onun təcrid olunmuş nöqtəsidir. Buradan alırıq ki, $a=\infty$ nöqtəsi $f(z)$-in təcrid olunmuş sıfrıdır. ◁

Misal 1. $f(z)=\dfrac{z^2+9}{z^4}$ funksiyasının sıfırlarını tapın və onların tərtiblərini müəyyən edin.

Aydındır ki, $z_1=-3i, z_2=3i, z_3=\infty$ nöqtələri bu funksiyanın sıfırlarıdır.

$$f(z)=\frac{z^2+9}{z^4}=(z+3i)g(z)\quad\left(g(-3i)=-\frac{2}{27}i\neq 0\right),$$

$$f(z)=\frac{z^2+9}{z^4}=(z-3i)h(z)\quad\left(h(3i)=\frac{2}{27}i\neq 0\right),$$

$$f(z)=\frac{z^2+9}{z^4}=\frac{1}{z^2}\varphi(z)\quad(\varphi(\infty)=1\neq 0)$$

münasibətlərindən alırıq ki, $z_1=-3i, z_2=3i$ nöqtələri bu funksiyanın sadə sıfırları, $z_3=\infty$ nöqtəsi isə 2 tərtibli sıfrıdır.

11.3. Çalışmalar

11.1.

$z=0$ nöqtəsinin ətrafında requlyar və aşağıdakı şərtlərdən birini ödəyən funksiya varmı?

1). $f\left(\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}\frac{1}{n^2}, & n\in N\setminus\{1\},\\ 0, & n=1.\end{cases}$ 2). $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sin^2\frac{\pi n}{2}, n\in N$.

3). $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\cos^2\frac{\pi n}{2}, n\in N$. 4). $f\left(\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2n}, & n\in N\setminus\{1\},\\ 0, & n=1.\end{cases}$

5). $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n+1}, n\in N$. 6). $f\left(\frac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n+\cos^2\frac{\pi n}{2}}, n\in N$.

7). $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\cos \pi n, n\in N$. 8). $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+1}, n\in N$.

9). $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\cos^2 \pi n}{2n+1}, n\in N$. 10). $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}, n\in N$.

11). Hansı hallarda $|z|<1$ dairəsində $f\left(\frac{1}{n}\right)=a_n, n\in N$ şərtini ödəyən requlyar funksiya var?

a) $a_n=(-1)^n$; b) $a_n=\frac{1-(-1)^n}{n}$; c) $a_n=\frac{n+1}{n}$;

d) $a_{2k}=a_{2k+1}=\frac{1}{2k}, k=1,2,\ldots$.

Aşağıdakı halların hər birində $|z-1|<2$ dairəsində analitik olan $f(z)$ funksiyasını tapın.

12). $f\left(\frac{n+1}{n}\right)=f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n}, n\in N$.

13). $f\left(\frac{n}{n+1}\right)=-f\left(\frac{n+2}{n+1}\right)=-\frac{1}{(n+1)^3}, n\in N$.

14). $f\left(\frac{n}{n+1}\right)=f\left(\frac{n+2}{n+1}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}, n\in N$.

15). $f\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{(-1)^n}{n+1}, n\in N$.

16) Göstərin ki, $z=0$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında requlyar olan və $f(z)=f(2z)$ şərtini ödəyən $f(z)$ funksiyası həmin ətrafda eynilik kimi sabitdir.

11.2.

Aşağıdakı funksiyaların sıfırlarını tapın və onların tərtiblərini təyin edin.

1). $f(z)=1+\cos z$. 2). $f(z)=1-e^z$. 3). $f(z)=(z^2+1)^3 shz$.

4). $f(z)=4z^2+z^4$. 5). $f(z)=\frac{\sin z}{z}$. 6). $f(z)=\cos z^3$.

7). $f(z)=(z^2+\pi^2)(1+e^{-z})$. 8). $f(z)=z\cos^2 z$.

9). $f(z)=(z^2+2z+1)(1-e^z)$. 10). $f(z)=(z^2+2z+1)(1-e^z)$.

11). $f(z)=\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z+1}}$. 12). $f(z)=\frac{e^{\cos z}}{(z^2+1)^2}$. 13). $f(z)=\frac{z}{1-\cos z}$.

Aşağıdakı funksiyalar üçün $a=0$ nöqtəsi neçə tərtibli sıfırdır?

14). $f(z)=e^{z^2}-1-z^2$. 15). $f(z)=\frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2-\sin^2\frac{z}{2}}$.

16). $f(z)=e^{\sin z}-e^{tg z}$. 17). $f(z)=\frac{z^3}{1+z-e^z}$.

18). $f(z)=\left(e^z-e^{z^2}\right)\ln(1-z)$. 19). $f(z)=z^2\left(e^{z^2}-1\right)$.

20). $f(z)=6\sin z^3+z^3(z^6-6)$. 21). $f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}$.

11.4. Cavablar və göstərişlər

11.1.

1). Yox. H ə l l i. $f(z)$ və $g(z)=z^2$ funksiyalarını müqayisə etsək, görərik ki, bu funksiyalar limit nöqtəsi $z=0$ olan $E=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ çoxluğunda üst-üstə düşürlər. Əgər $f(z)$ $z=0$ nöqtəsinin ətrafında requlyar olsa idi, yeganəlik teoreminə görə, onlar bu ətrafda üst-üstə düşərdilər. $f(1)=0$ və $g(1)=1$ bərabərlikləri göstərir ki, bu mümkün deyil. Deməli $z=0$ nöqtəsinin ətrafında misalın şərtlərini ödəyən $f(z)$ funksiyası yoxdur.

2). Yox. 3). Yox. 4). Yox. 5). Var. $f(z)=\dfrac{1}{z+1}$. 6). Yox. $f(z)$ funksiyasını $g(z)=z$ funksiyası ilə müqayisə edin. 7). Yox. 8). Var. 9). Var. 10). Var. 11). a) Yoxdur. b) Yoxdur. c) Vardır. d) Yoxdur. 12). Yoxdur. 13). $f(z)=(z-1)^3$. 14). $f(z)=(z-1)^2$. 15). Yoxdur. 16). Göstərin ki, $f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)=f(1), n\in N$.

11.2.

1). $z_n=(2n+1)\pi, n\in Z$. $f'(z_n)=0, f''(z_n)\neq 0$ münasibətləri göstərir ki, hər bir sıfır 2 tərtiblidir. 2). $z_n=2\pi n, n\in Z$. Hamısı 1 tərtiblidir. 3). $z^*=i, z^{**}=-i; z_n=n\pi i, n\in Z$. $z^*=i, z^{**}=-i$ hər biri 3 tərtibli sıfırdir. $z_n=n\pi i, n\in Z$-lər isə sadə sıfırlardır. 4). $z_1=2i, z_2=-2i, z_3=0$. $z_1=2i, z_2=-2i$ hər biri sadə sıfırdir. $z_3=0$ isə 2 tərtibli sıfırdir. 5). $z_n=\pi n, n\in Z\setminus\{0\}$. Hamısı sadə sıfırdır. 6).
$z_n^{(1)}=\sqrt[3]{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}, n\in Z; z_n^{(2)}=\sqrt[3]{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}, n\in Z;$

$z_n^{(3)}=\sqrt[3]{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}, n\in Z$. Hamısı sadə sıfırdır.

7). $z'=\pi i, z''=-\pi i; z_n=(2n+1)\pi i, n=1,\pm2,\pm3,\ldots$. $z'=\pi i, z''=-\pi i$ hər biri 2 tərtibli sıfırdir. $z_n=(2n+1)\pi i, n=1,\pm2,\pm3,\ldots$ sadə sıfırlardir.

8). $z'=0; z_n=\dfrac{(2n+1)\pi}{2}, n\in Z$. $z'=0$ sadə sıfırdir. $z_n=\dfrac{(2n+1)\pi}{2}, n\in Z$: hər biri 2 tərtibli sıfırdir.

9). $z'=-1; z_n=2\pi ni, n\in Z$. $z'=-1$ 2 tərtibli sıfırdir. $z_n=2\pi ni, n\in Z$: hər biri sadə sıfırdir.

10). $z'=i, z''=-i; z_n=n\pi, n\in Z$. $z'=i, z''=-i$ hər biri 3 tərtibli sıfırdir. $z_n=n\pi, n\in Z$: sadə sıfırlardir. 11). $z=\infty$ 2 tərtibli sıfırdir. 12). $z=\infty$ 4 tərtibli sıfırdir. 13). $z_1=\infty$ və $z_2=0$. Hər ikisi sadə sıfırdir. 14). 4. Həlli. $f(z)=e^{z^2}-1-z^2$ funksiyasının

$$f(z)=e^{z^2}-1-z^2=\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{n!}+\ldots$$

Makloren sırasından alınan

$$f(z)=z^4\left(\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\ldots+\frac{z^{2n-4}}{n!}+\ldots\right)=z^4g(z)\quad\left(g(0)=\frac{1}{2}\neq 0\right)$$

düsturdan alırıq ki, $a=0$ nöqtəsi $e^{z^2}-1-z^2$ funksiyasının 4 tərtibli sıfrıdır.

15). 2. 16). 3. 17). 1. 18). 2. 19). 4. 20). 15. 21). 5. Həlli. $\sin z$ funksiyasının

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots$$

Makloren sırasından alınan

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}=\frac{z^8}{z-\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=z^5\frac{1}{\dfrac{1}{3!}-\dfrac{z^2}{5!}+\ldots}=z^5g(z)\quad(g(0)=6\neq 0)$$

düsturdan alırıq ki, $a=0$ nöqtəsi $\dfrac{z^8}{z-\sin z}$ funksiyasının 5 tərtibli sıfrıdır.

XII Fəsil
LORAN SIRASI. TƏCRİD OLUNMUŞ (İZOLƏ EDİLMİŞ) MƏXSUSİ NÖQTƏLƏR

12.1. Loran sırası

Əvvəlcə qüvvət sırasının ümumiləşməsi olan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{1}$$

şəkilli sıraları nəzərdən keçirək.

TƏRİF 12.1. $U_{r,R}(a)=\begin{cases}\{z: r<|z-a|<R\}, 0\le r<R\le+\infty,\\ \varnothing, \qquad r\ge R\end{cases}$

çoxluğuna mərkəzi $z=a$ nöqtəsində, sərhəddi $C_r=\{z:|z-a|=r\}$ və $C_R=\{z:|z-a|=R\}$ çevrələri olan dairəvi halqa deyilir.

TƏRİF 12.2. *Əgər $z=z_0$ nöqtəsində $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ və $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ sıralarının hər ikisi yığılarsa, onda deyirlər ki, (1) sırası $z=z_0$ nöqtəsində yığılır.*

TEOREM 12.1. *(1) sırasının yığılma oblastı mərkəzi $z=a$ nöqtəsində olan dairəvi halqadır. Əgər bu halqa boş çoxluq deyilsə, onda*

a) həmin halqanın hər bir nöqtəsində (1) sırası mütləq yığılır;

b) həmin halqanın hər bir qapalı məhdud alt oblastında (1) sırası müntəzəm yığılır;

c) (1) sırasının cəmi olan $f(z)$ funksiyası həmin halqada analitikdir;

d) c_n əmsalları

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots). \tag{2}$$

düsturu ilə hesablanır, burada $\gamma_\rho=\{z:|z-a|=\rho\}$ $(r<\rho<R)$ $U_{r,R}(a)$ halqasında yerləşən, mərkəzi $z=a$ nöqtəsində, radiusu ρ olan müsbət istiqamətli çevrədir.

İSBATI. Məlumdur ki, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ qüvvət sırasının yığılma oblastı $U_R(a)=\{z:|z-a|<R\}$ $(0\le R\le+\infty)$ dairəsidir. Abel teoreminə görə bu qüvvət sırası $U_R(a)$ dairəsinin hər bir nöqtəsində mütləq yığılır. Veyerştrass teoreminə görə bu sıra $U_R(a)$ dairəsinin hər bir qapalı məhdud alt oblastında müntəzəm yığılır və bu sıranın cəmi olan $f_1(z)$ funksiyası $U_R(a)$ dairəsində analitikdir. $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ sırasının yığılma oblastını tapmaq üçün $\zeta=\frac{1}{z-a}$ əvəzləməsi apararaq onu

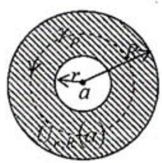
$$c_{-1}\zeta+c_{-2}\zeta^2+\ldots+c_{-n}\zeta^n+\ldots \tag{3}$$

şəklində yazaq. (3) qüvvət sırasının yığılma oblastını $U_{\frac{1}{r}}(a)$ $(0\le r\le+\infty)$ ilə işarə edək. Aydındır ki, (3) sırası $U_{\frac{1}{r}}(a)$ dairəsində öz cəmi olan $\varphi(\zeta)$ analitik funksiyasına mütləq yığılır. $U_{\frac{1}{r}}(a)$ dairəsinin hər bir qapalı məhdud alt oblastında müntəzəm yığılır.

Deməli, $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ sırası $C_r=\{z:|z-a|=r\}$ çevrəsinin xarici hissəsi olan $U_r(a;\infty)=\{z:|z-a|>r\}$ oblastında mütləq, onun hər bir qapalı məhdud alt oblastında müntəzəm yığılır. Bu sıranın cəmi olan

$f_2(z)=\varphi\left(\dfrac{1}{z-a}\right)$ funksiyası $U_r(a;\infty)=\{z:|z-a|>r\}$ oblastında analitikdir. Beləliklə, (1) sırasının yığılma oblastı mərkəzi $z=a$ nöqtəsində olan

$$U_{r,R}(a)=\begin{cases}\{z:r<|z-a|<R\}, & 0\le r<R\le+\infty,\\ \varnothing, & r\ge R\end{cases}$$



Şəkil 12.1.

dairəvi halqadır. Aydındır ki, $r\ge R$ olduqda (1) sırası heç bir nöqtədə yığılmır. Əgər $r<R$ olarsa, (1) sırasının cəmi olan $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ funksiyası $U_{r,R}(a)=\{z:r<|z-a|<R\}$ halqasında analitikdir. Beləliklə, teoremin ilk hökmünün və a)-c) bəndlərinin doğru olduğunu alırıq. İndi isə teoremin d) bəndini isbat edək. Bu məqsədlə $U_{r,R}(a)$ halqasında yerləşən, mərkəzi $z=a$ nöqtəsində radiusu ρ olan müsbət istiqamətli $\gamma_\rho=\{z:|z-a|=\rho\}$ $(r<\rho<R)$ çevrəsini götürək (Şəkil 12.1). γ_ρ çevrəsi üzərində müntəzəm yığılan $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ sırasını $\frac{1}{2\pi i}(z-a)^{-k-1}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$ ifadəsinə vursaq və alınan sıranı həmin çevrə üzərə inteqrallasaq

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}d\xi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}(\xi-a)^{n-k-1}d\xi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\dots) \tag{4}$$

bərabərliyini alarıq.

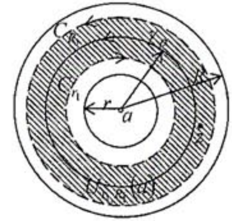
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}(\xi-a)^{n-k-1}d\xi=\begin{cases}1, & n=k,\\ 0, & n\ne k\end{cases} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

bərabərliklərini (4) düsturunda nəzərə alsaq (2) bərabərliklərini almış olarıq. ◁

Q e y d. (1) sırasının cəmi $f(z)$ $z=a$ nöqtəsində təyin olunmadığına görə (2) düsturu ilə tapılan c_n-ləri (Teylor sırasından fərqli olaraq!) $c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ şəklində göstərmək olmaz!

T ə r i f 12.3. *Əmsalları (2) düsturu ilə təyin olunan* $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ *sırasına* $f(z)$ *funksiyasının* $U_{r,R}(a)$ *halqasında Loran sırası deyilir.*

Göstərək ki, Teorem 12.1-in tərsi də doğrudur.



Şəkil 12.2

T e o r e m 12.2 *(Loran).* $U_{r,R}(a)=\{z:0\le r<|z-a|<R\le+\infty\}$ *halqasında analitik olan* $f(z)$ *funksiyasını bu halqada yeganə şəkildə Loran sırasına ayırmaq olar.*

İ s b a t ı. Tutaq ki, $U_{r,R}(a)$ halqasından ixtiyarı z nöqtəsi götürək. z nöqtəsini özündə saxlayan və öz sərhəddi ilə birlikdə tamamilə $U_{r,R}(a)$-ə daxil olan $U_{r_1,R_1}(a)$ $(r<r_1<|z-a|<R_1<R)$ halqasına (Şəkil 12.2) Koşi düsturunu tətbiq etsək

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}}\frac{f(\xi)}{\xi-a}d\xi+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)}{\xi-a}d\xi\equiv J_1+J_2 \tag{5}$$

bərabərliyini alarıq, burada $C_{R_1}=\{\xi:|\xi-a|=R_1\}$ və $C_{r_1}=\{\xi:|\xi-a|=r_1\}$ mərkəzi $z=a$ nöqtəsində olan konsentrik çevrələrdir. Belə ki, C_{R_1} müsbət, C_{r_1} isə mənfi oriyentasiyalıdır.

J_1 inteqralını hesablamaq üçün $\dfrac{1}{\xi-z}$ funksiyasını

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-a}\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\xi-a}} \tag{6}$$

şəklində yazaq. C_{R_1}-dən olan ξ-lər üçün

$$\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right|=\frac{|z-a|}{R_1}<1$$

bərabərsizliyi ödəndiyindən, sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi üçün olan düsturdan istifadə edib, (6) bərabərliyini

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n \quad (\xi\in C_{R_1}) \tag{7}$$

şəklində yazaq. C_{R_1} çevrəsi üzərində müntəzəm yığılan (7) sırasını həmin çevrə üzərində məhdud olan $\frac{1}{2\pi i}f(\xi)$ ($f(\xi)$ C_{R_1} çevrəsi üzərində kəsilməzdir!) funksiyasına vurub C_{R_1} çevrəsi boyunca inteqrallasaq

$$J_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right](z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

düsturunu alarıq, burada

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi,\quad n=0,1,2,\dots. \tag{8}$$

J_2 inteqralını hesablamaq üçün bu dəfə $\frac{1}{\xi-z}$ funksiyasını

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{z-a}\frac{-1}{1-\dfrac{\xi-a}{z-a}} \tag{9}$$

şəklində yazaq. C_{r_1}-dən olan ξ-lər üçün

$$\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right|=\frac{r_1}{|z-a|}<1$$

bərabərsizliyi ödəndiyindən, sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi üçün olan düsturdan istifadə edib, (9) bərabərliyini

$$\frac{1}{\xi-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\xi-a)^{-n+1}}\frac{1}{(z-a)^n}\quad (\xi\in C_{r_1}) \tag{10}$$

şəklində yazaq. J_1 üçün apardığımız mühakimələri təkrarlasaq J_2 inteqralını hesablamaq üçün

$$J_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n+1}}d\xi\right]\frac{1}{(z-a)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}\frac{1}{(z-a)^n} \tag{11}$$

düsturunu alarıq, burada

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n+1}}d\xi,\quad n=1,2,\dots. \tag{12}$$

Qeyd edək ki, (12) düsturunda C_{r_1} konturu üzərində müsbət istiqamət seçilmişdir. Göstərək ki, (8) və (12) düsturları ilə hesablanan a_n ədədlərini vahid bir düstur ilə hesablamaq olar. Bu məqsədlə $U_{r_1,R_1}(a)$ halqasında yerləşən, mərkəzi $z=a$ nöqtəsində radiusu ρ olan müsbət istiqamətli $\gamma_\rho = \{z : |z-a| = \rho\}$ $(r < \rho < R)$ çevrəsi götürək (Şəkil 12.2) və

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{13}$$

kimi ədədlərə baxaq. Koşinin mürəkkəb konturlar üçün olan teoremindən çıxır ki,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = a_n, \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{-n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{-n+1}} d\xi = a_{-n}, \quad n = 1,2,\dots$$

bərabərlikləri doğrudur.

Beləliklə göstərdik ki, teoremin şərtləri daxilində $f(z)$ funksiyasını $U_{r,R}(a) = \{z : 0 \le r < |z-a| < R \le +\infty\}$ halqasında əmsalları (13) düsturu ilə hesablanan Loran sırasına ayırmaq olar. (13) düsturundan çıxır ki. $f(z)$ funksiyasını $U_{r,R}(a) = \{z : 0 \le r < |z-a| < R \le +\infty\}$ halqasındakı Loran ayrılışı yeganədir. Doğrudan da əgər $f(z)$ funksiyasının

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ və } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-a)^n$$

kimi iki ayrılışı olsa idi (13) düsturundan alardıq ki,

$$c_n = c'_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ \triangleleft$$

QEYD 1. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ funksiyası üçün $U_{0,1}(0) = \{z : 0 < |z| < 1\}$, $U_{1,2}(0) = \{z : 1 < |z| < 2\}$ və $U_{2,\infty}(0) = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$ halqalarında yazılmış

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \quad (z \in U_{0,1}(0)),$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^n}\right) \quad (z \in U_{1,2}(0)),$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(2^{n-1} - 1\right) z^{-n} \quad (z \in U_{2,\infty}(0))$$

Loran sıralarının müxtəlifliyi teoremə zidd deyil. Çünki, funksiya eyni olsa da halqalar müxtəlifdir!

QEYD 2. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ sırasına Loran sırasının düzgün, $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$ sırasına isə onun baş hissəsi deyilir.

QEYD 3. Loran sırasının əmsalları üçün olan (13) düsturu praktikada nadir hallarda istifadə olunur. Praktikada funksiyanı Loran sırasına ayırmaq üçün elementar funksiyaların Teylor (Makloren) sıralarından geniş istifadə olunur.

Misal 1. $f(z) = z^2 \cos\dfrac{1}{z}$ funksiyasını $U_{0,\infty}(0) = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$ halqasında Loran sırasına ayırın.

$\cos\xi$ funksiyasının Makloren sıralarından istifadə etsək $f(z) = z^2 \cos\dfrac{1}{z}$ funksiyası üçün $U_{0,\infty}(0) = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$ halqasında

$$f(z) = z^2 \cos\frac{1}{z} = z^2\left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \dots\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + z^2 + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \dots$$

Loran sırasını almış olarıq.

Misal 1. $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ funksiyasını $U_{1,2}(0) = \{z : 1 < |z| < 2\}$ halqasında Loran sırasına ayırın.

$f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ funksiyasını

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

şəklində yazaq. $\dfrac{1}{1-t}$ funksiyasının

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+...$$

Makloren sıralasından alınan

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+...$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...$$

sıralarından istifadə etsək $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ funksiyası üçün $U_{1,2}(0)=\{z:1<|z|<2\}$ halqasında

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}$$

Loran sırasını almış olarıq.

12.2. Təcrid olunmuş (izolə edilmiş) məxsusi nöqtələr

T ə r i f 12.4. *Əgər $f(z)$ funksiyası $z=a$ nöqtəsinin mərkəzsiz $U_{0,R}(a)=\{z:0<|z-a|<R\}$ cırlaşmış halqasında analitik olarsa, onda*

$z=a$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının təcrid olunmuş (izolə edilmiş) məxsusi nöqtəsi deyilir.

Qeyd edək ki, $z=a$ nöqtəsində $f(z)$ funksiyası təyin olunmaya da bilər.

Loran (Teorem 12.2) teoremindən çıxır ki, $f(z)$ funksiyasını $U_{0,R}(a)$ halqasında yeganə şəkildə Loran sırasına ayırmaq olar. $(z-a)$ ifadəsinin Loran sırasında iştirak edən mənfi qüvvətlərinin sayından asılı olaraq təcrid olunmuş məxsusi nöqtələr üç tipə bölünür: 1) aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtə; 2) polyus; 3) mühüm məxsusi nöqtə.

T ə r i f 12.5. *Əgər $f(z)$ funksiyasının $U_{0,R}(a)$ halqasındakı $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ Loran sırasında $(z-a)$ ifadəsinin mənfi qüvvətləri*

1) iştirak etmirsə, onda $z=a$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsi;

2) m $(m\in N)$ saydadırsa, onda $z=a$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının m tərtibli polyusu;

3) sonsuz saydadırsa, onda $z=a$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının mühüm məxsusi nöqtəsi deyilir.

Aşağıdakı üç teoremdə $f(z)$ funksiyasının məxsusi nöqtənin ətrafında özünü necə aparması öyrənilir.

T e o r e m 12.3. *$z=a$ nöqtəsinin $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsi olması üçün zəruri və kafi şərt $f(z)$ funksiyasının $z=a$ nöqtəsində sonlu limitinin olmasıdır.*

İ s b a t ı. Zərurilik. Tutaq ki, $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir. Onda, tərifə görə, $f(z)$ funksiyasının $U_{0,R}(a)$ halqasındakı Loran sırası

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

şəklində olacaqdır. Bu ayrılışdan çıxır ki, $\lim_{z\to a}f(z)=c_0$.

Kafilik. Tutaq ki, $\lim_{z\to a}f(z)$ limiti sonludur. Onda elə $0<R_1\le R$ və $M>0$ ədədləri var ki, $\forall z\in U_{0,R_1}(a)\Rightarrow|f(z)|\le M$. Bu bərabərsizliyi

Loran sırasının c_n əmsallarının (13) düsturunda nəzərə alsaq, $0<\rho<R_1$ şərtini ödəyən istənilən ρ ədədi üçün

$$|c_n|\le M\rho^{-n}$$

bərabərsizliyini alarıq. c_n ədədlərinin ρ-dan asılı olmadığını nəzərə alsaq, mənfi tam n-lər üçün $c_n=0$ olduğunu görərik. Deməli, $f(z)$ funksiyasının Loran sırasında $(z-a)$ ifadəsinin mənfi qüvvətləri iştirak etmədiyindən $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir. ◁

M i s a l. Göstərin ki, $z=-2$ nöqtəsi $f(z)=\dfrac{z+2}{(z^2-4)(z-2)^2}$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir.

$$\lim_{z\to-2}f(z)=\lim_{z\to-2}\frac{z+2}{(z^2-4)(z-2)^2}=\lim_{z\to-2}\frac{1}{(z-2)^3}=-\frac{1}{64}\ne\infty$$

münasibətlərindən və teoremdən çıxır ki, $z=-2$ nöqtəsi $f(z)=\dfrac{z+2}{(z^2-4)(z-2)^2}$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir.

T E O R E M 12.4. *$z=a$ nöqtəsinin $f(z)$ funksiyasının polyusu olması üçün zəruri və kafi şərt $f(z)$ funksiyasının $z=a$ nöqtəsində sonsuz limitə malik olmasıdır, yəni $\lim\limits_{z\to a}|f(z)|=+\infty$ şərtinin ödənməsidir.*

İ S B A T I. Zərurilik. Tutaq ki, $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının m tərtibli polyusudur. Onda, tərifə görə, $f(z)$ funksiyasının $U_{0,R}(a)$ halqasındakı Loran sırası

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\ c_{-m}\ne0$$

şəklində olacaqdır. Buradan $f(z)$ funksiyası üçün $U_{0,R}(a)$ halqasında

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\left[c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+\ldots+c_{-1}(z-a)^{m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^{n+m}\right]=\frac{\psi(z)}{(z-a)^m}$$

göstərilişini alarıq, burada $\psi(z)$, $U_{0,R}(a)$ halqasında məhdud və analitik funksiyadır. Aydındır ki, $\lim\limits_{z\to a}\psi(z)=c_{-m}\ne0$. $\psi(z)$ funksiyasını $z=a$ nöqtəsində $\psi(a)=c_{-m}$ kimi təyin etsək $U_R(a)$ dairəsində məhdud və analitik $\psi(z)$ funksiyası almış olarıq. Onda $f(z)$-in

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^m},\ \psi(a)\ne0$$

təsvirindən $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$ bərabərliyini alarıq.

Kafilik. Tutaq ki, $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$. Onda istənilən $A>0$ ədədi üçün elə $\varepsilon>0$ ədədi var ki, $\forall z\in U_{0,\varepsilon}(a)\Rightarrow|f(z)|>A$ bərabərsizliyi doğrudur. $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ funksiyası daxil edək. $g(z)$, $U_{0,\varepsilon}(a)$ halqasında məhdud və analitik funksiyadır. Deməli, Teorem 12.3-ə görə, $z=a$ nöqtəsi $g(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir. Digər tərəfdən, $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$ olduğu üçün, $\lim\limits_{z\to a}g(z)=0$ olacaqdır. $g(z)$ funksiyasını $z=a$ nöqtəsində $g(a)=0$ $\left(\dfrac{1}{f(a)}=\dfrac{1}{\infty}=0\right)$ kimi təyin etsək, onda onu $U_\varepsilon(a)$ dairəsində $g(z)=(z-a)^m\varphi(z)$, $m\in N$ kimi göstərə bilərik, burada $U_\varepsilon(a)$ dairəsində məhdud və analitik olan $\varphi(z)$ funksiyası $z=a$ nöqtəsində $\varphi(a)\ne0$ şərtini ödəyir. Onda $f(z)$ funksiyasını $U_{0,\varepsilon}(a)$ halqasında

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-a)^m\varphi(z)}=\frac{\psi(z)}{(z-a)^m},\ m\in N;\psi(a)\ne0 \qquad (14)$$

kimi yaza bilərik. $\psi(z)$ funksiyasının $z=a$ nöqtəsində $\psi(a)\neq 0$ şərtini ödəyən məhdud və analitik funksiya olduğunu nəzərə alsaq, (14) düsturundan $f(z)$-in $z=a$ nöqtəsində Loran sırasının

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\left[\psi(a)+\frac{\psi'(a)}{1!}(z-a)+\frac{\psi''(a)}{2!}(z-a)^2+\dots\right]=$$
$$=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\dots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\ c_{-m}=\psi(a)\neq 0$$

şəklində olduğunu görərik. Buradan da $z=a$ nöqtəsinin $f(z)$-in m tərtibli polyusu olduğu alınır. ◁

QEYD. Teoremin isbatının gedişatından aşağıdakı hökmlər alınır:

a) Əgər $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının m tərtibli sıfırıdırsa, onda o $\frac{1}{f(z)}$ funksiyasının m tərtibli polyusudur;

b) əgər $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının m tərtibli polyusudursa, onda o $\frac{1}{f(z)}$ funksiyasının m tərtibli ($\frac{1}{f(a)}=0$ şərtləşməsi daxilində!) sıfırıdır;

c) əgər $f(z)$ funksiyası $z=a$ nöqtəsinin mərkəzsiz $U_{0,R}(a)$ ətrafında sıfra çevrilmirsə, onda $z=a$ $f(z)$ və $\frac{1}{f(z)}$ funksiyalarının eyni zamanda mühüm məxsusi nöqtəsidir.

Misal. Göstərin ki, $z=2$ nöqtəsi $f(z)=\frac{z+2}{(z^2-4)(z-2)^2}$ funksiyasının polyusudur.

$$\lim_{z\to 2}f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{z+2}{(z^2-4)(z-2)^2}=\lim_{z\to 2}\frac{1}{(z-2)^3}=\infty$$

münasibətlərindən və teoremdən çıxır ki, $z=2$ nöqtəsi $f(z)=\frac{z+2}{(z^2-4)(z-2)^2}$ funksiyasının üç tərtibli polyusudur.

TEOREM 12.5. *$z=a$ nöqtəsinin $f(z)$ funksiyasının mühüm məxsusi nöqtəsi olması üçün zəruri və kafi şərt $f(z)$ funksiyasının $z=a$ nöqtəsində (sonlu və ya sonsuz!) limitinin olmamasıdır.*

İSBATI. Kafiliyin isbatı Teorem 12.3 və 12.4-dən xüsusi hal kimi alınır. Zəruriliyin isbatı isə daha ümumi və dərin mənaya malik olan aşağıdakı teoremdən xüsusi hal kimi alınır. ◁

TEOREM 12.6 *(Kazorati-Soxotski-Veyerştrass). Əgər $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının mühüm məxsusi nöqtəsidirsə, onda genişlənmiş kompleks müstəvinin ixtiyari A nöqtəsi üçün a-ya yığılan elə $\{z_n\}$ ($z_n\neq a$; $z_n\neq z_{n'}$ $n\neq n'$) ardıcıllığı tapmaq olar ki, $\lim_{z\to a}f(z)=A$ bərabərliyi ödənər.*

İSBATI. I mərhələ. $A=\infty$. $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının mühüm məxsusi nöqtəsi olduğu üçün, onun $U_{0,R}(a)$ halqasındakı

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=Q(z)+P(z)$$

Loran sırasında $(z-a)$ ifadəsinin mənfi qüvvətləri sonsuz saydadır. Aydındır ki, z-in a-ya istənilən yaxınlaşması üzrə Loran sırasının $P(z)$-düzgün hissəsinin limiti c_0-a bərabərdir, yəni $\lim_{z\to a}P(z)=c_0$. Loran sırasının $Q(z)$-baş hissəsində $z'=\frac{1}{z-a}$ əvəzləməsi aparsaq, sonlu kompleks müstəvinin ixtiyarı z' nöqtəsində yığılan

$$Q(z')=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z'^n$$

sırasını alarıq. Liuvill teoreminə görə $Q(z')$ məhdud olmadığından istənilən n natural ədədi üçün elə z'_n ədədi tapmaq olar ki, $|Q(z'_n)|>n$ bərabərsizliyi ödənər. Beləliklə

$\lim\limits_{n\to\infty} Q(z'_n)=\infty$ şərtini ödəyən və ∞-ya yığılan $\{z'_n\}$ ardıcıllığı var.

Aydındır ki, $z'_n=\dfrac{1}{z_n-a}$ bərabərliyindən alınan $z_n=a+\dfrac{1}{z'_n}$ ardıcıllığı a-ya yığılır. Beləliklə, $\lim\limits_{z_n\to a} P(z_n)=c_0$, $\lim\limits_{z_n\to a} Q(z_n)=\lim\limits_{z'_n\to\infty} Q(z'_n)=\infty$ və $f(z_n)=Q(z_n)+P(z)_n$ münasibətlərindən $\lim\limits_{z_n\to a} f(z_n)=\infty$ bərabərliyi alınır.

II mərhələ. A istənilən kompleks ədəddir. Əgər a nöqtəsinin istənilən ətrafında $f(z)=A$ tənliyini ödəyən z ədədi olarsa, onda teoremin isbatı aydındır. Ona görə də fərz edək ki, a nöqtəsinin elə ətrafı var ki, həmin ətrafda $f(z)=A$ tənliyini ödəyən z ədədi yoxdur. Belə olan halda $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$ funksiyası $z=a$ nöqtəsinin müəyyən mərkəzsiz ətrafında analitik funksiya olacaq. $z=a$ nöqtəsi isə onun mühüm məxsusi nöqtəsi olacaq (Teorem 12.4-dən sonra gələn qeydin c) bəndinə bax). I mərhələyə görə a-ya yığılan və $\lim\limits_{z_n\to a}\varphi(z_n)=\infty$ bərabərliyini ödəyən $\{z_n\}$ ardıcıllığı vardır. Buradan da $\lim\limits_{z_n\to a} f(z_n)=A$ bərabərliyini almış olarıq. ◅

Q E Y D. Kazorati-Soxotski-Veyerştrass teoreminin həndəsi mənası. Əgər $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının mühüm məxsusi nöqtəsidirsə, onda onun istənilən mərkəzsiz $U_{0,\delta}(a)$ ətrafının obrazı olan $f(U_{0,\delta}(a))$ çoxluğu genişlənmiş kompleks müstəvidə hər yerdə sıxdır.

İsbatsız olaraq, Kazorati-Soxotski-Veyerştrass teoremindən daha ümumi və daha dərin olan, Pikarın teoremini qeyd edək.

T E O R E M 12.7 *(Pikarın böyük teoremi). Mühüm məxsusi nöqtənin istənilən mərkəzsiz ətrafında $f(z)$ funksiyası sonlu kompleks müstəvinin istənilən (ola bilsin ki, birindən başqa!) nöqtəsini sonsuz sayda nöqtədə alır.*

M i s a l 1. Göstərin ki, $z=0$ nöqtəsi $f(z)=e^{\frac{1}{z^2-z}}$ funksiyasının mühüm məxsusi nöqtəsidir.

$z=0$ nöqtəsinə yığılan $z_n^{(1)}=\dfrac{1}{n}$ və $z_n^{(2)}=-\dfrac{1}{n}$ ardıcıllıqları üzrə $f(z)=e^{\frac{1}{z^2-z}}$ funksiyasının

$$\lim_{z_n^{(1)}\to 0} f(z)=\lim_{z_n^{(1)}\to 0} e^{\frac{n^2}{1-n}}=0$$

$$\lim_{z_n^{(2)}\to 0} f(z)=\lim_{z_n^{(2)}\to 0} e^{\frac{n^2}{1+n}}=+\infty$$

müxtəlif limitlərə yığılması onu göstərir ki, $z=0$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının mühüm məxsusi nöqtəsidir.

12.3. Sonsuz uzaqlaşmış nöqtənin ətrafında Loran ayrılışı

T Ə R İ F 12.6. *Əgər $f(z)$ funksiyası $z=\infty$ nöqtəsinin mərkəzsiz $U_{R,\infty}(a)=\{z: R<|z|<+\infty\}$ cırlaşmış halqasında analitik olarsa, onda $z=\infty$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının təcrid olunmuş (izolə edilmiş) məxsusi nöqtəsi deyilir.*

Bilavasitə tərifdən çıxır ki, əgər $f(z)$ funksiyası sonsuz uzaqlaşmış nöqtənin $U_{R,\infty}(a)=\{z: R<|z|<+\infty\}$ ətrafında analitikdirsə, onda $\varphi(z')=f\left(\dfrac{1}{z'}\right)=f(z)$ funksiyası $z'=0$ nöqtəsinin mərkəzsiz cırlaşmış $U_{0,\frac{1}{R}}(0)=\left\{z': 0<|z'|<\dfrac{1}{R}\right\}$ halqasında analitikdir. Buradan, təbii olaraq, belə şərtləşmə qəbul olunur ki, $z'=0$ nöqtəsinin $\varphi(z')$ funksiyası üçün aradan qaldırıla bilən, m tərtibli polyus və ya mühüm məxsusi nöqtə olmasından asılı olaraq, $z=\infty$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyası üçün, uyğun olaraq, aradan qaldırıla bilən, m tərtibli polyus və ya mühüm məxsusi nöqtə adlandırılsın.

$f(z)$ funksiyası üçün sonsuz uzaqlaşmış nöqtənin $U_{R,\infty}(a)$ ətrafında Loran ayrılışı almaq üçün $\varphi(z')$ funksiyası üçün sıfrın $U_{0,\frac{1}{R}}(0)$ ətrafında uyğun

$$\varphi(z')=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c'_n z'^n$$

ayrılışı yazılır və burada $z'=\dfrac{1}{z}$ əvəzləməsi aparıb $f(z)$ üçün

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n \quad (c_n=c'_{-n}, n\in Z) \tag{15}$$

şəklində Loran sırası alınır. $f(z)$ funksiyasının $z=\infty$ məxsusi nöqtəsi ilə $\varphi(z')$-in $z'=0$ məxsusi nöqtəsi arasındakı yuxarıdakı şərtləşməni nəzərə alaraq aşağıdakı tərifi verək.

TƏRİF 12.7. *Əgər $f(z)$ funksiyasının $U_{R,\infty}(a)$ halqasındakı (15) ayrılışında z - in müsbət qüvvətləri*

1) iştirak etmirsə, onda $z=\infty$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsi;

2) m $(m\in N)$ saydadırsa, onda $z=\infty$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının m tərtibli polyusu;

3) sonsuz saydadırsa, onda $z=\infty$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının mühüm məxsusi nöqtəsi deyilir.

Misallar.

1. $f(z)=\dfrac{1}{1-z}=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$ $(|z|>1)$ ayrılışından alırıq ki, $z=\infty$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir (hətta bir tərtibli sıfrıdır).

2. $f(z)=z^m$ funksiyası üçün $z=\infty$ m tərtibli polyusdur.

3. $e^z, \sin z, \cos z$ funksiyalarının məlum Makloren sıralarından çıxır ki, $z=\infty$ bu funksiyaların hər birinin mühüm məxsusi nöqtəsidir.

Funksiyanın sonsuz uzaqlaşmış nöqtənin ətrafında özünü necə aparması, isbatı sonlu nöqtə halında olduğu kimi aparılan, aşağıdakı teoremdə öz əksini tapmışdır.

TEOREM 12.8. *a) $z=\infty$ nöqtəsinin $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsi olması üçün zəruri və kafi şərt $f(z)$ funksiyasının $z=\infty$ nöqtəsində sonlu limitinin olmasıdır.*

b) $z=\infty$ nöqtəsinin $f(z)$ funksiyasının polyusu olması üçün zəruri və kafi şərt $f(z)$ funksiyasının $z=\infty$ nöqtəsində sonsuz limitə malik olmasıdır, yəni $\lim_{z\to\infty}|f(z)|=+\infty$ şərtinin ödənməsidir.

c) $z=\infty$ nöqtəsinin $f(z)$ funksiyasının mühüm məxsusi nöqtəsi olması üçün zəruri və kafi şərt $f(z)$ funksiyasının $z=\infty$ nöqtəsində (sonlu və ya sonsuz!) limitinin olmamasıdır.

QEYD. Kazorati-Soxotski-Veyerştrass teoremi və Pikarın böyük teoremi $z=\infty$ nöqtəsində də doğrudur.

12.4 . Çalışmalar

12.1.

Aşağıdakı Loran sıralarının yığıldığı nöqtələr çoxluğunu tapın.

1). $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-3i)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-3i)^n}{5^n n^5}$. 2). $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(z+2-4i)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}n(z+2-4i)^n$.

3). $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{z}\right)^n$. 4). $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n-n^2}{(z+2)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{(n+i)^n}$.

5). $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2i)^{-n}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-2i)^n}{n^2+1}$. 6). $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(z+3i)^n}{n^4+3}$. 7). $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2-i)^n}{((-1)^n+2)^n}$.

8). $\sum_{n=-\infty}^{\infty}2^{-|n|}z^n$. 9). $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^n+1}$. 10). $\sum_{n=-\infty}^{\infty}2^{-n^2}(z+1)^n$. 11). $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^2+1}$.

12). $\sum_{n=-\infty}^{\infty}2^n z^n$.

Aşağıdakı funksiyaların, mötərizədə göstərilən z_0 nöqtələrinin ətrafında, Loran sırasının baş hissəsini tapın.

13). $\dfrac{z}{(z+2)^2}$ $(z_0=-2)$. 14). $\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$ $(z_0=0,\pm 2\pi i,\pm 4\pi i,\ldots)$.

15). $\frac{z-1}{\sin^2 z}$ $(z_0=0)$. 16). $\frac{e^{iz}}{z^2+b^2}$ $(z_0=ib, b>0)$.

17). $\frac{(z^2+1)^2}{z^2+b^2}$ $(z_0=\infty)$. 18). $\frac{2}{z(3-z)}$ $(z_0=0)$.

19). $\frac{1}{z}\cos z$ $(z_0=0)$. 20). $e^{\frac{1}{z+1}}$ $(z_0=-1)$. 21). $\frac{z^2}{z-1}$ $(z_0=-1)$.

22). $\frac{1}{(z-1)(2+z)}$ $(z_0=1)$. 23). $\frac{z-2}{(z-1)(z+2)}$ $(z_0=-1)$.

Aşağıdakı funksiyaları $1<|z|<2$ halqasında z-in qüvvətlərinə nəzərən Loran sırasına ayırın.

24). $\frac{1}{(z-2)(1+z)}$. 25). $\frac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$. 26). $\frac{z}{(z^2+1)(z+2)}$.

27). $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$. 28). $\frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$. 29). $\frac{1}{(z^2+4)(z^2-1)^2}$.

Aşağıdakı funksiyaları D halqasında $(z-a)$-ın qüvvətlərinə nəzərən Loran sırasına ayırın (D halqası və a nöqtəsi mötərizələrdə göstərilib).

30). $\frac{1}{z(z-3)^2}$ $(a=1,\quad D:\ 1<|z-1|<2)$.

31). $\frac{1}{z^2(z^2-9)}$ $(a=1,\quad D:\ 1<|z-1|<2)$.

32). $\frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ $(a=-1,\quad D:\ 0<|z+1|<3)$.

33). $\frac{1}{(z^2+4)(z^2-1)}$ $(a=0,\quad D:\ |z|>2)$.

34). $z^3e^{\frac{1}{z}}$ $(a=0,\quad D:\ 0<|z|<+\infty)$.

35). $z^2\sin\pi\frac{z+1}{z}$ $(a=0,\quad D:\ 0<|z|<+\infty)$.

12.2.

Göstərin ki, $z=a$ nöqtəsi aşağıdakı funksiyaların aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir.

1). $\frac{z^2+4}{z-2i}$ $(a=2i)$. 2). $\frac{z^2}{1-\cos z}$ $(a=0)$. 3). $\frac{e^z-z-1}{z^2}$ $(a=0)$.

4). $\frac{(z+6)\sin(z+5)}{(z^4-z^3)(z^2-25)}e^{\frac{1}{z-3}}$ $(a=-5)$. 5). $\frac{z}{tgz}$ $(a=0)$.

6). $ctgz-\frac{1}{z}$ $(a=0)$. 7). $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{\sin z}$ $(a=0)$.

8). $\frac{1}{\cos^2 z}-\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$ $\left(a=\frac{\pi}{2}\right)$.

Göstərin ki, $z=a$ nöqtəsi aşağıdakı funksiyaların polyusudur.

9). $\frac{\cos z}{z^2}$ $(a=0)$. 10). $\frac{1}{z-\sin z}$ $(a=0)$. 11). $\frac{z+1}{z^2}$ $(a=0)$.

12). $\frac{1-\cos z}{z^5}(z^5+3)$ $(a=0)$. 13). $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ $(a=i)$.

14). $\frac{z}{e^z+1}$ $(a=\pi i)$.

Göstərin ki, $z=a$ nöqtəsi aşağıdakı funksiyaların mühüm məxsusi nöqtəsidir.

15). $z^3ctg\frac{1}{z+1}$ $(a=-1)$. 16). $e^{z-\frac{1}{z}}$ $(a=0)$. 17). $\cos\frac{z^2+1}{z-2}$ $(a=2)$.

18). $\frac{(z+6)\sin(z+5)}{(z^4-z^3)(z^2-25)}e^{\frac{1}{z-3}}$ $(a=3)$. 19). $e^{-z}\cos\frac{1}{z}$ $(a=0)$.

20). $e^{-\frac{1}{z^2}}$ $(a=0)$. 21). $e^{\frac{z}{1-z}}$ $(a=1)$. 22). $\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$ $(a=0)$.

23). e^{tgz} $\left(a=\frac{\pi}{2}\right)$.

Aşağıdakı funksiyaların məxsusi nöqtələrini tapın və onların tipini müəyyən edin.

24). $\dfrac{\cos z}{z-z^3}$. 25). $\dfrac{z^4}{1+z^4}$. 26). $\dfrac{1}{e^z-1}$. 27). $\dfrac{(z+6)\sin(z+5)}{(z^4-z^3)(z^2-25)}e^{\frac{1}{z-3}}$.

28). $\dfrac{1}{\cos z}$. 29). $\dfrac{1-\cos z}{z^5}(z^5+3)$. 30). $z^3 ctg\,\dfrac{1}{z+1}$.

31). $\dfrac{1}{z^2-1}\cos\dfrac{\pi z}{z+1}$. 32). $\sin\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$.

12.3.

$z=\infty$-un aşağıdakı funksiyaların hansı tip məxsusi nöqtəsi olduğunu müəyyənləşdirin.

1). $\dfrac{z+2}{(z^2-4)(z-2)^2}$. 2). $\sin\dfrac{1}{z-2}$. 3). $\dfrac{z^2+4}{z-2i}$. 4). $\dfrac{z}{(z-1)(z+2)^2}$.

5). $\dfrac{1-\cos z}{z^5}(z^5+3)$. 6). $z^3 ctg\,\dfrac{1}{z+1}$. 7). $e^{z-\frac{1}{z}}$. 8). $\cos\dfrac{z^2+1}{z-2}$.

9). $\dfrac{z^2-1}{z^3+1}$. 10). $ctg\dfrac{\pi}{z}$. 11). e^{-z^2}. 12). $\dfrac{(z^2+4)\sin z}{z}$.

13). $(z+2i)^2(z-i)$.

12.5. Cavablar və göstərişlər

12.1.

1). $2<|z-3i|\le 5$. H ə l l i. $r=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n}=2$ hesablaması göstərir ki, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-3i)^n}$ sırası $2<|z-3i|$ oblastında mütləq yığılır. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^n}{(z-3i)^n}\right|=1\ne 0$ münasibəti göstərir ki, $2=|z-3i|$ çevrəsi üzərində zəruri şərt ödənmədiyindən həmin sıra $2=|z-3i|$ çevrəsi üzərində dağılır. İndi isə $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-3i)^n}{5^n n^5}$ sırasının yığılma oblastını tapaq. Bu məqsədlə Dalamber düsturu ilə onun yığılma radiusunu tapaq. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}(n+1)^5}{5^n n^5}=5$ bərabərliyindən alırıq ki, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-3i)^n}{5^n n^5}$ sırası $|z-3i|<5$ dairəsində mütləq yığılır. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(z-3i)^n}{5^n n^5}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{5^n n^5}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^5}<+\infty$ münasibəti göstərir ki, $5=|z-3i|$ çevrəsi üzərində $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-3i)^n}{5^n n^5}$ sırası yığılır.

Beləliklə, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-3i)^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-3i)^n}{5^n n^5}$ sırasının yığıldığı nöqtələr çoxluğu $2<|z-3i|\le 5$ oblastıdır.

2). $\varnothing$. 3). $2<|z|<3$. 4). $2<|z+2|<+\infty$. 5). $0<|z-2i|\le 1$.

6). $|z+3i|=1$. 7). $|z-2-i|>1$. 8). $\dfrac{1}{2}<|z|<2$. 9). $1<|z|<3$.

10). $0<|z+1|<+\infty$. 11). $|z|=1$. 12). $\varnothing$. 13). $-\dfrac{2}{(z+2)^2}+\dfrac{1}{z+2}$.

14). $\dfrac{2}{z-2k\pi i}\ (z_0=2k\pi i)$. 15). $-\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}$. 16). $-\dfrac{ie^{-b}}{2b}\cdot\dfrac{1}{z-ib}$. 17). z^2.

18). $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z}$. H ə l l i. $\frac{2}{z(3-z)}$ kəsrini

$$\frac{2}{z(3-z)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{3-z} \qquad (*)$$

şəkildə sadə kəsrlərə ayıraq. (*) ifadəsini z-ə vurub alınan ifadədə $z=0$ yazsaq $A=\frac{2}{3}$, (*) ifadəsini $3-z$-ə vurub alınan ifadədə $z=3$ yazsaq $B=\frac{2}{3}$ olduğunu görərik. Bunları (*)-da nəzərə alsaq

$$\frac{2}{z(3-z)}=\frac{2}{3}\frac{1}{z}+\frac{2}{3}\frac{1}{3-z} \qquad (**)$$

bərabərliyini alarıq. $|z|<3$ dairəsində doğru olan

$$\frac{2}{3}\frac{1}{3-z}=\frac{2}{3^2}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^{n+2}}z^n$$

ayrılışı (**)-da nəzərə alsaq,

$$\frac{2}{z(3-z)}=\frac{2}{3}\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^{n+2}}z^n$$

bərabərliyini alarıq. Aydındır ki, alınan Loran sırasının baş hissəsi $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z}$ ifadəsidir.

19). $\frac{1}{z}$. 20). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{(z+1)^n}$. 21). 0, əgər $|1+z|<2$ olarsa; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z+1)^n}$, əgər $2<|1+z|<+\infty$ olarsa. 22). $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1}$. 23). 0, əgər $|1+z|<1$ olarsa; $\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(z+1)^n}$, əgər $1<|1+z|<2$ olarsa; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left[4(-1)^{n-1}-2^{n-1}\right]\frac{1}{(z+1)^n}$, əgər $2<|1+z|<+\infty$ olarsa. 24). $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{3}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3\cdot 2^{n+1}}z^n$.

25). $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{2}{3}z^n+\frac{1}{6}+\frac{5}{12}z+\frac{7}{24}z^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{17(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^{n+1}}z^n$.

26). $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n-1}}{5}z^{2n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{5}z^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5\cdot 2^n}z^n$.

27). $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{-3n-4}{9}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9\cdot 2^{n+1}}z^n$. 28). $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{5}z^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5\cdot 4^{n+1}}z^{2n}$.

29). $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{-5n-6}{25}z^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{100\cdot 4^n}z^{2n}$.

30). $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n-1}}{9}(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+5}{9\cdot 2^{n+2}}(z-1)^n$.

31). $\sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{(n+1)\cdot(-1)^n}{9}(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{27\cdot 2^{2n+3}}(z-1)^n$.

32). $\frac{1}{3}(z+1)^{-1}-\frac{8}{9}+\frac{19}{27}(z+1)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{8}{3^{n+2}}(z+1)^n$. 33). $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1+(-1)^n 4^{-n-1}}{5}z^{2n}$.

34). $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}z+z^2+z^3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!}z^{-n}$. 35). $-\pi z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-2n+1}$.

12.2.

24). $z_1=0, z_2=1, z_3=-1$ sadə polyuslardır. 25). $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ sadə polyuslardır.

26). $z_k=2k\pi i \quad (k=0,\pm1,\pm2,...)$ sadə polyuslardır. G ö s t ə r i ş.

$$e^z-1=(z-2k\pi i)\left[1+\frac{z-2k\pi i}{2!}+\frac{(z-2k\pi i)^2}{3!}+...\right]=$$
$$=(z-2k\pi i)\varphi(z), \quad \varphi(2k\pi i)\neq 0$$

ayrılışından isifadə edin. 27). $z_1=0$ 3 tərtibli polyus, $z_2=1, z_3=5$ sadə polyuslar, $z_4=-5$ aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtə, $z_5=3$ isə mühüm məxsusi nöqtədir. 28). $z_k=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,...)$ sadə polyuslardır. $z=\infty$ təcrid olunmamış məxsusi nöqtədir. 29). $z_1=0$ üç tərtibli polyus, $z=\infty$ isə mühüm məxsusi nöqtədir. 30). $z=-1$ mühüm məxsusi nöqtə, $z_k=\frac{1}{\pi k}-1$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ sadə polyuslar, $z=\infty$ dörd tərtibli polyusdur. 31). $z=\infty$ və $z=1$ aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtələr, $z=-1$ isə mühüm məxsusi nöqtə. 32). $z=0$ mühüm məxsusi nöqtədir.

12.3.

1). Aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtə. 2). Aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtə.

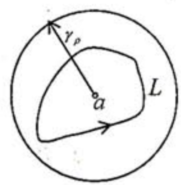
3). Sadə polyus. 4). Aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtə. 5). Mühüm məxsusi nöqtə. Göstəriş. $\{z_k^{(1)}=2\pi k\}_{k=1}^{\infty}$ və $\{z_k^{(1)}=\pi+2\pi k\}_{k=1}^{\infty}$ ardıcıllıqlarına baxın. 6). Dörd tərtibli polyus. 7). Mühüm məxsusi nöqtə. 8). Mühüm məxsusi nöqtə. 9). Aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtə. 10) Polyus. 11). Mühüm məxsusi nöqtə. 12). Mühüm məxsusi nöqtə. 13). Üç tərtibli polyus.

XIII FƏSİL
FUNKSİYANIN ÇIXIĞI VƏ ONUN HESABLANMASI QAYDALARI

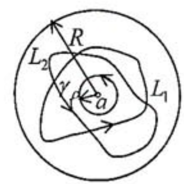
13.1. Təcrid olunmuş sonlu məxsusi nöqtəyə nəzərən funksiyanın çıxığı . Çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoremi

TƏRİF 13.1. *$f(z)$ funksiyasının təcrid olunmuş sonlu $z=a$ məxsusi nöqtəsinin $U_{0,R}(a)=\{z:0<|z-a|<R\}$ cırlaşmış halqasından olan və $z=a$ nöqtəsini öz daxilində saxlayan müsbət istiqamətli qapalı L konturu (Şəkil 13.1.) üzrə götürülmüş $\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(\xi)d\xi$ inteqralına $f(z)$ funksiyasının $z=a$ məxsusi nöqtəsinə nəzərən çıxığı deyilir və $\underset{z=a}{res} f(z)$ kimi işarə olunur. Beləliklə, tərifə görə,*

$$\underset{z=a}{res} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(\xi)d\xi .$$



Şəkil 13.1.



Şəkil 13.2.

Göstərək ki, $f(z)$ funksiyasının $z=a$ məxsusi nöqtəsinin nəzərən çıxığı L konturunun seçilişindən asılı deyil. Tutaq ki, L_1 və L_2 tərifin şərtlərini ödəyən iki konturdur. Müsbət ρ ədədini elə seçək ki, $\gamma_\rho=\{z:|z-a|=\rho\}$ çevrəsi həm L_1-in həm də L_2-in daxilində yerləşsin (Şəkil 13.2). Onda Koşinin mürəkkəb konturlar haqqındakı teoreminə görə

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1} f(\xi)d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} f(\xi)d\xi$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2} f(\xi)d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} f(\xi)d\xi$$

bərabərlikləri ödənəcəkdir. Buradan alınan

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1} f(\xi)d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2} f(\xi)d\xi$$

bərabərliyi göstərir ki, doğrudan da $f(z)$ funksiyasının $z=a$ məxsusi nöqtəsinə nəzərən çıxığı, $z=a$ nöqtəsini öz daxilində saxlayan müsbət istiqamətli qapalı L konturunun seçilişindən asılı deyil.

T E O R E M 13.1. *Tutaq ki, $z=a$ $f(z)$ funksiyasının təcrid olunmuş sonlu məxsusi nöqtəsidir. Onda $f(z)$ funksiyasının $z=a$ nöqtəsinə nəzərən çıxığı $f(z)$ funksiyasının $z=a$ nöqtəsindəki Loran sırasındakı $\frac{1}{z-a}$ ifadəsinin əmsalına bərabərdir.*

İ S B A T I. Doğrudan da, $f(z)$ funksiyası $z=a$ məxsusi nöqtəsinin $U_{0,R}(a)=\{z:0<|z-a|<R\}$ mərkəzsiz ətrafında, əmsalları

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots;0<\rho<R$$

düsturu ilə hesablanan,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

Loran sırasına ayrılır. Bu ayrılışda

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} f(\xi)d\xi$$

olduğunu və çıxığın tərifini nəzərə alsaq, $\underset{z=a}{res} f(z)=c_{-1}$ bərabərliyini almış olarıq. ◁

N Ə T İ C Ə 13.1. $f(z)$ funksiyasının düzgün və aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtələrinə nəzərən çıxığı 0-a bərabərdir.

M i s a l. $\sin\frac{1}{z}$ funksiyasının $z=0$ nöqtəsindəki çıxığını hesblayın.

$\sin\frac{1}{z}$ funksiyasının $U_{0,\infty}(a)=\{z:0<|z-a|<+\infty\}$ halqasındakı Loran sırası

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}z^{-2n+1}$$

olduğundan

$$\underset{z=0}{res}\sin\frac{1}{z}=c_{-1}=1.$$

M i s a l. $\frac{\cos z}{z^3}$ funksiyasının $z=0$ nöqtəsindəki çıxığını hesblayın.

$\frac{\cos z}{z^3}$ funksiyasının $U_{0,\infty}(a)=\{z:0<|z-a|<+\infty\}$ halqasındakı Loran sırası

$$\frac{\cos z}{z^3}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2!z}+\frac{1}{4!}z-\ldots$$

olduğundan

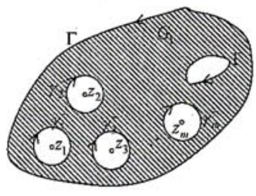
$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{\cos z}{z^3}=c_{-1}=-\frac{1}{2}.$$

T E O R E M 13.2. *(Çıxıqlar haqqında əsas teorem). Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası G oblastının, sonlu sayda $z_1, z_2, ..., z_m$ məxsusi nöqtələrindən başqa, hər yerində və onun müsbət oriyentasiyalı Γ sərhəddində analitikdir. Onda*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) \qquad (1)$$

düsturu doğrudur.

İ S B A T I. Müsbət ρ ədədini elə seçək ki, mərkəzi z_k $(k=1,2,...,m)$ nöqtələrində olan $\gamma_k=\{z:|z-z_k|=\rho\}(k=1,2,...,m)$ çevrələri həm bir-birinin xaricində qalsın, həm də G oblastına daxil olsunlar. Aydındır ki, $f(z)$ funksiyası G oblastından



Şəkil 13.3.

$U_k=\{z:|z-z_k|\le\rho\}(k=1,2,...,m)$ dairələrini atandan sonra alınan G_1 oblastında (Şəkil 13.3-də ştrixlənən hissə) və onun $\Gamma_1=\Gamma\cup\left(\bigcup_{k=1}^{m}\gamma_k^-\right)$ sərhəddində analitik olacaqdır, burada γ_k^- $(k=1,2,...,m)$ ilə $\gamma_k(k=1,2,...,m)$ çevrələrinin mənfi istiqamətdə gedişi işarə olunmuşdur. Onda Koşinin mürəkkəb konturlar haqqındakı teoreminə görə

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz=\int_{\Gamma} f(z)dz+\sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k^-} f(z)dz=0$$

bərabərliyi doğrudur. Bu bərabərlikdən alınan

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\sum_{k=1}^{m}\oint_{\gamma_k} f(z)dz$$

bərabərlikdə z_k $(k=1,2,...,m)$ nöqtələrində çıxıqların

$$\oint_{\gamma_k} f(z)dz=2\pi i\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) \quad (k=1,2,...m)$$

düsturları ilə təyin olunduğunu nəzərə alsaq (1) düsturunun isbatını almış olarıq. ◁

M i s a l. $\oint_{|z|=3}\left(\frac{2}{z-1}+\frac{3}{z-2}-7e^z\right)dz$ inteqralını hesablayın.

Aydındır ki, $f(z)=\frac{2}{z-1}+\frac{3}{z-2}-7e^z$ funksiyası $U_3(0)=\{z:|z|\le 3\}$ dairəsində $z_1=1$ və $z_2=2$ nöqtələrindən başqa hər yerdə analitikdir. Onda teoremə görə

$$\oint_{|z|=3}\left(\frac{2}{z-1}+\frac{3}{z-2}-7e^z\right)dz=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=1} f(z)+\operatorname*{res}_{z=2} f(z)\right). \qquad (2)$$

$f(z)=\frac{2}{z-1}+\frac{3}{z-2}-7e^z$ funksiyasının $z=1$ nöqtəsindəki Loran sırasında $\frac{1}{z-1}$ ifadəsinin əmsalının 2, $z=2$ nöqtəsindəki Loran sırasında $\frac{1}{z-2}$ ifadəsinin əmsalının 3 olduğunu və Teorem 13.1-i nəzərə alsaq (2) düsturundan

$$\oint_{|z|=3}\left(\frac{2}{z-1}+\frac{3}{z-2}-7e^z\right)dz=10\pi i$$

bərabərliyini alarıq.

13.2. Funksiyanın polyusa nəzərən çıxığı

TEOREM 13.3 *(Sadə polyus halı). Tutaq ki, $z=a\,(a\neq\infty)$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının sadə polyusudur. Onda $f(z)$ funksiyasının $z=a$ nöqtəsinə nəzərən çıxığını*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z) \tag{3}$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

İSBATI. $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının sadə polyusu olduğu üçün onun bu nöqtəyə nəzərən Loran sırası

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{4}$$

şəklində olacaqdır, burada $c_{-1}\neq 0$. (4)-i $(z-a)$-ya vursaq alarıq:

$$(z-a)f(z)=c_{-1}+c_0(z-a)+c_1(z-a)^2+\dots\,. \tag{5}$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfi qüvvət sırası olduğuna görə onun cəmi $z=a$ nöqtəsində kəsilməzdir. (5) bərabərliyində z-i a-ya yaxınlaşdırmaq şərti ilə limitə keçsək (3) düsturunu alarıq. ◁

NƏTİCƏ 13.2. *Tutaq ki, $\varphi(z)$ $(\varphi(a)\neq 0)$ və $\psi(z)$ $(\psi(a)=0, \psi'(a)\neq 0)$ funksiyaları $z=a$ nöqtəsində analitikdir. Onda $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ funksiyasının $z=a$ nöqtəsinə nəzərən çıxığını*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}, \tag{6}$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

İSBATI. $\varphi(z)$ və $\psi(z)$ funksiyaları üzərinə qoyulan şərtlərdən çıxır ki, $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının sadə polyusudur. Onda teoremə görə

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

münasibətləri doğrudur. Beləliklə,

$$\operatorname*{res}_{z=a}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.\ ◁$$

Misal. $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$ funksiyasının $z=\dfrac{\pi}{4}$ nöqtəsinə nəzərən çıxığını hesablayın.

Həlli.

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}=\infty$$

bərabərliklərindən çıxır ki, $z=\dfrac{\pi}{4}$ nöqtəsi $\dfrac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$ funksiyasının sadə polyusudur. Onda (3) düsturuna görə

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^2}=\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}$$

Cavab: $\dfrac{16}{\pi^2}\sin\dfrac{\pi^2}{16}$.

M i s a l. $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ funksiyasının $z_k=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\quad (k\in Z)$ nöqtələrinə nəzərən çıxıqlarını hesablayın.

H ə l l i. $\varphi(z)=1$ və $\psi(z)=\cos z$ götürərək (6) düsturundan istifadə edərək

$$\operatorname*{res}_{z_k=(2k+1)\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos z}=\frac{1}{-\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}=(-1)^{k-1}\quad (k\in Z)$$

bərabərliklərini almış olarıq. C a v a b: $(-1)^{k-1}\quad (k\in Z)$.

T E O R E M 13.4 *(k tərtibli polyus halı). Tutaq ki, $z=a\ (a\neq\infty)$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının k tərtibli polyusudur. Onda $f(z)$ funksiyasının $z=a$ nöqtəsinə nəzərən çıxığını*

$$\operatorname*{res}_{z=a}f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^k f(z)\right]^{(k-1)}\tag{7}$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

İ S B A T I. $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının k tərtibli polyusu olduğu üçün onun müəyyən $U_{0,R}(a)=\{z:0<|z-a|<R\}$ mərkəzsiz ətrafında $f(z)$-in Loran sırası

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\tag{8}$$

şəklində olacaqdır, burada $c_{-k}\neq 0$. (8)-i $(z-a)^k$-ya vursaq, $U_{0,R}(a)$ oblastında

$$\begin{aligned}(z-a)^k f(z)&=c_{-k}+c_{-k+1}(z-a)+\ldots+c_{-1}(z-a)^{k-1}+\\&+c_0(z-a)^k+\ldots+c_{n-k}(z-a)^n+\ldots\end{aligned}\tag{9}$$

bərabərliyini alarıq.

Bu bərabərliyin sağ tərəfi qüvvət sırası olduğuna görə onun cəmi olan $F(z)$ $U_R(a)=\{z:|z-a|<R\}$ dairəsində analitik funksiyadır.

$$c_{-k}+c_{-k+1}(z-a)+\ldots+c_{-1}(z-a)^{k-1}+c_0(z-a)^k+\ldots+c_{n-k}(z-a)^n+\ldots$$

qüvvət sırası $F(z)$-in Teylor sırası olduğu üçün onun c_j əmsalları $F(z)$ funksiyasının $\dfrac{F^{(j)}(a)}{j!}$ Teylor əmsallarına bərabərdir. Xüsusi halda

$$c_{-1}=\frac{F^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}\tag{10}$$

bərabərliyi doğrudur. $F(z)$ funksiyasının və onun törəmələrinin $z=a$ nöqtəsində kəsilməz olduğunu nəzərə alsaq

$$F^{(k-1)}(a)=\lim_{z\to a}F^{(k-1)}(z)\tag{11}$$

bərabərliyini alarıq. (9) bərabərliyinə görə $U_{0,R}(a)=\{z:0<|z-a|<R\}$ oblastında $F(z)$ funksiyası ilə $(z-a)^k f(z)$ funksiyası üst-üstə düşür. Onda (10) və (11) düsturlarından alınan

$$c_{-1}=\frac{F^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}F^{(k-1)}(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^k f(z)\right]^{(k-1)}$$

bərabərlik (7) düsturunun doğru olduğunu göstərir. ◁

M i s a l. $f(z)=\dfrac{\cos(z-1)}{z^3}$ funksiyasının $z=0$ nöqtəsinə nəzərən çıxığını hesablayın.

H ə l l i. $z=0$ nöqtəsi $\dfrac{\cos(z-1)}{z^3}$ funksiyasının 3 tərtibli polyusu olduğu üçün (7) düsturuna görə

$$\underset{z=0}{res}\frac{\cos(z-1)}{z^3}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[z^3\frac{\cos(z-1)}{z^3}\right]''=-\frac{1}{2}\cos(-1)=-\frac{\cos 1}{2}.$$

C a v a b: $-\dfrac{\cos 1}{2}$.

13.3. Funksiyanın sonsuz uzaqlaşmış nöqtəyə nəzərən çıxığı

T Ə R İ F 13.2. *$f(z)$ funksiyasının təcrid olunmuş $z=\infty$ məxsusi nöqtəsinin $U_{R,\infty}(\infty)=\{z:R<|z-a|<+\infty\}$ cırlaşmış halqasından olan və $z=\infty$ nöqtəsini öz daxilində saxlayan mənfi istiqamətli qapalı L^- konturu üzrə götürülmüş $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L^-}f(\xi)d\xi$ inteqralına $f(z)$ funksiyasının $z=\infty$ məxsusi nöqtəsinə nəzərən çıxığı deyilir və $\underset{z=\infty}{res}f(z)$ kimi işarə olunur. Beləliklə, tərifə görə,*

$$\underset{z=\infty}{res}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L^-}f(\xi)d\xi.$$

T E O R E M 13.5. *Tutaq ki, $z=\infty$ $f(z)$ funksiyasının təcrid olunmuş məxsusi nöqtəsidir. Onda $f(z)$ funksiyasının $z=\infty$ nöqtəsinə nəzərən çıxığı $f(z)$ funksiyasının $z=\infty$ nöqtəsi ətrafında Loran sırasındakı $\frac{1}{z}$ ifadəsinin əks işarə ilə götürülmüş, əmsalına bərabərdir.*

İ S B A T I. Doğrudan da, $f(z)$ funksiyası $z=\infty$ məxsusi nöqtəsinin $U_{R,\infty}(\infty)=\{z:R<|z-a|<+\infty\}$ mərkəzsiz ətrafında, əmsalları

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi,\quad n=0,\pm1,\pm2,...;0<\rho<R$$

düsturu ilə hesablanan,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$$

şəklində Loran sırasına ayrılır. Bu ayrılışda

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho}f(\xi)d\xi$$

olduğunu və $z=\infty$ nöqtəsinə nəzərən çıxığın tərifini nəzərə alsaq, $\underset{z=\infty}{res}f(z)=-c_{-1}$ bərabərliyini almış olarıq. ◁

N Ə T C Ə 13.3. Əgər $f(z)$ cüt funksiya olarsa,onda

$$\underset{z=\infty}{res}f(z)=\underset{z=0}{res}f(z)=0.$$

N Ə T İ C Ə 13.4. Əgər $z=\infty$ nöqtəsi $f(z)$-in $k\geq 2$ tərtibli sıfrıdırsa, onda

$$\underset{z=\infty}{res}f(z)=0.$$

Q E Y D. Əgər $z=\infty$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsi olarsa, onda onun $z=\infty$ nöqtəsinə nəzərən çıxığı 0-a bərabər olmaya bilər. Məsələn, $z=\infty$ nöqtəsi $f(z)=\frac{1}{z}$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsi olmasına baxmayaraq $\underset{z=\infty}{res}\frac{1}{z}=-1$-dir.

M i s a l. $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ funksiyasının $z=\infty$ nöqtəsinə nəzərən çıxığını hesablayın.

H ə l l i. $e^{\frac{1}{z}}$ funksiyasının

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+...+\frac{1}{n!z^n}+...$$

ayrılışında $c_{-1}=1$ olduğu üçün $\underset{z=\infty}{res}e^{\frac{1}{z}}=-1$. C a v a b: -1.

TEOREM 13.6. *Tutaq ki, $z=\infty$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir. Onda $f(z)$ funksiyasının $z=\infty$ nöqtəsinə nəzərən çıxığını*

$$\underset{z=\infty}{res} f(z)=\lim_{z\to\infty} z(f(\infty)-f(z)) \qquad (12)$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

İSBATI. $z=\infty$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsi olduğu üçün onun $U_{R,\infty}(\infty)=\{z:R<|z-a|<+\infty\}$ oblastındakı Loran sırası

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{-n}z^{-n}$$

şəklində olacaqdır. Buradan alınan

$$z(f(z)-c_0)=c_{-1}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{-n}z^{-n+1}$$

düsturda z sonsuzluğa yaxınlaşmaq şərti ilə limitə keçsək və $c_0=\lim_{z\to\infty}f(z)$ olduğunu nəzərə alsaq (12) düsturunu almış olarıq. ◁

TEOREM 13.7 *(k tərtibli polyus halı). Tutaq ki, $z=\infty$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının k tərtibli polyusudur. Onda $f(z)$ funksiyasının $z=\infty$ nöqtəsinə nəzərən çıxığını*

$$\underset{z=\infty}{res} f(z)=\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\lim_{z\to\infty}\left[z^{k+2}f^{(k+1)}(z)\right] \qquad (13)$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

İSBATI. $z=\infty$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının k tərtibli polyusu olduğu üçün onun müəyyən $U_{R,\infty}(\infty)=\{z:R<|z-a|<+\infty\}$ mərkəzsiz ətrafında $f(z)$-in Loran sırası

$$f(z)=\ldots+\frac{c_{-m}}{z^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1z+\ldots+c_kz^k$$

şəklində olacaqdır, burada $c_k\neq 0$. Bu bərabərliyin hər tərəfindən $k+1$ tərtibli törəmə alsaq onda $U_{R,\infty}(\infty)$ oblastında

$$f^{(k+1)}(z)=\ldots+\frac{(-1)^{k+1}m(m+1)\cdots(m+k)}{z^{m+k+1}}c_{-m}+\ldots+\frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{z^{k+2}}c_{-1}$$

bərabərliyini alarıq. Bu bərabərliyi z^{k+2}-yə vurub z sonsuzluğa yaxınlaçmaq şərti ilə limitə keçsək

$$\lim_{z\to\infty}z^{k+2}f^{(k+1)}(z)=(-1)^{k+1}(k+1)!c_{-1}$$

bərabərliyini alarıq. Buradan da, $\underset{z=\infty}{res} f(z)=-c_{-1}$ olduğunu nəzərə alsaq, (13) düsturunun doğru olduğunu görərik. ◁

TEOREM 13.8. *Genişlənmiş kompleks müstəvidə yalnız təcrid olunmuş məxsusi nöqtələri olan analitik funksiyanın bütün çıxıqlarının cəmi sıfra bərabərdir.*

İSBATI. Aydındır ki, teoremin şərtini ödəyən analitik $f(z)$ funksiyasının genişlənmiş kompleks müstəvidə yalnız sonlu sayda təcrid olunmuş məxsusi nöqtələri ola bilər. Əks halda $f(z)$ funksiyasının təcrid olunmamış məxsusi nöqtəsi olardı. Müsbət ρ ədədini elə seçək ki, $f(z)$-in sonlu $z_1,z_2,\ldots,z_m$ məxsusi nöqtələri $\gamma_\rho=\{z:|z|=\rho\}$ çevrəsinin daxili oblastına, $z=\infty$ məxsusi nöqtəsi isə onun xarici oblastına düşsün. Onda çıxıqlar haqqındakı əsas teoremə görə

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}f(z)dz=\sum_{k=1}^{m}\underset{z=z_k}{res} f(z) \qquad (14)$$

düsturu doğrudur. Sonsuz uzaqlaşmış nöqtəyə nəzərən çıxığın tərifinə görə isə

$$\underset{z=\infty}{res} f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}f(\xi)d\xi \qquad (15)$$

bərabərliyi doğrudur. (14) və (15) bərabərliklərini tərəf-tərəfə toplasaq və

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho^-} f(\xi)d\xi+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(\xi)d\xi=0$$

bərabərliyini nəzərə alsaq

$$\sum_{k=1}^{m}\underset{z=z_k}{res} f(z)+\underset{z=\infty}{res} f(z)=0$$

bərabərliyini almış olarıq. ◁

M i s a l. $\oint\limits_{|z+1|=1,5}\frac{dz}{(z^4-1)(z+2)}$ inteqralını hesablayın.

H ə l l i. $f(z)=\frac{1}{(z^4-1)(z+2)}$ funksiysının $|z+1|=1,5$ çevrəsinin daxilində dörd, $z_1=-2, z_2=-1, z_3=-i$ və $z_4=i$, xaricində isə iki, $z_5=1$ və $z_6=\infty$ məxsusi nöqtəsi var. Teoremə görə

$$\oint\limits_{|z+1|=1,5}\frac{dz}{(z^4-1)(z+2)}=-2\pi i\left[\underset{z=1}{res} f(z)+\underset{z=\infty}{res} f(z)\right].$$

$z_6=\infty$ nöqtəsi $f(z)=\frac{1}{(z^4-1)(z+2)}$ funksiysının 5 tərtibli sıfrı olduğuna görə $\underset{z=\infty}{res} f(z)=0$, $z_5=1$ nöqtəsi isə onun sadə polyusu olduğuna görə

$$\underset{z=1}{res} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z+1)(z^2+1)(z+2)}=\frac{1}{12}.$$

Beləliklə,

$$\oint\limits_{|z+1|=1,5}\frac{dz}{(z^4-1)(z+2)}=-\frac{\pi i}{6}.$$

13.4 . Çalışmalar

13.1.

Hesablayın:

1). $\underset{z=1}{res}\, ze^{\frac{1}{z-1}}$. 2). $\underset{z=-1}{res}\, z\cos\frac{1}{z+1}$. 3). $\underset{z=0}{res}\frac{\sin z}{z^2}$. 4). $\underset{z=1}{res}\frac{e^z}{(z-1)^2}$.

5). $\underset{z=\frac{\pi}{4}}{res}\frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}$. 6). $\underset{z=0}{res}\frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$. 7). $\underset{z=0}{res}\frac{\sin 2z-2z}{(1-\cos z)^2}$.

8). $\underset{z=0}{res}\frac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z}$. 9). $\underset{z=0}{res}\sin z\sin\frac{1}{z}$.

13.2.

Aşağıdakı funksiyaların bütün sonlu məxsusi nöqtələrindəki çıxıqlarını tapın.

1). $\frac{1}{z+z^3}$. 2). $\frac{z^2}{1+z^4}$. 3). $\frac{z^2}{(1+z)^3}$. 4). $\frac{1}{(1+z^2)^3}$. 5). $\frac{1}{(1+z^2)(z-1)^2}$.

6). $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n=1,2,\ldots$. 7). $\frac{1}{\sin\pi z}$. 8). $ctg\pi z$. 9). $\frac{\cos z}{(z-1)^2}$.

10). $\frac{1}{1+e^z}$. 11). $\frac{\sin\pi z}{(z-1)^3}$. 12). $\frac{1}{\sin z^2}$. 13). $\frac{e^z}{(1+z)^3(z-2)}$.

Çıxıqların köməyi ilə aşağıdakı inteqralları hesablayın.

14). $\oint\limits_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz$. 15). $\oint\limits_{|z|=2} tgz\,dz$. 16). $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz$.

17). $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\,dz$. 18). $\oint\limits_{|z|=1} z\,tgz\,dz$. 19). $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{\sin^3 z\cos z}\,dz$.

20). $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^4+2z^2+1}\,dz$. 21). $\oint\limits_L \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}\,dz$, $L: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

22). $\oint\limits_L \frac{e^{2z}}{z^3-1}\,dz$, $L: x^2+y^2-2x=0$. 23). $\oint\limits_L \frac{z+1}{z^2+2z-3}\,dz$, $L: x^2+y^2=16$.

24). $\oint\limits_L \frac{z\sin z}{(z-1)^5}\,dz$, $L: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$. 25). $\oint\limits_L \frac{1}{z^4+1}\,dz$, $L: x^2+y^2=2x$.

26). $\oint\limits_{|z|=\frac{2}{3}} \left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz$.

13.3.

Aşağıdakı funksiyaların sonsuz uzaqlaşmış nöqtədəki çıxığını tapın.

1). $\frac{z^4+1}{z^6-1}$. 2). $\cos\pi\frac{z+2}{2z}$. 3). $\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$. 4). $\frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$. 5). $\frac{(1+z^{10})\cos\frac{1}{z}}{(2+z^5)(z^6-1)}$.

6). $z\cos^2\frac{\pi}{z}$. 7). $\frac{z+1}{z}$. 8). $\frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4}$. 9). $\frac{\cos\frac{1}{z}}{z+2}$. 10). $\frac{z\sin\frac{1}{z}}{z^3+1}$.

Sonsuz uzaqlaşmış nöqtəyə nəzərən çıxıqdan istifadə edərək aşağıdakı inteqralları hesablayın.

11). $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z^3}\,dz$. 12). $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{1+z^{12}}\,dz$. 13). $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1000z+2}{1+z^{1224}}\,dz$.

14). $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z-1}\,dz$. 15). $\oint\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{1}{z}\,dz$. 16). $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^9}{z^{10}-1}\,dz$.

17). $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z(z+2)^3}$. 18). $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}\,dz$.

13.5. Cavablar və göstərişlər.

13.1.

1). $\frac{3}{2}$. H ə l l i. $f(z)=ze^{\frac{1}{z-1}}$ funksiyasını $z=1$ nöqtəsinin ətrafında Loran sərasına ayıraq.

$$ze^{\frac{1}{z-1}}=z+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)!}\frac{1}{(z-1)^n},\ |z-1|>0.$$

Bu ayrılışdan $c_{-1}=\frac{3}{2}$ olduğu çıxır. Deməli, $\underset{z=1}{res}\, ze^{\frac{1}{z-1}}=\frac{3}{2}$.

2). $-\frac{1}{2}$. H ə l l i. $z\cos\frac{1}{z+1}$ funksiyasını $z=-1$ nöqtəsinin ətrafında Loran sərasına ayıraq.

$$z\cos\frac{1}{z+1}=[(z+1)-1]\left[1-\frac{1}{2(z+1)^2}+\ldots\right].$$

Bu ayrılışdan $c_{-1}==\frac{1}{2}$ olduğu çıxır. Deməli, $\underset{z=-1}{res}\, z\cos\frac{1}{z+1}=-\frac{1}{2}$.

3). 1. 4). e. 5). $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 6). $\frac{1}{n!}$. 7). $-\frac{16}{3}$. 8). 1. 9). 0.

13.2.

1). $z=0$ nöqtəsində 1; $z=i$ nöqtəsində $-\frac{1}{2}$; $z=-i$ nöqtəsində $-\frac{1}{2}$.

2). $z=e^{\frac{\pi i}{4}}$ nöqtəsində $\frac{1-i}{4\sqrt{2}}$; $z=e^{-\frac{\pi i}{4}}$ nöqtəsində $\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$; $z=e^{\frac{3\pi i}{4}}$ nöqtəsində $-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$;

$z=e^{-\frac{3\pi i}{4}}$ nöqtəsində $-\frac{1-i}{4\sqrt{2}}$. 3). $z=-1$ nöqtəsində 1; 4). $z=i$ nöqtəsində $-\frac{3i}{16}$; $z=-i$ nöqtəsində $\frac{3i}{16}$. 5). $z=1$ nöqtəsində $-\frac{1}{2}$; $z=i$ nöqtəsində $\frac{1}{4}$; $z=-i$ nöqtəsində $\frac{1}{4}$. 6). $z=1$ nöqtəsində C_{2n}^{n-1}. 7). $z=n$ nöqtəsində $\frac{(-1)^n}{\pi}$ $(n\in Z)$.

8). $z=n$ nöqtəsində $\frac{1}{\pi}$ $(n\in Z)$. 9). $z=1$ nöqtəsində $-\sin 1$. 10). $z=(2n+1)\pi i$ nöqtəsində -1 $(n\in Z)$. 11). $z=1$ nöqtəsində 0. 12). $z=0$ nöqtəsində 0. 13). $z=-1$ nöqtəsində $-\frac{17}{54e}$; $z=2$ nöqtəsində $\frac{e^2}{27}$. Həlli. $z=-1$ nöqtəsi $f(z)=\frac{e^z}{(1+z)^3(z-2)}$ funksiyasının 3 tərtibli polyusu olduğu üçün, bu nöqtədəki çıxığı (7) düsturu ilə hesablamaq olar:

$$\underset{z=-1}{res}\frac{e^z}{(1+z)^3(z-2)}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}\left(\frac{e^z}{z-2}\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to-1}\frac{(z^2-6z+10)e^z}{(z-2)^3}=-\frac{17}{54e}.$$

$z=2$ nöqtəsi $f(z)=\frac{e^z}{(1+z)^3(z-2)}$ funksiyasının sadə polyusu olduğu üçün, bu nöqtədəki çıxığı (3) düsturu ilə hesablamaq olar:

$$\underset{z=2}{res}\frac{e^z}{(1+z)^3(z-2)}=\lim_{z\to2}\frac{e^z}{(z+1)^3}=\frac{e^3}{27}.$$

14). $2\pi i(1-e^{-1})$. Həlli. $|z|<4$ dairəsində $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2+z}$ funksiyası $z=0$ və $z=-1$ nöqtələrindən başqa hər yerdə analitikdir. Çıxıqlar haqqındakı əsas troremə görə

$$\int_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz=2\pi i\left[\underset{z=0}{res}f(z)+\underset{z=-1}{res}f(z)\right].$$

$z=0$ nöqtəsi aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtə olduğu üçün $\underset{z=0}{res}f(z)=0$. $z=-1$ nöqtəsi $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2+z}$ funksiyasının sadə polyusu olduğu üçün, bu nöqtədəki çıxığı (3) düsturu ilə hesablamaq olar:

$$\underset{z=-1}{res}\frac{e^z-1}{z^2+z}=\lim_{z\to-1}\frac{e^z-1}{z}=1-e^{-1}.$$

Beləliklə,

$$\int_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz=2\pi i\left[\underset{z=0}{res}f(z)+\underset{z=-1}{res}f(z)\right]=2\pi i(1-e^{-1}).$$

15). $-4\pi i$. 16). $\frac{\pi}{e}$. 17). 0. 18). 0. 19). $2\pi i$. 20). $\frac{\pi}{2}[\cos 1+\sin 1+i(\sin 1-\cos 1)]$. 21). 0. 22). $2\pi i\frac{e^2}{3}$. 23). $2\pi i$. 24). $\frac{\sin 1-4\cos 1}{12}\pi i$. 25). $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. 26). 0.

13.3.

1). 0. 2). π. 3). 0. 4). -1. 5). -1. 6). π^2. 7). -1. 8). -1. 9). -1. 10). 0.

11). $2\pi i$. 12). 0. 13). 0. 14). $2\pi ie$. 15). $-i\frac{\pi}{3}$. 16). $2\pi i$. 17). 0. 18). $2\pi i$. H ə l l i. Sonsuz uzaqlaşmış nöqtəyə nəzərən çıxığın tərifinə görə

$$\oint_{|z|=4}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}dz=-2\pi i\,\underset{z=\infty}{res}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}.$$

$$\frac{1}{z-2}\sim\frac{1}{z},\quad e^{\frac{1}{z-1}}\sim 1,\quad \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}\sim\frac{1}{z}\quad (z\to\infty)$$

asimptotik düsturlardan çıxır ki, $z=\infty$ nöqtəsi $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}$ funksiyasının sadə sıfrıdır və

$\underset{z=\infty}{res}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}=-1$. Beləliklə,

$$\oint_{|z|=4}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}dz=-2\pi i\,\underset{z=\infty}{res}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}=2\pi i.$$

XIV F ə s i l
ÇIXIQLARIN KÖMƏYİ İLƏ BƏZİ İNTEQRALLARIN HESABLANMASI

14.1. $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ şəkilli inteqralların çıxıqların köməyi ilə hesablanması

Tutaq ki, $R(u,v)=\frac{p_{nm}u^n v^m+...+p_{00}}{q_{rs}u^r v^s+...+q_{00}}$ iki dəyişənli rasional funksiyadır. Onda

$$J=\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta \tag{1}$$

integralını $z=e^{i\theta}$ əvəzləməsi ilə analitik funksiyanın qapalı kontur boyunca inteqralının hesablanmasına gətirmək olar. Doğrudan da θ 0-dan 2π-yə kimi dəyişdikdə, z müsbət istiqamətdə $|z|=1$ çevrəsi üzərində bir dəfə tam dövrə vurur. Bu faktı və

$$d\theta=-i\frac{dz}{z},\ \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

bərabərlikləri (1) inteqralında nəzərə alsaq,

$$J=\oint_{|z|=1}\tilde{R}(z)dz \tag{2}$$

bərabərliyini alarıq, burada

$$\overline{R}(z)=\frac{a_l z^l+\ldots+a_0}{b_k z^k+\ldots+b_0}$$

z-ə nəzərən rasional funksiyadır. Əgər $\overline{R}(z)$-in məxsusi nöqtələri $|z|=1$ çevrəsi üzərinə düşmürsə, onda (2) inteqralını

$$J=\oint_{|z|=1}\overline{R}(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{k_0}\underset{z=z_j}{res}\,\overline{R}(z)$$

düsturu ilə hesablamaq olar, burada $z_1,z_2,\ldots,z_{k_0}$ $(k_0\le k)$ $\overline{R}(z)$ funksiyasının $|z|=1$ çevrəsi daxilinə düşən polyuslarıdır. Beləliklə,

$$J=\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\oint_{|z|=1}\overline{R}(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{k_0}\underset{z=z_j}{res}\,\overline{R}(z). \qquad (3)$$

M i s a l. $\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos\theta-2}d\theta$ inteqralını hesablayın.

H ə l l i. $z=e^{i\theta}$ əvəzləməsi aparsaq,

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos\theta-2}d\theta=-2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-4z+1}$$

bərabərliyini alarıq. $\overline{R}(z)=-2i\frac{1}{z^2-4z+1}$ funksiyasının iki sadə polyusundan yalnız biri, yəni $z_1=2-\sqrt{3}$ nöqtəsi $|z|=1$ çevrəsinin daxilinə düşür. Onda (3) düsturundan istifadə etsək alarıq:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos\theta-2}d\theta=-2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-4z+1}=2\pi i\frac{2}{i}\underset{z=2-\sqrt{3}}{res}\frac{1}{z^2-4z+1}=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

M i s a l. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$ $(a>b>0)$ inteqralını hesablayın.

H ə l l i. $z=e^{ix}$ əvəzləməsi aparsaq, sadə çevirmələrdən sonra

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}=\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}dz$$

bərabərliyini alarıq. $\overline{R}(z)=\frac{4}{i}\frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}$ funksiyasının $|z|=1$ çevrəsinin daxilinə yalnız iki tərtibli $z_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ polyusu düşür. Onda (3) düsturundan istifadə etsək alarıq:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}=\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}dz=8\pi\,\underset{z=z_1}{res}\frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}=$$

$$=8\pi\lim_{z\to z_1}\left(\frac{z(z-z_1)^2}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right)'=8\pi\frac{a}{4}\left(a^2-b^2\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{2\pi a}{\left(a^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

14.2. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ şəkilli inteqralların çıxıqların köməyi ilə hesablanması

T E O R E M 14.1. *Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası $\operatorname{Im}z>0$ yuxarı yarımmüstəvinin sonlu sayda $z_1,z_2,\ldots,z_m$ təcrid olunmuş məxsusi nöqtələrindən başqa, hər yerində analitikdir və $\operatorname{Im}z\ge 0$ yuxarı yarımmüstəvisində kəsilməzdir, yəni $f(x)$ funksiyasının həqiqi oxda məxsusiyyəti yoxdur. Əgər $f(z)$ funksiyası müəyyən R_0,M və δ müsbət ədədləri üçün*

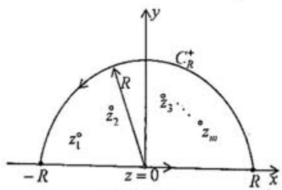
$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad |z| > R_0 \ (\operatorname{Im} z > 0) \qquad (4)$$

şərtini ödəyərsə, onda $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *inteqralı vardır və həmin inteqralı*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{res} f(z) \qquad (5)$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

İSBATI. R_0-dan böyük olan R ədədini elə seçək ki, $z_1, z_2, ..., z_m$ nöqtələri $U_R(0) = \{z : |z| < R\}$ dairəsinin daxilində qalsın. Həqiqi oxun $[-R, R]$ parçasından və $|z| = R$ çevrəsinin yuxarı yarımmüstəvidə qalan $C_R^+ = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z > 0\}$ yarımçevrəsindən ibarət olan müsbət istiqamətli qapalı $L = [-R, R] \cup C_R^+$ konturuna baxaq. Çıxıqlar nəzəriyyəsini əsas teoreminə görə



Şəkil 14.1.

$$\oint\limits_{L} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{res} f(z).$$

Bu bərabərlikdə

$$\oint\limits_{L} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C_R^+} f(z)dz$$

münasibətini nəzərə alsaq

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C_R^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{res} f(z) \qquad (6)$$

bərabərliyini alarıq. Göstərək ki,

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R^+} f(z)dz = 0. \qquad (7)$$

Doğrudan da, (4) şərtindən çıxan

$$\left|\int\limits_{C_R^+} f(z)dz\right| \le \int\limits_{C_R^+} |f(z)|ds < \frac{M 2\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{M 2\pi}{R^{\delta}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

münasibətlər (7) bərabərliyinin doğru olduğunu göstərir. (7) və

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$$

bərabərliklərini nəzərə alaraq (6) bərabərliyində $R \to \infty$ şərti daxilində limitə keçsək (5) düsturunu almış olarıq. ◁

QEYD 1. Əgər $z = \infty$ nöqtəsi, $\operatorname{Im} z > 0$ yuxarı yarımmüstəvinin, sonlu sayda nöqtələrindən başqa, hər yerində analitik və $\operatorname{Im} z \ge 0$ yuxarı yarımmüstəvisində kəsilməz olan, $f(z)$ funksiyasının ən azı 2 tərtibli sıfrıdırsa, onda $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ inteqralı var və həmin inteqralı (5) düsturu ilə hesablamaq olar.

Doğrudan da, bu halda $f(z)$ funksiyasının $z = \infty$ nöqtəsinin $U_{R,\infty}(a) = \{z : R < |z| < +\infty\}$ ətrafındakı Loran sırası

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + ... = \frac{\psi(z)}{z^2}$$

şəklində olacaq. Belə ki, $U_{R,\infty}(a) = \{z : R < |z| < +\infty\}$ ətrafında $\psi(z)$ funksiyası məhduddur. Deməli, elə müsbət M ədədi var ki,

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^2}, \quad |z| > R \ (\operatorname{Im} z > 0)$$

bərabərsizliyi ödənir. Buradan (4) şərtinin ödəndiyi alınır.

QEYD 2. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_m z^m+...+a_0}{b_n z^n+...+b_0}$$

şəklində rasional funksiyadır. Əgər $Q_n(x)$ çoxhədlisinin həqiqi oxda sıfrı yoxdursa və $m\le n+2$ şərti ödənirsə, onda $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ inteqralı vardır və həmin inteqralı (5) düsturu ilə hesablamaq olar.

QEYD. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:

1) $f(z)$ funksiyası $\operatorname{Im} z>0$ yuxarı yarımmüstəvinin, sonsuz sayda $z_1,z_2,...$ təcrid olunmuş məxsusi nöqtələrindən başqa, hər yerində analitikdir və $\operatorname{Im} z\ge 0$ yuxarı yarımmüstəvisində kəsilməzdir, yəni $f(x)$ funksiyasının həqiqi oxda məxsusiyyəti yoxdur.

2) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ inteqralı vardır.

3) $+\infty$-a yığılan elə $\{R_n\}$ $(R_n>0)$ ardıcıllığı var ki, $|z|=R_n$ çevrələrinin yuxarı yarımmüstəvidə qalan $C_{R_n}^{+}=\{z:|z|=R_n, \operatorname{Im} z>0\}$ yarımçevrələri üzərində (4) bərabərsizliyi ödənir və $C_{R_n}^{+}$ yarımçevrələri üzərində $f(z)$ funksiyasının məxsusi nöqtələri yoxdur. Onda

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\underset{z=z_k}{res}\,f(z) \tag{8}$$

düsturu doğrudur.

Doğrudan da, 2) şərtindən çıxır ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-R_n}^{R_n}f(x)dx.$$

$L_n=[-R_n,R_n]\cup C_{R_n}^{+}$ konturlarına çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoremini tətbiq etsək alarıq:

$$\int_{-R_n}^{R_n}f(x)dx+\int_{C_{R_n}^{+}}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{m_n}\underset{z=z_k}{res}\,f(z), \tag{9}$$

burada m_n ilə $f(z)$ funksiyasının qapalı $L_n=[-R_n,R_n]\cup C_{R_n}^{+}$ konturunun daxilində qalan məxsusi nöqtələrinin sayı işarə olunmuşdur. (9) bərabərliyində $n\to\infty$ şərti daxilində limitə keçsək (8) düsturunu alarıq.

QEYD 4. Əgər $f(x)$ cüt funksiyadırsa və Teorem 14.1-in şərtlərini ödəyirsə, onda

$$\int_{0}^{\infty}f(x)dx=\pi i\sum_{k=1}^{m}\underset{z=z_k}{res}\,f(z) \tag{10}$$

düsturu doğrudur. (10) düsturu (5) –dən və

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\int_{0}^{\infty}f(x)dx$$

bərabərliyindən çıxır.

Misal. $J=\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$ $(a>0)$ inteqralını hesablayın.

Həlli. $f(x)=\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$ cüt funksiya olduğu üçün

$$J=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx.$$

Həqiqi oxda $f(x)$ ilə üst-üstə düşən $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ funksiyası daxil edək. $f(z)$ funksiyasının yuxarı yarımmüstəvidə 2 tərtibli $z=ia$ polyus nöqtəsi var. Həmin nöqtədəki çıxıq aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\operatorname*{res}_{z=ia}\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}=\lim_{z\to ia}\left[\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}(z-ia)^2\right]'=\lim_{z\to ia}\frac{2iaz}{(z+ai)^3}=\frac{1}{4ia}.$$

(10) düsturundan istifadə edərək

$$J=\int_0^\infty\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=\pi i\frac{1}{4ia}=\frac{\pi}{4a}$$

bərabərliyini alırıq. C a v a b: $J=\frac{\pi}{4a}$.

M i s a l. $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$ inteqralını hesablayın.

H ə l l i. Həqiqi oxda $f(x)=\frac{1}{x^4+1}$ ilə üst-üstə düşən $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$ funksiyası daxil edək. $f(z)$ funksiyasının yuxarı yarımmüstəvidə $z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}$ və $z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}$ kimi iki sadə polyusu var. Həmin nöqtədəki çıxıqlar aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1}\frac{1}{z^4+1}=\frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}}}=\frac{1}{4\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}=\frac{-1-i}{4\sqrt2},$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2}\frac{1}{z^4+1}=\frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{1}{4e^{\frac{9\pi}{4}}}=\frac{1}{4\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}=\frac{1-i}{4\sqrt2}.$$

Bu hesablamalardan və (5) düsturundan istifadə edərək

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=2\pi i\left(\frac{-1-i}{4\sqrt2}+\frac{1-i}{4\sqrt2}\right)=\frac{\pi\sqrt2}{2}$$

bərabərliyini alırıq. C a v a b: $I=\frac{\pi\sqrt2}{2}$.

14.3. $\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}f(x)dx$ şəkilli inteqralların çıxıqların köməyi ilə hesablanması

$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}f(x)dx$ şəkilli inteqralların çıxıqların köməyi ilə hesablanmasında aşağıdakı lemma mühüm rol oynayır.

J O R D A N L E M M A S I. Tutaq ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:

1) $g(z)$ funksiyası $\Omega=\{z:|z|\ge R_0>0,\ \mathrm{Im}\,z\ge0\}$ oblastında kəsilməzdir;

2) $\lim_{|z|\to+\infty}\left\{\max_{0\le\arg z\le\pi}|g(z)|\right\}=0$.

Onda müsbət λ ədədi üçün

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+}e^{i\lambda\xi}g(\xi)d\xi=0, \tag{11}$$

burada $C_R^+=\{z:|z|=R,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ ilə $|z|=R$ çevrəsinin yuxarı yarımmüstəvidə yerləşən yarımçevrəsi işarə olunmuşdur.

İ S B A T I. 2) şərtindən çıxır ki, $R>R_0$ şərtini ödəyən hər bir R ədədi üçün C_R^+ yarımçevrəsi üzərində

$$|g(z)|\le M(R) \tag{12}$$

bərabərsizliyi ödənir, burada $M(R)$ ilə R sonsuzluğa yaxınlaşanda limiti 0 olan, R-dən asılı funksiya işarə olunmuşdur.

$\int\limits_{C_R^+} e^{i\lambda\xi} g(\xi)d\xi$ inteqralında $\xi = Re^{i\varphi}$ əvəzləməsi aparsaq, $\sin\varphi$ funksiyasının $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ parçasında çöküklüyündən çıxan $\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi$ bərabərsizliyindən və (12)-dən istifadə etsək, aşağıdakı qiymətləndirməni alarıq:

$$\left|\int\limits_{C_R^+} e^{i\lambda\xi} g(\xi)d\xi\right| \le M(R)\cdot R\int\limits_0^{\pi}\left|e^{i\lambda\xi}\right|d\varphi = M(R)\cdot R\int\limits_0^{\pi} e^{-\lambda R\sin\varphi}d\varphi =$$

$$= 2M(R)\cdot R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\sin\varphi}d\varphi \le 2M(R)\cdot R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\frac{2\varphi}{\pi}}d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{\lambda} M(R)\left(1 - e^{-\lambda R}\right). \tag{13}$$

$\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{\pi}{\lambda} M(R)\left(1 - e^{-\lambda R}\right) = 0$ limitini (13)-də nəzərə alsaq (11) bərabərliyini almış olarıq. ◅

T E O R E M 14.2. *Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası $\operatorname{Im} z > 0$ yuxarı yarımmüstəvinin, sonlu sayda $z_1, z_2, ..., z_m$ təcrid olunmuş məxsusi nöqtələrindən başqa, bütün nöqtələrində analitikdir və $\operatorname{Im} z \ge 0$ yuxarı yarımmüstəvisində kəsilməzdir, yəni $f(x)$ funksiyasının həqiqi oxda məxsusiyyəti yoxdur. Əgər $f(z)$ funksiyası müəyyən R_0 müsbət ədədindən böyük olan istənilən R ədədi üçün $C_R^+ = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z > 0\}$ yarımçevrəsi üzərində*

$$|f(z)| \le M(R) \tag{14}$$

şərtini ödəyərsə və $\lim\limits_{R\to+\infty} M(R) = 0$ olarsa, onda istənilən müsbət λ ədədi üçün $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx$ inteqralı vardır və həmin inteqralı

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{res}\left[e^{i\lambda z} f(z)\right] \tag{15}$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

İ S B A T I. R_0-dan böyük olan R ədədini elə seçək ki, $z_1, z_2, ..., z_m$ nöqtələri $U_R(0) = \{z : |z| < R\}$ dairəsinin daxilində qalsın. Həqiqi oxun $[-R, R]$ parçasından və $|z| = R$ çevrəsinin yuxarı yarımmüstəvidə qalan $C_R^+ = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z > 0\}$ yarım çevrəsindən ibarət olan müsbət istiqamətli qapalı $L = [-R, R]\cup C_R^+$ konturuna baxaq (Şəkil 14.1). Çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoreminə görə

$$\int\limits_L e^{i\lambda z} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{res}\left[e^{i\lambda z} f(z)\right].$$

Bu bərabərlikdə

$$\int\limits_L e^{i\lambda z} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} e^{i\lambda x} f(x)dx + \int\limits_{C_R^+} e^{i\lambda z} f(z)dz$$

münasibətini nəzərə alsaq

$$\int\limits_{-R}^{R} e^{i\lambda x} f(x)dx + \int\limits_{C_R^+} e^{i\lambda z} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{res}\left[e^{i\lambda z} f(z)\right] \tag{16}$$

bərabərliyini alarıq. $f(z)$ funksiyası Jordan lemmasının bütün şərtlərini ödədiyi üçün

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R^+} e^{i\lambda z} f(z)dz = 0. \tag{17}$$

bərabərliyi doğrudur. (17) və

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{i\lambda x} f(x)dx$$

bərabərliklərini nəzərə alaraq (16) bərabərliyində $R \to \infty$ şərti daxilində limitə keçsək (15) düsturunu almış olarıq. ◁

QEYD 1. Əgər teoremdəki şərtlərə $\forall x \in (-\infty, \infty) \Rightarrow \overline{f(\overline{x})} = f(x)$ şərtini də əlavə etsək aşağıdakı düsturları alarıq:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x dx = -2\pi \operatorname{Im}\left[\sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{res}\left[e^{i\lambda z} f(z)\right]\right],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x dx = 2\pi \operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{res}\left[e^{i\lambda z} f(z)\right]\right].$$

Xüsusi halda $f(x)$ həqiqi oxda həqiqi qiymətlər alan cüt funksiya olarsa,

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\lambda x dx = -\pi \operatorname{Im}\left[\sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{res}\left[e^{i\lambda z} f(z)\right]\right]$$

düsturu, tək funksiya olarsa,

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\lambda x dx = \pi \operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{res}\left[e^{i\lambda z} f(z)\right]\right]$$

düsturu doğrudur.

QEYD 2. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m z^m + \ldots + a_0}{b_n z^n + \ldots + b_0}$$

şəklində olan rasional funksiyadır. Əgər $Q_n(x)$ çoxhədlisinin həqiqi oxda sıfrı yoxdursa və $m < n$ şərti ödənirsə, onda (15) düsturu doğrudur. Əgər Qeyd 1-dəki şərtlər də ödənsə, onda Qeyd 1-dəki düsturlar da doğrudur.

QEYD 3. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:

1) $f(z)$ funksiyası $\operatorname{Im} z > 0$ yuxarı yarımmüstəvinin, sonsuz sayda $z_1, z_2, \ldots$ təcrid olunmuş məxsusi nöqtələrindən başqa, hər yerində analitikdir və $\operatorname{Im} z \geq 0$ yuxarı yarımmüstəvisində kəsilməzdir, yəni $f(x)$ funksiyasının həqiqi oxda məxsusiyyəti yoxdur.

2) $\lambda > 0$ ədədi üçün $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx$ inteqralı vardır.

3) $+\infty$-a yığılan elə $\{R_n\}$ $(R_n > 0)$ ardıcıllığı var ki, $|z| = R_n$ çevrələrinin yuxarı yarımmüstəvidə qalan $C_{R_n}^{+} = \{z : |z| = R_n, \operatorname{Im} z > 0\}$ yarımçevrələri üzərində $f(z)$ funksiyasının məxsusi nöqtələri yoxdur, $C_{R_n}^{+}$ yarımçevrələri üzərində

$$|f(z)| \leq M(R_n)$$

şərti ödənir, belə ki, $\lim_{n\to\infty} M(R_n) = 0$. Onda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \underset{z=z_k}{res} f(z)$$

düsturu doğrudur.

QEYD 4. Əgər teoremin şərtləri aşağı yarımmüstəvidə ödənərsə, onda istənilən $\lambda < 0$ ədədi üçün

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \underset{z=z_k}{res}\left[e^{i\lambda z} f(z)\right]$$

düsturu doğrudur.

QEYD 5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx, \quad \int_{0}^{\infty} f(x)\cos\lambda x dx \text{ və } \int_{0}^{\infty} f(x)\sin\lambda x dx$$

inteqrallarına, uyğun olaraq, Furye, kosinus və sinus çevirmə deyilir.

M i s a l. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\lambda x}}{x^2+a^2}dx \quad (a>0,\lambda>0)$ inteqralını hesablayın.

H ə l l i. $f(x)=\frac{x}{x^2+a^2}$ düzgün rasional funksiya olduğu üçün Teorem 14.2-ni tətbiq edərək

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\lambda x}}{x^2+a^2}dx=2\pi i\,\underset{z=ia}{res}\frac{ze^{i\lambda z}}{z^2+a^2}$$

bərabərliyini yazmaq olar. $z=ia$ nöqtəsi $\frac{ze^{i\lambda z}}{z^2+a^2}$ funksiyasının sadə polyusu olduğu üçün $\underset{z=ia}{res}\frac{ze^{i\lambda z}}{z^2+a^2}$-i aşağıdakı kimi hesablaya bilərik:

$$\underset{z=ia}{res}\frac{ze^{i\lambda z}}{z^2+a^2}=\lim_{z\to ia}\frac{ze^{i\lambda z}}{(z-ia)(z+ia)}(z-ia)=\frac{e^{-\lambda a}}{2}.$$

Beləliklə,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\lambda x}}{x^2+a^2}dx=2\pi i\frac{e^{-\lambda a}}{2}=\pi i e^{-\lambda a}.$$

M i s a l. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\sin\lambda x}{x^2+a^2}dx \quad (a>0,\lambda>0)$ inteqralını hesablayın.

H ə l l i. $f(x)=\frac{x}{x^2+a^2}$ tək funksiya olduğu üçün

$$\int\limits_{0}^{\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx=\pi\,\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{m}\underset{z=z_k}{res}\left[e^{i\lambda z}f(z)\right]\right]$$

düsturundan istifadə edək. $\underset{z=ia}{res}\frac{ze^{i\lambda z}}{z^2+a^2}=\frac{e^{-\lambda a}}{2}$ olduğu üçün

$$\int\limits_{0}^{\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-\lambda a}.$$

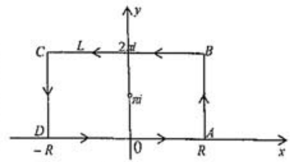
Qeyd edək ki, inteqralaltı funksiyanın xassəsindən istifadə edərək, verilən inteqralı daha sadə yolla hesablamaq olar.

M i s a l. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}dx \quad (0<\lambda<1)$ inteqralını hesablayın.

H ə l l i. $f(z)=\frac{e^{\lambda z}}{1+e^z}$ funksiyasına baxaq. Bu funksiyanın polyuslarını tapmaq üçün

$$e^z+1=0$$

tənliyini həll edək. $e^z=e^{i\pi}$ bərabərliyində e^z funksiyasının $2\pi i$ dövrlü olduğunu nəzərə alsaq bu tənliyin köklərinin $z_k=(2k+1)\pi i,\ k\in Z$ xəyali oxda yerləşdiyini görərik. Beləliklə $f(z)=\frac{e^{\lambda z}}{1+e^z}$ funksiyasının xəyali oxda yerləşən sonsuz sayda sadə polyusu vardır. Əgər qapalı $L=[-R,R]\cup AB\cup BC\cup CD$ konturunu Şəkil 14.2-dəki kimi seçsək, onda onun daxilində $f(z)=\frac{e^{\lambda z}}{1+e^z}$ funksiyasının yalnız bir dənə $z_0=\pi i$ polyusu olacaqdır. Çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoreminə görə



Şəkil 14.2.

$$\int\limits_{L}\frac{e^{\lambda z}}{1+e^z}dz=2\pi i\,\underset{z=\pi i}{res}\frac{e^{\lambda z}}{1+e^z}.$$

Bu bərabərlikdə

$$\int_L f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz + \int_{CD} f(z)dz$$

münasibətini və

$$\operatorname*{res}_{z=\pi i}\frac{e^{\lambda z}}{1+e^z} = \frac{e^{\lambda z}}{\left(1+e^z\right)'}\Bigg|_{z=\pi i} = \frac{e^{\lambda\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{\lambda\pi i}$$

bərabərliyini nəzərə alsaq

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz + \int_{CD} f(z)dz = -2\pi i e^{\lambda\pi i} \tag{18}$$

bərabərliyini alarıq. AB parçası üzərində ödənən

$$\left|\frac{e^{\lambda z}}{1+e^z}\right| \le \left|\frac{e^{\lambda(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| \le \frac{e^{\lambda R}}{e^R-1}$$

bərabərsizlikdən və $\lambda \in (0,1)$ şərtindən çıxır ki,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{AB} f(z)dz = 0 . \tag{19}$$

$$\left|\int_{CD}\frac{e^{\lambda z}}{1+e^z}dz\right| \le \frac{e^{-\lambda R}}{1-e^{-R}}2\pi$$

bərabərsizliyindən

$$\lim_{R\to\infty}\int_{CD} f(z)dz = 0 \tag{20}$$

bərabərliyi alınır.

BC parçası üzərində

$$\int_{BC}\frac{e^{\lambda z}}{1+e^z}dz = \int_{R}^{-R}\frac{e^{\lambda(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}dx = -e^{2\lambda\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}dx \tag{21}$$

bərabərliyi doğrudur. (19) -(21) bərabərliklərini nəzərə almaqla (18) bərabərliyində $R \to +\infty$ şərti daxilində limitə keçsək alarıq:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}dx - e^{2\lambda\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}dx = -2\pi i e^{\lambda\pi i} .$$

Buradan da

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}dx = \frac{2\pi i e^{\lambda\pi i}}{e^{2\lambda\pi i}-1} = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi}$$

bərabərliyini almış olarıq. ◁

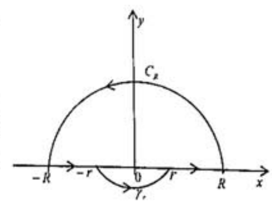
İsbat olunan teoremlərdə (və baxdığımız misallarda) tələb olunurdu ki, inteqralaltı funksiyanın həqiqi oxda məxsusiyyəti olmasın. Lakin, müəyyən manevrlər etməklə yuxarıda isbat olunan teoremləri həqiqi oxda bir və ya bir neçə məxsusiyyəti olan qeyri-məxsusi inteqrallarının hesablanmasına tətbiq etmək olar.

M i s a l. $\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}dx$ $(\lambda > 0)$ inteqralını hesablayın.

H ə l l i. $f(z)=\frac{e^{i\lambda z}}{z}$ funksiyasına baxaq. Əgər qapalı

$$L=[-R,-r]\cup\gamma_r\cup[r,R]\cup C_R$$

konturunu Şəkil 14.3-dəki kimi seçsək, onda onun daxilində $f(z)=\frac{e^{i\lambda z}}{z}$ funksiyasının yalnız $z=0$ sadə polyusu olacaqdır.



Şəkil 14.3.

Çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoreminə görə

$$\oint_L \frac{e^{i\lambda z}}{z}dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0}\frac{e^{i\lambda z}}{z}.$$

Bu bərabərlikdə

$$\oint_L f(z)dz = \int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_{\gamma_r} f(z)dz + \int_r^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz$$

münasibətini və

$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{e^{i\lambda z}}{z} = \frac{e^{i\lambda z}}{z'}\bigg|_{z=0} = 1$$

bərabərliyini nəzərə alsaq

$$\oint_L f(z)dz = \int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_{\gamma_r} f(z)dz + \int_r^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \qquad (22)$$

bərabərliyini alarıq.

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{i\lambda x}}{x}dx = -\int_r^R \frac{e^{-i\lambda x}}{x}dx$$

bərabərliyindən çıxan

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{i\lambda x}}{x}dx + \int_r^R \frac{e^{i\lambda x}}{x}dx = 2i\int_r^R \frac{\sin\lambda x}{x}dx$$

bərabərliyi (22) düsturunda nəzərə alsaq

$$2i\int_r^R \frac{\sin\lambda x}{x}dx + \int_{\gamma_r}\frac{e^{i\lambda z}}{z}dz + \int_{C_R}\frac{e^{i\lambda z}}{z}dz = 2\pi i \qquad (23)$$

düsturunu alarıq.

Jordan lemmasından çıxır ki,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0. \qquad (24)$$

İndi $f(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{z}$ funksiyasının γ_r çevrəsi üzrə inteqralının r sıfra yaxınlaşdıqda limitini hesablayaq.

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r}\frac{e^{i\lambda z}}{z}dz = \lim_{r\to 0}\int_\pi^{2\pi}\frac{e^{i\lambda r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}}{re^{i\varphi}}ire^{i\varphi}d\varphi = i\lim_{r\to 0}\int_\pi^{2\pi} e^{i\lambda r\cos\varphi}e^{-\lambda r\sin\varphi}d\varphi = i\pi. \qquad (25)$$

(24) və (25) bərabərliklərini nəzərə almaqla (23) bərabərliyində R-i $+\infty$-a, r isə 0-a yaxınlaşmaq şərti ilə limitə keçsək alarıq:

$$2i\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}dx + \pi i = 2\pi i.$$

Buradan da

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}dx = \frac{\pi}{2} \quad (\lambda > 0). \qquad (26)$$

bərabərliyini almış olarıq. ◁

Qeyd edək ki, (26) düsturunda λ-nı $-\lambda$ ilə əvəz etsək $\lambda < 0$ olduqda

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}dx = -\frac{\pi}{2} \quad (\lambda < 0) \qquad (27)$$

bərabərliyini alarıq. (26) və (27) bərabərliklərindən

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}dx = sign\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda>0, \\ 0, & \lambda=0, \\ -1, & \lambda<0 \end{cases}$$

düsturu alınır.

S ə r b ə s t i ş 1. Tutaq ki, $z_1, z_2, ..., z_m$ $\operatorname{Im} z>0$ yuxarı yarımmüstəvinin, $a_1, a_2, ..., a_n$ həqiqi oxun nöqtələridir. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:

1) Elə $\delta>0$ ədədi var ki, $f(z)$ funksiyası

$$\Omega_\delta = \{z: \operatorname{Im} z > -\delta\} \setminus (\{z_1, z_2, ..., z_m\} \cup \{a_1, a_2, ..., a_n\})$$

oblastında analitikdir;

2) $a_1, a_2, ..., a_n$ nöqtələri $f(z)$ funksiyasının sadə polyuslarıdır;

3) $\lim\limits_{|z|\to+\infty}\left\{\max\limits_{0\le\arg z\le\pi}|f(z)|\right\}=0$.

Göstərin ki, bu şərtlər daxilində istənilən müsbət λ ədədi üçün $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx$ inteqralı vardır və həmin inteqralı

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{res}\left[e^{i\lambda z} f(z)\right] + \pi i \sum_{j=1}^{n} \underset{z=a_j}{res}\left[e^{i\lambda z} f(z)\right] \qquad (28)$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

S ə r b ə s t i ş 2. $\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}dx$ $(\lambda>0)$ inteqralını (28) düsturundan istifadə edərək hesablayın.

14.4 . Çalışmalar

14.1.

Aşağıdakı inteqralları hesablayın.

1). $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$. 2). $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{13+12\sin\theta}$. 3). $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta d\theta}{13+12\cos\theta}$.

4). $\int_0^{\pi}\frac{\cos^4\theta d\theta}{1+\sin^2\theta}$. 5). $\int_0^{\pi} ctg(\theta-ia)d\theta, \quad a>0$.

6). $\int_0^{\pi} e^{2i\theta} ctg(\theta-ia)d\theta, \quad a>0$.

7). $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\theta d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}; \quad a)\ a>1; \quad b)\ -1<a<1; \quad c)\ a=1$.

8). $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} \quad (0<p<1)$.

9). $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta d\theta}{1-2p\cos 2\theta+p^2} \quad (0<p<1)$.

10). $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta d\theta}{1-2p\cos 2\theta+p^2} \quad (p>1)$. 11). $\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta d\theta}{1-2p\sin\theta+p^2} \quad (0<p<1)$.

12). $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta} \quad (a>1)$. 13). $\int_0^{\pi} ctg(\theta-a)d\theta \quad (\operatorname{Im} a>0)$.

14). $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta d\theta}{a+b\cos\theta} \quad (0<b<a)$. 15). $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta} \quad (0<a<1)$.

14.2.

Aşağıdakı inteqralları hesablayın.

1). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$. 2). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$. 3). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-2ix-2}$.

4). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$. 5). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$. 6). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+6x^2+25}dx$.

7). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$. 8). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+4ix-5)^2}$. 9). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^3}$ $(a>0)$.

10). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^6dx}{(x^4+a^4)^2}$ $(a>0)$. 11). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

12). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$. 13). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

14). $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$. 15). $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$. 16). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$.

14.3.

Aşağıdakı inteqralları hesablayın.

1). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2}dx$. 2). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2-2ix-2}dx$. 3). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+4ix-5)^2}dx$.

4). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-3)e^{ix}}{x^2-6x+109}dx$. 5). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5}dx$. 6). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{x^4+8x^2+16}dx$.

7). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+2ix-2)^2}dx$. 8). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$. 9). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$.

10). $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos xdx}{(x^2+1)(x^2+4)}$. 11). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xdx}{x^2+9}$. 12). $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos axdx}{x^4+1}$ $(a>0)$.

13). $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos xdx}{x^2+a^2}$ $(a>0)$. 14). $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos mxdx}{x^2+a^2}$ $(a>0, m>0)$.

15). $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2+x^4}dx$. 16). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda xdx}{(x^2+1)(x^2+9)}$ $(\lambda>0)$.

17). $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^3\sin axdx}{(x^2+1)^2}$ $(a>0)$. 18). $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2\cos xdx}{(x^2+1)^2}$.

Aşağıdakı inteqralları baş qiymət mənada hesablayın.

19). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-5x+6}dx$. 20). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x-\xi}$ $(\xi\in C)$.

21). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}dx}{(x-\xi)(x-z)}$ $(\mathrm{Im}\,\xi>0, \mathrm{Im}\,z>0, z\neq\xi)$.

22). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-e^{i\alpha x})}{x^2}dx$ $(\alpha\in R)$. 23). $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-\xi)(x^2+a^2)}$ $(a>0,\ -\infty<\xi<+\infty)$.

24). $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx$ $(\alpha>0)$. 25). $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx$ $(a>0,\ \mathrm{Re}\,b>0)$.

26). $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x-\sin x}{x^3(x^2+a^2)}dx$ $(\mathrm{Re}\,a>0)$.

14.5. Cavablar və göstərişlər

14.1.

1). $\frac{\pi}{2}$. H ə l l i. $\frac{1}{5+3\cos\theta}$ funksiyasının dövrü 2π olduğu üçün onun uzunluğu 2π-yə bərabər olan parçalar üzrə inteqralları bərabərdir. Bu faktı nəzərə alıb $z=e^{i\theta}$ əvəzləməsi aparsaq və

$$d\theta=-i\frac{dz}{z},\ \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2+1}{2}$$

bərabərliklərindən istifadə etsək

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}=\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}=-2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{3z^2+10z+3}$$

bərabərliyini alarıq. $\widetilde{R}(z)=-2i\dfrac{1}{3z^2+10z+3}$ funksiyasının iki sadə polyusundan yalnız biri, yəni $z_1=-\dfrac{1}{3}$ nöqtəsi $|z|=1$ çevrəsinin daxilinə düşür. Onda (3) düsturundan istifadə etsək alarıq:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}=-2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{3z^2+10z+3}=-2i2\pi i\,\underset{z=-\frac{1}{3}}{res}\frac{1}{3z^2+10z+3}=$$

$$=4\pi\left.\frac{1}{6z+10}\right|_{z=-\frac{1}{3}}=4\pi\frac{1}{-2+10}=\frac{\pi}{2}.$$

2). $\dfrac{2\pi}{5}$. 3). $\dfrac{\pi}{9}$. 4). $2\pi\left(\sqrt{2}-\dfrac{5}{4}\right)$. 5). πi. 6). $2\pi i e^{-2a}$. 7). a) $\dfrac{\pi}{a^2}$; b) π; c) π. 8). $\dfrac{2\pi}{1-p^2}$. 9). $\dfrac{(1-p+p^2)\pi}{1-p}$. 10). $\dfrac{2\pi}{p^2(p^2-1)}$. 11). 0. 12). $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. 13). πi. 14). $\dfrac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$. 15). $\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$.

14.2.

1). $\dfrac{\pi}{4}$. 2). $\dfrac{5\pi}{12}$. 3). 0. 4). $\dfrac{4\pi\sqrt{2}}{3}$. 5). $\dfrac{4\pi}{3}$. 6). $\dfrac{\pi}{4}$. 7). $\dfrac{3\pi}{8}$. 8). 0. 9). $\dfrac{\pi}{16a^3}$. 10). $\dfrac{3\pi\sqrt{2}}{16a}$. 11). $\dfrac{\pi}{ab(a+b)}$. 12). $-\dfrac{\pi}{27}$. 13). $\dfrac{\pi}{2}$. 14). $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$. 15). $\dfrac{\pi}{4}$. 16). $\dfrac{2\pi}{3}$. H ə l l i. Həqiqi oxda $f(x)=\dfrac{1}{x^6+1}$ ilə üst-üstə düşən $f(z)=\dfrac{1}{z^6+1}$ funksiyası daxil edək. $f(z)$ funksiyasının yuxarı

yarımmüstəvidə $z_1=e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2=e^{i\frac{\pi}{2}}$ və $z_3=e^{i\frac{5\pi}{6}}$ kimi üç sadə polyusu var. Həmin nöqtədəki çıxıqlar aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\underset{z=z_k}{res}\frac{1}{z^6+1}=\frac{1}{6z_k^5}\quad(k=1,2,3).$$

Bu hesablamalardan və (5) düsturundan istifadə edərək

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}=2\pi i\left(\frac{1}{6z_1^5}+\frac{1}{6z_2^5}+\frac{1}{6z_3^5}\right)=2\pi i\left(\frac{z_1}{6z_1^6}+\frac{z_2}{6z_2^6}+\frac{z_3}{6z_3^6}\right)=$$

$$=\frac{2\pi i}{6}(-z_1-z_2-z_3)=\frac{2\pi}{3}$$

bərabərliyini alırıq.

14.3.

1). $\pi i e^{-1+i}$. 2). $-\dfrac{2\pi}{e}\sin 1$. 3). 0. 4). $\pi i e^{-1+i}$. 5). $\pi(1-i)e^{-6-3i}$. 6). $\dfrac{3\pi e^{-2}}{16}$. 7). $\dfrac{\pi}{2e}(\sin 1-\cos 1)$. 8). $\dfrac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1-3\sin 1)$. 9). $\dfrac{\pi}{2}e^{-4}(2\cos 2+\sin 2)$

10). $\dfrac{\pi e^{-2}}{12}(2e-1)$. 11). $\dfrac{\pi e^{-3}}{3}$. 12). $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left(\cos\dfrac{a}{\sqrt{2}}+\sin\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

13). $\dfrac{\pi e^{-a}}{2a}$. 14). $\dfrac{\pi e^{-ma}}{2a}$. 15). $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\dfrac{1}{2}$. 16). $\dfrac{\pi}{16}\left(e^{-\lambda}-\dfrac{1}{3}e^{-3\lambda}\right)$.

17). $\dfrac{\pi e^{-a}}{4}(2-a)$. 18). 0. 19). $\pi(2\sin 2-2\sin 3)$. 20). $\pi i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\,\xi)$.

21). $\dfrac{2\pi i}{\xi-z}\left(e^{i\xi}-e^{iz}\right)$. 22). $\pi\alpha\,\mathrm{sgn}\,\alpha$. 23). $-\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\xi}{\xi^2+a^2}$. 24). $\dfrac{\pi\alpha}{2}$.

25). $\dfrac{\pi}{2b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$. H ə l l i. $f(x)=\dfrac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}$ cüt funksiya olduğu üçün axtarılan inteqralı

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x\left(x^2+b^2\right)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{x\left(x^2+b^2\right)}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x\left(x^2+b^2\right)}dx\right]$$

kimi göstərə bilərik. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x\left(x^2+b^2\right)}dx$ inteqralına (28) tətbiq etsək alarıq:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x\left(x^2+b^2\right)}dx=2\pi i\operatorname*{res}_{z=ib}\frac{e^{iaz}}{z\left(z^2+b^2\right)}+\pi i\operatorname*{res}_{z=0}\frac{e^{iaz}}{z\left(z^2+b^2\right)}=$$

$$=2\pi i\lim_{z\to ib}\frac{e^{iaz}}{z(z+ib)(z-ib)}(z-ib)+\pi i\lim_{z\to 0}\frac{e^{iaz}}{z\left(z^2+b^2\right)}z=$$

$$=2\pi i\frac{e^{-ab}}{ib2ib}+\pi i\frac{1}{b^2}=\pi i\left(-\frac{e^{-ab}}{b^2}+\frac{1}{b^2}\right)=i\frac{\pi}{b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$$

Beləliklə,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x\left(x^2+b^2\right)}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x\left(x^2+b^2\right)}dx\right]=\frac{\pi}{2b^2}\left(1-e^{-ab}\right).$$

26). $\frac{\pi}{2a^4}\left(1-a+\frac{a^2}{2}-e^{-a}\right)$.

XV Fəsil
ARQUMENT PRİNSİPİ. RUŞE TEOREMİ

15.1. Loqarifmik çıxıq. Arqument prinsipi

Tərif 15.1. *a)* $\psi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$ *funksiyasına* $f(z)$ *funksiyasının loqarifmik törəməsi deyilir;*

b) $\psi(z)$ *funksiyasının* $z=a$ *nöqtəsindəki çıxığına* $f(z)$ *funksiyasının loqarifmik çıxığı deyilir;*

c) $\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ *inteqralına,* $f(z)$*-in müsbət istiqamətli qapalı* L *konturuna nəzərən loqarifmik çıxığı deyilir.*

Lemma 15.1. *$f(z)$ funksiyasının n tərtibli sıfrı onun loqarifmik törəməsinin, çıxığı n-ə bərabər olan, sadə polyusudur.*

İsbatı. Tutaq ki, $z=a$ nöqtəsi, bu nöqtənin müəyyən ətrafında analitik olan $f(z)$ funksiyasının n tərtibli sıfrıdır. Onda $f(z)$-i a nöqtəsinin ətrafında

$$f(z)=(z-a)^n g(z)\quad (g(a)\neq 0)$$

şəklində göstərmək olar, burada $g(z)$ a nöqtəsinin ətrafında analitik funksiyadır.

$$f'(z)=n(z-a)^{n-1}g(z)+(z-a)^n g'(z)$$

bərabərliyini və $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ funksiyasının a nöqtəsinin ətrafında analitik olduğunu nəzərə alsaq, onda $f(z)$-in loqarifmik törəməsinin a nöqtəsinin ətrafındakı Loran sırasının

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n(z-a)^{n-1}g(z)+(z-a)^n g'(z)}{(z-a)^n g(z)}=\frac{n}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{n}{z-a}+\sum_{k=0}^{\infty}g_k(z-a)^k$$

şəklində olduğunu görərik. Bu ayrılışdan çıxır ki, $z=a$ nöqtəsi $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ funksiyasının sadə polyusudur və $\operatorname*{res}_{z=a}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=n$. ◁

LEMMA 15.2. *$f(z)$ funksiyasının m tərtibli polyusu onun loqarifmik törəməsinin, çıxığı $(-m)$-ə bərabər olan, sadə polyusudur.*

İSBATI. Tutaq ki, $z=b$ nöqtəsi, bu nöqtənin müəyyən $U_{0,R}(b)=\{z:0<|z-b|<R\}$ mərkəzsiz ətrafında analitik olan $f(z)$ funksiyasının m tərtibli polyusudur. Onda $f(z)$-i b nöqtəsinin bu ətrafında

$$f(z)=\frac{h(z)}{(z-b)^m}\quad (h(b)\neq 0)$$

şəklində göstərmək olar, burada $h(z)$ $U_{0,R}(b)$ halqasında analitik funksiyadır, belə ki, $z=b$ nöqtəsi onun aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir.

$$f'(z)=\frac{-mh(z)+(z-a)h'(z)}{(z-a)^{m+1}}\quad (z\in U_{0,R}(b))$$

bərabərliyini və $\dfrac{h'(z)}{h(z)}$ funksiyasının b nöqtəsinin ətrafında analitik olduğunu nəzərə alsaq, onda $f(z)$-in loqarifmik törəməsinin b nöqtəsinin ətrafındakı Loran sırasının

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-mh(z)+(z-b)h'(z)}{(z-b)h(z)}=\frac{-m}{z-b}+\frac{h'(z)}{h(z)}=\frac{-m}{z-b}+\sum_{k=0}^{\infty}h_k(z-b)^k$$

şəklində olduğunu görərik. Bu ayrılışdan çıxır ki, $z=b$ nöqtəsi $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ funksiyasının sadə polyusudur və $\operatorname*{res}_{z=b}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=-m$. ◁

TEOREM 15.1. *Tutaq ki, $f(z)$, sərhəddi düzlənə bilən qapalı L konturu olan, məhdud G oblastının a_j $(j=1,2,...,l)$ nöqtələrində n_j $(j=1,2,...,l)$ tərtibli sıfırları olan, L konturu üzərində və G oblastının p_k $(k=1,2,...,m)$ tərtibli b_k $(k=1,2,...,m)$ polyuslarından başqa hər yerində analitik funksiyadır. Əlavə fərz edək ki, $f(z)$ funksiyası L konturu üzərində sıfra çevrilmir. Onda*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P \tag{1}$$

düsturu doğrudur, burada $N=\sum_{j=1}^{l}n_j$ və $P=\sum_{k=1}^{m}p_k$ ilə, uyğun olaraq, $f(z)$ funksiyasının G oblastındakı sıfırlarının və polyuslarının sayı işarə olunmuşdur, belə ki, hər bir sıfır və hər bir polyus öz tərtibi qədər sayılır.

İSBATI. Lemma 15.1 və 15.2-dən çıxır ki, $f(z)$ funksiyasının loqarifmik törəməsi L konturu üzərində və G oblastının a_j $(j=1,2,...,l)$ və b_k $(k=1,2,...,m)$ nöqtələrindən başqa hər yerində analitik funksiyadır. Bu nöqtələr isə onun sadə polyuslarıdır. Çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoremini $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ funksiyasına tətbiq etsək

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{l}\operatorname*{res}_{z=a_j}\frac{f'(z)}{f(z)}+\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=b_k}\frac{f'(z)}{f(z)} \tag{2}$$

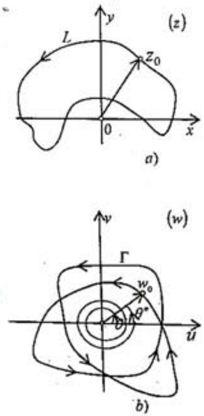
bərabərliyini almış olarıq. $\underset{z=a_j}{res}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=n_j \quad (j=1,2,\dots,l)$ (Lemma 15.1-ə görə) və $\underset{z=b_k}{res}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=-p_k \quad (k=1,2,\dots,m)$ (Lemma 15.2-ə görə) bərabərliklərini (2)-də nəzərə alsaq (1) düsturunun isbatını almış olarıq. ⊲

İsbat olunan teoremin həndəsi mənası öz əksini aşağıdakı teoremdə tapmışdır.

Teorem 15.2 *(arqument prinsipi). Teorem 15.1-in şərtləri daxilində $f(z)$ funksiyasının L konturunun daxilində olan sıfırlarının sayı N ilə polyuslarının sayı P-nin fərqi, z nöqtəsinin L konturunun müsbət istiqaməti boyunca tam bir dövrü zamanı, $f(z)$ funksiyasının arqumentinin aldığı $\Delta_L \arg f(z)$ artımının 2π-yə nisbətinə bərabərdir, yəni*

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_L \arg f(z). \quad (3)$$

İsbatı. Tutaq ki, L əyrisinin hər hansı bir z_0 nöqtəsi (Şəkil 15.1 a)) onun başlanğıcı və sonudur. $w=f(z)$ inikası zamanı (z) müstəvisində olan qapalı L əyrisi (w) müstəvisinin $w=0$ nöqtəsindən keçməyən qapalı Γ əyrisinə keçir (Şəkil 15.1 b)). z nöqtəsi z_0-dan başlayaraq L əyrisi üzərində saat əqrəbinin əks istiqamətində hərəkət etdikdə, w nöqtəsi $w_0=f(z_0)$-dan başlayaraq Γ əyrisi üzərində hərəkət edəcəkdir. z nöqtəsi L əyrisi üzərində tam bir dövr edən zaman, w nöqtəsi Γ əyrisi üzərində hərəkət edərək yenidən w_0 nöqtəsinə qayıdacaqdır. $w=0$ nöqtəsi Γ-ın daxilinə də düşə bilər, xaricinə də. w_0 nöqtəsində arqumentin θ' qiymətini qeyd edək. w nöqtəsi Γ



Şəkil 15.1.

əyrisi üzərində hərəkət edərək yenidən w_0 nöqtəsinə qayıdan zaman (bir tam dövrdən sonra) onun arqumenti kəsilməz olaraq dəyişərək, w_0 nöqtəsində yeni bir θ'' qiymətini (ümumiyyətlə θ'-dən fərqli!) alacaqdır. Aydındır ki, $\theta''=\theta'+2\pi k$, burada k - w nöqtəsinin radius vektorunun $w=0$ nöqtəsi ətrafındakı dönmələrinin sayıdır (saat əqrəbinin əksinə olan dönmələr müsbət işarə ilə, saat əqrəbi istiqamətində olan dönmələr isə mənfi işarə ilə sayılır). Şəkil 15.1-də k 2-yə bərabərdir. $w=0$ nöqtəsi Γ-ın xarici oblastına düşsə $k=0$ olacaqdır, çünki, bu halda W nöqtəsi Γ əyrisi üzərində bir tam dövr etdikdə, onun arqumentinin artımı sıfır olacaqdır.

$\theta''_{w_0}-\theta'_{w_0}$ fərqinə $f(z)$ funksiyasının arqumentinin $z_0\in L$ nöqtəsindəki artımı deyilir. Aydındır ki, bu artım L əyrisi üzərində olan z nöqtələrindən asılı deyil, yəni $\forall z\in L$ üçün

$$\theta''_w-\theta'_w=\theta''_{w_0}-\theta'_{w_0}=2\pi k \quad (4)$$

bərabərliyi doğrudur (θ'_w və θ''_w ədədlərini müxtəlif olmalarına baxmayaraq!), burada k - $w=f(z)$ nöqtəsinin radius vektorunun $w=0$ nöqtəsi ətrafındakı dönmələrinin sayıdır.

$\theta''_w-\theta'_w$ fərqinə $f(z)$ funksiyasının arqumentinin L kontturu boyunca artımı deyilir və $\Delta_L \arg f(z)$ kimi işarə olunur. Beləliklə, (4)-dən çıxır ki,

$$\Delta_L \arg f(z)=2\pi k \quad (5)$$

düsturu doğrudur.

İndi isə $f(z)$ funksiyasının L konturuna nəzərən loqarifmik çıxığında $w=f(z)$ əvəzləməsi aparaq. Onda alarıq:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{dw}{w}. \quad (6)$$

8.2 bəndində isbat olunan (*) düsturundan istifadə etsək

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{dw}{w}=k$$

bərabərliyini alarıq, burada k - $w=f(z)$ nöqtəsinin radius vektorunun $w=0$ nöqtəsi ətrafındakı dönmələrinin sayıdır. Bu bərabərliyi (6)-da nəzərə alsaq

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=k$$

bərabərliyini, buradan da, (5)-i və (1)-i nəzərə almaqla, (3) düsturunu alarıq. ⊲

N ə t i c ə 15.1. *Düzlənə bilən qapalı L əyrisi üzərində və onun daxili G oblastında analitik olan və L əyrisi üzərində sıfra çevrilməyən $f(z)$ funksiyasının L əyrisinin daxilindəki sıfırlarının sayı, z nöqtəsi L əyrisi üzərində saat əqrəbinin əksi istiqamətində tam bir dövr edərkən, $w=f(z)$ nöqtəsinin radius vektorunun $w=0$ nöqtəsi ətrafındakı dönmələrinin sayına bərabərdir.*

İ s b a t ı. $f(z)$ funksiyası analitik olduğuna görə (1) düsturu

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N \tag{7}$$

şəklini alır. Arqument prinsipinə görə (3) düsturu

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_L\arg f(z). \tag{8}$$

görkəmini alır. (5) düsturuna görə z nöqtəsi L əyrisi üzərində saat əqrəbinin əksi istiqamətində tam bir dövr edərkən, $w=f(z)$ nöqtəsinin radius vektorunun $w=0$ nöqtəsi ətrafındakı dönmələrinin sayı

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_L\arg f(z)=k \tag{9}$$

düsturu ilə təyin olunur. (7)- (9) düsturlarından nəticənin isbatı alınır. ⊲

M i s a l. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}$ funksiyasının a) loqarifmik törəməsini; b) $|z|=4$ çevrəsinə nəzərən loqarifmik çıxığını tapın.

H ə l l i. a)
$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\cos z-\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}:\frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}=\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\cos z-\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\sin z}$$

b) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}$ funksiyasının $|z|=4$ çevrəsinin daxilində üç sıfrı və bir polyusu var. $|z|\le 4$ dairəsində Teorem 15.1-in bütün şərtləri ödəndiyi üçün (1) düsturuna görə

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=3-1=2.$$

M i s a l. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z+1}$ funksiyasının sıfırlarına və polyusuna nəzərən onun loqarifmik törəməsinin çıxıqlarını tapın.

H ə l l i. Verilən funksiyanın sonsuz sayda sadə $z_k=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in Z)$ sıfırları və bir dənə sadə $z=-1$ polyusu vardır. Onda Lemma 15.1 və 15.2-yə görə

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}+\pi k}\frac{f'(z)}{f(z)}=1\quad (k\in Z),\quad \operatorname*{res}_{z=-1}\frac{f'(z)}{f(z)}=-1.$$

15.2. Ruşe teoremi və onun tətbiqləri

T e o r e m 15.3 *(Ruşe). Tutaq ki,* $f(z)$ *və* $\varphi(z)$ *düzlənə bilən qapalı* L *əyrisi üzərində və onun daxili* G *oblastında analitik olan funksiyalardır, belə ki,* L *əyrisi üzərində* $|f(z)|>|\varphi(z)|$ *bərabərsizliyi ödənir. Onda* $f(z)$ *və* $g(z)=f(z)+\varphi(z)$ *funksiyalarının* L *əyrisinin daxilindəki sıfırlarının sayı bərabərdir.*

İ s b a t ı. $|f(z)|>|\varphi(z)|$ şərtindən çıxır ki, nə $f(z)$ nə də ki, $g(z)$ funksiyası L əyrisi üzərində sıfra çevrilə bilməz. Hər iki funksiya Nəticə 15.1-in şərtlərini ödədiyinə görə, onların L əyrisinin daxilindəki sıfırlarının sayını, uyğun olaraq, aşağıdakı düsturlarla hesablamaq olar:

$$N_f=\frac{1}{2\pi}\Delta_L \arg f(z) \text{ və } N_g=\frac{1}{2\pi}\Delta_L \arg g(z), \qquad (10)$$

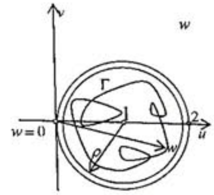
burada N_f və N_g ilə, uyğun olaraq, $f(z)$ və $g(z)$-nin L əyrisinin daxilindəki sıfırlarının sayı işarə olunmuşdur.

$$\arg g(z)=\arg[f(z)+\varphi(z)]=\arg f(z)+\arg\left\{1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right\}$$

münasibətindən çıxır ki,

$$\Delta_L \arg g(z)=\Delta_L \arg f(z)+\Delta_L \arg\left\{1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right\}. \qquad (11)$$

$w=1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ inkası zamanı (z) müstəvisində olan qapalı L əyrisi, $|f(z)|>|\varphi(z)|$ şərtinə görə, (w) müstəvisinin müəyyən $U_\rho(1)=\{z:|z-1|\le\rho<1\}$ dairəsinə daxil olan qapalı Γ əyrisinə keçəcəkdir (Şəkil 15.2). Deməli $w=1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ $(z\in L)$ radius vektoru $w=0$ nöqtəsi ətrafında, bir dəfə də



Şəkil 15.2.

olsun, tam dövr etməyəcək. Ona görə də $\Delta_L \arg\left\{1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right\}=0$ olacaqdır. Bu bərabərliyi (11)-də nəzərə alsaq,

$$\Delta_L \arg g(z)=\Delta_L \arg f(z)$$

bərabərliyini almış olarıq. Beləliklə, arqument prinsipindən çıxan Nəticə 15.1-i və (10) işarələmələrini nəzərə alsaq teoremin isbatını almış olarıq. ◁

M i s a l. $g(z)=z^8-4z^5+z^2-1$ funksiyasının $|z|<1$ dairəsindəki sıfırlarının sayını tapın.

H ə l l i. $g(z)$ funksiyasını $f(z)=-4z^5$ və $\varphi(z)=z^8+z^2-1$ funksiyalarının cəmi şəklində göstərək. Onda $|z|=1$ çevrəsi üzərində ödənən

$$|f(z)|=|-4z^5|=4,$$
$$|\varphi(z)|=|z^8+z^2-1|\le|z|^8+|z|^2+1=3$$

münasibətlərindən çıxır ki, $|z|=1$ çevrəsi üzərində $|f(z)|>|\varphi(z)|$ bərabərsizliyi ödənir. $f(z)=-4z^5$ funksiyası üçün $z=0$ beş tərtibli sıfır olduğu üçün Ruşe teoreminə görə $g(z)$ funksiyasının $|z|<1$ dairəsində 5 sıfrı var.

Qeyd edək ki, $f(z)$ və $\varphi(z)$ funksiyalarının başqa seçimi də mümkündür. Məsələn, $f(z)=z^8-4z^5$, $\varphi(z)=z^2-1$ kimi.

M i s a l. $z^4-5z+1=0$ (*) tənliyinin $U_{1,2}(0)=\{z:1<|z|<2\}$ halqasındakı sıfırlarının sayını tapın.

H ə l l i. $|z^4-5z+1|\ge|5z|-|z^4|-1$ bərabərsizliyindən çıxır ki, (*) tənliyinin $|z|=1$ çevrəsi üzərində həlli yoxdur. (*) tənliyinin $|z|<1$ dairəsindəki sıfırlarını tapmaq üçün $f(z)=-5z$ və $\varphi(z)=z^4+1$ funksiyaları daxil edək. $|z|=1$ çevrəsi üzərində ödənən $|f(z)|=|-5z|=5$ və $|\varphi(z)|=|z^4+1|\le|z|^4+1=2$ münasibətlərindən çıxır ki, bu çevrə üzərində $|f(z)|>|\varphi(z)|$ bərabərsizliyi ödənir. $f(z)=-5z$ funksiyasının $|z|<1$ dairəsində yalnız bir sıfrı olduğu üçün, Ruşe teoreminə görə (*) tənliyinin $|z|<1$ dairəsindəki sıfırlarının sayı 1-ə bərabərdir.

(*) tənliyinin $|z|<2$ dairəsindəki sıfırlarını tapmaq üçün $f(z)=z^4$ və $\varphi(z)=1-5z$ funksiyaları daxil edək. Onda $|z|=2$ çevrəsi üzərində ödənən

$$|f(z)|=|z^4|=16,\qquad |\varphi(z)|=|1-5z|\le5|z|+1=11$$

münasibətlərindən çıxır ki, $|z|=2$ çevrəsi üzərində $|f(z)|>|\varphi(z)|$ bərabərsizliyi ödənir. $f(z)=z^4$ funksiyasının $|z|<2$ dairəsində 4 sıfrı olduğu üçün, Ruşe teoreminə görə (*) tənliyinin $|z|<2$ dairəsindəki sıfırlarının sayı 4-ə bərabərdir. Beləliklə, (*) tənliyinin $U_{1,2}(0)=\{z:1<|z|<2\}$ halqasındakı sıfırlarının sayı 3-ə bərabərdir.

T E O R E M 15.4 *(cəbrin əsas teoremi). Dərəcəsi 1-dən kiçik olmayan n dərəcəli cəbri çoxhədlinin kompleks müstəvidə (hər kök tərtibi qədər sayılmaq şərti ilə!) n kökü var.*

İ S B A T I. Tutaq ki, $P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n$ $(a_0\ne0, n\in N)$ n dərəcəli cəbri çoxhədlidir. $z=\infty$ nöqtəsi $P_n(z)$-in polyusu olduğuna

görə $\lim\limits_{z\to\infty}P_n(z)=\infty$. Bu o deməkdir ki, elə $R_0>0$ ədədi var ki, $P_n(z)$ çoxhədlisinin bütün kökləri $U_{R_0}(0)=\{z:|z|<R_0\}$ dairəsinin daxilindədir. $f(z)=a_0z^n$ və $\varphi(z)=a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+...+a_{n-1}z+a_n$ funksiyaları daxil edək. $z=\infty$ nöqtəsi $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ funksiyasının sıfrı olduğu üçün $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}=0$ münasibəti ödənəcəkdir. Buradan çıxır ki, elə $R_1>0$ ədədi var ki, ondan böyük olan bütün R ədədləri üçün $C_R(0)=\{z:|z|=R\}$ çevrəsi üzərində $|f(z)|>|\varphi(z)|$ bərabərsizliyi ödənir. $R^*=\max\{R_0,R_1\}$ ədədi üçün həm $P_n(z)$ çoxhədlisinin bütün kökləri $U_{R^*}(0)=\{z:|z|<R^*\}$ dairəsinin daxilində yerləşəcək, həm də $C_R^*(0)=\{z:|z|=R^*\}$ çevrəsi üzərində $|f(z)|>|\varphi(z)|$ bərabərsizliyi ödənəcək. Onda Ruşe teoreminə görə $f(z)=a_0z^n$ və $P_n(z)=f(z)+\varphi(z)$ funksiyalarının $C_R^*(0)$ çevrəsinin daxilindəki sıfırlarının sayı bərabər olacaqdır. $a_0z^n=0$ tənliyinin $U_{R^*}(0)=\{z:|z|<R^*\}$ dairəsinin daxilindəki köklərinin sayının n-ə bərabər olduğunu və $P_n(z)$ çoxhədlisinin bütün köklərinin $U_{R^*}(0)=\{z:|z|<R^*\}$ dairəsində olduğunu nəzərə alsaq teoremin isbatını almış olarıq. ◁

T E O R E M 15.5 *(Qurvis). Tutaq ki, G oblastında analitik olan $\{f_n(z)\}$ funksiyalar ardıcıllığı, G oblastının hər bir məhdud və qapalı alt çoxluğunda, eynilik kimi sıfır olmayan $f(z)$ funksiyasına müntəzəm yığılır. Onda $z_0\in G$ nöqtəsinin $f(z)$ funksiyasının sıfrı olması üçün zəruri və kafi şərt, z_0-a yığılan və müəyyən $n_0(z_0)\in N$ ədədindən böyük olan istənilən n natural ədədi üçün $f_n(z_n)=0$ şərtini ödəyən $\{z_n\}\subset G$ ardıcıllığının varlığıdır.*

İ S B A T I. Kafilik aydın olduğu üçün teoremin zərurilik hissəsini isbat edək. Tutaq ki, $z_0\in G$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının sıfrıdır. $\delta>0$ ədədini elə seçək ki, z_0-ın qapalı $U_\delta(z_0)=\{z:|z-z_0|\le\delta\}\subset G$

ətrafında $f(z)$-in z_0-dan başqa sıfrı olmasın. Bu həmişə mümkündür. Əks halda analitik funksiyanın ($f(z)$-in G-də analitik olması Veyerştraşın analitik funksiyalar ardıcıllığı üçün olan I teoremindən çıxır!) yeganəlik teoremindən çıxardı ki, $f(z)$ G oblastında eynilik kimi sıfırdır. Bu isə şərtə zidd olardı. Veyerştrassın kəsilməz funksiyalar üçün olan teoreminə görə $\min\limits_{z\in C_\delta=\{z:|z-z_0|=\delta\}}|f(z)|=m>0$. $\{f_n(z)\}$ funksiyalar ardıcıllığı G oblastının hər bir məhdud və qapalı alt çoxluğunda $f(z)$ funksiyasına müntəzəm yığıldığı üçün elə $n_0(z_0)\in N$ ədədi tapmaq olar ki, $n_0(z_0)$ ədədinindən böyük olan istənilən n natural ədədi və istənilən $z\in C_\delta=\{z:|z-z_0=\delta|\}$ elementi üçün $|f_n(z)-f(z)|<m$ bərabərsizliyi ödənər. $f_n(z)=f(z)+\{f_n(z)-f(z)\}$ bərabərliyindən və Ruşe teoremindən çıxır ki, $n_0(z_0)$ ədədindən böyük olan istənilən n natural ədədi üçün, $f_n(z)$ və $f(z)$ funksiyalarının $U_\delta(z_0)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$ dairəsindəki sıfırlarının sayı eynidir. Deməli, $n>n_0(z_0)$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün $f_n(z)$ funksiyasının $U_\delta(z_0)$ dairəsində ən azı bir sıfrı var, yəni elə $z_n\in U_\delta(z_0)$ nöqtəsi var ki, $f_n(z_n)=0$ $(n>n_0(z_0))$ bərabərliyi ödənir. Göstərək ki, $\{z_n\}$ ardıcıllığı z_0-a yığılır. Bunun üçün göstərək ki, $\{z_n\}$ ardıcıllığının z_0-dan başqa xüsusi limiti yoxdur. Tutaq ki, z^* $\{z_n\}$ ardıcıllığının hər hansı bir xüsusi limitidir. Onda elə $\{z_{n_k}\}$ alt ardıcıllığı var ki, $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}=z^*$. $0=\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(z_{n_k})=f(z^*)$ bərabərliyindən çıxır ki, $f(z^*)=0$. $\overline{U}_\delta(z_0)$ ətrafında $f(z)$-in z_0-dan başqa sıfrı olmadığına görə $z^*=z_0$ olmalıdır. Beləliklə, göstərdik ki, $z_0\in G$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının sıfrıdırsa, onda z_0-a yığılan və müəyyən $n_0(z_0)\in N$ ədədindən böyük olan istənilən n natural ədədi üçün $f_n(z_n)=0$ şərtini ödəyən $\{z_n\}\subset G$ ardıcıllığı vardır. $\triangleleft$.

Q E Y D 1. $U_1(0)=\{z:|z|<1\}$ oblastında $f_n(z)=\dfrac{e^z}{n}$ analitik funksiyalar ardıcıllığına baxaq.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{z\in U_1(0)}\left|f_n(z)-0\right|\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n}=0$$

bərabərliyi göstərir ki, $f_n(z)=\dfrac{e^z}{n}$ ardıcıllığı $U_1(0)=\{z:|z|<1\}$ dairəsində $f(z)=0$ funksiyasına müntəzəm yığılır. $f_n(z)=\dfrac{e^z}{n}$ funksiyalarının heç birinin $U_1(0)=\{z:|z|<1\}$ dairəsində sıfrı yoxdur. Lakin bu dairənin hər bir nöqtəsi limit funksiyasının sıfrıdır. Bu misal göstərir ki, $f(z)$ funksiyasının eynilik kimi sıfır olmaması mühüm şərtdir.

Q E Y D 2. $U_1(0)=\{z:|z|<1\}$ oblastında $f_n(z)=1-\dfrac{z^n}{n}$ analitik funksiyalar ardıcıllığına baxaq.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{z\in U_1(0)}\left|f_n(z)-1\right|\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

bərabərliyi göstərir ki, $f_n(z)=1-\dfrac{z^n}{n}$ ardıcıllığı $U_1(0)=\{z:|z|<1\}$ dairəsində $f(z)=1$ funksiyasına müntəzəm yığılır. $f(z)=1$ funksiyasının $U_1(0)=\{z:|z|<1\}$ dairəsində bir dənə də olsun sıfrı olmadığı halda, bu dairənin çevrəsinin hər bir nöqtəsi $f_n(z)=1-\dfrac{z^n}{n}$ ardıcıllığının limit nöqtəsidir. Bu misal göstərir ki, teorem G oblastının sərhəd nöqtələrinə tətbiq olunmur.

15.3. Çəkili loqarifmik çıxıq

T ə r i f 15.2. $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}dz$ *inteqralına,* $f(z)$*-in müsbət istiqamətli qapalı* L *konturuna nəzərən çəkili loqarifmik çıxığı deyilir.*

LEMMA 15.3. *Tutaq ki, $f(z)$ və $\varphi(z)$ funksiyaları $z=a$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında analitikdir. Əgər $z=a$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının n tərtibli sıfrıdırsa, onda o $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ funksiyasının ya sadə polyusudur, ya da ki, aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir, belə ki,*

$$\operatorname*{res}_{z=a}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}=\begin{cases} n\varphi(a), & \varphi(a)\neq 0 \quad olarsa, \\ 0, & \varphi(a)=0 \quad olarsa. \end{cases} \tag{12}$$

İSBATI. Tutaq ki, $z=a$ nöqtəsi, bu nöqtənin müəyyən ətrafında analitik olan $f(z)$ funksiyasının n tərtibli sıfrıdır. Onda $f(z)$-i a nöqtəsinin ətrafında

$$f(z)=(z-a)^n g(z) \quad (g(a)\neq 0)$$

şəklində göstərmək olar, burada $g(z)$ a nöqtəsinin ətrafında analitik funksiyadır.

$$f'(z)=n(z-a)^{n-1}g(z)+(z-a)^n g'(z)$$

bərabərliyini və $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ funksiyasının a nöqtəsinin ətrafında analitik olduğunu nəzərə alsaq, onda $f(z)$-in çəkili loqarifmik törəməsinin a nöqtəsinin ətrafındakı Loran sırasının

$$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}=\varphi(z)\frac{n(z-a)^{n-1}g(z)+(z-a)^n g'(z)}{(z-a)^n g(z)}=\varphi(z)\frac{n}{z-a}+\varphi(z)\frac{g'(z)}{g(z)}=$$

$$=[\varphi(a)+\varphi'(a)(z-a)+\ldots]\frac{n}{z-a}+\varphi(z)\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{n\varphi(a)}{z-a}+[n\varphi'(a)+\ldots]+$$

$$+\varphi(z)\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{n\varphi(a)}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots$$

şəklində olduğunu görərik. Bu ayrılışdan çıxır ki, $z=a$ nöqtəsi $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ funksiyasının ya sadə polyusudur, ya da ki, aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir və (12) düsturu doğrudur. ◁

LEMMA 15.4. *Tutaq ki, $z=b$ nöqtəsi, bu nöqtənin müəyyən $U_{0,R}(b)=\{z:0<|z-b|<R\}$ mərkəzsiz ətrafında analitik olan $f(z)$ funksiyasının m tərtibli polyusudur və $\varphi(z)$ funksiyası $z=b$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında analitikdir. Onda $z=b$ nöqtəsi $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ funksiyasının ya sadə polyusudur, ya da ki, aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir, belə ki,*

$$\operatorname*{res}_{z=b}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}=\begin{cases} -m\varphi(b), & \varphi(b)\neq 0 \quad olarsa, \\ 0, & \varphi(b)=0 \quad olarsa. \end{cases} \tag{13}$$

İSBATI. $z=b$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının m tərtibli polyusu olduğuna görə $f(z)$-i b nöqtəsinin $U_{0,R}(b)$ ətrafında

$$f(z)=\frac{h(z)}{(z-b)^m} \quad (h(b)\neq 0)$$

şəklində göstərmək olar, burada $h(z)$ $U_{0,R}(b)$ halqasında analitik funksiyadır, belə ki, $z=b$ nöqtəsi onun aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir.

$$f'(z)=\frac{-mh(z)+(z-a)h'(z)}{(z-a)^{m+1}} \quad (z\in U_{0,R}(b))$$

bərabərliyini və $\dfrac{h'(z)}{h(z)}$ funksiyasının b nöqtəsinin ətrafında analitik olduğunu nəzərə alsaq, onda $f(z)$-in çəkili loqarifmik törəməsinin b nöqtəsinin ətrafındakı Loran sırasının

$$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \varphi(z)\frac{-mh(z)+(z-b)h'(z)}{(z-b)h(z)} = \varphi(z)\frac{-m}{z-b} + \varphi(z)\frac{h'(z)}{h(z)} =$$

$$= [\varphi(b)+\varphi'(b)(z-b)+\ldots]\frac{-m}{z-b} + \sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{h}_k(z-b)^k = \frac{-m\varphi(b)}{z-b} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-b)^k$$

şəklində olduğunu görərik. Bu ayrılışdan çıxır ki, $z=b$ nöqtəsi $\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ funksiyasının ya sadə polyusudur, yada ki, aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsidir və (13) düsturu doğrudur. ◁

T e o r e m 15.6. *Tutaq ki, $f(z)$, sərhəddi düzlənə bilən qapalı L konturu olan, məhdud G oblastının a_j $(j=1,2,\ldots,l)$ nöqtələrində n_j $(j=1,2,\ldots,l)$ tərtibli sıfırları olan, L konturu üzərində və G oblastının p_k $(k=1,2,\ldots,m)$ tərtibli b_k $(k=1,2,\ldots,m)$ polyuslarından başqa hər yerində analitik funksiyadır. Əlavə fərz edək ki, $f(z)$ funksiyası L konturu üzərində sıfra çevrilmir, $\varphi(z)$ isə L konturu üzərində və G oblastında analitik funksiyadır. Onda*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{l} n_j\varphi(a_j) - \sum_{k=1}^{m} p_k\varphi(b_k) \qquad (14)$$

düsturu doğrudur.

İ s b a t ı. Lemma 15.3 və 15.4-dən çıxır ki, $f(z)$ funksiyasının çəkili loqarifmik törəməsi L konturu üzərində və G oblastının a_j $(j=1,2,\ldots,l)$ və b_k $(k=1,2,\ldots,m)$ nöqtələrindən başqa hər yerində analitik funksiyadır. Bu nöqtələr isə onun sadə polyuslarıdır. Çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoremini $\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ funksiyasına tətbiq etsək

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{l}\operatorname*{res}_{z=a_j}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=b_k}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} \qquad (15)$$

bərabərliyini almış olarıq. (12) və (13) düsturlarından alınan

$$\operatorname*{res}_{z=a_j}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \begin{cases} n_j\varphi(a_j), & \varphi(a_j)\neq 0 \quad olarsa, \\ 0, & \varphi(a_j)=0 \quad olarsa. \end{cases}$$

$$(j=1,2,\ldots,l),$$

$$\operatorname*{res}_{z=b_k}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \begin{cases} -m_k\varphi(b_k), & \varphi(b_k)\neq 0 \quad olarsa, \\ 0, & \varphi(b_k)=0 \quad olarsa. \end{cases}$$

$$(k=1,2,\ldots,m)$$

bərabərlikləri (15)-də nəzərə alsaq (14) düsturunun isbatını almış olarıq. ◁

N ə t i c ə 15.2. *(14) düsturunda $\varphi(z)=z$ götürsək, onda Teorem 15.6-nın şərtləri daxilində $f(z)$ funksiyasının L konturunun daxilində olan sıfırlarının cəmi ilə polyuslarının cəminin fərqi üçün*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{l} n_j a_j - \sum_{k=1}^{m} p_k b_k \qquad (16)$$

düsturunu alarıq.

N ə t i c ə 15.3. *(14) düsturunda $\varphi(z)=z^d$ götürsək, onda Teorem 15.6-nın şərtləri daxilində $f(z)$ funksiyasının L konturunun daxilində olan sıfırlarının d-ci qüvvətlərinin cəmi ilə polyuslarının d-ci qüvvətlərinin cəminin fərqi üçün*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L z^d\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{l} n_j a_j^d - \sum_{k=1}^{m} p_k b_k^d \qquad (17)$$

düsturunu alarıq.

15.4 . Çalışmalar

15.1.

Verilən funksiyaların loqarifmik törəmələrinin, onların sıfırlarına və polyuslarına nəzərən, çıxıqlarını tapın.

1). $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$. 2). $f(z)=\cos^3 z$. 3). $f(z)=\dfrac{\cos z}{z}$.

4). $f(z)=\sin z$. 5). $f(z)=\dfrac{\sin z}{z+1}$. 6). $f(z)=\sin z$.

Verilən funksiyaların göstərilən konturlara nəzərən loqarifmik çıxıqlarını tapın.

7). $f(z)=\dfrac{chz}{e^{iz}-1}$, $L:|z|=8$. 8). $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$, $L:|z|=\pi$.

9). $f(z)=\dfrac{z}{1+z^3}$, $L:|z|=2$. 10). $f(z)=\cos z+\sin z$, $L:|z|=4$.

11). $f(z)=\left(e^z-2\right)^2$, $L:|z|=8$. 12). $f(z)=thz$, $L:|z|=8$.

13). $f(z)=tg^3 z$, $L:|z|=6$. 14). $f(z)=1-th^2 z$, $L:|z|=2$.

Arqument prinsipindən istifadə edərək aşağıdakı tənliklərin sağ yarımmüstəviyə düşən köklərinin sayını tapın.

15). $z^7-2z-5=0$. 16). $z^4+2z^3+3z^2+z+2=0$.
17). $z^3-2z-5=0$. 18). $z^3-4z^2+5=0$. 19). $2z^3-z^2-7z+5=0$.
20). $z^5+5z^4-5=0$.

15.2.

Ruşe teoremindən istifadə edərək verilən tənliklərin göstərilən oblastlardakı köklərinin sayını tapın.

1). $z^6-6z+10=0$, $|z|<1$. 2). $z^4-3z^3-1=0$, $|z|<2$.

3). $z^3+z+1=0$, $|z|<\dfrac{1}{2}$. 4). $z^5+z^2+1=0$, $|z|<2$.

5). $z^8+6z+10=0$, $|z|<1$. 6). $27z^{11}-18z+10=0$, $|z|<1$.

7). $z^8-6z^6-z^3+2=0$, $|z|<1$. 8). $z^4-3z+1=0$, $|z|<1$.

9). $2z^4-5z+2=0$, $|z|<1$. 10). $z^7-5z^4+z^2-2=0$, $|z|<1$.
11). $z^8-4z^5+z^2-1=0$, $|z|<1$. 12). $z^3-12z+2=0$, $|z|<2$.

Verilən tənliklərin göstərilən halqalardakı köklərinin sayını tapın.

13). $4z^4-29z^2+25=0$, $2<|z|<3$.
14). $z^7-5z^4+z^2-2=0$, $1<|z|<2$.
15). $z^6-8z+10=0$, $1<|z|<3$.
16). $z^6-6z+10=0$, $|z|>1$.
17). $z^4+z^3-4z+1=0$, $1<|z|<2$.

Verilən tənliklərin göstərilən oblastlardakı köklərinin sayını tapın.

18). $z+e^{-z}=\lambda$, $G:\ \operatorname{Re} z\ge 0$, $(\lambda>1)$.

19). $z^2-ae^z=0$, $G:\ |z|<1$, $\left(0<a<\dfrac{1}{e}\right)$.

20). $z-e^{z-\lambda}=0$, $G:\ |z|<1$, $(1<\lambda)$.

21). $z^2-\cos z=0$, $G:\ |z|<2$. 22). $z^4-\sin z=0$, $G:\ |z|<\pi$.

23). $z^2+chiz=0$, $G:\ |z|<\dfrac{1}{2}$. 24). $z^2-4z=chz$, $G:\ |z|<1$.

25). $2^z-4z=0$, $G:\ |z|<1$.

26). Qurvis teoremindən istifadə edərək göstərin ki,

a) $\rho<\dfrac{\pi}{2}$ şərti daxilində, kifayət qədər böyük n üçün $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{z^{2k}}{(2k)!}$ çoxhədlisinin $U_\rho(0)=\{z:|z|\le\rho\}$ dairəsində sıfrı yoxdur;

b) istənilən müsbət $R>0$ ədədi üçün elə $n_0(R)\in N$ ədədi var ki, $n_0(R)$-dən böyük olan istənilən n natural ədədi üçün $Q_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}$ çoxhədlisinin $U_R(0)=\{z:|z|\le R\}$ dairəsində sıfrı yoxdur.

15.5. Cavablar və göstərişlər

15.1.

1). $\underset{z=k\pi}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=1 \quad (k\in Z\setminus\{0\})$. 2). $\underset{z=\frac{\pi}{2}+k\pi}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=3 \quad (k\in Z)$.

3). $\underset{z=\frac{\pi}{2}+k\pi}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=1 \quad (k\in Z)$; $\underset{z=0}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=-1$.

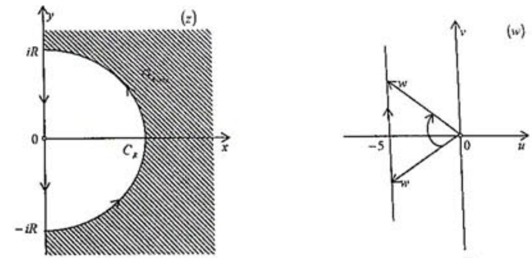
4). $\underset{z=k\pi}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=1 \quad (k\in Z)$.

5). $\underset{z=k\pi}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=1 \quad (k\in Z)$; $\underset{z=-1}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=-1$.

6). $\underset{z=k\pi}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=1 \quad (k\in Z)$; $\underset{z=-\frac{\pi}{2}+\pi k}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=-1 \quad (k\in Z)$. 7). 3.

H ə l l i. $f(z)=\frac{chz}{e^{iz}-1}$ funksiyasının $|z|<8$ dairəsinə düşən sıfırlarının və polyuslarının sayını tapaq. Bu məqsədlə $chz=0$ və $e^{iz}-1=0$ tənliklərini həll edək. $chz=0$ tənliyini $e^{z}+e^{-z}=0$ və ya $e^{2z}=-1$ şəklində yazıb e^{z} funksiyasının $2\pi i$ dövürlü olduğunu nəzərə alsaq, görərik ki, $chz=0$ tənliyinin kökləri $z_k=\frac{2k+1}{2}\pi i\ (k\in Z)$ şəklindədir (hamısı da sadə sıfırlardır). Deməli, $chz=0$ tənliyinin $|z|<8$ dairəsinə düşən sıfırları $z_k=\frac{2k+1}{2}\pi i\ (k=0,\pm1,\pm2,-3)$

nöqtələridir. Beləliklə, $chz=0$ tənliyinin $|z|<8$ dairəsinə düşən köklərinin sayı 6-dır. $e^{iz}-1=0$ tənliyinin köklərinin $z_m=2\pi m\ (m\in Z)$ şəklində olduğunu nəzərə alsaq, görərik ki, onlardan yalnız 3-ü, yəni $z_m=2\pi m\ (m=0,\pm1)$ nöqtələri, $|z|<8$ dairəsinə düşür. $\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$ düsturunda $N=6$ və $P=3$ olduğunu nəzərə alsaq, $\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f'(z)}{f(z)}dz=3$ bərabərliyini alarıq.



a) Şəkil 15.4 b)

8). -12. 9). -2. 10). 3. 11). 6. 12). -1. 13). -3. 14). -4. 15). 3. H ə l l i.

$R>0$ ədədini elə seçək ki, $P_7(z)=z^7-2z-5$ çoxhədlisinin (z) müstəvisinin sağ yarımmüstəvisidə yerləşən $G_{R,sağ}=\{z:\mathrm{Re}\,z\ge0\}\cap\{z:|z|\ge R\}$ (Şəkil 15.4. a)-da ştrixlənən hissə) çoxluğunda heç bir kökü olmasın. Başqa sözlə, $P_7(z)=z^7-2z-5$ çoxhədlisinin (z) müstəvisinin sağ yarımmüstəvisindəki bütün kökləri $\{z:\mathrm{Re}\,z\ge0\}\setminus G_{R,sağ}$ yarımdairəsində yerləşsin.

$P_7(it)=(it)^7-2it-5=-it^7-2it-5 \quad (t\in[-R,R])$ bərabərliyindən çıxır ki, xəyali oxun $[-iR,iR]$ hissəsində də $P_7(z)=z^7-2z-5$ çoxhədlisinin sıfırları yoxdur. $C_R=\{z:|z|=R, \operatorname{Re} z>0\}$ yarımçevrəsi ilə xəyali oxun $[iR,-iR]$ parçasından ibarət olan müsbət istiqamətli qapalı konturu L_R ilə işarə edək (Şəkil 15.4. a)). Beləliklə, alırıq ki, elə müsbət R_0 ədədi var ki, ondan böyük olan istənilən R ədədi üçün müsbət istiqamətli qapalı $L_R=C_R\cup[iR,-iR]$ konturuna arqument prinsipini tətbiq etmək olar.

$$\arg P_7(z)=\arg\left[z^7\left(1-\frac{2}{z^6}-\frac{5}{z^7}\right)\right]=\arg z^7+\arg\left(1-\frac{2}{z^6}-\frac{5}{z^7}\right)=$$
$$=7\arg z+\arg\left(1-\frac{2}{z^6}-\frac{5}{z^7}\right)$$

münasibətlərindən çıxan

$$\Delta_{C_R}\arg P_7(z)=7\Delta_{C_R}\arg z+\Delta_{C_R}\arg\left(1-\frac{2}{z^6}-\frac{5}{z^7}\right)$$

bərabərliyində $R\to+\infty$ şərti ilə limitə keçsək alarıq:

$$\lim_{R\to+\infty}\Delta_{C_R}\arg P_7(z)=7\pi\,.$$

İndi $P_7(z)$ inkası zamanı (z) müstəvisinin $[iR,-iR]$ parçasının (w) müstəvisinin hansı əyrisinə keçdiyini bilmək üçün $z=it \quad (-R\le t\le R)$ nöqtələrində $P_7(z)$ çoxhədlisinin qiymətini hesablayaq. Onda $P_7(it)=-5+i(-t^7-2t)$ bərabərliyindən alarıq ki, $P_7(z)$ inkası zamanı $[iR,-iR]$ parçasının obrazı olan əyrinin parametrik tənliyi

$$\begin{cases} u=-5 \\ v=-t(t^6+2) \end{cases},\quad -R\le t\le R$$

şəklindədir. Aydındır ki, bu (w) müstəvisində $(-5;0)$ nöqtəsindən keçən və u oxuna perpendikulyar olan düz xətt parçasıdır. z-in iR nöqtəsindən $-iR$ nöqtəsinə doğru hərəkəti zamanı $w=P_7(it)$ nöqtəsi bu parçanın aşağı ucundan yuxarı ucuna doğru hərəkət edir (Şəkil 15.4. b)). Deməli R sonsuzluğa yaxınlaşanda bu parça aşağıdan yuxarı istiqamətlənmiş $u=-5$ düz xəttinə keçir. Bu zaman $w=P_7(it)$ radius vektoru, mənfi istiqamətində $\varphi=\pi$ bucağı qədər dönür. Bu deyilənlərdən belə nəticəyə gəlirik ki, sağ yarımmüstəvini öz daxilində saxlayan müsbət istiqamətli qapalı $L_\infty=\lim\limits_{R\to+\infty}L_R$ konturu boyunca $P_7(z)$ funksiyasının arqumenti 6π artımını alır. Onda arqument prinsipinə görə $P_7(z)$ çoxhədlisinin sağ yarımmüstəvidəki sıfırlarının sayı 3-ə bərabərdir.

16). 2. 17). 1. 18). 1. 19). 1. 20). 2.

15.2.

1). 0. H ə l l i. $g(z)=z^6-6z+10=0$ funksiyasını $f(z)=10$ və $\varphi(z)=z^6-6z$ funksiyalarının cəmi şəklində göstərək. Onda $|z|=1$ çevrəsi üzərində ödənən

$$|f(z)|=10 \text{ və } |\varphi(z)|=|z^6-6z|\le|z|^6+6|z|=7$$

münasibətlərindən çıxır ki, $|z|=1$ çevrəsi üzərində $|f(z)|>|\varphi(z)|$ bərabərsizliyi ödənir. $f(z)=10$ funksiyasının $|z|<1$ dairəsində sıfrı olmadığı üçün Ruşe teoreminə görə $g(z)$ funksiyasının $|z|<1$ dairəsindəki köklərinin sayı 0-dır.

2). 3. 3). 0. 4). 5. 5). 0. 6). 11. 7). 6. 8). 1. 9). 1. 10). 4. 11). 5. 12). 1. 13). 2. 14). 3. 15). 4. 16). 6. 17). 3. 18). 1. H ə l l i. $C_R=\{z:|z|=R, \operatorname{Re} z>0\}$ yarımçevrəsi ilə xəyalı oxun $[iR,-iR]$ parçasından ibarət olan müsbət istiqamətli qapalı konturu L_R ilə işarə edək (Şəkil 15.4. a)). $f(z)=z-\lambda$ və $\varphi(z)=e^{-z}$ funksiyaları daxil edək. Aydındır ki, $[iR,-iR]$ parçasında

$$|f(z)|=|\lambda-it|\geq\lambda>1 \text{ və } |\varphi(z)|=|e^{-iy}|=1$$

münasibətləri doğrudur. $R>\lambda+1$ şərtini ödəyən kifayət qədər böyük R -lər üçün isə C_R yarımçevrəsinin üzərində

$$|f(z)|\geq|z|-\lambda=R-1>1 \text{ və } |\varphi(z)|=e^{-\mathrm{Re}\,z}\leq 1$$

bərabərsizlikləri ödənir. Beləliklə, müsbət istiqamətli qapalı L_R konturu üzərində $|f(z)|>|\varphi(z)|$ bərabərsizliyi ödənir. Onda Ruşe teoremindən çıxır ki, elə müsbət R_0 ədədi var ki, ondan böyük olan istənilən R ədədi üçün $z+e^{-z}=\lambda$ tənliyinin L_R konturunun daxilindəki köklərinin sayı $f(z)=z-\lambda$ funksiyasının köklərinin sayına, yəni 1-ə bərabərdir. Bu isə o deməkdir ki, $z+e^{-z}=\lambda$ tənliyinin sağ yarımmüstəvidəki köklərinin sayı 1-ə bərabərdir. $g(z)=z-\lambda+e^{-z}$ funksiyası $[0,+\infty)$ aralığında $g(0)=-\lambda+1<0$ və $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ şərtlərini ödədiyinə görə Koşinin kəsilməz funksiyanın sıfırları haqqındakı teoreminə görə, onun $[0,+\infty)$ aralığında ən azı bir sıfrı olmalıdır. Digər tərəfdən $g(z)=z-\lambda+e^{-z}$ funksiyasının sağ yarımmüstəvidə yalnız bir sıfrı var. Beləliklə, $z+e^{-z}=\lambda$ tənliyinin sağ yarımmüstəvidə yeganə həqiqi kökü vardır.

19). 2. 20). 1. 21). 2. 22). 4. 23). 0. 24). 1. 25). 1.

İSTİFADƏ OLUNMUŞ ƏDƏBİYYAT

I hissəyə aid

1. Акилов Г. П., Макаров Б. М., Хавин В. П. Элементарное введение в теорию интеграла. -Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1969. -350 с.

2. Виленкин Н.Я., Балк М.Б., Петров В.А. Математический анализ.Мощность. Метрика. Интеграл.- М.: «Просвещение», 1980. -144 с.

3. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной (введение в теорию интеграла). -М.: Наука, 1973. - 350 с.

4. Дерр В.Я. Теория функций действительной переменной. Лекции
и упражнения. -М.: Высш. шк., 2008. -384 с

5. Клементьев З. И. Курс лекций по теории функций действительного
переменного. - Томск : Изд-во Томского ун-та, 1970. - 290 с.

6. Копанев С.А., Кривякова Э.Н. Интеграл Лебега. - Ч. 1. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. -236 с.

7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. -М.: Физматлит, 2004. -572 с.

8. Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С. Задачи по теории функций действительного переменного. –Изд-во МГУ, 1997.-208 с.

9. Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу. -М.: Наука, 1992. -432 с.

10. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. -М.: Наука, 1974. - 480 с.

11. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. -М.: Просвещение, 1981.-271 с.

12. Петров В.А., Виленкин Н.Я., Граев М.И. Элементы функционального анализа в задачах. -М.: Просвещение,1978. - 129 с.

13. Погребной В.Д. Теория функций действительной переменной. Сумы: Сумский государственный университет, 2012. - 239 с.

14. Семенко Е.В., Пугач А.Ю. Теория функций действительной переменной. Мера и интеграл.- Новосибирск.: Изд. Нгпу, 2012. -126 с.

15. Сибиряков Г.В., Лазарева Е.Г., Мартынов Ю.А. Мера Лебега-1. Теория и задачи. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 2016. -74 с.

16. Сибиряков Г.В., Лазарева Е.Г., Мартынов Ю.А. Мера Лебега-2. Теория и задачи. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 2016. -90 с.

17. Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. -. - М.: Наука, 1968. - 288 с.

17. Теляковский С.А. Сборник задач по теории функций действительного переменного. -М.: Наука, 1980. - 112 с.

18. Толстов Г.П. Мера и интеграл. М.: Наука, 1976. - 392 с.

19. Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н. и др. Действительный анализ в задачах. -М.: Физматлит, 2005. -416 с.

20. Шаталова Н.П. Теория функций действительного переменного.-Красноярск : Научно-инновационный центр, 2010. -208 с.

21. Шерстнев А.Н. Конспект лекций по математическому анализу. Изд. 3-е, доп. — Казанское математическое общество. — Казань: Унипресс, 1998. — 491 с.

II hissəyə aid

1. Балк М.Б., Петров В.А., Полухин А.А. Задачник-практикум по теории аналитических функций.- М.: Просвещение, 1976. - 137 с.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. -М.: Наука, 1991. -448 с
3. Евграфов М.А. (ред.). Сборник задач по теории аналитических функций. - М.: Наука, 1972. - 416 с.

4. Жулёва Л.Д., Шевелёва В.Н., Дементьев Ю.И., Шуринов Ю.А. Сборник задач по высшей математике, часть 3. Ряды. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. -М.: РИО МГТУ ГА, 2000. -172 с 5. Краснов М.И., Киселев А.И.,

Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями. -М.: УРСС, 2003.-208 с.

6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.- М.: Наука, 1973. -749 с.

7. Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С. Задачи по теории функций комплексного переменного с решениями. -М.: Мир, 2005. -360 с

8. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс. -М.: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.

9. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций.-М.: Просвещение, 1977.-320 с.

10. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1984. -432 с.

11.Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: Наука, 1974. -319 с.

12. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. -М.: Наука, 1989. -480 с.

13. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1, 2. -М.: Наука, 1985. -577 с.

Nəşriyyatın direktoru:
Əlirza SAYILOV

ELŞAD HƏTƏM OĞLU EYVAZOV

"RİYAZİ ANALİZ-3. HƏQİQİ VƏ KOMPLEKS DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR NƏZƏRİYYƏSİ. MÜHAZİRƏLƏR VƏ ÇALIŞMALAR."
Bakı, "Araz" nəşriyyatı - 2018

Korrektor: Qədirova Sürəyya
Dizayner: Murad Hacıbabayev

Yığılmağa verilmişdir 20. 07. 2018
Çapa imzalanmışdır 30. 08. 2018
Kağız formatı 60x90 1/16
Şərti çap vərəqi 24
Uçot nəşr vərəqi 23,5
Sifariş 08
Sayı 500
Müqavilə qiymətin ilə

"Araz" nəşriyyatında çap olunmuşdur.