M.M.Sadıqov

ÖLÇÜ NƏZƏRİYYƏSİ VƏ LEBEQ İNTEQRALI

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= (R)\int_a^b f(x)\,dx \ ?$$

GƏNCƏ 2006

I FƏSİL

ÇOXLUĞUN LEBEQ ÖLÇÜSÜ

§ 1. Çoxluqlar haqqında qısa məlumatlar

«Çoxluqlar nəzəriyyəsi» həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin əsasını təşkil edir. Bu nəzəriyyənin əsası (özülü) XIX əsrin ikinci yarısında alman riyaziyyatçısı Q.Kantor (1845-1918) tərəfindən qoyulmuşdur.

Çoxluq anlayışı riyaziyyatın ilk və ümumi anlayışlarından biri olduğuna görə çoxluğa dəqiq tərif verilmir, bu anlayış təsvir edilir, ona aid yalnız misallar göstərilir. Çoxluq sözü əvəzinə bəzən sinif, sistem, yığım, külli, ailə və. s. sözləri də işlədilir. Riyaziyyatda çoxluq anlayışı sonlu və ya sonsuz sayda eyni təbiətli obyektlərin birləşməsi (küllisi) kimi başa düşülür.

Çoxluğu təşkil edən ünsürlərə çoxluğun elementləri deyilir. Əgər çoxluğun elementləri məlumdursa, onda çoxluq verilmiş hesab olunur.

Adətən, çoxluqlar böyük latın hərflərləri – A, B, C, D,…,X, Y,….ilə, onları təşkil edən elementlər isə kiçik hərflərlə - a, b, c, d,…,x, y,… ilə işarə edilir.

A çoxluğunun a, b, c, d,… və s. elementlərdən düzəldilməsi $A=\{a,b,c,.....\}$ şəklində, A çoxluğunun a elementlərindən təşkil edilməsi, ya da bir a elementindən ibarət olması $A=\{a\}$ şəklində yazılır.

$A=[x/;...]$yazılışı ilə mötərizə daxilindəki şaquli xəttin sağ tərəfində göstərilən xassəni ödəyən bütün x elementləri çoxluğu işarə edilir. Məsələn,

$$(-1,1)=\{x/;-1<x<1\}.$$

Heç bir elementi olmayan çoxluğa boş çoxluq deyilir, $\varnothing$ və ya 0, yaxud da Λ simvolları ilə işarə edilir. Məsələn, $x^2+1=0$ tənliyinin həqiqi köklər çoxluğu boş çoxluqdur.

Yalnız bir elementdən düzələn çoxluğa birelementli çoxluq deyilir

İstənilən çoxluğun elementləri sayı hər hansı natural ədədlə ifadə edilə bilərsə, həmin çoxluğa sonlu çoxluq, sonlu olmayan çoxluğa isə sonsuz çoxluq deyilir. Məsələn, $A=\{a,b,c,d\}$-sonlu, $N=\{1,2,3,4,.....\}$ müsbət tam ədədlər, yəni təbii (natural) ədədlər çoxluğu isə sonsuz çoxluqdur.

$\in$, $\ni$, $\subset$, $\supset$ daxil olma, $\notin$, $\overline{\in}$, $\overline{\subset}$, $\not\supset$ daxil olmamaq işarələridir.

Əgər a, A çoxluğunun elementidirsə, yəni a elementi A çoxluğuna daxildirsə $a\in A$ şəklində, daxil olmaması isə $a \,\overline{\in}\, A$ və ya $a\notin A$ şəklində yazılır.

Əgər A çoxluğunun bütün elementləri eyni zamanda B çoxluğunun da elementləridirsə, onda A çoxluğuna B çoxluğunun hissəsi və ya altçoxluğu deyilir; $A\subset B$ şəklində, bundan əlavə A və B çoxluqları üst-üstə düşərsə, $A\subseteq B$ və ya $B\supseteq A$ şəklində yazılır.

Aydındır ki, bu tərifə görə bütün çoxluqlar özü-özünün hissəsidir (altçoxluğudur): $A\subseteq A$. Əgər A çoxluğunun bütün elementləri B çoxluğunun da elementləridirsə, yəni $A\subset B$-dirsə və tərsinə, B çoxluğunun bütün elementləri A çoxluğunun da elementləridirsə, yəni $B\subset A$-dırsa, onda A və B çoxluqlarına bərabər çoxluqlar deyilir və $A=B$ şəklində yazılır, ya da deyirlər ki, A və B çoxluqları üst-üstə düşür.

Qısaca olaraq, A və B eyni elementlərdən düzəldilmiş çoxluqlar olduqda $A=B$ olur.

Məsələn, $A=\{-1,1\}$-dirsə, B isə $x^2-1=0$ tənliyinin köklərindən düzəldilmiş çoxluqdursa, onda $A=B$-dir.

Əgər $A\subset B$-dirsə və A çoxluğu B çoxluğu ilə üst-üstə düşmürsə, yəni $A\neq B$-dirsə, onda A çoxluğuna B çoxluğunun düzgün hissəsi və məxsusi altçoxluğu deyilir. Məsələn,

$\{2,4,6,\ldots\}$ cüt ədədlər çoxluğu $N=\{1,2,\ldots\}$ bütün natural ədədlər çoxluğunun məxsusi altçoxluğudur.

İstənilən B çoxluğu üçün $B\subseteq B$, $\varnothing\subset B$ doğrudur. Bu halda B və $\varnothing$ çoxluqlarına B çoxluğunun qeyri-məxsusi altçoxluğu və ya qeyri-məxsusi hissəsi deyilir. Məsələn, $\varnothing$ boş çoxluq B müsbət ədədlər çoxluğunun qeyri-məxsusi altçoxluğudur, $\varnothing\subset B$.

Onu da qeyd edək ki, «var», «tapılır», «olur», sözləri $\exists$ simvolu ilə, «istənilən», «hər bir», «ixtiyari» sözləri $\forall$ simvolu ilə, «alınır», «çıxır» sözləri $\Rightarrow$ simvolu ilə, «bir güclü» sözü $\Leftrightarrow$ simvolu ilə işarə edilir. $\exists x$ yazılışı «x var», $\forall x$ yazılışı «istənilən x», «istənilən x üçün», «bütün x» şəklində oxunur.

İndi isə çoxluqlar üzərində əməllər haqqında məlumat verək.

Tərif 1.1.1. Elementlərinin hər biri heç olmazsa, A və ya B çoxluqlarından birinə daxil olan C çoxluğuna A və B çoxluqlarının birləşməsi və ya cəmi deyilir,

$$C=A\cup B \quad \text{və ya} \quad C=A+B$$

şəklində yazılır; hesabi sayda çoxluqlar üçün isə

$$C=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k \quad \text{və ya} \quad C=\sum_{k=1}^{\infty}A_k$$

şəklində yazılır.

Toplanan çoxluqlarda iştirak edən elementlər cəmə bir dəfə daxil olur.

Məsələn, $A=\{6,7,8,\ldots\}$, $B=\{3,6,9,\ldots\}$-dirsə, onda

$$C=A\cup B=\{3,6,7,8,9,\ldots\}.$$

Tərifə əsasən $A\cup A=A$, $A\subset B$ olduqda $A\cup B=B$ olur.

Tərif 1.1.2. Eyni zamanda A, həm də B çoxluğunda yerləşən, yəni A və B çoxluqlarının ortaq elementlərindən düzəldilmiş D çoxluğuna A və B çoxluqlarının kəsişməsi (ortaq hissəsi) və ya hasili deyilir,

$$D=A\cap B \quad \text{və ya} \quad D=A\cdot B$$

şəklində yazılır; hesabi sayda çoxluqlar üçün isə

$$D=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k \quad \text{və ya} \quad D=\prod_{k=1}^{\infty}A_k$$

şəklində yazılır.

Tərifdən aydındır ki, $A\cap A=A$ və $A\subset B$ olduqda $A\cap B=A$ olur.

Tərif 1.1.3. A çoxluğunun B çoxluğuna daxil olmayan bütün elementlərindən düzəldilmiş və özündə heç bir başqa elementlər saxlamayan E çoxluğuna A və B çoxluqlarının fərqi deyilir, $E=A–B$, ya da $E=A\backslash B$ ilə işarə olunur. $A\subseteq B$ olduqda birinci işarədən, qalan hallarda isə ikinci işarədən istifadə olunur. Aydındır ki, $A–A=0$ və əgər $A–B=E$-dirsə, onda $A=B\cup$E olur. Axırıncı çevirmə $A\backslash B$ olduqda tətbiq edilmir.

Məsələn, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6\}$, $E=\{1,2,3\}$.

$A\backslash B=A–A\cap B$ bərabərliyi doğrudur.

$A\backslash B$ və $B\backslash A$ çoxluqlarının birləşməsinə A və B çoxluqlarının simmetrik fərqi deyilir və $A\Delta B$ kimi işarə olunur. Deməli, $A\Delta B=(A\backslash B)\bigcup(B\backslash A)$.

Tərif 1.1.4. Tutaq ki, A hər hansı çoxluq, $B\subset A$-dır. Onda $A\backslash B$ çoxluğuna, A çoxluğuna nəzərən B çoxluğunun tamamlayıcı çoxluğu deyilir, $C_AB=A\backslash B$ şəklində yazılır. Aydındır ki, $A\backslash B$ çoxluğunun tamamlayıcı çoxluğu B çoxluğunun özüdür. Xüsusi halda $A=[a,b]$ olarsa, onda $CB=[a,b]\backslash B$ olar.

Çoxluqların birləşməsinin və kəsişməsinin təriflərindən aydındır ki, birləşmə və kəsişmə əməliyyatları komutativlik və assosiativlik, həm də çoxluqların kəsişməsi toplama və çıxmaya nəzərən distributivlik xassələrinə malikdirlər.

Çoxluqların fərqi üçün ümumiyyətlə, assosiativlik qanunu doğru olmur, belə ki, ümumi halda

$$(A\backslash B)\cup B\neq A.$$

Məsələn, $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$-dirsə, onda $A\backslash B=\{1,2\}$, lakin $(A\backslash B)\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}\neq A$.
Ancaq $B\subset A$ olarsa, onda asanlıqla yoxlamaq olar ki, $(A\backslash B)\cup B=A$ və tərsinə, bu bərabərlik ödənərsə, onda $B\subset A$.

Onu da qeyd edək ki, G hər hansı α indekslər çoxluğu, $\alpha\in G$ olduqda $\{A_\alpha\}$ çoxluqlar ailəsi olduğu halda bütün A_α çoxluqlarının birləşməsi $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ simvolu ilə, kəsişməsi isə $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ simvolu ilə işarə edilir.

İkilik prinsipi adlanan

$$\bigcup_\alpha CA_\alpha = C\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right);\ \bigcap_\alpha CA_\alpha = C\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)$$

bərabərliklərindən geniş istifadə olunur. Burada $\{A_\alpha\}$ çoxluqlar sistemidir, $A_\alpha\subset\Omega$, tamamlayıcılar Ω çoxluğuna qədər götürülür.

Tərif 1.1.5. Əgər hər hansı qanunla (qayda ilə) hər bir $a\in A$ elementinə yalnız və yalnız bir $b\in B$ elementini qarşı qoymaq mümkündürsə və eyni zamanda həmin qanunla (qayda ilə) hər bir $b\in B$ elementinə yalnız və yalnız bir $a\in A$ elementi qarşı qoyularsa, onda deyirlər ki, A və B çoxluqlarının elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradılmışdır. A və B çoxluqlarının elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradılmışdırsa, onda onlara ekvivalent çoxluqlar deyilir və $A\backsim B$ şəklində yazılır. İki sonlu A və B çoxluqları ancaq və ancaq elementlərin sayı eyni olduqda ekvivalent olur.

Tərif 1.1.6. Natural ədədlər çoxluğuna ekvivalent olan çoxluqlara hesabi çoxluqlar, $[0,1]$ seqmentində yerləşən həqiqi ədədlər çoxluğuna və ya ona ekvivalent olan çoxluqlara isə qeyri-hesabi çoxluqlar, ya da kontinium güclü çoxluqlar deyilir.

Məsələn, $[0,1]$ seqmentinin rasional nöqtələr çoxluğu hesabi, irrasional nöqtələr çoxluğu isə qeyri-hesabi çoxluqdur. Deməli, $[0,1]$ seqmentinin həqiqi ədədlər çoxluğu hesabi ola bilməz, kontinium güclü çoxluqdur. Hesabi çoxluğun gücü N_0 ilə işarə edilir («alef-sıfır» oxunur), kontinium güclü çoxluğun gücü isə C və ya N («alef» oxunur) ilə işarə edilir.

Cəmin gücü aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən sonlu çoxluqların birləşməsi hesabi çoxluqdur;

b) sonlu və ya hesabi sayda hesabi çoxluqların birləşməsi hesabi çoxluqdur;

c) sonlu və ya hesabi sayda kontinium güclü çoxluqların birləşməsi kontinium güclü çoxluqdur.

İndi xətti nöqtəvi çoxluqlar nəzəriyyəsinin sonralar istifadə ediləcək bir sıra əsas anlayışlarını yada salaq.

Xətti nöqtəvi çoxluqlar dedikdə elementləri düz xəttin və ya dəqiq desək, ədəd oxunun nöqtələr çoxluğu nəzərdə tutulur. Xətti nöqtəvi çoxluğa ən sadə misal interval və seqmentdir.

Tərif 1.1.7. Verilmiş həqiqi x ədədini (nöqtəsini) daxilində saxlayan istənilən (α,β) intervalına həmin ədədin (nöqtənin) ətrafı deyilir, $\alpha< x<\beta$ şərti ödənir.

Buna uyğun olaraq, hər hansı a həqiqi ədədi və $\forall\varepsilon>0$ ədədi üçün bütün x həqiqi ədədlər çoxluğu

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon \text{ və ya } -\varepsilon<x-a<\varepsilon \text{ ya da } |x-a|<\varepsilon$$

şərtini ödəyərsə, onda $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervalına a nöqtəsinin «ε-ətrafı» deyilir, a nöqtəsi ətrafın mərkəzi, ε isə radiusu adlanır.

Bu ətraf $O(a, \varepsilon)$, $U(a, \varepsilon)$ və s. ilə işarə edilir.

Əgər a, n-ölçülü fəzanın nöqtəsini göstərərsə, yəni koordinatları $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ olarsa, onda, $U(a,\varepsilon)$ ətrafı n ölçülü $(a_k-\varepsilon, a_k+\varepsilon)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ intervalları kimi başa düşülür.

Tərif 1.1.8. Əgər verilən çoxluğun bütün nöqtələrini daxilində saxlayan n-ölçülü seqment varsa, onda həmin çoxluğa n ölçülü fəzanın məhdud çoxluğu deyilir. n=1 olduqda məhdud xətti nöqtəvi çoxluq alınır.

Tərif 1.1.9. a nöqtəsinin istənilən ətrafında X çoxluğunun a-dan fərqli sonsuz sayda nöqtələri iştirak edərsə, onda a-ya X çoxluğunun limit nöqtəsi deyilir.

Tərif 1.1.9'. a nöqtəsinin hər hansı ətrafında X çoxluğunun a-dan fərqli heç olmazsa, bir nöqtəsi iştirak edərsə, onda a-ya X çoxluğunun limit nöqtəsi deyilir.

Bu təriflər ekvivalentdirlər. $a \in X$, $a \notin X$ ola bilər. Əgər $a \in X$ nöqtəsi, X çoxluğunun limit nöqtəsi deyildirsə, onda a-ya X-in izolə edilmiş nöqtəsi deyilir, başqa sözlə, a-nın hər hansı (a-ε, a+ε) ətrafında X-in a-dan fərqli heç bir nöqtəsi yoxdursa, onda a-ya X çoxluğunun izolə edilmiş nöqtəsi deyilir.

Sonlu çoxluğun, tam ədədlər çoxluğunun limit nöqtəsi yoxdur.

Bu çoxluqların hər bir nöqtəsi onun izolə edilmiş nöqtəsidir. Hər bir həqiqi a ədədi (nöqtəsi) Q-rasional ədədlər çoxluğunun limit nöqtəsidir, çünki, a nöqtəsinin istənilən ətrafında sonsuz sayda rasional nöqtələr çoxluğu yerləşir.

Təriflər. E nöqtələr çoxluğu olsun.

1. E çoxluğunun bütün limit nöqtələrindən düzəldilmiş çoxluğa E-nin törəmə çoxluğu deyilir və E' ilə işarə olunur.

2. Bütün limit nöqtələri özünə daxil olan çoxluqlara və ya daha dəqiq desək, çoxluğun özünə daxil olmayan limit nöqtələri yoxdursa, belə çoxluqlara qapalı çoxluq deyilir.

Başqa sözlə, $E' \subseteq E$-dirsə, onda E-yə qapalı çoxluq deyilir, xüsusi halda E' boş çoxluq da ola bilər.

3. Əgər $E \subset E'$-dirsə, yəni E çoxluğunun bütün nöqtələri limit nöqtələridirsə, onda E çoxluğuna özündə sıx çoxluq

deyilir. Başqa sözlə, E çoxluğunun heç bir izolə edilmiş nöqtəsi yoxdursa, onda E-yə özündə sıx çoxluq deyilir.

4. Törəmə çoxluğu ilə üst-üstə düşən çoxluğa mükəmməl çoxluq deyilir, yəni $E=E'$ olarsa, onda E-yə mükəmməl çoxluq deyilir. Başqa sözlə, E çoxluğu eyni zamanda həm qapalı, həm də özündə sıx çoxluqdursa, onda E-yə mükəmməl çoxluq deyilir.

5. E çoxluğu və onun E' törəmə çoxluğunun birləşməsinə E-nin qapanma çoxluğu deyilir və $\overline{E}$ ilə işarə olunur, yəni

$$\overline{E} = E \cup E'$$

olur.

6. Əgər a nöqtəsi özünün hər hansı ətrafı ilə birlikdə E çoxluğuna daxil olarsa, onda a-ya E-nin daxili nöqtəsi deyilir.

7. Yalnız daxili nöqtələrdən düzəldilmiş çoxluğa açıq çoxluq, yalnız izolə edilmiş nöqtələrdən düzəlmiş çoxluğa isə izolə edilmiş çoxluq deyilir.

Misallar:

1. $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}, E' = \{0\}; E$ çoxluğu qapalı deyil, həm də özündə sıx çoxluq deyil.

2. $E=[a,b]$, $E'=[a,b]$; E çoxluğu mükəmməl çoxluqdur.

3. $E=(a,b)$, $E'=[a,b]$; E çoxluğu özündə sıxdır, lakin qapalı deyil.

4. $E=Z$, $E'=Z$, yəni bütün həqiqi ədədlər çoxluğu mükəmməl çoxluqdur.

5. $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, 0\right\}, E' = \{0\}; E$ -çoxluğu qapalıdır, lakin özündə sıx deyildir.

6. $E=R$ (bütün rasional ədədlər çoxluğu), $E'=Z$; E çoxluğu özündə sıx çoxluqdur, lakin qapalı deyil.

7. $E=\varnothing$, $E'=\varnothing$, yəni boş çoxluq mükəmməldir.

8. E-sonlu çoxluq, $E'=\varnothing$, yəni sonlu çoxluq qapalıdır, lakin özündə sıx deyildir.

9. Tam ədədlər çoxluğu və natural ədədlər çoxluğu-izolə edilmiş çoxluqlardır.

10. İstənilən (a,b) intervalı açıq çoxluqdur. Boş çoxluq və bütün həqiqi ədədlər çoxluğu həm açıq, həm də qapalı çoxluqlardır.

Aşağıdakı faktları da qeyd edək.

İstənilən E çoxluğunun E' törəmə çoxluğu və $\bar{E}$ qapanma çoxluğu qapalıdır.

Tutaq ki, elə $b(a)$ nöqtəsi var ki, xətti nöqtəvi X çoxluğunun bütün $x\in X$ nöqtələri (elementləri) $x\le b$ $(x\ge a)$ bərabərsizliyini ödəyir, onda X çoxluğuna yuxarıdan (uyğun olaraq aşağıdan) məhdud çoxluq deyilir. X çoxluğu həm yuxarıdan, həm də aşağıdan məhdud olarsa, ona məhdud çoxluq deyilir; bu halda $x\in X$, b və a nöqtələri üçün $a\le x\le b$ olur.

Əgər X çoxluğunun M $(M\le b)$ nöqtəsindən (ədədindən) sağda heç bir nöqtəsi yoxdursa və $\forall\varepsilon>0$ üçün X çoxluğunun $x>M-\varepsilon$ şərtini ödəyən heç olmazsa, bir x nöqtəsi varsa, onda M nöqtəsinə (ədədinə) X çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhədi deyilir və $M=\sup X$ ilə işarə edilir. Əgər X çoxluğunun m $(m\ge a)$ nöqtəsindən (ədədindən) solda heç bir nöqtəsi yoxdursa və $\forall\varepsilon>a$ üçün X çoxluğunun $x<m+\varepsilon$ şərtini ödəyən heç olmazsa, bir x nöqtəsi varsa, onda m nöqtəsinə (ədədinə) X çoxluğunun dəqiq aşağı sərhədi deyilir, $m=\inf X$ ilə işarə edilir.

Çoxluğun dəqiq yuxarı və dəqiq aşağı sərhədləri çoxluğa daxil ola da bilər, olmaya da bilər.

Əgər çoxlq yuxarıdan (aşağıdan) məhduddursa, onda onun dəqiq yuxarı (dəqiq aşağı) sərhədi var.

Məhdud xətti nöqtəvi çoxluğun həmişə dəqiq yuxarı və dəqiq aşağı sərhədləri var.

E çoxluğu məhduddursa, onda E çoxluğunu daxilinə alan ən kiçik seqment var. Məsələn: m=inf$E$, M=sup$E$ olduqda, $E\subset[m,M]$.

F çoxluğu qapalıdırsa, onun C_sF tamamlayıcı çoxluğu açıq, G çoxluğu açıqdırsa, onun C_sG tamamlayıcı çoxluğu qapalı çoxluqdur.

Tutaq ki, F qapalı çoxluqdur, $[a,b]$ seqmenti bu çoxluğu daxilinə alan ən kiçik seqmentdir: a=inf$F$, b=sup$F$.

Onda $CF=[a,b]\backslash F$ açıq çoxluq olur.

F qapalı və məhdud çoxluq olduqda inf$F\in F$ və sup$F\in F$ olur.

Açıq və qapalı çoxluqların aşağıdakı xassələrini də qeyd edək:

a) sonlu və ya hesabi sayda açıq çoxluqların birləşməsi açıq çoxluqdur;

b) sonlu sayda açıq çoxluqların kəsişməsi açıq çoxluqdur;

c) sonlu və ya hesabi sayda qapalı çoxluqların kəsişməsi qapalı çoxluqdur;

ç) sonlu sayda qapalı çoxluqların birləşməsi qapalı çoxluqdur.

d) hər bir G açıq çoxluğu sonlu və ya hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən intervalların birləşməsindən ibarətdir, yəni

$$G=\bigcup_k (a_k,b_k);$$

bu intervallar G çoxluğunun təşkiledici intervalları adlanır, burada

$$(a_k, b_k)\subset G,\ a_k\notin G,\ b_k\notin G\ \ (k=1,2,\ldots);$$

ə) hər bir məhdud qapalı F çoxluğu ya seqmentdir və ya müəyyən bir seqmentdən sonlu və ya hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən intervalları kənar etməklə alınır, yəni

$$F=[a,b]\backslash\bigcup_k (a_k,b_k);$$

bu intervallar qapalı F çoxluğunun qonşu və ya tamamlayıcı intervalları adlanır, $C_{[a,b]}F$ çoxluğunun təşkiledici intervallarından və iki sonsuz ($-\infty$, a) və (b, $+\infty$) intervallarından ibarətdir, $[a,b]$ isə F-i daxilində saxlayan ən kiçik seqmentdir.

Heç bir seqmentdə sıx olmayan E çoxluğuna heç yerdə sıx olmayan çoxluq deyilir. Başqa sözlə, hər bir $[a,b]$ seqmentində olan E-nin heç bir elementini saxlamayan elə bir $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ seqmenti varsa, onda E çoxluğuna $[a,b]$ seqmentində heç yerdə sıx olmayan çoxluq deyilir.

Heç yerdə sıx olmayan çoxluğa Kantorun P_0 mükəmməl çoxluğunu misal göstərmək olar. Bu çoxluğu qurmaq üçün $E=[0,1]$ seqmentini $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},1\right]$ şəklində üç bərabər hissəyə bölək və ortada yerləşən $\delta_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ intervalını kənar edək; qalan $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ və $\left[\frac{2}{3},1\right]$ seqmentlərini yenidən üç bərabər hissəyə bölək və alınan $\left[0,\frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]$ və $\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9},1\right]$ seqmentlərindən ortada yerləşən $\delta_2=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ və $\delta_3=\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ intervallarını ataq. Qalan dörd

$$\left[0,\frac{1}{9}\right],\ \left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right] \text{ və } \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right],\ \left[\frac{8}{9},1\right]$$

seqmentlərini yenidən üç bərabər hissəyə bölək və ortada yerləşən intervalları ataq və. s

Prosesi bu qayda ilə sonsuz davam etdirərək, alınan

$$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\ \left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right),\ \left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)\dots$$

intervallarının birləşməsini G_0 ilə işarə edək.

G_0-hesabi sayda açıq çoxluqların birləşməsindən ibarət olduğundan açıq çoxluq olur. $[0,1]$ seqmentində G_0

çoxluğunu atdıqdan sonra alınan çoxluğu $P_0=[0,1]\backslash G_0$ ilə işarə edək.

Aydındır ki, P_0 çoxluğu qapalıdır və $P_0=P_0'$ şərtini ödəyir. Deməli, P_0 mükəmməl çoxluqdur. Bu çoxluğun kontinium güclü olduğunu göstərək. Birinci bölgüdə atılan $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ intervalında olan ədədlərin $\alpha=0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots(\alpha_k=0,1,2)$ üçlük kəsr şəklində göstərilişində $\alpha_1=1$ olur, çünki, bu intervalın uclarının

$$\frac{1}{3}=\begin{cases}0{,}1000...\\0{,}0222...\end{cases};\qquad \frac{2}{3}=\begin{cases}0{,}1222...\\0{,}222....\end{cases}$$

şəklində iki göstərilişi olur. Bu intervalın $\frac{1}{3}$ uc nöqtəsini $\frac{1}{3}=0{,}0222\ldots$ şəklində götürək. İkinci dəfə atılan $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ və $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ intervallarındakı ədədlərin $\beta=0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ üçlük kəsr şəklində yazılışında $\beta_2=1$ olur. $\frac{1}{9}=0{,}00222\ldots$ kimi götürülür. Üçüncü dəfə atılan intervallardakı ədədlərin üçlük kəsr şəklində yazılışında $\gamma_3=1$ olur və. s.

Onda P_0 çoxluğunda olan ədədləri üçlük $a=0,a_1a_2a_3\ldots$ kəsr şəklində yazsaq, a_k ədədi ya 0 və ya 2 olar. Deməli,

$$P_0=\{0,a_1a_2a_3\ldots\}\ ,\ a_k=\begin{cases}0,\\2.\end{cases}$$

Bu ədədlər çoxlğu $[0,1]$ seqmentinə ekvivalent olur.

Bu faktı isbat etmək üçün $[0,1]$ seqmentində olan həqiqi ədədlərin ikilik kəsr şəklində göstərilişdən istifadə edək. $a\in[0,1]$ ədədini $a=0,a_1a_2a_3\ldots$ ikilik kəsr şəklində yazsaq, a_k ədədləri 0 və ya 1 qiymətlərindən birini alır. $\alpha\in P_0$

ədədi $\alpha=0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ üçlük kəsr şəklində göstərilir; burada α_k ədədləri 0 və ya 2 qiymətlərindən birini alır. $a_k=0$ olduqda $\alpha_k=0$ və $a_k=1$ olduqda $\alpha_k=2$ götürək. Onda a ədədinə α ədədi və tərsinə qarşı qoyular. Bu isə onu göstərir ki, $[0,1]$ seqmenti ilə P_0 çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaranır. Deməli, P_0 kontinium güclü çoxluqdur.

Aşağıdakı tərif və teorem də həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin bir çox sahələrində mühüm rol oynayır.

Tərif 1.1.10. Tutaq ki, hər hansı məhdud E nöqtələr çoxluğu və bu çoxluğu daxilində saxlayan G açıq çoxluğu verilmişdir. Bu halda deyirlər ki, E çoxluğu açıq G çoxluğu ilə örtülmüşdür, G-yə isə E çoxluğunun örtüyü (örtəni) və ya açıq örtüyü (açıq örtəni) deyilir. Onda G çoxluğunun təşkiledici $\{\delta_k\}$ ($k=1,2,\ldots$) intervallar sistemi E çoxluğunu örtür.

Bu tərif ümumi şəkildə aşağıdakı kimi də verilir.

Tərif 1.1.10'. Tutaq ki, E nöqtələr çoxluğu və hər hansı W intervallar sistemi verildikdə, hər bir $x\in E$ nöqtəsi üçün elə $\delta\subset W$ intervalı var ki, $x\in\delta$ olur, onda deyirlər ki, E çoxluğu W intervallar sistemi ilə örtülmüşdür.

Teorem (E.Heyne – E.Borel)[1]. Əgər qapalı məhdud F çoxluğu sonsuz W intervallar sistemi ilə örtülmüşdürsə, onda W sistemindən yenə də E çoxluğunu örtən sonlu W^* intervallar sistemi ayırmaq olar.

§ 2. Məhdud açıq və məhdud qapalı çoxluğun ölçüsü

Həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsində uzunluq, sahə, həcm və. s. anlayışların ümumiləşməsi olan nöqtələr çoxluğunun ölçüsü anlayışı böyük rol oynayır. Burada XX

[1] E.Heyne (1821 - 1881) alman riyaziyyatçısıdır.
E.Borel (1871 - 1956) fransız riyaziyyatçısıdır.

əsrin başlanğıcında A.Lebeq** tərəfindən elmə daxil edilən, ancaq xətti məhdud nöqtələr çoxluğunun ölçüsünə baxılacaqdır.

1. Ən sadə açıq çoxluq $G=(a,b)$ intervalıdır, (a,b) ntervalının $(b-a)$ uzunluğuna onun ölçüsü deyilir və

$$mG=m(a,b)=b-a$$

kimi işarə olunur.

Tərif 1.2.1. Tutaq ki, G boş olmayan məhdud açıq çoxluqdur və o, sonlu və hesabi sayda $\delta_k=(a_k,b_k)$, $(k=1,2,\ldots)$ təşkiledici intervallarının birləşməsi kimi təyin olunur: $G=\bigcup_k \delta_k$.

Onda G çoxluğunun təşkiledici intervallarının uzunluqları cəminə G çoxluğunun ölçüsü deyilir, mG ilə işarə edilir:

$$mG=\sum_k m\delta_k \ .$$

Misal üçün Kantorun G_0 çoxluğu hesabi sayda

$$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right),\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right),\ldots$$

intervallarının birləşməsindən ibarət olduğundan, onun ölçüsü

$$mG_0=\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{27}+\cdots=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{2^3}{3^4}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\right],$$

sonsuz azalan həndəsi sıranın hədlər cəmi düsturuna əsasən

$$mG_0=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

**Anri Lebeq (1875 - 1941) fransız riyaziyyatçısıdır.

Teorem 1.2.1. İki məhdud açıq G_1 və G_2 çoxluqları üçün $G_1 \subset G_2$ olarsa, onda

$$m\,G_1 \leq m\,G_2 \,.$$

İsbatı. δ_i (i=1,2,…) və Δ_k (k=1,2,…) uyğun olaraq G_1 və G_2 çoxluqlarının təşkiledici intervalları olsun:

$$G_1 = \bigcup_i \delta_i \quad , \quad G_2 = \bigcup_k \Delta_k \ .$$

$G_1 \subset G_2$ olduğundan $\forall x \in G_1$ olduqda $x \in G_2$, yəni

$$\forall x \in \bigcup_i \delta_i$$

olduqda

$$\forall x \in \bigcup_k \Delta_k$$

olur. Bu isə o deməkdir ki, $\forall x \in \delta_i$ olduqda $x \in \Delta_k$ olur, yəni $\delta_i \subset \Delta_k$ olur. Deməli, G_1 çoxluğunun hər bir təşkiledici intervalı tamamilə G_2 çoxluğunun hər hansı təşkiledici intervalından birində (yalnız birində) yerləşir.

Başqa şəkildə desək, G_2 çoxluğunu örtən bütün intervallar sistemi eyni zamanda G_1 çoxluğunun da örtəni olur.

Buradan teoremin isbatı asanlıqla alınır.

Teorem 1.2.2. Tutaq ki, məhdud açıq G çoxluğu sonlu və ya hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən açıq G_k çoxluqlarının birləşməsindən ibarətdir:

$$G = \bigcup_k G_k \quad (G_k \cap G_l = \varnothing \ , \ k = l).$$

Onda

$$mG = \sum_k mG_k \, .$$

Bu ölçünün tam additivlik xassəsi adlanır.

İsbatı. Tutaq ki, $\delta_i^{(k)}$ $(k = 1,2,...)$ intervalları G_k çoxluğunun təşkiledici intervallarıdır. Aydındır ki, $\delta_i^{(k)} \subset G$-dir, həm də bu intervallar G çoxluğu üçün də təşkiledici intervallar olur. Onda açıq çoxluğun ölçüsünün tərifinə əsasən

$$mG=\sum_{i,k} m\delta_i^{(k)}=\sum_k\left(\sum_i m\delta_i^{(k)}\right)=\sum_k mG_k$$

olur ki, bununla da teorem isbat edilir.

Kəsişən toplananların cəmi halında teorem aşağıdakı kimi ifadə olunur:

Teorem 1.2.3. Tutaq ki, məhdud açıq G çoxlğu sonlu və ya hesabi sayda açıq G_k çoxluqlarının birləşməsindən ibarətdir:

$$G=\bigcup_k G_k .$$

Onda

$$mG\le\sum_k mG_k .$$

2. $S=[a,b]$ seqmenti qapalı çoxluqdur. Bu seqmentin $b–a$ uzunluğuna onun ölçüsü deyilir və

$$mS=m(a,b)=b–a$$

şəklində yazılır.

Tutaq ki, F boş olmayan məhdud qapalı çoxluq və $S=[a,b]$ isə bu çoxluğu daxilində saxlayan ən kiçik seqmentdir. Məlumdur ki,

$$C_SF=S \setminus F = [a,b] \setminus F$$

məhdud açıq çoxluq olur.

Tərif 1.2.2. Boş olmayan məhdud qapalı F çoxluğunun ölçüsü

$$mF=(b–a) – m[C_SF]$$

ədədinə deyilir.

Misal olaraq Kantorun mükəmməl P_0 çoxluğunun ölçüsünü tapaq. Bu zaman

$F=P_0$, $S=[0,1]$ və $C_0=G$ olur. Onda

$$mP_0=m[0,1] – mG_0 = 1 – 1=0,$$

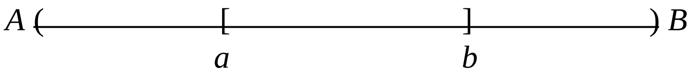
yəni gücü kontinium olan P_0 mükəmməl Kantor çoxluğunun ölçüsü sıfra bərabər olur.

Lemma 1.2.1. Tutaq ki, məhdud qapalı F çoxluğu $\Delta=(A,B)$ intervalında yerləşir, yəni $F\subset\Delta$ olur. Onda

$$mF=m\Delta - m[C_\Delta F].$$

İsbatı. Aydındır ki, $\Delta=(A,B)$ olduqda $C_\Delta F=\Delta\backslash F$ açıq çoxluqdur. $\Delta=(A,B)$ intervalında yerləşən, F çoxluğunu özündə saxlayan ən kiçik seqmenti $S=[a,b]$ ilə işarə edək.

Onda $C_S F=[a,b]\backslash F$ açıq çoxluq olur.



Aydındır ki, $C_\Delta F=C_\Delta S\cup C_S F$ bərabərliyi doğrudur, $C_\Delta S$ və $C_S F$ açıq çoxluqları kəsişmirlər. Odur ki, teorem 1.2.2-yə əsasən

$$m(C_\Delta F)=m(C_\Delta S) + m(C_S F)$$

olar. Aydındır ki,

$$m(C_\Delta S)=m\Delta - mS \quad ; \quad m(C_S F)=mS - mF$$

olduğundan

$$m(C_\Delta F)=m\Delta - mS + mS - mF,$$

buradan isə

$$mF=m\Delta - m(C_\Delta F)$$

olur. Bununla da lemma 1.2.1 isbat olunur.

Teorem 1.2.4. İki məhdud qapalı F_1 və F_2 çoxluqları üçün $F_1\subset F_2$ olarsa, onda $mF_1\leq mF_2$ olur.

İsbatı. Tutaq ki, Δ intervalı F_2 çoxluğunu öz daxilində saxlayır. Onda asanlıqla yoxlamaq olar ki, $C_\Delta F_1\supset C_\Delta F_2$-dir, buradakı çoxluqlar açıq olduqlarından teorem 1.2.1-ə əsasən $m[C_\Delta F_1]\geq m[C_\Delta F_2]$ olur. Lemma 1.2.1-i bu bərabərsizliyə tətbiq etsək, tələb olunan $mF_1\leq mF_2$ bərabərsizliyini alarıq.

Teorem 1.2.5. Tutaq ki, F qapalı və G məhdud açıq çoxluqları üçün $F \subset G$ olur. Onda

$$mF \leq mG.$$

İsbatı. Δ, G çoxluğunu öz daxilində saxlayan interval olsun. Onda $\Delta = G \cup C_\Delta F$ toplanan çoxluqlar ortaq hissələrə malikdir. Onda teorem 1.2.3-əsasən

$$m\,\Delta \leq mG + m(C_\Delta F)$$

olur. Digər tərəfdən lemma 1.2.1-ə əsasən

$$m\,(C_\Delta F) = m\Delta - mF$$

olduğundan, $mF \leq mG$ olur.

Teorem 1.2.6. Tutaq ki, məhdud qapalı F çoxluğu sonlu sayda cüt-cüt kəsişməyən qapalı F_k çoxluqlarının birləşməsindən ibarətdir:

$$F = \bigcup_{k=1}^{n} F_k \quad (F_k \cap F_i) = \varnothing\ ,\ (k \neq i).$$

Onda

$$mF = \sum_{k=1}^{n} mF_k\,.$$

İsbatı. Teoremi, çoxluqların sayı iki olduğu halda isbat edək, yəni

$$F = F_1 \cup F_2\ ,\ F_1 \cap F_2 = \varnothing$$

olsun.

İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün iki məhdud açıq G_1 və G_2 çoxluqları götürək, belə ki, $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ və

$$mG_1 < mF_1 + \frac{\varepsilon}{2}\ ;\ mG_2 < mF_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

şərtləri ödənsin, onda $G = G_1 \cup G_2$ məhdud açıq çoxluq və $F \subset G$ olur. Deməli,

$$mF \leq mG \leq mG_1 + mG_2 \leq mF_1 + mF_2 + \varepsilon\,, \qquad (1.2.1)$$

ε-nun ixtiyari olmasından (1.2.1) bərabərsizliklərindən

$$mF \leq mF_1 + mF_2 \qquad (1.2.2)$$

bərabərsizliyi alınır.

Tutaq ki, açıq B_1 və B_2 çoxluqları üçün $F_i \subset B_i$ (i=1,2), $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ şərtləri ödənir.

İstənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə məhdud açıq G çoxluğu seçək ki, $F \subset B$ üçün $mG<mF+\varepsilon$ şərti ödənilsin. Onda $B_1 \cap G$ və $B_2 \cap G$ çoxluqları açıq çoxluq olub, kəsişmirlər və aydındır ki,

$$F_1 \subset B_1 \cap G \ , \ F_2 \subset B_2 \cap G$$

olur. Odur ki, teorem 1.2.2.-nin tətbiqi ilə

$$mF_1 + mF_2 \le m(B_1 \cap G) + m(B_2 \cap G) = m[(B_1 \cap G) \cup (B_2 \cap G)]$$

olur. Digər tərəfdən

$$(B_1 \cap G) \cup (B_2 \cap G) \subset G$$

olduğundan

$$mF_1 + mF_2 \le m[(B_1 \cap G) \cup (B_2 \cap G)] \le mG < mF + \varepsilon$$

olur. $\varepsilon>0$ ixtiyari olduğundan

$$mF_1 + mF_2 \le mF \qquad (1.2.3)$$

olur. (1.2.2) və (1.2.3) bərabərsizliklərindən

$$mF = mF_1 + mF_2$$

olması alınır.

§ 3. Məhdud çoxluğun xarici və daxili ölçüsü

Tərif 1.3.1. Məhdud E çoxluğunu örtən G açıq çoxluqlarının ölçülərinin dəqiq aşağı sərhədinə E çoxluğunun xarici ölçüsü deyilir və m^*E ilə işarə olunur:

$$m^*E = \inf_{G \supset E} \{mG\}.$$

Tərif 1.3.2. E çoxluğunu daxilində saxlayan ən kiçik $S=[a,b]$ seqmentinin uzunluğu ilə $CE=[a,b]\backslash E$ tamamlayıcı çoxluğunun m^*CE xarici ölçüsü arasındakı fərqə E çoxluğunun daxili ölçüsü deyilir, m_*E ilə işarə edilir:

$$m_*E = (b-a) - m^*CE.$$

Teorem 1.3.1. İxtiyari məhdud $E(E \subset [a,b])$ çoxluğu üçün

$$0 \le m^* E < +\infty \quad , \quad 0 \le m_* E < +\infty.$$

Teoremin isbatı $mG \geq 0$ və $m^* CE \le b - a$ olmasından alınır.

Teorem 1.3.2. Hər bir məhdud $E(E \subset [a,b])$ çoxluğu üçün

$$m_* E \le m^* E.$$

İsbatı. İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün uyğun olaraq

$$m_* E > mG_1 + \frac{\varepsilon}{2} \ , \ m^* CE > mG_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

şərtlərini ödəyən, $G_1(E \subset G_1)$ və $G_2(CE \subset G_2)$ məhdud açıq çoxluqlarına baxaq.

Aydındır ki,

$$G_1 \cup G_2 \supset [a,b] \text{ və } mG_1 + mG_2 \geq b - a,$$

onda

$$m^* E + m^* CE > mG_1 + mG_2 + \varepsilon \ge b - a + \varepsilon.$$

Buradan alarıq:

$$m^* E > b - a - m^* CE = m_* E + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ ixtiyari olduğundan

$$m^* E \ge m_* E$$

alınır ki, bununla da teorem isbat olunur.

Teorem 1.3.3. Məhdud A və B çoxluqları üçün $A \subset B$-dirsə, onda

$$m_* A \le m_* B \quad , \quad m^* A \le m^* B.$$

İsbatı. Tutaq ki,

$$m^* A = \inf_{G \supset A} mG \quad \text{və} \quad m^* B = \inf_{Q \supset B} mQ,$$

burada G və Q açıq çoxluqlardır.

Aydındır ki, $G \subset Q$ götürmək olar. Odur ki, $mG \le mQ$ olar. Onda

$$m^* A \le m^* B.$$

Analoji qayda ilə $m_* A \le m_* B$ bərabərsizliyi isbat olur.

Teorem 1.3.4. Tutaq ki, məhdud E çoxluğu sonlu və ya hesabi sayda E_k (k=1,2,…) çoxluqlarının birləşməsindən ibarətdir:

$$E=\bigcup_k E_k,$$

onda

$$m^*E\le\sum_k m^*E_k\ . \qquad (1.3.1)$$

İsbatı. İstənilən ε>0 üçün

$$E_k\subset G_k,\ mG_k< m^*E+\frac{\varepsilon}{2^k}\ (k=1,2,...)$$

şərtlərini ödəyən məhdud açıq G_k çoxluqlarına baxaq.

E çoxluğunu daxilində saxlayan interval Δ olsun. Onda

$$E\subset\Delta\cap\left(\bigcup_k G_k\right)$$

olar, buradan teorem 1.2.3-ə əsasən

$$m^*E\le m\left[\Delta\cap\left(\bigcup_k G_k\right)\right]\le\sum_k m(\Delta\cap G_k)\le$$

$$\le\sum_k mG_k\le\sum_k m^*E+\varepsilon.$$

Buradan, ε>0-ın ixtiyariliyinə əsasən (1.3.1) bərabərsizliyi alınır ki, bununla da teorem isbat olunur.

Teorem 1.3.5. Tutaq ki, məhdud E çoxluğu sonlu və ya hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən E_k (k=1,2,…) çoxluqlarının birləşməsindən ibarətdir:

$$E=\bigcup_k E_k\quad(E_k\cap E_m=\varnothing\ ,\ k=m)\ ;$$

onda

$$m_*E\ge\sum_k m_*E_k\,.$$

İsbatı. Teoremi n sayda $E_1,E_2,\ldots,E_n$ çoxluqları üçün isbat edək. İstənilən ε>0 ədədi üçün

$$F_k \subset E_k \ , \ mF_k > m_* E_k - \frac{\varepsilon}{n} \ (k = 1,2,\dots)$$

şərtini ödəyən qapalı F_k çoxluqları götürək. F_k çoxluqları kəsişmirlər və onların $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ birləşməsi qapalı çoxluqdur.

Onda teorem 1.2.6-a əsasən alarıq:

$$m_* E \geq m\left[\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right] = \sum_{k=1}^{n} mF_k > \sum_{k=1}^{n} m_* E_k - \varepsilon.$$

Buradan $\varepsilon>0$-ın ixtiyariliyinə əsasən

$$m_* E \geq \sum_{k=1}^{n} m_* E_k .$$

Bu bərabərsizlik istənilən n üçün ödənildiyindən $n\to\infty$ şərtində də ödənir:

$$m_* E \geq \sum_{k=1}^{\infty} m_* E_k .$$

§ 4. **Çoxluğun Lebeq ölçüsü**

E məhdud çoxluq olduqda onun $m^* E$ xarici və $m_* E$ daxili ölçüsü var.

Tərif 1.4.1. E çoxluğunun $m^* E$ xarici və $m_* E$ daxili ölçüləri bərabər olduqda, yəni $m^* E = m_* E$ olduqda E çoxluğuna Lebeq mənada ölçülən çoxluq deyilir. $m^* E$ və $m_* E$ ölçülərinin ortaq qiymətinə isə E çoxluğunun Lebeq ölçüsü deyilir, mE ilə işarə olunur:

$$mE = m^* E = m_* E .$$

Teorem 1.4.1. Tutaq ki, E məhdud çoxluq, Δ isə bu çoxluğu daxilində saxlayan intervaldır. Onda E və $C_\Delta E$ çoxluqları eyni zamanda ölçülən və ya ölçülməyəndir.

İsbatı. Çoxluğun xarici və daxili ölçüsünün tərifinə əsasən

$$m^*E + m_*[C_\Delta E] = m\Delta \quad ; \quad m_*E + m^*[C_\Delta E] = m\Delta, \quad (1.4.1)$$

bərabərlikləri alınır. E çoxluğu ölçülən olduqda

$$m^*E = m_*E = mE$$

olur, odur ki, (1.4.1) bərabərliklərindən

$$mE + m_*[C_\Delta E] = mE + m^*[C_\Delta E]$$

bərabərliyi, buradan isə

$$m_*[C_\Delta E] = m^*[C_\Delta E]$$

bərabərliyi alınır ki, bu da $C_\Delta E$ çoxluğunun ölçülən olduğunu göstərir.

Teorem 1.4.2. Məhdud hesabi çoxluq ölçüləndir və onun ölçüsü sıfra bərabərdir.

İsbatı. Tutaq ki, $E=\{x_1,x_2,\ldots\}$ məhdud hesabi çoxluqdur. İstənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün x_k nöqtələrini daxilində saxlayan və uzunluları $\frac{\varepsilon}{2^k}$ olan δ_k (k = 1,2,…) intervalları götürək. Onda

$$E \subset \bigcup_k \delta_k$$

olur.

Buradan

$$m^*E < \sum_{k=1}^{\infty} m\delta_k < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

alınır. $\varepsilon>0$ ixtiyari olduğundan $m^*E=0$ olar.

Digər tərəfdən $m_*E \le m^*E$ olduğundan $m_*E=0$. Deməli,

$$mE = m^*E = m_*E = 0.$$

Teorem 1.4.3. Sonlu və ya hesabi sayda ölçülən E_k (k=1,2,…) çoxluqlarının birləşməsindən ibarət olan məhdud

$$E = \bigcup_k E_k$$

çoxluğu ölçüləndir. Bundan əlavə E_k çoxluqları cüt-cüt kəsişmirlərsə ($E_k \cap E_m = \varnothing$, $k \ne m$), onda

$$mE = \sum_k mE_k. \qquad (1.4.2)$$

(1.4.2) ifadəsi Lebeq ölçüsünün tam additivlik xassəsi adlanır.

İsbatı. Ümumiliyi pozmadan $E_k \cap E_m = \varnothing$, $k \neq m$ qəbul etmək olar. Əks halda,

$$E_1' = E_1, E_2' = E_2 \setminus E_1, ..., E_k' = E_k \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k, ...$$

götürərək, $E_k' \cap E_m' = \varnothing$, $k \neq m$ alınır.

Əvvəlcə

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

götürərək teoremi isbat edək.

İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi və hər bir k ədədi üçün elə qapalı F_k və elə məhdud açıq G_k çoxluqları qurmaq olar ki,

$$F_k \subset E_k \subset G_k, \ mG_k - mF_k < \frac{\varepsilon}{n} \ (k = 1,2,...,n)$$

olar. Onda qapalı $F = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$, açıq və məhdud $G = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$ çoxluqları üçün $F \subset E \subset G$ olur. Buradan

$$mF \leq m_* E \leq m^* E \leq mG \qquad (1.4.3)$$

bərabərsizlikləri alınır.

Qeyd edək ki,

$$G \setminus F = G \cap C_G F \qquad (1.4.4)$$

şəklində göstərilə bildiyindən $G \setminus F$ açıq, həm də məhdud çoxluqdur. Aydındır ki,

$$G = F \cup C_G F \ , \ F \cap C_G F = 0,$$

onda açıq çoxluqların ölçüsü haqqında teorem 1.1.2-yə əsasən

$$mG = mF + mC_G F,$$

buradan isə

$$m(G \setminus F) = mG - mF$$

olar.

Analoji olaraq,

$$m(G_k \setminus F_k) = mG_k - mF_k\ , (k=1,2,\dots,n)$$

olduğunu göstərmək olar.

Bilavasitə yoxlamaq olar ki,

$$G \setminus F \subset \bigcup_{k=1}^{n}(G_k \setminus F_k) \qquad (1.4.5)$$

münasibəti doğrudur. Burada $G \setminus F$, $G_k \setminus F_k$, $(k=1,2,\dots)$ məhdud və açıq çoxluqlardır. Açıq çoxluqların ölçüsü haqqında teorem 1.1.1-i (1.4.5) münasibətinə tətbiq edərək, alarıq:

$$m(G \setminus F) \le \sum_{k=1}^{n} m(G_k \setminus F_k)\ . \qquad (1.4.6)$$

$mG_k - mF_k < \dfrac{\varepsilon}{n}$ $(k=1,2,\dots,n)$ olduğunu nəzərə alsaq (1.4.6) - dan

$$mG - mF \le \sum_{k=1}^{n}[mG_k - mF_k] < \varepsilon \qquad (1.4.7)$$

bərabərsizliyini alarıq.

(1.4.7) və (1.4.3) bərabərsizliklərindən

$$0 \le m^*E - m_*E < \varepsilon$$

münasibəti, $\varepsilon>0$-ın ixtiyari olmasına əsasən, buradan da

$$m^*E = m_*E$$

alınır. Deməli, baxılan halda

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

çoxluğu ölçüləndir.

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

götürərək, teoremi isbat edək. Bu halda istənilən n üçün

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k \subset E$$

olur. Buradan

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} mE_k \le m^* E \qquad (1.4.8)$$

bərabərsizliyi alınır. Deməli, $\sum_{k=1}^{\infty} mE_k$ ədədi sırası yığılır, odur ki, istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə N natural ədədi tapmaq olar ki,

$$\sum_{k>N} mE_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

olar. $\bigcup_{k=1}^{N} E_k$ çoxluğu ölçüləndir. $\bigcup_{k=N+1}^{\infty} E_k$ çoxluğunu ölçüsü $\frac{\varepsilon}{2}$-dən kiçik olan açıq G^1 çoxluğu ilə örtmək olar.

$$\bigcup_{k=1}^{N} E_k \subset E$$

olduğundan

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{N} E_k\right) \le m_* E \;\; ; \;\; \sum_{k=1}^{N} mE_k \le m_* E$$

olur. $N\to\infty$ şərtində limitə keçsək, buradan alarıq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} mE_k \le m_* E \,. \qquad (1.4.9)$$

Digər tərəfdən,

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

olduğundan

$$m^* E \le \sum_{k=1}^{\infty} mE_k \qquad (1.4.10)$$

olur.

$m_* E \le m^* E$ olduğundan (1.4.9) və (1.4.10) münasibətlərindən

$$m^* E = m_* E$$

alınır. Bununla da, teorem tamamilə isbat olunur.

Teorem 1.4.4. Sonlu və ya hesabi sayda ölçülən çoxluqların kəsişməsi ölçülən çoxluqdur.

İsbatı. Tutaq ki, E_k (k=1,2,…) ölçülən çoxluqlardır və

$$E = \bigcap_k E_k \ .$$

E_k (k=1,2,…) çoxluqlarının hamısını öz daxilində saxlayan intervalı Δ ilə işarə edək. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$C_\Delta E = \bigcup_k C_\Delta E_k \ .$$

E_k və $C_\Delta E_k$ çoxluqları eyni zamanda ölçülən olduqlarından teorem 1.4.3-ə əsasən

$$C_\Delta E = \bigcup_k C_\Delta E_k$$

çoxluğu ölçülən olar.

Deməli, E çoxluğu ölçüləndir.

Teorem 1.4.5. İki ölçülən A və B çoxluqlarının $A \backslash B$ fərqi ölçülən çoxluqdur. $B \subset A$ olduqda isə

$$m(A \setminus B) = mA - mB.$$

İsbatı. A və B çoxluqlarını öz daxilində saxlayan intervalı Δ ilə işarə edək. Onda $D=A \backslash B$ çoxluğunu $D=A \cap (C_\Delta B)$ şəklində göstərmək olar. Burada A və $C_\Delta B$ çoxluqları ölçüləndir. Onda teorem 1.4.4-ə əsasən D çoxluğu da ölçülən olar. $B \subset A$ olan halda $A=D \cup B$, $D \cap B=\varnothing$ olur. Onda teorem 1.4.3-ə əsasən $mA=mD+mB$, yəni $mD=mA-mB$ olur.

Teorem 1.4.6. Tutaq ki, ölçülən $E_1, E_2, E_3, \ldots$ çoxluqları üçün

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$$

münasibəti ödənir və

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$$
məhdud çoxluqdur. Onda
$$mE=\lim_{n\to\infty}mE_n .$$

İsbatı. $E_1'=E_1$, $E_2'=E_2\setminus E_1$, $E_3'=E_3\setminus E_2$,... işarə edək. Onda
$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k' ,\ E_k'\cap E_m'=\varnothing, k\neq m ;$$
$$mE_k'=mE_k-mE_{k-1}\ (k=1,2,...).$$
Buradan, teorem 1.4.3-ü tətbiq edərək alarıq:
$$mE=\sum_{k=1}^{\infty}mE_k'=mE_1+\sum_{k=1}^{\infty}(mE_{k+1}-mE_k).$$
Buradan isə, sonsuz sıranın yığılmasına əsasən
$$mE=\lim_{n\to\infty}\left\{mE_1+\sum_{k=1}^{n-1}(mE_{k+1}-mE_k)\right\}=\lim_{n\to\infty}mE_n .$$
Teorem isbat olundu.

Teorem 1.4.7. Tutaq ki, ölçülən $E_1,E_2,E_3,\dots$ çoxluqları üçün $E_1\supset E_2\supset E_3\supset...$ və $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$ olur. Onda
$$mE=\lim_{n\to\infty}mE_n .$$

İsbatı. Tutaq ki, Δ intervalı E_1 çoxluğunu öz daxilində saxlayır. Onda
$$C_\Delta E_1\subset C_\Delta E_2\subset C_\Delta E_3\subset ...,\ C_\Delta E=\bigcup_{k=1}^{\infty}C_\Delta E_k$$
olur.

Teorem 1.4.6-ya əsasən
$$m(C_\Delta E)=\lim_{n\to\infty}(C_\Delta E_n)$$
olar. Burada
$$m(C_\Delta E)=m\Delta - mE \quad \text{və} \quad m(C_\Delta E_n)=m\Delta - mE_n$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$mE = \lim_{n\to\infty} mE_n$$

alarıq. Teorem isbat olundu.

§ 5. Borel çoxluğu və çoxluğun ölçülməsi əlaməti

Tərif 1.5.1. Sonlu və ya hesabi sayda açıq və qapalı çoxluqların birləşməsi və kəsişməsi nəticəsində alınan çoxluqlara borel çoxluğu deyilir; məhdud borel çoxluğu isə (B) ölçülən çoxluq adlanır.

Lebeqə qədər belə çoxluqlara birinci dəfə Borel tərəfindən baxılmışdır. Bu çoxluqlardan bəzi çoxluqlar ailəsinə ayrıca baxılır.

Tərif 1.5.2. Əgər E çoxluğu hesabi sayda qapalı çoxlqların birləşməsi kimi

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

şəklində göstərilərsə, onda deyirlər ki, E çoxluğu F_δ tiplidir.

Tərif 1.5.3. Əgər E çoxluğu hesabi sayda açıq çoxluqların kəsişməsi kimi

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

şəklində göstərilərsə, onda deyirlər ki, E çoxluğu G_δ tiplidir.

Teorem 1.5.1. F_δ və G_δ tipli hər bir məhdud çoxluq ölçüləndir.

İsbatı. Məhdud E çoxluğu F_δ tipli olduğundan

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

şəklində göstərilir, buradan isə alınır ki, toplanan F_k çoxluqları da məhduddurlar. F_k çoxluqlarının hər biri isə qapalı olduğundan ölçüləndir. Onda teorem 1.4.3-ə əsasən E çoxluğu da ölçülən olacaqdır.

G_δ tipli olan, yəni

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

şəklində göstərilən E çoxluğu məhdud olarsa, onda E çoxluğunu daxilində saxlayan hər hansı Δ intervalı var. ΔG_k tamamlayıcı çoxluqlarını quraq. Aydındır ki, bu çoxluqlar qapalı, məhdud, həm də ölçüləndirlər. E çoxluğu bu çoxluqların kəsişməsi kimi

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\Delta G_k)$$

şəklində göstərilə bilər. Onda teorem 1.4.4–ə əsasən, E çoxluğu ölçülən olacaqdır.

Ölçülən çoxluqlar haqqında isbat etdiyimiz teoremlərə əsasən aşağıdakı teoremi söyləyə bilərik:

Teorem 1.5.2. Borel mənada ölçülən çoxluq Lebeq mənada ölçüləndir. [(B) ölçülən çoxluq (L) ölçülən çoxluq olur]. Lakin Lebeq mənada ölçülən çoxluq, Borel mənada ölçülən olmaya bilər.

Rus riyaziyyatçısı M.Y. Şuslin (1894-1919) (L) ölçülən və (B) ölçülməyən çoxluğa aid misal qurmuşdur.

Tərif 1.5.4. α çoxluğunu, uzunluğu $\forall\varepsilon>0$ ədədindən kiçik olan sonlu və ya hesabi sayda intervallar sistemi ilə örtmək mümkün olduqda ona α-sıfır çoxluq deyilir.

Tərif 1.5.3. Məhdud E çoxluğunun Lebeq mənada ölçülən olması üçün zəruri və kafi şərt elə A-borel çoxluğu və α-sıfır, β-sıfır çoxluqlarının olmasıdır ki,

$$A \setminus \alpha \subset E \subset A \cup \beta \qquad (1.5.1)$$

münasibəti ödənsin.

Beləliklə, $\forall\varepsilon>0$ ədədi üçün elə A-borel çoxluğu var ki,

$$m^*(E \Delta A) < \varepsilon \qquad (1.5.2)$$

bərabərsizliyi ödənir. (1.5.1) və (1.5.2) münasibətləri ekvivalent şərtlərdir.

Teorem 1.5.4. Xarici ölçüsü sıfır olan hər bir E çoxluğu ölçüləndir və ölçüsü sıfra bərabərdir.

İsbatı. Borel çoxluğu olaraq $A=\varnothing$ götürək. Onda

$$m^*(E\Delta A) = m^*(E\Delta\varnothing) = m^*E = 0 < \varepsilon .$$

Deməli, E çoxluğu ölçüləndir. Digər tərəfdən

$$0 \le m_* E \le m^* E = 0$$

olduğundan

$$m_* E = m^* E = 0.$$

Teorem isbat olundu.

Ölçülən çoxluqlara aid nümunələr və tapşırıqlar

Misal 1. [0,1] seqmentində yerləşən ədədlərin onluq kəsr şəklində yazılışında 5 rəqəmi iştirak etməyən ədədlər çoxluğunu qurun, gücünü və ölçüsünü tapın.

Həlli. [0,1] seqmentini 10 bərabər hissəyə bölək və bu zaman alınan altıncı $\left(\frac{5}{10},\frac{6}{10}\right)$ intervalını ataq. İkinci addımda, qalan 9 seqmentin hər birini 10 bərabər hissəyə bölək və hər birində alınan altıncı

$$\left(\frac{5}{10^2},\frac{6}{10^2}\right),\left(\frac{15}{10^2},\frac{16}{10^2}\right),\left(\frac{25}{10^2},\frac{26}{10^2}\right),\left(\frac{35}{10^2},\frac{36}{10^2}\right),\left(\frac{45}{10^2},\frac{46}{10^2}\right)$$

$$\left(\frac{65}{10^2},\frac{66}{10^2}\right),\left(\frac{75}{10^2},\frac{76}{10^2}\right),\left(\frac{85}{10^2},\frac{86}{10^2}\right),\left(\frac{95}{10^2},\frac{96}{10^2}\right)$$

intervalları ataq. Prosesi bu qayda ilə sonsuz davam etdirək.

Atılan intervalların birləşməsini G ilə, qalan çoxluğu isə F ilə işarə edək. $a\in G$ ədədini onluq kəsr şəklində yazaq:

$$a=0,\, a_1a_2a_3\ldots\ .$$

Birinci addımda atılan $\left(\frac{5}{10},\frac{6}{10}\right)$ intervalında olan ədədlər üçün a_1=5 olur. Qalan 9 seqmentdəki ədədlərdən ancaq biri: $\frac{5}{10}$ ədədi üçün a_1=5 olur.

Lakin bu ədədi

$$\frac{5}{10}=0{,}500\ldots\ ;\ \frac{5}{10}=0{,}4999\ldots$$

şəklində yazmaq olur.

İkinci addımda atılan $\left(\frac{5}{10^2},\frac{6}{10^2}\right),\ldots,\left(\frac{95}{10^2},\frac{96}{10^2}\right)$ intervallarında olan hər bir a ədədi onluq kəsrlərlə yazıldıqda $a_2=5$ olur. Qalan ədədlərdən ancaq $\frac{5}{10^2}$ ədədi üçün $a_2=5$ olur. Lakin bu ədədi $\frac{5}{10^2}=0{,}04999\ldots$ şəklində yazmaq olar.

Prosesi bu qayda ilə davam etsək, qalan F çoxluğundakı ədədlərin onluq kəsr şəklində

$$a=0,\ a_1a_2a_3\ldots$$

yazılışında $\alpha_1\neq 5$, $\alpha_2\neq 5$, $\alpha_3\neq 5,\ldots$ olur. Deməli, F tələb edilən çoxluqdur. F çoxluğu hesabi sayda kəsişməyən intervalların atılması nəticəsində alındığından qapalı çoxluq olar.

G çoxluğu hesabi sayda intervalların birləşməsindən ibarət olduğundan açıq çoxluq olur. Odur ki,

$$mG=\frac{1}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9^2}{10^3}+\cdots=\frac{1}{10}+\frac{9}{10^2}\left(1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{9}{10^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}+\frac{9}{10^2}\cdot\frac{10}{1}=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}=1.$$

Onda

$$mF=m([0,1]\setminus G)=m(CG)=1-mG=1-1=0.$$

F çoxluğu heç yerdə sıx deyil, mükəmməl çoxluqdur, gücü kontinium olur.

Misal 2. [0,1] seqmentində olan həqiqi ədədlərin ikilik kəsr şəklində yazılışında cüt yerdə duran rəqəmlərin sıfır olduğu E çoxluğunun ölçüsünü hesablayın.

Həlli. [0,1] seqmentinə daxil olan həqiqi a ədədini ikilik kəsrlə

$$a=0,\ a_1a_2a_3\ldots \qquad (*)$$

şəklində yazmaq olur, burada a_k (k=1,2,…) ədədi 0 və ya 1 qiymətlərini alır. E_1 ilə (*) yazılışında $a_2=0$, E_2 ilə $a_2=0$ və $a_4=0$, E_3 ilə $a_2=0$, $a_4=0$ və $a_6=0$ və s, çoxluqları işarə edək. Onda aydındır ki, tələb olunan çoxluq

$$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k \qquad (**)$$

olur.

E_1 çoxluğunu almaq üçün [0,1] seqmentini 4 bərabər hissəyə bölək. Onda

$$E_1=\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right).$$

E_2 çoxluğunu almaq üçün E_1-ə daxil olan hər iki seqmenti 4 bərabər hissəyə bölək. Onda

$$E_2=\left[0,\frac{1}{16}\right)\cup\left[\frac{2}{16},\frac{3}{16}\right)\cup\left[\frac{8}{16},\frac{9}{16}\right)\cup\left[\frac{10}{16},\frac{11}{16}\right).$$

E_3 çoxluğunu almaq üçün E_2-yə daxil olan 4 seqmentin hər birini 4 bərabər hissəyə bölək. Onda

$$E_3=\left[0,\frac{1}{64}\right)\cup\left[\frac{2}{64},\frac{3}{64}\right)\cup\left[\frac{8}{64},\frac{9}{64}\right)\cup\left[\frac{10}{64},\frac{11}{64}\right)\cup$$

$$\cup\left[\frac{32}{64},\frac{33}{64}\right)\cup\left[\frac{34}{64},\frac{35}{64}\right)\cup\left[\frac{40}{64},\frac{41}{64}\right)\cup\left[\frac{42}{64},\frac{43}{64}\right).$$

Prosesi bu qayda ilə sonsuz davam etdirsək, alarıq:

$$E_1\supset E_2\supset E_3\supset\ldots$$

və

$$mE_1=\frac{1}{2},\ mE_2=\frac{1}{2^2},\ mE_3=\frac{1}{2^3},\ldots$$

Onda teorem 1.4.7-ə əsasən (**) bərabərliyindən

$$mE = \lim_{k\to\infty} mE_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0.$$

Deməli, tələb olunan çoxluğun ölçüsü sıfra bərabər olur.

Misal 3. Çoxluğun ölçüsünün tərifindən istifadə edərək $[a_i, b_i]\cap[a_j, b_j]=\varnothing$ olduqda

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

olarsa, onda

$$mF = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

olduğunu isbat edin.

Təşkiledici intervallar kəsişərlərsə, mF nəyə bərabərdir?

Misal 4. $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(2n + 2n + \frac{1}{2^n} \right)$ çoxluğunun Lebeqə görə ölçülən olduğunu isbat edin və onun ölçüsünü tapın.

Misal 5. E_1 və E_2 çoxluqları ölçülən olduqda $E=C(E_1\cap E_2)$ çoxluğunun da ölçülən olduğunu isbat edin. Bu çoxluğun ölçüsü nəyə bərabərdir?

Misal 6. İsbat edin ki, E çoxluğunun ölçülən olması üçün zəruri və kafi şərt hər bir $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə açıq $G\supset E$ çoxluğunun varlığıdır ki,

$$m^*(G \setminus E) < \varepsilon$$

bərabərliyi ödənsin.

Misal 7. A və B ortaq nöqtələri olmayan iki ölçülən çoxluq olduqda istənilən E çoxluğu üçün

$$m^*[E \cap (A \cup B)] = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap B),$$

$$m_*[E \cap (A \cup B)] = m_*(E \cap A) + m_*(E \cap B)$$

olduğunu isbat edin.

Misal 8. [0,1] seqmentinə daxil olan və onluq kəsrlərə ayrılışında 7 rəqəmi iştirak edən ədədlər çoxluğunun Lebeqə görə ölçülən olduğunu isbat edin və onun ölçüsünü tapın.

Mİsal 9. [0,1] seqmentinə daxil olan və onluq kəsrlərə ayrılışında 7 rəqəmi iştirak etməyən ədədlər çoxluğunun Lebeqə görə ölçülən olduğunu isbat edin və onun ölçüsünü tapın.

Misal 10. [0,1] seqmenitnə daxil olan və onluq kəsr şəklində ayrılışında 4 və 5 rəqəmlərindən heç olmazsa, biri iştirak etməyən ədədlər çoxluğunun Lebeqə görə ölçülən olduğunu isbat edin və onun ölçüsünü tapın.

Misal 11. Müsbət ölçülü istənilən çoxluğun qeyri-hesabi olduğunu göstərin.

Misal 12. $[a,b]$ seqmentində Q rasional nöqtələr çoxluğunun ölçülən olduğunu isbat edin və ölçüsünü tapın.

Misal 13. $[a,b]$ seqmentində J irrasional nöqtələr çoxluğunun ölçülən olduğunu isbat edin və ölçüsünü tapın.

Misal 14. [0,1] seqmentindən $\left(\frac{3}{5},\frac{5}{8}\right)$ intervalı atılır: qalan iki seqmentdən mərkəzi həmin seqmentlərin orta nöqtəsində olan ümumi uzunluğu $\frac{1}{8}$-ə bərabər intervallar, sonra isə eyni üsulla ümumi uzunluğu $\frac{1}{16}$-ə bərabər intervallar atılır. Bu prosesdən sonra qalan çoxluq F olsun.

F çoxluğunun Lebeqə görə ölçülən olduğunu isbat edin və ölçüsünü tapın.

II FƏSİL

ÖLÇÜLƏN FUNKSİYALAR

§1. Ölçülən funksiyaların tərifi və varlığı şərti

Fərz edək ki, hər hansı E çoxluğunda sonlu həqiqi $f(x)$ funksiyası verilmişdir. E çoxluğunun bəzi nöqtələrində funksiya müəyyən işarəli $+\infty$ («müsbət sonsuzluq») və ya $-\infty$ («mənfi sonsuzluq») qiymətlərini də ala bilər. Başqa sözlə, $-\infty$ və $+\infty$ «qeyri-məxsusi» ədədləri $f(x)$ funksiyasının qiymətlər çoxluğuna daxil edilir. Bu ədədlər öz aralarında və istənilən sonlu həqiqi a ədədi ilə

$$-\infty < a < +\infty$$

bərabərsizlikləri ilə bağlıdır.

$-\infty$ və $+\infty$ ədədləri (nöqtələri) $-\infty < x < +\infty$ ədədləri ilə birlikdə genişləndirilmiş ədəd oxu adlanır və $-\infty \le x \le +\infty$ ilə işarə olunur. Genişləndirilmiş ədəd oxunda hesab əməllərinin aparılması üçün $-\infty$ və $+\infty$ ədədləri üzərində aşağıdakı əməllərin ödənməsi şərtləşilir:

1) $+\infty + (+\infty) = +\infty$;

2) $-\infty + (-\infty) = -\infty$;

3) $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$, $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$;

4) $0\cdot(\pm\infty) = (\pm\infty)\cdot 0 = 0$;

5) $|+\infty| + |-\infty| = +\infty + (+\infty) = +\infty$;

istənilən sonlu həqiqi a ədədi üçün:

6) $a + (-\infty) = -\infty$, $a + \infty = +\infty$;

7) $a > 0$ olduqda $a\cdot(+\infty) = +\infty$ və $a\cdot(-\infty) = -\infty$;

8) $a < 0$ olduqda $a\cdot(+\infty) = -\infty$ və $a\cdot(-\infty) = +\infty$;

9) $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$.

Qeyd edək ki,

$$(\pm\infty)-(\pm\infty)\,,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\ \text{və}\ \frac{a}{0}$$

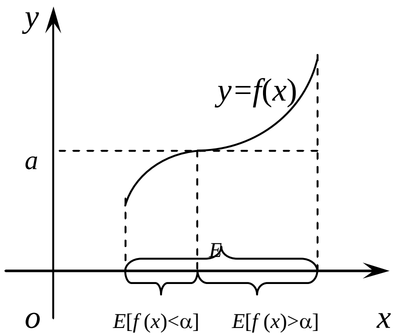
simvollarının mənası yoxdur, qeyri-müəyyənlikdirlər.

Burada adi ədəd oxunun ölçülən çoxluqlarında təyin edilən, genişləndirilmiş ədəd oxunda qiymətlər alan və inteqrala ümumi tərif verilməsində əsas rol oynayan funksiyalar sinfinə baxılır. Məsələn,

$$f(x)=\begin{cases}-\infty, & x<-1 \text{ olduqda},\\ 0, & -1\le x\le 1 \text{ olduqda},\\ +\infty, & x>1 \text{ olduqda},\end{cases}$$

belə funksiyalara misal ola bilər.

Tərif 2.1.1. Həqiqi $f(x)$ funksiyasının təyin edildiyi E çoxluğu və istənilən sonlu həqiqi a ədədi üçün $f(x)>a$ şərtini ödəyən $x\in E$ nöqtələrdən düzəlmiş $E(f>a)$ çoxluğu Lebeq mənada ölçüləndirsə, onda $f(x)$-ə E çoxluğunda Lebeq mənada ölçülən funksiya deyilir.



Lemma 2.1.1. Ölçülən E çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının ölçülən olması üçün istənilən həqiqi a ədədi üçün

$$E(f\ge a),\ E(f<a),\, E(f\le a)$$

çoxluqlarından birinin ölçülən olması zəruri və kafidir.

Zəruriliyin isbatı. Ayndır ki, $f(x)$ funksiyası ölçülən olduqda istənilən həqiqi a ədədi və istənilən natural n ədədi üçün $E\left(f>a-\frac{1}{n}\right)$ çoxluğu ölçüləndir.

$$E(f \geq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{n}\right) \qquad (2.1.1)$$

bərabərliyinin doğruluğunu göstərək.

Doğrudan da, əgər $x \in E(f \geq a)$ olarsa, onda $f(x) \geq a$, buradan da istənilən natural n ədədi üçün $f(x) > a - \frac{1}{n}$ olur, odur ki,

$$x \in E\left(f > a - \frac{1}{n}\right),\ n = 1,2,3,\ldots.$$

Deməli, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{n}\right)$.

Tutaq ki, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{n}\right)$. Bu isə istənilən n üçün $x \in E\left(f > a - \frac{1}{n}\right)$, yəni $f(x) > a - \frac{1}{n}$, $n = 1,2,...$ olduğunu göstərir. Axırıncı ifadədə $n \to \infty$ olduqda limitə keçərək $f(x) \geq a$, yəni $x \in E(f \geq a)$ alarıq. Beləliklə, (2.1.1) bərabərliyinin doğruluğu isbat edilir. Sonlu və ya hesabi sayda ölçülən çoxluqların kəsişməsi ölçülən çoxluq olduğuna görə $E(f \geq a)$ çoxluğu ölçüləndir.

$E(f \geq a)$ çoxluğunun ölçülən olmasından və $E(f < a) = E \setminus E(f \geq a)$ bərabərliyindən $E(f < a)$ çoxluğunun, $E(f > a)$ çoxluğunun ölçülən olmasından və $E(f \leq a) = E \setminus E(f > a)$ bərabərliyindən isə $E(f \leq a)$ çoxluğunun ölçülən olması alınır.

Kafiliyin isbatı. Tutaq ki, istənilən həqiqi a ədədi üçün $E(f \geq a)$ çoxluğu ölçüləndir. Göstərək ki,

$$E(f > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f \geq a + \frac{1}{n}\right) \qquad (2.1.2)$$

bərabərliyi doğrudur. Yenə də iki çoxluğun bərabərliyinin tərifindən istifadə edək.

Doğrudan da, $x \in E(f > a)$ olarsa, onda $f(x) > a$ olar və kifayət qədər böyük n_0 ədədi üçün $f(x) \geq a + \frac{1}{n_0}$ olar, yəni $x \in E\left(f \geq a + \frac{1}{n_0}\right)$, buradan da

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f \geq a + \frac{1}{n}\right)$$

olar. Tərsinə,

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f \geq a + \frac{1}{n}\right)$$

olarsa, onda elə n_0 var ki, $x \in E\left(f \geq a + \frac{1}{n_0}\right)$, yəni $f(x) \geq a + \frac{1}{n_0}$ olur, buradan $f(x) > a$ alınar. Nəticədə $x \in E(f > a)$ olur ki, bununla da (2.1.2) bərabərliyinin doğruluğu isbat edilir. Sonlu və hesabi sayda ölçülən çoxluqların birləşməsi ölçülən çoxluq olduğundan $E(f > a)$ çoxluğu ölçüləndir.

$E(f > a)$ çoxluğunun ölçülən olmasından və $E(f \leq a) = \quad = E \setminus E(f > a)$ bərabərliyindən $E(f \leq a)$ çoxluğunun, $E(f \geq a)$ çoxluğunun ölçülən olmasından və $E(f < a) = E \setminus E(f \geq a)$ bərabərliyindən isə $E(f < a)$ çoxluğunun ölçülən olması alınır.

Tərif 2.1.2. $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda verildikdə və a istənilən həqiqi ədəd olduqda

$$E[f(x) > a],\ E[f(x) \geq a],\ E[f(x) < a],\ E[f(x) \leq a]$$

çoxluqlarına $f(x)$ funksiyasının Lebeq çoxluqları deyilir.

Qeyd 2.1.1. Lemma 2.1.1-ə əsasən

$$E[f(x) \geq a],\ E[f(x) < a],\ E[f(x) \leq a]$$

Lebeq çoxluqlarından hər birinin vasitəsi ilə E çoxluğunda ölçülən $f(x)$ funksiyasına tərif 2.1.1 ilə ekvivalent olan yeni üç tərif vermək olar. Başqa sözlə, E çoxluğunda ölçülən $f(x)$ funksiyasına öz aralarında ekvivalent dörd tərif vermək olar. $E[f \geq a]$ və $E[f < a]$ çoxluqları biri digərinin E-yə tamamlayıcı çoxluqlarıdır, a istənilən həqiqi ədəd olduqda bu çoxluqlardan birinin ölçülən olması digərinin ölçülən olması deməkdir. Eyni zamanda $E[f > a]$ və $E[f \leq a]$ tamamlayıcı çoxluqlardır və bunlardan birinin ölçülən olması digərinin ölçülən olması ilə eynigüclüdür. Bu təklifdən lemmanın isbatında istifadə edilmişdir.

Qeyd edək ki, $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndirsə, onda E çoxluğu özü də ölçüləndir. Bu təklifin doğruluğu

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f(x) > -n] \qquad (2.1.3)$$

bərabərliyindən aydın olur, çünki, cəm işarəsi altındakı çoxluq $f(x)$ funksiyasının tərif 2.1.2-dəki birinci növ Lebeq çoxluğudur, yəni ölçülən çoxluqdur, odur ki, E çoxluğu da hesabi sayda ölçülən çoxluqların birləşməsi kimi ölçülən çoxluqdur. E çoxluğunun ölçülən olması (2.1.3) bərabərliyinə analoji bərabərliyin köməyi ilə $f(x)$ funksiyasının başqa növ Lebeq çoxluqlarının ölçülən olmasından da alına bilər. Məsələn, $E[f(x) \leq a]$ çoxluğunun ölçülən olması məlum olarsa, onda E-nin ölçülən olması üçün

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f(x) \leq n] \qquad (2.1.4)$$

bərabərliyindən istifadə etmək lazımdır.

Yuxarıda deyilənlərə əsasən ölçülən funksiyaya aşağıdakı kimi də tərif verilir.

Tərif 2.1.3. Həqiqi $f(x)$ funksiyası ölçülən E çoxluğunda təyin edildikdə və istənilən həqiqi a ədədi üçün

Lebeq çoxluqlarının heç olmazsa birisi ölçülən olarsa, onda $f(x)$ funksiyasına E çoxluğunda ölçülən funksiya deyilir.

Deməli, E çoxluğunda $f(x)$-in ölçülən funksiya olmasından onun Lebeq çoxluqlarının hər birinin, nəticədə E çoxluğunun özünün ölçülən olması alınır. Tərsinə, E çoxluğunda verilmiş $f(x)$ funksiyasının istənilən həqiqi a ədədi üçün, onun Lebeq çoxluqlarından birinin ölçülən olmasından $f(x)$-in ölçülən funksiya olması alınır.

Qeyd 2.1.2. Bundan sonra $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndir dedikdə, E çoxluğunun da ölçülən olduğunu başa düşəcəyik.

Nəzərə almaq lazımdır ki, ölçülən $f(x)$ funksiyası üçün

$$E(a \le f < b),\ E(a < f \le b),\ E(a < f < b),\ E(f = a)$$

çoxluqları da ölçüləndir. Lemma 2.1.1-ə əsasən birinci üç çoxluq üçün tərs təklif də doğrudur, lakin $E(f = a)$ çoxluğu üçün tərs təklif doğru deyil, yəni $f(x)$ E çoxluğunda ölçülən olduqda

$$E[f(x) = a] = E[f(x) \ge a] \cap E[f(x) \le a]$$

çoxluğunun iki ölçülən çoxluğun kəsişməsi kimi ölçülən olması alındığı halda, $E(f=a)$ çoxluğunun ölçülən olmasından $f(x)$ funksiyasının E-də ölçülən olması alınmır. Bunu aşağıdakı misalla aydınlaşdırmaq olar.

Fərz edək ki, bütün bir nöqtəli $\{x\}$ çoxluqları additiv X[1] sinfinə daxildir $(x \in X)$. Əgər ölçülməyən $E \subset X$ çoxluğu varsa, onda E çoxluğunda verilən və E-ni ədəd oxunun hər hansı altçoxluğuna qarşılıqlı birqiymətli inikas etdirən istənilən $f(x)$ funksiyası ölçülən olmaz (E ölçülən deyil), halbuki, bir nöqtədən ibarət olan bütün $E(f = c)$ çoxluqları ölçüləndirlər, çünki bir nöqtədən ibarət olan çoxluq ölçüləndir, ölçüsü də sıfra bərabərdir.

---

[1] Bax [4] səh 80

§ 2. **Ölçülən funksiyaların xassələri**

Teorem 2.2.1. Ölçüsü sıfır olan E çoxluğunda istənilən $f(x)$ funksiyası ölçüləndir.

İsbatı. Doğrudan da, əgər $mE=0$ olarsa, onda istənilən a ədədi üçün $E(f>a)\in E$ olduğundan

$$m_*E(f>a)\le m^*E(f>a)\le mE=0$$

olar. Deməli,

$$m_*E(f>a)=m^*E(f>a)=0,$$

yəni $mE(f>a)=0$. Bunun kimi E-nin altçoxluqlarının hamısı, o cümlədən də $f(x)$-in Lebeq çoxluqlarının hər biri ölçülən olacaqdır, həm də onların da ölçüləri sıfra bərabər olacaqdır. Bu isə $f(x)$-in E-də ölçülən olduğunu göstərir.

Teorem 2.2.2. Əgər $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndirsə, onda onun istənilən ölçülən $E'\subset E$ altçoxluğunda da ölçüləndir.

İsbatı. Doğrudan da,

$$E'[f>a]=E'\cap E[f>a]$$

şəklində göstərilə bildiyindən, iki ölçülən çoxluğun kəsişməsi kimi $E'[f>a]$ çoxluğu ölçüləndir, deməli, $f(x)$ funksiyası E' çoxluğunda ölçüləndir.

Teorem 2.2.3. Ölçülən E çoxluğunda $f(x)=c$ $(c=const)$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyası ölçüləndir.

İsbatı. İstənilən a ədədi üçün $E(f>a)$ çoxluğu

$$E[f>a]=\begin{cases} E,\ a<c \text{ olduqda,} \\ \varnothing,\ a\ge c \text{ olduqda} \end{cases}$$

şəklində göstərilir. Verilən E çoxluğu və boş çoxluq ölçülən olduğundan $E(f>a)$ çoxluğu, nəticədə $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndir.

Qeyd edək ki, bu teoremdə c sabiti sonsuzluq da ola bilər.

Tərif 2.2.1. $[c,d]$ seqmentini

$$c = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_n = d$$
nöqtələri ilə sonlu sayda $(c_0,c_1),(c_1,c_2),\ldots,(c_{n-1},c_n)$ hissələrə böldükdə hər bir hissədə $f(x)$ funksiyası sabit qiymət alarsa, onda $[c,d]$ seqmentində $f(x)$ funksiyasına pilləli funksiya deyilir.

Teorem 2.2.3-dən pilləli funksiyanın ölçülən olması alınır.

Teorem 2.2.4. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası sonlu və ya hesabi sayda ölçülən E_k $(k = 1,2,...)$ çoxluqlarının birləşməsindən ibarət olan ölçülən
$$E = \bigcup_k E_k$$
çoxluğunda verilmişdir.

E_k $(k = 1,2,...)$ çoxluqlarından hər birində ölçülən $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda da ölçüləndir.

İsbatı.
$$E[f > a] = \bigcup_k E_k[f > a]$$
bərabərliyindən ölçülən çoxluqların birləşməsi kimi $E[f>a]$ çoxluğunun, nəticədə $f(x)$-in ölçülən funksiya olması alınır.

Bu teoremin xüsusi halı kimi aşağıdakı teoremi söyləmək olar.

Teorem **2**.2.5. $E_k(k = 1,2,...)$ çoxluqları ölçülən olduqda $E = \bigcup_k E_k$ çoxluğunda verilmiş $f(x)$ funksiyası E_k çoxluqlarının hər birində sabit qiymət alırsa, onda $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndir.

Tərif 2.2.2. Tutaq ki, $E \subset [c,d]$ və $F = [c,d] \setminus E$. $[a,b]$ seqmentində verilən $\varphi_E(x)$ funksiyası
$$\varphi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \text{ olduqda}, \\ 0, & x \in F \text{ olduqda} \end{cases}$$

şəklində olarsa, onda $\varphi_E(x)$-ə E çoxluğunun xarakteristik funksiyası deyilir.

Teorem 2.2.6. E çoxluğu və onun xarakteristik $\varphi_E(x)$ funksiyası eyni zamanda ölçülən və ya ölçülməyəndir.

İsbatı. Əgər $\varphi_E(x)$ ölçülən funksiyadırsa, onda E çoxluğunun ölçülən olması

$$E = F(\varphi_E > 0)$$

münasibətindən alınır.

Tərsinə, əgər E çoxluğu ölçüləndirsə, onda

$$F(\varphi_E > a) = \begin{cases} 0, & a \geq 1 \quad \text{oluqda}, \\ E, & 0 \leq a < 1 \text{ oluqda}, \\ F, & a < 0 \quad \text{oluqda} \end{cases}$$

münasibəti $\varphi_E(x)$ funksiyasının ölçülən olmasını göstərir.

Teorem 2.2.7. $E = [c, d]$ seqmentində kəsilməz $f(x)$ funksiyası ölçüləndir.

İsbatı. İxtiyari sonlu a ədədi üçün

$$F = E(f \leq a)$$

çoxluğu qapalı olur. Doğrudan da, tutaq ki, x_0 bu çoxluğun limit nöqtəsidir. Onda F çoxluğunda x_0 nöqtəsinə yığılan $\{x_n\}$ ardıcıllığı seçmək olar, yəni $x_n \to x_0$ $(x_n \in F)$ olar, onda $f(x_n) \leq a$ (n=1,2,…), həm də $f(x)$-in kəsilməzliyinə əsasən $f(x_0) \leq a$ olacaqdır, yəni $x_0 \in F$ olacaqdır ki, bu da F çoxluğunun qapalı olduğunu göstərir.

Hər bir qapalı çoxluq ölçülən olduğundan $E(f \leq a)$ çoxluğu da ölçüləndir.

Onda

$$E(f > a) = E \setminus E(f \leq a)$$

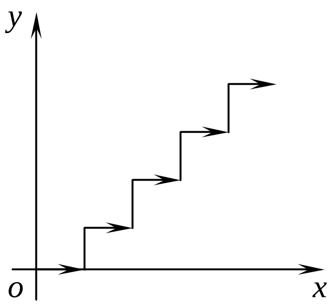
çoxluğu da iki ölçülən çoxluğun fərqi kimi ölçüləndir. Bu isə E çoxluğunda kəsilməz $f(x)$ funksiyasının həmin çoxluqda ölçülən olduğunu göstərir.

Ölçülən funksiyaların tərifindən alınır ki, ölçülməyən çoxluqda verilən funksiya ölçülməyəndir.

Lakin ölçülən çoxluqda verilən ölçülməyən funksiyaların varlığını asanlıqla aşkar etmək olar.

Ölçülən funksiyaya aid misallar.

Misal 2.2.1. $f(x)=[x]$ (x ədədinin tam hissəsi) funksiyasına baxaq. x-in bütün tam qiymətləri sonlu sıçrayışlı birinci növ kəsilmə nöqtələridir. Hər bir kəsilmə nöqtəsində sağdan kəsilməzlik nəzərdə tutulur. Bu funksiya istənilən $[c,d]$ seqmentində pilləli olduğundan ölçüləndir. Doğrudan da, əgər



$a > f(d)$ olarsa, onda $E(f>a)=0$ olur, yəni bu çoxluq ölçüləndir; əgər $k<a\le k+1\le f(d)$ olarsa, onda $E(f>a)=\big[[k]+1,d\big]$ olar, $\big[[k]+1,d\big]$ seqmenti isə ölçüləndir.

Misal 2.2.2. $[c,d]$ seqmentində təyin edilmiş Dirixle funksiyası, yəni

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ rasional nöqtə olduqda,}\\ 0, & x \text{ irrasional nöqtə olduqda}\end{cases}$$

funksiyası ölçüləndir, çünki $0\le a<1$ olarsa, onda $E(D>a)=E'$ olar, burada E' seqmentin ölçülən rasional nöqtələr çoxluğudur; əgər $a\ge 1$ olarsa, onda $E(D>a)=\varnothing$ boş çoxluqdur, ona görə də ölçülən çoxluqdur; əgər $a<0$ olarsa, onda $E(D>a)=[c,d]$ olur ki, yenə də ölçülən çoxluqdur. Yəni

$$E(D>a)=\begin{cases} E, \ a<0 & \text{olduqda,} \\ E', \ 0\le a<1 & \text{olduqda,} \\ \varnothing, \ a\ge 1 & \text{olduqda} \end{cases}$$

çoxluğu ölçüləndir.

Deməli, $D(x)$ funksiyasının $[c,d]$ seqmentində ölçülən olması isbat edildi.

§3. Ekvivalentlik

Bir çox məsələləri öyərənərəkən sıfır ölçülü çoxluqda funksiyanın qiymətlərini nəzərə almamaq olar.

Bununla əlaqədar aşağıdakı tərifləri daxil edək.

Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları E çoxluğunda təyin olunmuşlar. $E(f\neq g)$ ilə E çoxluğunun elə x nöqtələri çoxluğu işarə olunur ki, $f(x)\neq g(x)$ olsun.

Tərif 2.3.1. E çoxluğunda verilmiş iki $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları üçün $mE(f\neq g)=0$ olarsa, onda $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarına E çoxluğunda ekvivalent funksiyalar deyilir və $f(x)\sim g(x)$, bəzən də $f(x)\approx g(x)$ şəklində işarə edilir.

Tərif 2.3.2. Tutaq ki, hər hansı S xassəsi (təklifi) hər hansı E çoxluğunun E' altçoxluğuna daxil olan nöqtələrindən başqa E çoxluğunun bütün nöqtələrində doğrudur. Əgər $mE'=0$ olarsa, onda deyirlər ki, S xassəsi (təklifi) E çoxluğunda sanki hər yerdə (sanki E-nin bütün nöqtələri üçün) doğrudur. Xüsusi halda E' çoxluğu boş da ola bilər.

Asanlıqla göstərmək olar ki, ekvivalentlik münasibəti aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) E çoxluğunda $f\sim g$, $g\sim h$ olarsa, onda E-də $f\sim h$ olar;

2) Əgər $f_1\sim g_1$ və $f_2\sim g_2$ olarsa, onda $f_1+f_2\sim g_1+g_2$, $f_1 f_2\sim g_1 g_2$ və əgər uyğun əməlin sanki hər yerdə mənası

varsa, onda $f_1 : f_2 \sim g_1 : g_2$ olar.

Tərif 2.3.1 və tərif 2.3.2-yə əsasən aşağıdakı tərifi də söyləmək olar.

Tərif 2.3.3. E çoxluğunda iki funksiya sanki hər yerdə bərabərdirsə, onda onlar ekvivalent funksiyalar adlanır.

Ekvivalent funksiyalara nəzərən aşağıdakı teoremləri isbat edək.

Teorem 2.3.1 Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları E çoxluğunda ekvivalentdirlərsə və E-də $f(x)$ ölçülən funksiyadırsa, onda $g(x)$ funksiyası da E çoxluğunda ölçüləndir.

İsbatı. $A = E(f \neq g)$, $B=E\backslash A$ olsun. Şərtə görə $mA = 0$-dır və buna görə də A çoxluğu ölçüləndir. $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçülən olduğundan E çoxluğu ölçüləndir. Onda iki ölçülən çoxluğun fərqi kimi B çoxluğu da ölçüləndir. $B \subset E$ olduğundan E-də ölçülən $f(x)$ funksiyası B çoxluğunda da ölçülən olacaqdır. B çoxluğunda $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları bərabər olduqları üçün $g(x)$ funksiyası da B çoxluğunda ölçüləndir. Digər tərəfdən, $mA = 0$ olduğundan $g(x)$ funksiyası A çoxluğunda ölçüləndir. Onda $g(x)$ funksiyası $E=A\cup B$ çoxluğunda ölçülən olacaqdır və bununla da teorem isbat olundu.

Teorem 2.3.2. E seqmentində kəsilməz $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları ekvivalentdirlərsə, $f(x)=g(x)$, $x\in E$ olur.

İsbatı. Göstərək ki, E seqmentinin bütün nöqtələrində $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının qiymətləri üst-üstə düşür. Əksini fərz edək, tutaq ki, hər hansı $x_0 \in E$ nöqtəsində $f(x_0) \neq g(x_0)$, yəni $f(x_0) - g(x_0) \neq 0$ olur. E-də $f(x) - g(x)$ kəsilməz funksiya olduğu üçün x_0 nöqtəsinin kifayət qədər kiçik $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$ ətrafı tapılar ki, bütün nöqtələrində $f(x)-g(x)\neq 0$ olar. Bu ətraf müsbət ölçüyə malikdir; beləliklə,

$$mE[f(x)\neq g(x)]>0.$$

Bu da ekvivalentliyin tərifinə ziddir, yəni kəsilməz $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları E seqmentinin heç olmazsa bir nöqtəsində müxtəlif qiymətlər alarsa, bu funksiyalar ekvivalent ola bilməzlər. Aydındır ki, istənilən ölçülən funksiyalar üçün (ümumiyyətlə kəsilən funksiyalar üçün) iki funksiyanın ekvivalentliyi, ümumiyyətlə, onların üst-üstə düşdüyünü göstərmir.

Tərif 2.3.4. E çoxluğunda (və ya $E=[c,d]$ seqmentində) sonlu sayda birinci növ kəsilmə nöqtələri müstəsna olmaqla hər yerdə kəsilməz $f(x)$ funksiyasına həmin çoxluqda (və ya həmin seqmentdə) hissə-hissə kəsilməz funksiya deyilir.

İndi fərz edək ki, $f(x)$-in bir $x_0\in E$ kəsilmə nöqtəsi var. x_0 nöqtəsini uzunluqları sıfra yaxınlaşan, yəni $n\to\infty$ olduqda $m\Delta_n\to 0$ olan

$$\Delta_n=(x_0-\delta_n,x_0+\delta_n)\ \ (\delta_n>0,\delta_n\to 0)$$

intervallarla əhatə edək. $f(x)$ funksiyası $E_n=E\backslash\Delta_n$-də kəsilməz olduğundan, istənilən a ədədi üçün $e_n=E_n\ (f\geq a)$ $(n=1,2,\ldots)$ çoxluqları qapalıdır. n artdıqda $E_n=E\backslash\Delta_n$, nəticədə $e_n=E_n\ (f\geq a)$ çoxluqları azalmır və qapalı, nəticədə ölçülən e çoxluğuna yaxınlaşır. Əgər $f(x_0)\geq a$ olarsa, bu çoxluğa x_0 nöqtəsini də əlavə etmək lazımdır və beləliklə, $f(x)\geq a$ şərtini ödəyən bütün nöqtələr çoxluğu alınır ki, bu çoxluq da teorem 2.2.7–yə əsasən qapalıdır, nəticədə ölçüləndir. Həmin mühakimə $f(x)$-in sonlu sayda kəsilmə nöqtələri olduqda da tətbiq edilir, yəni sonlu sayda kəsilmə nöqtələrinə malik olan funksiya ölçüləndir.

Buradan və tərif 2.3.4-dən nəticə olaraq çıxır ki, E çoxluğunda (və ya $E=[c,d]$ seqmentində) təyin edilmiş hissə-hissə kəsilməz funksiyalar ölçüləndir. Məsələn, $f(x)=\operatorname{sgn} x$ funksiyası ədəd oxunda hissə-hissə kəsilməzdir və orada da ölçüləndir, $f(x)=[x]$ funksiyası $[0,100]$ seqmentində hissə-hissə kəsilməzdir, orada da ölçüləndir.

Tərif 2.3.5. E çoxluğunda (və ya $E=[c,d]$ seqmentində) verilmiş $f(x)$ funksiyanın kəsilmə nöqtələrinin ölçüsü sıfra bərabərdirsə, onda $f(x)$ funksiyasına E çoxluğunda (və ya $E=[c,d]$ seqmentində) sanki hər yerdə kəsilməz funksiya deyilir.

İsbatsız aşağıdakı təklifi qeyd edək: əgər $f(x)$ qapalı Δ_0 seqmentində sonlu qiymətlər alırsa və onun kəsilmə nöqtələri çoxluğunun ölçüsü sıfra bərabərdirsə, onda $f(x)$ funksiyası Δ_0-da ölçüləndir.

Tərif 2.3.5-i nəzərə alaraq bu təklifi aşağıdakı kimi ümumiləşdirmək olar.

Ölçülən E çoxluğunda sanki hər yerdə kəsilməz $f(x)$ funksiyası ölçüləndir.

Lakin bu təkliflər funksiyanın ölçülən olması üçün kafi şərtdir. Misal göstərmək olar ki, E çoxluğunun bütün nöqtələri kəsilmə nöqtələri olduqda funksiya yenə də ölçüləndir. $[0,1]$ seqmentində aşağıdakı kimi təyin edilən $f(x)$ funksiyasına baxaq:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \quad \text{rasional nöqtə olduqda,} \\ 1, & x \quad \text{irrasional nöqtə olduqda.} \end{cases}$$

Bu funksiya $[0,1]$ seqmentinin hər bir nöqtəsində kəsiləndir, lakin $[0,1]$ seqmentində kəsilməz $g(x)\equiv 1$ funksiyasına ekvivalentdir, çünki $[0,1]$ seqmentinin yalnız bütün rasional nöqtələr çoxluğunda $f(x)\neq g(x)$ olur. $[0,1]$

seqmentinin rasional nöqtələr çoxluğu hesabi çoxluqdur, buna görə də ölçüləndir, ölçüsü isə sıfra bərabərdir. Deməli, $[0,1]$ seqmentində $f(x)$ eyniliklə vahidə bərabər olan funksiyaya ekvivalentdir, onda teorem 2.3.1-ə əsasən $f(x)$ $[0,1]$-də ölçüləndir. Ancaq $[0,1]$ seqmentində bütün x_0 nöqtələrinin $f(x)$-in kəsilmə nöqtələri olduğunu görmək çətin deyildir. Həqiqətən, x_0 nöqtəsinin istənilən ε-ətrafında həm rasional, həm də irrasional x qiymətləri yerləşir, yəni $x = x_0$-ın istənilən ε-ətrafında $f(x)$ funksiyası həm 0, həm də 1 qiymətlərini alır, buna görə də x_0 ikinci növ kəsilmə nöqtəsidir.

Yalnız sıfır ölçülü çoxluqda $+\infty$ və $-\infty$ qiymətlərini ala bilən funksiyalar xüsusi ilə maraqlıdır. Belə funksiyalar sanki hər yerdə sonlu funksiyalar adlanır, yəni $mE(f = \pm\infty) = 0$ olarsa, $f(x)$-ə E çoxluğunda sanki hər yerdə sonlu funksiya deyilir.

Belə funksiyaların sonsuz qiymətlərini istənilən ədədlə, məsələn, sıfırla əvəz edərək, artıq hər yerdə sonlu qiymətlər alan funksiyaya ekvivalent funksiya alarıq. Teorem 2.3.1–dən aşağıdakı nəticə alınır:

sanki hər yerdə sonlu funksiya yalnız və yalnız o zaman ölçülən olar ki, ona ekvivalent olan funksiya ölçülən olsun.

Qeyd edək ki, sonlu funksiyalar üçün nəzərdə tutulan lemma 2.1.1–in həmin ifadəsi sanki hər yerdə sonlu funksiyalar üçün də doğrudur.

Onu da qeyd etmək lazımdır ki, yalnız sonlu qiymətlər alan funksiyadan fərqli olaraq Lebeq çoxluqlarından hər hansı birinin ölçülən olmasından E çoxluğunun ölçülən olması alınmır. Bu aşağıdakı sadə misalla təsdiqini tapır: tutaq ki, E ölçülməyən çoxluqdur, $f(x) = -\infty$, $x \in E$; istənilən sonlu a ədədi üçün $E(f > a) = \varnothing$, $mE(f > a) = 0$. Lakin buradan $f(x)$-in E-də ölçülən olması alınmır.

§ 4. **Ölçülən funksiyalar üzərində hesab əməlləri**

Burada isbat edəcəyik ki, ölçülən funksiyalar üzərində hesab əməlləri nəticəni ölçülən funksiyalar sinfindən kənara çıxarmır, yəni toplama, çıxma, vurma və bölmə əməlləri ölçülən funksiyalara tətbiq edilərsə, onda nəticələr yenə də ölçülən funksiyalardır.

Teorem 2.4.1. E çoxluğunda $f(x)$ funksiyası ölçüləndirsə, k isə sonlu ədəddirsə, onda

$$1)\ f(x)+k,\ 2)\ kf(x),\ 3)\ |f(x)|,\ 4)\ f^2(x)$$

funksiyaları və $f(x)\neq 0$ olarsa, 5) $\dfrac{1}{f(x)}$ funksiyası ölçüləndirlər.

İsbatı. 1) $f(x)+k$ funksiyasının ölçülən olması $E(f+k>a)=E(f>a-k)$ münasibətindən alınır, çünki axırıncı çoxluq, $a-k$ istənilən həqiqi ədəd olduğundan ölçüləndir.

2) $kf(x)$ funksiyası $k=0$ olduqda $kf(x)=0=const$ olduğu üçün ölçüləndir, $k\neq 0$ olduqda isə

$$E(kf>a)=\begin{cases} E\left(f>\dfrac{a}{k}\right), & k>0 \text{ olduqda,} \\ E\left(f<\dfrac{a}{k}\right), & k<0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

bərabərliyi doğrudur. Burdan da $kf(x)$-in ölçülən olması alınır.

3) $|f(x)|$ funksiyası üçün alarıq:

$$E(|f|>a)=\begin{cases} E, \quad a<0 \text{ olarsa,} \\ E[f(x)>a]\cup E[f(x)<-a], \ a\geq 0 \text{ olarsa.} \end{cases}$$

Sağ tərəfdəki çoxluqların hər ikisinin ölçülən olmasından $E(|f|>a)$ çoxluğunun, nəticədə $|f(x)|$ funksiyasının ölçülən olması alınır.

4) Analoji olaraq $f^2(x)$ funksiyası üçün

$$E\left(f^2 > a\right)=\begin{cases} E, & a<0 \text{ olarsa}, \\ E\left(|f|>\sqrt{a}\right), & a \geq 0 \text{ olarsa}, \end{cases}$$

şəklində göstərilə bildiyindən və sağ tərəfdəki çoxluqların ölçülməsindən $E\left(f^2 > a\right)$ çoxluğunun, nəticədə isə $f^2(x)$ funksiyanın ölçülən olması alınır.

5) Nəhayət, E çoxluğunda $f(x) \neq 0$ olduqda

$$E\left(\frac{1}{f} > a\right)=\begin{cases} E(f>0), & a=0 \text{ olarsa}, \\ E(f>0) \cap E\left(f<\frac{1}{a}\right), & a>0 \text{ olarsa}, \\ E(f>0) \cup E(f<0) \cap E\left(f<\frac{1}{a}\right), & a<0 \text{ olarsa}, \end{cases}$$

göstərilişindən və sağ tərəfdəki çoxluqların ölçülən olmasından $\frac{1}{f(x)}$ funksiyasının ölçülən olması alınır.

Teorem 2.4.2. Əgər E çoxluğunda iki ölçülən $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları verilmişdirsə, onda $E(f>g)$ çoxluğu ölçüləndir.

İsbatı. Bütün $r \in (-\infty, \infty)$ rasional nöqtələrini (ədədlərini) hər hansı ardıcıllıqla

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots,$$

şəklində nömrələyək. Göstərək ki,

$$E(f>g)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[E(f>r_k) \bigcap E(g<r_k)\right]. \qquad (2.4.1)$$

Tutaq ki, $x \in E(f>g)$. Bu o deməkdir ki, $f(x)>g(x)$-dir. Elə rasional r_k ədədi tapmaq olar ki,

$$f(x)>r_k>g(x)$$

olar. Buradan isə alınır ki,

$$x \in E(f > r_k) \cap E(g < r_k)$$

olar və buna görə də

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[E(f > r_k) \bigcap E(g < r_k) \right]$$

olar.

İndi tərsinə, tutaq ki,

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[E(f > r_k) \bigcap E(g < r_k) \right].$$

Onda x nöqtəsi $E(f > r_k) \bigcap E(g < r_k)$ toplananlarından heç olmazsa birinə daxil olar. Bu o deməkdir ki, $f(x) > r_k$ və $g(x) < r_k$ olar, yəni $f(x) > g(x)$ və nəticədə $x \in E(f > g)$. Beləliklə, (2.4.1) bərabərliyi isbat olunur. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları E çoxluğunda ölçülən olduqlarından (2.4.1) bərabərliyinin sağ tərəfinə daxil olan çoxluqların hər biri ölçüləndir, nəticədə həmin çoxluqların kəsişməsi də ölçüləndir. Ölçülən çoxluqların kəsişməsi və birləşməsi ölçülən çoxluq olduğun-dan $E(f > g)$ çoxluğu da ölçüləndir.

Teorem 2.4.3. $f(x)$ və $g(x), E$ çoxluğunda sonlu qiymətlər alan, ölçülən funksiyalardırsa, onda 1) $f(x) - g(x)$, 2) $f(x) + g(x)$, 3) $f(x) \cdot g(x)$ və $g(x) \neq 0$ olarsa, 4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funk-siyalarından hər biri E çoxluğunda ölçüləndir.

İsbatı. 1) E çoxluğunda $g(x)$ funksiyası ölçülən olduğundan, istənilən a ədədi üçün $a + g(x)$ funksiyası da E çoxluğunda ölçüləndir. Onda teorem 2.4.2-yə əsasən $E(f > a + g)$ çoxluğu ölçülən olacaqdır. Digər tərəfdən,

$$E(f - g > a) = E(f > a + g)$$

olduğundan bu bərabərlikdən alınır ki, $E(f-g>a)$ çoxluğu, nəticədə isə $f(x)-g(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndir.

Teorem 2.4.1-də k= -1 üçün $-g(x)$ funksiyası ölçüləndir və teoremin isbat edilən hissəsinə əsasən 2) $f(x)+g(x)$ funksiyasının ölçülən olması

$$f(x)+g(x)=f(x)-[-g(x)]$$

bərabərliyindən alınır.

3) $f(x)\cdot g(x)$ hasilinin ölçülən olması

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\left\{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2\right\}$$

eyniliyindən alınır, çünki sağ tərəfdəki orta mötərizə içərisindəki funksiyaların hər biri, həm də onların kvadratı ölçüləndir, nəticədə iki ölçülən funksiyanın fərqi kimi sağ tərəfdəki funksiya ölçüləndir. Onda sol tərəfdəki $f(x)\cdot g(x)$ funksiyası da ölçülən olacaqdır.

4) E-də $g(x)\neq 0$ olarsa, onda $\frac{1}{g(x)}$ funksiyası E-də ölçülən olduğundan və $\frac{f(x)}{g(x)}$ iki ölçülən funksiyanın hasili kimi

$$f(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

şəklində göstərilə bildiyindən $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiyası E çoxluğunda ölçülən olacaqdır.

İsbat edilən teorem 2.4.3-də E çoxluğunun bütün nöqtələrində $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının sonlu qiymət almaları şərti qeyd edilmişdir, bu şərt vacibdir. Əks halda, bu funksiyalar üzərində hesab əməlləri mənasını itirə bilər. Məsələn, hər hansı nöqtədə $f(x)=+\infty$ və $g(x)=-\infty$ olarsa, onda həmin nöqtədə $f(x)+g(x)$ cəmi haqqında heç bir söz deyə bilmərik. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları üzərində əməl icra etdikdə göstərilən qeyri-müəyyənlik yoxdursa, onda $f(x)$ və $g(x)$ üçün sonsuz qiymətlər də götürülə bilər.

Teorem 2.4.4. Sonlu və $+\infty$ qiymət alan $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları E çoxluğunda ölçüləndirsə, onda $f(x)+g(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndir.

İsbatı. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarından heç olmazsa, birinin $+\infty$-a bərabər qiymət aldığı $x\in E$ nöqtələr çoxluğu A olsun. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları E çoxluğunda ölçülən olduqlarından və

$$A=E[f=+\infty]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f>n)$$

və ya

$$A=E[g=+\infty]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(g>n)$$

şəklində göstərilə bildiyindən A çoxluğu ölçüləndir. Digər tərəfdən, $f(x)+g(x)$ cəmi A çoxluğunda sabit $+\infty$ qiymətini alır, ona görə də $f(x)+g(x)$ cəmi A çoxluğunda ölçüləndir. $E'=E\setminus A$ çoxluğunda həm $f(x)$, həm də $g(x)$ funksiyaları sonlu qiymətlər alır, onda teorem 2.4.3-ə əsasən $f(x)+g(x)$ cəmi E' çoxluğunda ölçüləndir. Buna görə də $f(x)+g(x)$ cəmi $E=E'\cup A$ çoxluğunda da ölçülən olacaqdır. Bununla da teorem isbat olunur.

§ 5. Ölçülən funksiyalar ardıcıllığı

Bu paraqrafda ölçülən funksiyalar ardıcıllığının limiti də ölçülən funksiya olması araşdırılır. Əvvəlcə limit anlayışı ilə əlaqədar bəzi halları (keyfiyyətləri) aydınlaşdıraq.

Tutaq ki,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \qquad (2.5.1)$$

həqiqi ədədlər ardıcıllığı verilmişdir, belə ki, bu ədədlər arasında $+\infty$ və ya $-\infty$ ədələri də ola bilər. $[a_n, a_{n+1}, \ldots]$ ədədlər çoxluğunun dəqiq aşağı sərhədini s_n ilə, dəqiq yuxarı sərhədini isə t_n ilə işarə edək, yəni

$$s_n = \inf[a_n, a_{n+1} \ldots]; \quad t_n = \sup[a_n, a_{n+1}, \ldots] \qquad (2.5.2)$$

olsun.

n artdıqca s_n azalmır və t_n artmır. Beləliklə, n sonsuz olaraq artdıqda monoton s_n və t_n ardıcıllıqları sonlu və ya sonsuz

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S; \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = T,$$

limitlərinə malik olcaqdır, belə ki, monotonluğa əsasən

$$S = \sup s_n; \; T = \inf t_n, \qquad (2.5.4)$$

olar, bundan əlavə $s_n \le t_n$ olmasından $S \le T$ alınır. Qeyd edək ki,

$$(+\infty), (+\infty), \ldots,; \text{ və } (-\infty), (-\infty) \ldots$$

ardıcıllıqlarının limitlərini uyğun olaraq $+\infty$-a və $-\infty$-a bərabər hesab edəcəyik. S və T ədədləri (2.5.1) ardıcıllığının uyğun olaraq aşağı və yuxarı limitləri adlanır.

Çox vaxt

$$S = \underline{\lim} a_n \text{ və ya } S = \lim_{n\to\infty} \inf a_n \; ;$$

$$T = \overline{\lim} a_n \text{ və ya } T = \lim_{n\to\infty} \sup a_n$$

yazılışından istifadə edilir.

Aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma 2.5.1. (2.5.1) ardıcıllığının limitinin (sonlu və ya sonsuz) varlığı üçün $S = T$ olması zəruri və kafi şərtdir və əgər bu şərt ödənərsə, onda qeyd edilən limit S-ə bərabərdir.

İsbatı. Əvvəlcə kafi şərti isbat edək. $k \ge n$ olduqda $s_n \le a_k \le t_n$ alarıq, əgər s_n-in və t_n-in limitləri üst-üstə düşərsə, yəni $S = T$ olarsa, onda $a_n \to S$, yəni $\lim_{n\to\infty} a_n = S$ olar.

İndi zəruriliyi isbat edək. (2.5.1) ardıcıllığının sonlu δ limiti, yəni $\lim_{n\to\infty} a_n = \delta$ olsun. Buna görə, istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə n_0 nömrəsi var ki, $n \geq n_0$ olduqda $a_n \in (\delta - \varepsilon, \delta + \varepsilon)$. Ardıcıllığın dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədinin tərifinə əsasən $n \geq n_0$ olduqda $s_n, t_n \in (\delta - \varepsilon, \delta + \varepsilon)$ olar. Onda $\varepsilon > 0$-ın ixtiyariliyinə əsasən buradan alınır ki, $s_n \to \delta$ və $t_n \to \delta$, yəni $S = T = \delta$. Tamamilə analoji olaraq (2.5.1) ardıcıllığının sonsuz limiti olduğu hala baxılır.

İndi ölçülən funksiyalar ardıcıllığının bəzi xassələrini isbat edək.

Teorem 2.5.1. E çoxluğunda verilmiş $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı ölçüləndirsə, onda $\forall x \in E$ üçün

$$\varphi(x) = \inf_n f_n(x) \text{ və } \psi(x) = \sup_n f_n(x) \qquad (2.5.5)$$

funksiyaları E çoxluğunda ölçüləndir.

İsbatı. $\psi(x)$ funksiyasının ölçülən olduğunu göstərək. Bu funksiyanın ölçülən olması

$$E(\psi > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > a) \qquad (2.5.6)$$

bərabərliyindən alınır. Doğrudan da, $x \in E(\psi > a)$, yəni $\psi(x) > a$ fərz etsək, onda kifayət qədər kiçik $\varepsilon > 0$ üçün $\psi(x) > a + \varepsilon$ olar. Dəqiq yuxarı sərhədin tərifinə görə elə n_0 nömrəsi tapmaq olar ki, $f_{n_0}(x) > \psi(x) - \varepsilon$ olar. Buradan $f_{n_0}(x) > (a + \varepsilon) - \varepsilon = a$ və buna görə $x \in E(f_{n_0} > a)$, nəticədə $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > a)$ olar.

Tutaq ki,

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > a),$$

onda elə n_0 nömrəsi var ki, $x \in E\left(f_{n_0} > a\right)$, yəni $f_{n_0}(x) > a$ olar. Lakin $\psi(x) \geq f_{n_0}(x) > a$, yəni $x \in E(\psi > a)$-dir, bununla da (2.5.6) bərabərliyi isbat olunur. Buradan da $\psi(x)$-in ölçülən olduğu alınır. $\varphi(x)$ funksiyasının E çoxluğunda ölçülən olması analoji qayda ilə

$$E(\varphi < a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f_n(x) < a\right)$$

bərabərliyindən alınır.

Teorem 2.5.2. Ölçülən $f_n(x)$ (n=1,2,…) funksiyalar ardıcıllığı E çoxluğunun hər bir x nöqtəsində monoton artan (və ya monoton azalan) ardıcıllıqdırsa, onda $f(x)$ limit funksiyası E çoxluğunda ölçüləndir.

İsbatı. Monoton artan funksiyalar ardıcıllığının limit funksiyası bu ardıcıllığın $\psi(x)$ dəqiq yuxarı sərhədi ilə, monoton azalan ardıcıllıqların limit funksiyası isə $\varphi(x)$ dəqiq aşağı sərhədi ilə üst-üstə düşdüyü üçün, bu teoremin isbatı bilavasitə teorem 2.5.1-dən nəticə olaraq çıxır.

Teorem 2.5.3. E çoxluğunda verilmiş $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı ölçüləndirsə, onda bu ardıcıllığın $S(x)$ aşağı və $T(x)$ yuxarı limitləri də E çoxluğunda ölçülən funksiyalardır.

İsbatı. $x \in E$ üçün

$$s_n(x) = \inf\left[f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\right]; \; t_n(x) = \sup\left[f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\right]$$

funksiyalarını daxil edək. Teorem 2.5.1-ə əsasən ixtiyari n üçün $s_n(x)$ və $t_n(x)$ funksiyaları E çoxluğunda ölçüləndirlər. $S(x)$ və $T(x)$ funksiyaları uyğun olaraq monoton $s_n(x)$ və $t_n(x)$ ardıcıllıqlarının limit funksiyalarıdır, odur ki, teorem

2.5.2-yə əsasən onlar da E çoxluğunda ölçülən funksiyalardır.

Teorem 2.5.4. E çoxluğunda verilmiş ölçülən $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığının hər bir $x \in E$ nöqtəsində (sonlu və ya sonsuz)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

limiti varsa, onda $f(x)$ limit funksiyası da E çoxluğunda ölçüləndir.

İsbatı. Şərtə görə hər bir $x \in E$ nöqtəsində $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ limiti var. Onda lemma 2.5.1-ə əsasən

$$S(x) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) = T(x) = f(x)$$

olmalıdır. Teorem 2.5.3-ə əsasən isə $S(x)$ və $T(x)$ limitləri E çoxluğunda ölçüləndirlər, nəticədə $f(x)$ limit funksiyası da E çoxluğunda ölçüləndir.

Bu teorem ölçülən funksiyalar ardıcıllığının hər bir nöqtədə yığılmasında əsas rol oynayır, onu bir qədər ümumiləşdirmək olar.

Tərif 2.5.1. Ölçüsü sıfır olan $E' \subset E$ altçoxluğu müstəsna olmaqla bütün $x \in E$ nöqtələrində

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

olarsa, onda deyirlər ki, $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı E çoxluğunda sanki hər yerdə $f(x)$-ə yığılır və

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{s.h.y} f(x)$$

şəklində yazılır.

Teoerm 2.5.5. E çoxluğunda ölçülən $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı sanki hər yerdə $f(x)$ funksiyasına yığılarsa:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad (2.5.7)$$

onda $f(x)$ funksiyası da E çoxluğunda ölçüləndir.

İsbatı. E çoxluğunun (2.5.7) şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğu E' və $E''=E\setminus E'$ olsun. Onda $mE''=0$ və buna görə də E'' çoxluğu ölçülən olar. Ölçüsü sıfır olan çoxluqda istənilən funksiya ölçülən olduğundan $f(x)$ limit funksiyası E'' çoxluğunda, yəni $E\setminus E'$ çoxluğunda ölçülən olar. $f_n(x)(n=1,2,...)$ funksiyaları E' çoxluğunda 2.5.7 şərtini ödəyir. Onda teorem 2.5.4-ə əsasən $f(x)$ limit funksiyası E' çoxluğunda ölçülən olacaqdır. Bundan başqa, $E'=E\setminus E''$ iki ölçülən çoxluğun fərqi kimi ölçüləndir. Nəticədə teorem 2.2.4-ə əsasən $f(x)$ funksiyası $E=E'\bigcup E''$ çoxluğunda ölçüləndir.

Misal. $[0,1]$ seqmentində $f_n(x)=(-x)^n$, $n=1,2,\ldots$ funksiyalar ardıcıllığı $n\to\infty$ olduqda $f(x)\equiv 0$ funksiyasına sanki hər yerdə yığılır ($x=1$ nöqtəsindən başqa hər yerdə yığılır).

Rusiyada həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin yaradıcılarından olan D.F.Yeqorov (1869-1931) 1913-cü ildə sanki hər yerdə yığılma və müntəzəm yığılma anlayışları arasında əlaqə yaradan aşağıdakı teoremi isbat etmişdir.

Teorem 2.5.6 (Yeqorov). $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı E çoxluğunda sanki hər yerdə $f(x)$ funksiyasına yığılarsa, onda istənilən $\delta>0$ ədədi üçün elə ölçülən $E_\delta\in E$ çoxluğu var ki,

1) $mE_\delta>mE-\delta$ olur;

2) E_δ çoxluğunda $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı $f(x)$-ə müntəzəm yığılır.

Ölçülən funksiyalar nəzəriyyəsində mühüm rol oynayan daha bir yığılma anlayışı da daxil edək.

Tərif 2.5.2. Tutaq ki, E çoxluğunda ölçülən və sanki hər yerdə sonlu olan

$$f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_n(x),\ldots \qquad (2.5.8)$$

funksiyalar ardıcıllığı, ölçülən və sanki hər yerdə sonlu $f(x)$ funksiyası verilmişdir.

İstənilən $\delta > 0$ ədədi üçün

$$\lim_{n\to\infty} mE\left(\left|f_n - f\right| \ge \delta\right) = 0 \qquad (2.5.9)$$

olduqda deyirlər ki, (2.5.8) ardıcıllığı E çoxluğunda ölçüyə görə $f(x)$ funksiyasına yığılır.

$mE < +\infty$ olduğu halda (2.5.9) şərti göstərir ki, E-nin $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən nöqtələr çoxluğunun ölçüsü $n \to \infty$ olduqda bütün E çoxluğunun ölçüsünə istənilən qədər yaxın olur.

Rus alimi Q.M.Fixtenqols (1888-1959) tərəfindən ölçüyə görə yığılma işarəsi

$$f_n \Rightarrow f$$

şəklində daxil edilmişdir.

Qeyd edək ki, eyni funksiyalar ardıcıllığı ölçüyə görə müxtəlif funksiyalara yığıla bilər. Bu təklif aşağıdakı teoremlərdən aydındır.

Teorem 2.5.7. E çoxluğunda $f_n \Rightarrow f$, $f \sim g$ olarsa, onda $f_n \Rightarrow g$.

İsbatı. İstənilən $\delta > 0$ ədədinə görə

$$E\left(\left|f_n - g\right| \ge \delta\right) \subset E(f \ne g) \cup E\left(\left|f_n - f\right| \ge \delta\right)$$

olacaqdır, buradan $mE(f \ne g) = 0$ olduğu üçün

$$mE\left(\left|f_n - g\right| \ge \delta\right) \le mE\left(\left|f_n - f\right| \ge \delta\right)$$

bərabərsizliyini alarıq. Bu bərabərsizlikdən və $n \to \infty$ olduqda

$$mE\left(\left|f_n - f\right| \ge \delta\right) \to 0$$

olmasından

$$mE\left(\left|f_n - g\right| \ge \delta\right) \to 0$$

alınır ki, bu da E -də $f_n \Rightarrow g$ olduğunu göstərir.

Teorem 2.5.8. Əgər E çoxluğunda $f_n \Rightarrow f$ və $f_n \Rightarrow g$ olarsa, onda $f \sim g$ olar.

İsbatı. İstənilən $\delta > 0$ üçün

$$E\left(\left|f - g\right| \geq \delta\right) \subset E\left(\left|f_n - f\right| \geq \frac{\delta}{2}\right) \cup E\left(\left|f_n - g\right| \geq \frac{\delta}{2}\right) \qquad (2.5.10)$$

münasibəti doğrudur. Tutaq ki,

$$x \in E\left(\left|f_n - g\right| \geq \delta\right) - \left\{E\left(\left|f_n - f\right| \geq \frac{\delta}{2}\right) \cup E\left(\left|f_n - g\right| \geq \frac{\delta}{2}\right)\right\}.$$

Onda $x \in E$, lakin (2.5.10)-un sağ tərəfinə daxil olmaz, yəni

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\delta}{2} \text{ və } \left|f_n(x) - g(x)\right| < \frac{\delta}{2}$$

olar. Buradan

$$\left|f(x) - g(x)\right| < \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - g(x)\right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

olar ki, bu da x nöqtəsinin (2.5.10) münasibətinin sol tərəfinə də daxil olmadığını, yəni $x \overline{\in} E(|f_n - g| \geq \delta)$ olduğunu göstərir.

$$f_n \Rightarrow f, \; f_n \Rightarrow g$$

münasibətləri isə

$$\lim_{n \to \infty}\left[mE\left(\left|f_n - f\right| \geq \frac{\delta}{2}\right) + mE\left(\left|f_n - g\right| \geq \frac{\delta}{2}\right)\right] = 0,$$

nəticədə isə, $mE\left(\left|f - g\right| \geq \delta\right) = 0$ olduğunu göstərir. Ancaq

$$E\left(f \neq g\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(\left|f - g\right| \geq \frac{1}{n}\right)$$

olduğu üçün E çoxluğunda $f \sim g$ olması alınır.

İndi ölçüyə görə yığılma və sanki hər yerdə yığılma arasında münasibəti aydınlaşdıraq. Bunun üçün aşağıdakı iki teoremə baxaq.

Teorem 2.5.9 **(A.Lebeq).** Tutaq ki, sonlu ölçülü ($mE < +\infty$) E çoxluğunda ölçülən və sanki hər yerdə sonlu

$f_n(x)$ $(n = 1,2,...)$ funksiyalar ardıcıllığı və sanki hər yerdə sonlu $f(x)$ funksiyası verilmişdir. Əgər $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı E çoxluğunda sanki hər yerdə $f(x)$ funksiyasına yığılarsa, onda bu ardıcıllıq E çoxluğunda ölçüyə görə həmin $f(x)$ funksiyasına yığılır.

İsbatı. Qeyd edək ki, teorem 2.5.5-ə əsasən $f(x)$ limit funksiyası E çoxluğunda ölçüləndir, $n \to \infty$ olduqda $mE(|f_n - f| \geq \delta) \to 0$ olduğunu isbat etmək lazımdır. $f_n(x)$ və $f(x)$ funksiyalarının sonsuz qiymətlər aldığı və { $f_n(x)$ }-in $f(x)$ -ə yığılmadığı nöqtələr çoxluğunu

$$A = (|f| = +\infty),$$

$$A_n = E(|f_n| = +\infty),$$

$$B = E(f_n \nrightarrow f)$$

kimi işarə edək. Teoremin şərtlərinə əsasən bu çoxluqların hər birinin ölçüsü sıfra bərabərdir, yəni

$$mA = 0;\ mA_n = 0;\ mB = 0.$$

Odur ki,

$$Q = A \cup B \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

birləşməsi üçün də $mQ = 0$ olar.

Aşağıdakı çoxluqlara baxaq:

$$E_k(\delta) = E(|f_k - f| \geq \delta), R_n(\delta) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\delta), M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\delta).$$

Aydındır ki, bu çoxluqların hamısı ölçüləndir.

$$R_1(\delta) \supset R_2(\delta) \supset R_3(\delta) \supset \ldots \supset R_n(\delta) \supset \ldots$$

olduğu üçün, ölçünün kəsilməzlik xassəsinə əsasən $n \to \infty$ olduqda

$$mR_n(\delta) \to mM \qquad (2.5.11)$$

olacaqdır.

İndi

$$M \subset Q \qquad (2.5.12)$$

olduğunu yoxlayaq.

Doğrudan da, $x_0 \overline{\in} Q$ üçün

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$$

olur. Deməli, verilən $\delta > 0$ üçün elə n nömrəsi tapılar ki, $k \geq n$ üçün $|f_k(x_0) - f(x_0)| < \delta$ olar, yəni $k \geq n$ üçün $x_0 \overline{\in} E_k(\delta)$, buna görə də $x_0 \overline{\in} R_k(\delta)$ olar. Onda $x_0 \overline{\in} M$ olur. Buradan da $M \subset Q$ alınır.

Bu zaman $mQ = 0$ olmasına əsasən $mM = 0$ və

$$mR_n(\delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

alınır.

Bu isə teoremin isbatını verir; çünki $E_n(\delta) \subset R_n(\delta)$-dir, buradan isə $n \to \infty$ olduqda

$$mE_n(\delta) \leq mE(|f_k - f| \geq \delta) \to 0$$

olması alınır ki, bu da E çoxluğunda $f_n \Rightarrow f$ olduğunu göstərir.

Ölçüyə görə yığılma anlayışının köməyi ilə Lebeq teoremini aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.

Teorem 2.5.9*. Sanki hər yerdə yığılan funksiyalar ardıcıllığı, ölçüyə görə də həmin limit funksiyasına yığılır.

Qeyd etmək lazımdır ki, bu teoremdə $mE < +\infty$ olması əsas şərtdir, çünki $mE = +\infty$ ölçülü E çoxluğunda sanki hər yerdə yığılmadan ölçüyə görə yığılma alınmır. Bunu aşağıdakı sadə misal təsdiq edir: tutaq ki, $f_k(x)$ $(k = 1,2,\ldots)$ funksiyaları $E = (0, +\infty)$ intervalında

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq k \quad \text{olduqda}, \\ 1, & x > k \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

şəklində təyin olunmuşlar.

Onda bütün $x \in (0, +\infty)$ nöqtələri üçün $f_k(x) \to 0$ olar, lakin $mE(f_k \geq 1) = +\infty$ olar. Yəni

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=\begin{cases}0, & 0<x\le k \quad \text{olduqda},\\ 1, & x>k \quad \text{olduqda}\end{cases}$$

olar və buna görə də $\{f_k(x)\}$ ardıcıllığı ölçüyə görə $f(x)\equiv 0$ funksiyasına yığılmır.

Qeyd 2.5.1. Ardıcıllığın ölçüyə görə yığılmasından adi mənada yığılması alınmır. Misal üçün [0,1) yarımseqmentində hər bir natural *k* ədədi üçün

$$f_i^{(k)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right) \text{ olduqda},\\ 0, & x\,\tilde{\in}\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right) \text{ olduqda}\end{cases}$$

$$(i=1,2,\ldots,k;\ k=1,2,\ldots)$$

şəklində olmaqla k sayda

$$f_1^{(k)}(x),\ f_2^{(k)}(x),\ldots,\ f_k^{(k)}(x)$$

funksiyalarını təyin edək. Xüsusi halda $[0,1)$-də $f_1^{(1)}(x)\equiv 1$ olur. Bütün qurulan funksiyaları bir ardıcıllıq şəklində yazaq, bunun üçün aşağı indeksləri artma ardıcıllığı, yuxarı indeksləri isə eyni bir aşağı indeks üçün artma ardıcıllığı ilə nömrələyək, onda

$$\varphi_1(x)=f_1^{(1)}(x),\ \varphi_2(x)=f_1^{(2)}(x),\ \varphi_3(x)=f_2^{(2)}(x),$$

$$\varphi_4(x)=f_1^{(3)}(x),\ \varphi_5(x)=f_2^{(3)}(x),\ \varphi_6(x)=f_3^{(3)}(x),\ \ldots \quad (2.5.13)$$

Asanlıqla $\varphi_n(x)$ funksiyalar ardıcıllığının $[0,1)$-də ölçüyə görə sıfra yığıldığını müəyyən etmək olar. Doğrudan da, əgər $\varphi_n(x)=f_i^{(k)}(x)$ olarsa, onda istənilən $\delta>0$ üçün

$$E\left(|\varphi_n-0|\ge\delta\right)=\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right) \text{ və } mE\left(|\varphi_n|\ge\delta\right]=m\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right]=\frac{1}{k}$$

olur ki, bu da, $n\to\infty$ olduqda təklifin doğruluğunu göstərir. Eyni zamanda istənilən $x\in[0,1)$ nöqtəsi üçün (2.5.13) ardıcıllığında bu nöqtədə vahidə, həm də sıfra bərabər qiymətlər alan sonsuz sayda funksiyalara rast gəlmək olar. Nəticədə, (2.5.13) ardıcıllığının x nöqtəsində limiti yoxdur. $x \in E$ ixtiyari olduğundan $[0,1)$ aralığının heç bir nöqtəsində $\varphi_n(x) \to 0$ münasibətinin ödənmədiyini deyə bilərik.

Beləliklə, ölçüyə görə yığılma anlayışı, sanki hər yerdə yığılma anlayışından, xüsusən də hər yerdə yığılma anlayışından daha ümumi (geniş) mühüm anlayışdır.

Buna baxmayaraq macar riyaziyyatçısı F.Riss (1880-1956) aşağıdakı teoremi isbat etmişdir.

Teorem 2.5.10 (Riss). Tutaq ki, sonlu ölçülü $(mE < +\infty)$ E çoxluğunda ölçülən və sanki hər yerdə sonlu $f_n(x)\,(n = 1,2,...)$ funksiyalar ardıcıllığı və sanki hər yerdə sonlu $f(x)$ funksiyası verilmişdir. Əgər $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı E çoxluğunda ölçüyə görə $f(x)$-ə yığılarsa, onda bu ardıcıllıqdan E–də sanki hər yerdə $f(x)$ funksiyasına yığılan $\{f_{n_k}(x)\}$ altardıcıllığı ayırmaq olar.

İsbatı. Ümumiliyi pozmadan $f_n(x)$ və $f(x)$ funksiyalarının E çoxluğunda sanki hər yerdə yox, hər yerdə sonlu qiymətlər aldığını fərz edə bilərik (əks halda teorem 2.5.9-un isbatında olduğu kimi A və A_n çoxluqları daxil edərək, bütün mühakimələri $E \setminus \left(A \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$ çoxluğu üçün apararıq).

Qeyd edək ki, $\{f_{n_k}(x)\}$ altardıcıllığını qurmaq üçün

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \qquad (2.5.14)$$

indekslər ardıcıllığını qurmaq lazımdır. Bunun üçün müsbət hədli monoton azalan, limiti sıfra bərabər olan

$$\delta_1 > \delta_2 > \ldots \delta_k > \ldots$$

ədədlər ardıcıllığı və müsbət hədli yığılan

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_k + \ldots$$

ədədi sıra götürək.

İndi tələb edilən (2.5.14) indekslər ardıcıllığını quraq. $\{f_{n_k}(x)\}$ altardıcıllığının ölçüyə görə E-də $f(x)$-ə yığılmasına əsasən

$$\lim_{n\to\infty} mE\left(\left|f_n - f\right| \geq \delta_1\right) = 0$$

olduğundan elə η_1 nömrəsi var ki, onun üçün

$$mE\left(\left|f_{n_1} - f\right| \geq \delta_1\right) < \eta_1$$

olar.

$$\lim_{n\to\infty} mE\left(\left|f_n - f\right| \geq \delta_2\right) = 0$$

olduğundan elə $\eta_2 < \eta_1$ nömrəsi var ki,

$$mE\left(\left|f_{n_2} - f\right| \geq \delta_2\right) < \eta_2, \quad n_2 > n_1 .$$

Ümumiyyətlə, n_k ilə elə natural ədədi işarə edək ki,

$$mE\left(\left|f_{n_k} - f\right| \geq \delta_k\right) < \eta_k, \quad \eta_k > \eta_{k-1}$$

olsun.

Beləliklə, (2.5.14) ardıcıllığı yəni $\{f_{n_k}(x)\}$ altardıcıllığı alınır. Göstərək ki, $\{f_{n_k}(x)\}$ altardıcıllığı sanki hər yerdə $f(x)$ funksiyasına yığılır.

Teorem 2.5.9-un isbatındakı kimi

$$R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} E\left(\left|f_{n_k} - f\right| \geq \delta_k\right), \; M = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$$

ilə işarə edək.

$$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots$$

olduğu üçün ölçünün kəsilməzlik xassəsinə əsasən

$$mR_i \to mM$$

olacaqdır.

Digər tərəfdən aydındır ki, $mR_i < \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k$, buradan $i \to \infty$ olduqda $mR_i \to 0$, yəni $mM = 0$ alınır.

İndi E çoxluğunda sanki hər yerdə

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \qquad (2.5.15)$$

olduğunu müəyyənləşdirək. Bunun üçün $E \setminus M$ çoxluğunun bütün nöqtələrində (2.5.15) münasibətinin ödəndiyini yoxlamaq lazımdır.

$x_0 \in E \setminus M$ olsun, onda elə k_0 tapılar ki, $x_0 \overline{\in} R_{k_0}$ olduğuna görə $x_0 \in E$, $x_0 \overline{\in} M$ olar. Bu isə göstərir ki, bütün $k \geq k_0$-lar üçün

$$x_0 \overline{\in} E\left(\left| f_{n_k}(x) - f \right| \geq \delta_k\right).$$

Burada $\left| f_{n_k}(x_0) - f(x_0) \right| < \delta_k$ $(k > k_0)$ olur. Buradan, şərtə görə $\delta_k \to 0$ olduğu üçün $\lim_{k\to\infty} f_{nk}(x_0) = f(x_0)$ olur ki, bununla da teorem isbat olur.

Ölçülən funksiyalara aid tapşırıqlar.

1. Ölçülən E çoxluğunda $f(x)$ funksiyası verildikdə, isbat edin ki, istənilən A ədədi üçün $f(x) \geq A$ şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğu ölçüləndirsə, onda $f(x) = A$ şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğu da ölçüləndir.

2. İstənilən aralıqda hər bir rasional (tam olmayan) funksiyanın ölçülən olduğunu isbat edin.

3. $D(x)$ Dirixle funksiyası olduqda $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ seqmentində təyin edilən $f(x) = D(x) \cdot \sin x$ funksiyasının ölçülən olduğunu isbat edin.

4. $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçülən olduqda

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)>0 \text{ olarsa,} \\ 0, & f(x)\le 0 \text{ olarsa,}\end{cases}$$

$$f_-(x)=\begin{cases} 0, & f(x)\ge 0 \text{ olarsa,} \\ -f(x), & f(x)<0 \text{ olarsa}\end{cases}$$

funksiyalarının E çoxluğunda ölçülən olduğunu isbat edin.

5. $f(x)\ge 0$ funksiyası E çoxluğunda ölçülən olduqda, $\sqrt{f(x)}$ funksiyasının E çoxluğunda ölçülən olduğunu isbat edin.

6. Əgər $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndirsə,

$$[f(x)]_n=\begin{cases} f(x), & \text{əgər } |f(x)|\le n, \\ 0, & \text{əgər } |f(x)|>n\end{cases}$$

şəklində təyin edilən $[f(x)]_n$ funksiyası E çoxluğunda ölçülən olacaqdırmı?

7. $|f(x)|$-in E çoxluğunda ölçülən olmasından həmin çoxluqda $f(x)$-in ölçülən olması alınırmı?

8. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları E çoxluğunda ölçülən və pilləli olduqda $\alpha f(x)+\beta g(x)$ və $f(x)\cdot g(x)$ funksiyaların da (α və β sabitlər olduqda) E çoxluğunda ölçülən və pilləli funksiyalar olduğunu göstərin.

9. E çoxluğu və istənilən r rasional ədədi üçün $E(f<r)$ çoxluqları ölçüləndirsə, onda $f(x)$ funksiyasının ölçülən olduğunu isbat edin.

10. $[a,b]$ seqmentində yığılan ölçülən funksiyalar sırasının cəminin ölçülən funksiya olduğunu göstərin.

11. $\{x^n\}$ ardıcıllığının $[0,1]$-də sanki hər yerdə $f(x)=0$ funksiyasına yığıldığını göstərin. $\{x^n\}$ ardıcıllığının $f(x)$-ə həm də ölçüyə görə yığıldığını göstərin.

Tutaq ki, $\{f_n(x)\}$ və $\{g_n(x)\}$ ölçülən funksiyalar ardıcıllığı E çoxluğunda ölçüyə görə ölçülən $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarına yığılır. Aşağıdakı təklifləri (fikirləri) isbat edin (12-15 məsələlər).

12. $\{\alpha f_n\}$ ardıcıllığı ölçüyə görə $\alpha f(x)$-ə yığılır.

13. $\{f_n(x)+g_n(x)\}$ ardıcıllığı ölçüyə görə $f(x)+g(x)$ funksiyasına yığılır.

14. $\{|f_n(x)|\}$ ardıcıllığı ölçüyə görə $|f(x)|$ funksiyasına yığılır.

15. $\{f_n g_n\}$ ardıcıllığı ölçüyə görə $f \cdot g$ -ə yığılır.

III FƏSİL

MƏHDUD FUNKSİYANIN LEBEQ İNTEQRALI

§ 1. Riman inteqralı

1.1. İnteqralın Riman tərifi. Darbu cəmləri.

Məşhur fransız riyaziyyatcısı O.L.Koşi (1798-1857) tərəfindən verilmiş və alman riyaziyyatçısı B.Riman (1826-1866) tərəfindən inkişaf etdirilmiş inteqralın klassik tərifi, inteqralın Riman (Koşi–Riman) tərifi artıq riyazi analiz kursundan məlumdur. Riman inteqralı haqqında bəzi faktları xatırlayaq.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentində məhduddur. $[a,b]$ seqmentini

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$$

nöqtələri ilə istənilən qaydada kiçik $[x_k,x_{k+1}]$ hissələrinə bölək və hər bir hissədə ixtiyari $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$ $(k=\overline{0,n-1})$ nöqtələrini seçərək

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$

şəklində, Riman inteqral cəmi ya da sadəcə inteqral cəmi adlanan cəm düzəldək.

Aydındır ki, σ inteqral cəmi $[a,b]$-nin hissələrə bölünməsi və ξ_k nöqtələrinin seçilməsi üsullarından asılıdır.

Tərif 3.1.1. $[a,b]$ seqmentinin bölünməsi və ξ_k nöqtələrinin seçilməsi üsullarından asılı olmayaraq, $\lambda=\max\limits_k(x_{k+1}-x_k)$ ədədi sıfra yaxınlaşdıqda, σ inteqral cəmi sonlu J limitinə yaxınlaşarsa, onda bu limitə $[a,b]$-də $f(x)$ funksiyasının Riman inteqralı, yaxud müəyən inteqral deyilir və

$$J = \int_a^b f(x)dx$$

simvolu ilə işarə edilir.

Bəzən söhbət məhz Riman inteqralı haqqında olduğunu bildirmək məqsədi ilə həmin inteqralı

$$J = (R)\int_a^b f(x)dx$$

şəklində də yazırlar.

Müəyyən inteqralın kəsilməz funksiyalar üçün tərifi 1823-cü ildə Koşi tərəfindən verilmişdir.

Burada verilən inteqral anlayışı həm də kəsilən funksiyalar üçün, 1854-cü ildə Riman tərəfindən tədqiq edilmişdir. Riman inteqralı olan funksiyalar sinfi, Riman mənada inteqrallanan və ya qısaca olaraq (R) inteqrallanan funksiyalar adlanır. Aydındır ki, hər bir k-cı $[x_k,x_{k+1}]$ seqmentdə $f(x)$-in dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədləri var, çünki $f(x)$ funksiyası $[a,b]$-də məhdud olduğundan onun hər bir hissəsində də, məhdud olacaqdır.

k-cı $[x_k,x_{k+1}]$ seqmentində $f(x)$ funksiyasının dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədlərini uyğun olaraq m_k və M_k ilə işarə edərək, $[a,b]$ seqmentində $f(x)$ funksiyası üçün uyğun olaraq, aşağı və yuxarı Darbu* cəmləri adlanan daha sadə

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) \quad \text{və} \quad \overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$

cəmlərini düzəldək.

Qeyd edək ki, Darbu cəmləri $[a,b]$ seqmentinin hissələrə bölünməsi üsulundan asılıdır, lakin ξ_k nöqtələrinin seçilməsindən asılı deyil.

Darbu cəmləri aşağıdakı mühüm xassələrə malikdir.

Xassə 3.1.1. $[a,b]$ seqmentinin verilmiş bölgüsünə

---

* Qaston Darbu (1842-1917) fransız riyaziyyatçısıdır.

uyğun (istənilən) σ inteqral cəmi, həmin bölgünün Darbu cəmləri arasında yerləşir:

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S}\,.$$

Xassə 3.1.2. $[a,b]$ seqmentinin verilmiş bölgüsünə uyğun $\underline{S}$ aşağı və $\overline{S}$ yuxarı Darbu cəmləri uyğun olaraq, verilmiş bölgüyə uyğun σ inteqral cəmlərinin dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədləridir, yəni

$$\underline{S} = \inf \sigma \ , \quad \overline{S} = \sup \sigma\,.$$

Xassə 3.1.3. $[a,b]$ seqmentinin bölgü nöqtələri sırasına yeni bölgü nöqtələri əlavə etdikdə, $\underline{S}$ aşağı Darbu cəmi azalmır, $\overline{S}$ yuxarı Darbu cəmi isə artmır.

Xassə 3.1.4. $[a,b]$ seqmentinin hansı bölgüsünə aid olmasından asılı olmayaraq, hər bir aşağı Darbu cəmi, hər bir yuxarı Darbu cəmindən böyük deyildir.

Xassə 3.1.5. $[a,b]$ seqmentinin bütün mümkün olan bölgüləri üçün alınmış yuxarı Darbu cəmlərinin qiymətləri çoxluğunun dəqiq aşağı sərhədi $\overline{J}$, aşağı Darbu cəmlərinin qiymətləri çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhədi $\underline{J}$ var, yəni

$$\overline{J} = \inf \overline{S} \ , \quad \underline{J} = \sup \underline{S}$$

və

$$\underline{S} \le \underline{J} \le \overline{J} \le \overline{S}$$

bərabərsizliklər sistemi doğrudur.

$\underline{J}$ və $\overline{J}$ ədədləri uyğun olaraq, $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$-də aşağı və yuxarı Darbu inteqralları adlanır.

Xassə 3.1.6. $[a,b]$ seqmentində təyin olunmuş bütün məhdud funksiyalar üçün

$$\lim_{\lambda\to 0} \underline{S} \ \text{və} \ \lim_{\lambda\to 0} \overline{S}$$

limitləri var və

$$\underline{J} = \lim_{\lambda\to 0} \underline{S} \ \text{və} \ \overline{J} = \lim_{\lambda\to 0} \overline{S}$$

bərabərlikləri doğrudur.

Buradan və xassə 3.1.1-dən çıxır ki,

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

limiti də varsa, onda

$$\underline{J} \le J \le \overline{J}$$

bərabərsizlikləri ödənir.

Qeyd 3.1.1.

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \sigma \qquad (3.1.1)$$

limitinin olmasından eyni zamanda

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \underline{S} \;\text{ və }\; J = \lim_{\lambda \to 0} \overline{S} \qquad (3.1.2)$$

limitlərinin olması və tərsinə, (3.1.2) şərtlərinin ödənməsindən (3.1.1) münasibətinin alınmasını nəzərə alaraq, müəyyən inteqrala Darbu inteqralının (cəmlərinin) vasitəsi ilə aşağıdakı kimi də tərif vermək olar.

Tərif 3.1.2. Əgər $[a,b]$ seqmentində $f(x)$ funksiyasının aşağı və yuxarı Darbu inteqralları (cəmlərinin limitləri) üst-üstə düşərsə, onda $f(x)$-ə $[a,b]$-də Riman mənada inteqrallanan funksiya, aşağı və yuxarı Darbu inteqralının (cəmlərinin) ortaq qiymətinə (limitinə) isə $[a,b]$ seqmentində $f(x)$ funksiyasının Riman mənada inteqralı deyilir, yenə də

$$J = \int_a^b f(x)dx \;\text{ və ya }\; J = (R)\int_a^b f(x)dx$$

şəklində yazılır.

Qeyd etmək lazımdır ki, müəyyən inteqrala verilən hər iki tərif Riman mənada inteqralın

$$J = (R)\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

ortaq limiti kimi təyin edilməsini təmin edir, $\Delta x = x_{k+1} - x_k$.

1.2. *Riman inteqralının varlığı şərtləri.*

Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentində qeyri məhdud olarsa, onda onun üçün Darbu cəmləri düzəltmək olmaz, lakin σ inteqral cəmi düzəltmək olsa da, sonlu limiti olmayacaqdır. Deməli, qeyri məhdud funksiyalar Riman mənada inteqrallanan ola bilməz. Onda, Riman mənada inteqralın tərifi, Darbu cəmləri və xassələri üçün, yarayan bütün funksiyalar $[a,b]$ seqmentində məhdud olmalıdırlar. Buna əsasən, demək olar ki, $[a,b]$ seqmentində inteqrallanan bütün funksiyalar məhduddur. Başqa sözlə, $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$-də Riman mənada inteqrallanması üçün zəruri şərt, onun məhdud olmasıdır. Bu şərt yalnız zəruridir, kafi deyildir. Belə ki, elə məhdud funksiyalar qurmaq olar ki, Riman mənada inteqrallanan olmaz.

Məsələn, $[a,b]$ seqmentində təyin edilmiş

$$D(x)=\begin{cases}1\,, & x \ \text{rasional nöqtədirsə},\\ 0\,, & x \ \text{irrasional nöqtədirsə}\end{cases}$$

Dirixle[*] funksiyasına baxaq. Bu funksiya Riman mənada inteqrallanan deyil, çünki, σ inteqral cəmi bütün ξ_k nöqtələri rasional olduqda, $b–a$-ya və irrasional olduqda isə sıfra çevrilir. Bu isə $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ limitinin olmadığını, yəni $D(x)$-in $[a,b]$-də Riman mənada inteqrallanan olmadığını göstərir. Dirixle funksiyası üçün, həm də aşağı və yuxarı Darbu cəmlərinin limitləri də bərabər olmur; yəni

$$\underline{J}=\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}=0 \ \text{ və } \ \overline{J}=\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}=b-a$$

olur.

Deməli, inteqralın Riman tərifi mühüm çatışmazlıqlara malikdir, belə ki, göründüyü kimi hətta ən sadə funksiyalar Riman mənada inteqrallanan deyil.

---

[*] Lejen Peter Dirixle (1805-1859) alman riyaziyyatçısıdır.

Əsas məsələ, məhdud funksiyaların Riman mənada inteqrallanması şərtlərini aydınlaşdırmaqdan ibarətdir ki, bu da Riman tərəfindən aşağıdakı teoremlə verilmişdir.

Teorem 3.1.1 (**Riman kriterisi**). $[a,b]$ seqmentində məhdud $f(x)$ funksiyasının Riman mənada inteqralının varlığı üçün

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{S}-\underline{S})=0 \quad \text{və ya} \quad \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(x_{k+1}-x_k)=0$$

bərabərliyinin ödənməsi zəruri və kafi şərtdir, burada $\omega_k=M_k-m_k$ ilə $f(x)$ funksiyasının k-cı $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=\overline{1,n})$ seqmentindəki rəqsi işarə edilmişdir. Bu teoremi tətbiq etməklə asanlıqla göstərmək olur ki,

1. $[a,b]$ seqmentində təyin edilmiş bütün kəsilməz funksiyalar;

2. $[a,b]$ seqmentində sonlu sayda kəsilmə nöqtələri olan bütün məhdud funksiyalar, xüsusi halda

a) $a<x<b$ intervalında sıfra çevrilən və $x=a$ və $x=b$ uclarında ixtiyari qiymətlər alan;

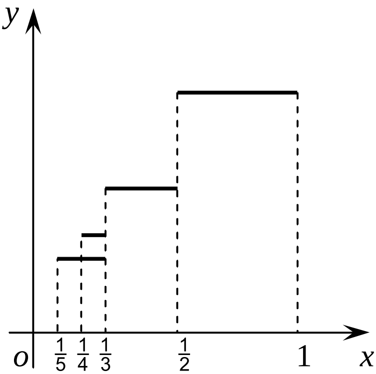
b) $a\le x\le b$ olduqda $[a,b]$ də verilmiş kəsilməz funksiya ilə üst-üstə düşən, uclarda isə ixtiyari qiymətlər alan;

v) $[a,b]$-də hissə-hissə kəsilməz;

d) $[a,b]$-də təyin edilmiş bütün hissə-hissə sabit funksiyalar;

3. $[a,b]$-də təyin edilmiş bütün monoton funksiyalar;

Riman mənada inteqrallanan funksiyalardır.



Qeyd etmək lazımdır ki, monoton funksiyalar arasında sonsuz sayda kəsilmə nöqtələrinə malik olan funksiyalar var. Doğrudan da

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x = 0 \quad \text{olduqda,} \\ \dfrac{1}{n}\,, & \dfrac{1}{n+1} < x \le \dfrac{1}{n} \quad \text{olduqda } (n = 1,2,...) \end{cases}$$

funksiyası [0,1] seqmentində məhdud və monotondur, (azalmayandır) hesabi sayda

$$x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

nöqtələrinin hər birində kəsiləndir.

Bir halda ki, monoton funksiyalar sonsuz sayda kəsilmə nöqtələrinə malik ola bilər, bu teorem də hissə-hissə kəsilməz olmayan, Riman mənada inteqrallanan funksiyaların varlığını təsdiq edir, lakin inteqrallanan olmasına cavab verilməsində çətinlik törədir. Bu çətinliyi aradan qaldırmaq üçün σ Riman inteqral cəmini aşağıdakı kimi düzəldək. $[a,b]$ seqmentini istənilən qayda ilə kiçik $[x_k,x_{k+1}]$ hissələrinə bölüb həmin hissələri e_k ilə işarə edək və hər bir e_k hissəsində istənilən ξ_k nöqtəsi götürərək

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) me_k$$

şəklində cəm düzəldək, burada $me_k = \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ədədi $e_k = [x_k,x_{k+1}]$-in ölçüsüdür.

Teorem 3.1.2 (**Lebeq kriterisi).** $[a,b]$ seqmentində verilmiş məhdud $f(x)$ funksiyasının Riman mənada inteqrallanan olması üçün zəruri və kafi şərt, bu funksiyanın $[a,b]$ seqmentindəki kəsilmə nöqtələrinin E çoxluğunun ölçüsünün (Lebeq mənada) sıfra bərabər olmasıdır.

Bu teoremi isbat etmək üçün əvvəlcə funksiyanın kəsilmə nöqtələri çoxluğunun quruluşunu ifadə edən aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem.* E_n fəzasının hər hansı qapalı F çoxluğunda təyin edilmiş istənilən funksiyanın bütün kəsilmə nöqtələri çoxluğu E, ya qapalı çoxluqdur, ya da hesabi sayda qapalı çoxluqların birləşməsindən ibarətdir.

İsbatı. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası qapalı F çoxluğunda təyin edilmişdir. $f(x)$ funksiyasının F-də yerləşən, hər birində $f(x)$ funksiyasının rəqsi ε-dan kiçik olmayan ($\omega_k f \geq \varepsilon$) kəsilmə nöqtələri çoxluğunu E_ε ($E_\varepsilon \in E$) ilə işarə edək.

E_ε çoxluğu qapalıdır. Doğrudan da, tutaq ki, ξ, E_ε çoxluğunun hər hansı limit nöqtəsidir. Limit nöqtəsinin tərifinə əsasən ξ nöqtəsinin istənilən ətrafında E_ε çoxluğunun, $E_\varepsilon \subset F$ olduğundan, həm də F çoxluğunun ξ-dən fərqli sonsuz sayda nöqtələri iştirak edəcəkdir. Deməli, $E_\varepsilon \subset F$ üçün ξ limit nöqtəsi qapalı F çoxluğu üçün də limit nöqtəsidir, odur ki, $\xi \in F$. Hər bir $x \in E_\varepsilon$ nöqtəsində $\omega_x f \geq \varepsilon$ olduğundan, ξ nöqtəsinin istənilən ətrafında da $f(x)$-in rəqsi ξ-dan kiçik olmayacaqdır. Ancaq ξ nöqtəsinin istənilən kiçik ətrafında $f(x)$-in rəqsi ε-dan kiçik olmadığından, ξ nöqtəsində də $f(x)$ -in rəqsi ε-dan kiçik olmayacaqdır: $\omega_\xi f \geq \varepsilon$, buna görə də, $\xi \in E_\varepsilon$, yəni E_ε çoxluğu qapalıdır.

İndi ε-na ardıcıl qiymətlər verək: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Onda $f(x)$ funksiyasının bütün kəsilmə nöqtələrinin E çoxluğu

$$E = E_1 \cup E_{\frac{1}{2}} \cup E_{\frac{1}{3}} \cup \cdots \cup E_{\frac{1}{n}} \cup \cdots \quad (3.1.3)$$

birləşməsi şəklində göstərilir.

Doğrudan da, hər bir $x \in E_{\frac{1}{n}}$ nöqtəsində $\omega_x f \geq \frac{1}{n}$ olduğundan $\omega_x f > 0$ olan bütün $x \in E$ kəsilmə nöqtələri bu birləşmənin toplananlarından birinə daxil olar və heç bir $\omega_x f = 0$ olan x nöqtəsi, yəni $f(x)$-in heç bir kəsilməzlik nöqtəsi göstərilən birləşməyə daxil deyildir.

(3.1.3) birləşməsinin müxtəlif toplananları sonlu və ya hesabi sayda ola bilər.

Birinci halda hər hansı n – dən başlayaraq bütün sonrakı $E_{\frac{1}{n}}$-lər üst-üstə düşürlər, yəni boş çoxluqlardır, nəticədə E sonlu sayda qapalı çoxluqların birləşməsi kimi qapalı çoxluq olur; ikinci halda E, hesabi sayda qapalı çoxluqların birləşməsindən ibarət olacaqdır, ola bilər ki, qapalı çoxluq olsun, ola bilər ki, qapalı olmasın.

İndi Lebeq teoreminin isbatını verək.

Zəruriliyin isbatı. $[a,b]$ seqmentində verilmiş məhdud $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$-də yerləşən, hər birində $f(x)$ funksiyasının rəqsi $\frac{1}{n}$-dən kiçik olmayan $\left(\omega_x f \geq \frac{1}{n}\right)$ kəsilmə nöqtələri çoxluğunu $E_{\frac{1}{n}}\left(E_{\frac{1}{n}} \subset E\right)$ ilə işarə edək. Teorem*-a əsasən $E_{\frac{1}{n}}$ çoxluqları qapalıdırlar və E çoxluğu onların vasitəsilə

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}} \qquad (3.1.4)$$

birləşməsi şəklində göstərilir.

Hər bir qapalı $E_{\frac{1}{n}}$ çoxluğu ölçülən olduğundan, onların sonlu və ya hesabi sayda birləşməsindən ibarət olan və $[a,b]$ seqmentində yerləşən E çoxluğu da ölçülən olacaqdır, yəni bu çoxluğun mE ölçüsü var.

İndi $[a,b]$ seqmentində məhdud $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ seqmentində Riman mənada inteqrallanan olduğunu qəbul edərək, $mE=0$ olduğunu göstərək.

Əksini fərz edək, tutaq ki, $mE>0$-dir. Onda $E_{\frac{1}{n}}$ toplananları arasında heç olmazsa elə bir $E_{\frac{1}{n_0}}$ (n_0-natural ədəddir) çoxluğu tapılar ki,

$$mE_{\frac{1}{n_0}} = \delta > 0 \qquad (3.1.5)$$

olar. Əks halda bütün $E_{\frac{1}{n}}$ -lər üçün

$$mE_{\frac{1}{n}} = 0$$

olsaydı, onda

$$E_1 \subset E_{\frac{1}{2}} \subset E_{\frac{1}{3}} \subset \cdots \subset E_{\frac{1}{n}} \subset \cdots$$

olduğundan teorem 1.3.7-ə əsasən (3.1.4) bərabərliyindən

$$mE = \lim_{n\to\infty} mE_n = 0$$

alınardı ki, bu da $mE>0$ fərziyyəsinə zidd olardı.

$[a,b]$ seqmentini n sayda $[x_{i-1}, x_i]$ seqmentlərinə bölək və

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1})$$

cəmini düzəldək və bu cəmi də $\sum'$ və $\sum''$ kimi iki cəmə ayıraq. Bunlardan birincisinə $E_{\frac{1}{n_0}}$ çoxluğunun heç bir nöqtəsini saxlamayan $[x_{i-1}, x_i]$ seqmentlərini aid edək, ikincisinə isə, $E_{\frac{1}{n_0}}$ çoxluğunun, hər birində funksiyanın rəqsinin $\omega_x f \geq \frac{1}{n_0}$ şərtini ödəyən nöqtələrini saxlayan seqmentləri aid edək.

Onda

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) = \sum' \omega_i (x_i - x_{i-1}) + \sum'' \omega_i (x_i - x_{i-1}) \geq$$

$$\geq \sum'' \frac{1}{n_0}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n_0} \sum''(x_i - x_{i-1}) \geq \frac{1}{n_0} \cdot \delta.$$

Buradan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i - x_{i-1}) \geq \frac{1}{n_0}\cdot\delta > 0$$

olur ki, bu da $[a,b]$-də $f(x)$-in fərz edilən şərtlər daxilində inteqrallanan olmadığını göstərir. Bununla zərurilik isbat olunur.

Kafiliyin isbatı. Göstərək ki, məhdud $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ seqmentində kəsilmə nöqtələrinin E çoxluğu üçün $mE=0$-dırsa, onda $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentində Riman mənada inteqrallanandır. Burada da əks fərziyyədən istifadə edək; yəni fərz edək ki, məhdud $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentində inteqrallanan deyil və bu halda $mE>0$ olduğunu isbat edək.

Əgər $f(x)$ inteqrallanan deyilsə, onda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i - x_{i-1}) \geq \delta > 0 . \qquad (*)$$

$\varepsilon = \dfrac{\delta}{2(b-a)}$ götürək və $[a,b]$ seqmentinin hər hansı bölünmüş hissələri üçün götürülən $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i - x_{i-1})$ cəmini iki $\sum'$ və $\sum''$ toplananlarına ayıraq. Bunlardan birincisinə $\omega_i<\varepsilon$ olan $[x_{i-1}, x_i]$ seqmentlərini, ikincisinə isə $\omega_i\geq\varepsilon$ olan $[x_{i-1}, x_i]$ seqmentlərini aid edək. Onda

$$\sum{}'\omega_i(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon(b-a) = \frac{\delta}{2}, \qquad (3.1.6)$$

$$\sum{}''\omega_i(x_i - x_{i-1}) \leq \omega\sum{}''(x_i - x_{i-1}) = \omega L, \qquad (3.1.7)$$

burada ω - $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ seqmentindəki rəqsi, L isə ikinci toplanan cəmə daxil olan bütün $[x_{i-1},x_i]$ seqmentlərinin uzunluqları cəmidir. (3.1.6) və (3.1.7) bərabərsizliklərini toplasaq

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\delta}{2} + \omega L$$

və ya (*) bərabərsizliyini nəzərə alaraq

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i - x_{i-1}) \geq \delta \quad , \quad \delta \leq \frac{\delta}{2} + \omega L$$

bərabərsizliklərini, buradan

$$L \geq \frac{\delta}{2\omega} > 0$$

bərabərsizliyini alarıq, yəni funksiyanın rəqsləri verilən ε kəmiyyətindən kiçik olmayan $[x_{i-1},x_i]$ seqmentlərinin uzunluqları cəmi, istənilən bölgü üçün müsbət $\frac{\delta}{2\omega}$ ədədindən böyükdür.

İndi $[a,b]$ seqmentinin 2^n (n=1,2,3,…) sayda bərabər bölgüləri ardıcıllığına baxaq, hər belə bölgüyə $\omega_i \geq \varepsilon$ olan bütün $[x_{i-1},x_i]$ seqmentlərinin uzunluqlarının L_n cəmi uyğundur. Verilmiş bölgünün bütün belə ardıcıllıqlarında yerləşən nöqtələr çoxluğunu E_n ilə işarə edək, yuxarıdakına əsasən

$$mE_n = L_n \geq \frac{\delta}{2\omega},$$

aydındır ki, ixtiyari n üçün

$$E_n \supset E_{n+1},$$

çünki bölgünün n+1-ci seqmentində funksiyanın rəqsi $\omega_i f \geq \varepsilon$ olarsa, onda uzunluğu iki dəfə artıq olan seqmentdə $\omega_i f < \varepsilon$ ola bilməz. Bütün E_n çoxluqlarının kəsişməsini A ilə işarə edək, onda $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$ olduğundan (teorem 1.4.7) əsasən

$$mA = \lim_{n\to\infty} mE_n \geq \frac{\delta}{2\omega}. \qquad (3.1.8)$$

Qurmaya əsasən A çoxluğu $\omega \geq \varepsilon$ rəqsli nöqtələr çoxluğudur, yəni bütün kəsilmə nöqtələrinin E çoxluğunun hissəsidir. Buna görə də (3.1.8) münasibətinə əsasən

$$mE \geq mA \geq \frac{\delta}{2\omega} > 0.$$

Beləliklə, məhdud $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentində inteqrallanan deyilsə, onda

$$mE>0.$$

Buradan alınır ki, əgər $f(x)$ məhduddursa və $mE>0$-dırsa, onda $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentində Rimana görə inteqrallanandır. Bununla teorem tamamilə isbat olunur.

Bu teoremdən, $[a,b]$ seqmentində məhdud və sanki hər yerdə kəsilməz funksiyalar sinfinin $[a,b]$ seqmentində Riman mənada inteqrallanan olması alınır.

Məsələn, $[a,b]$ seqmentində monoton $f(x)$ funksiyası Riman mənada inteqrallanandır. Doğrudan da, $[a,b]$ seqmentində $f(x)$ funksiyası məhduddur, onun bütün qiymətləri $f(a)$ və $f(b)$ ədədləri arasında yerləşir. Bundan başqa bu funksiyanın ən çoxu hesabi sayda kəsilmə nöqtələri var. Hesabi çoxluğun ölçüsü isə sıfra bərabərdir. Nəticədə, $[a,b]$-də baxılan monoton funksiya orada məhdud və sanki hər yerdə kəsilməzdir və buna görə də Lebeq teoreminə əsasən $[a,b]$ seqmentində Riman mənada inteqrallanandır. Riman və Lebeq kriterisinə əsasən $[a,b]$ seqmentində təyin edilən, orada sonlu və ya hesabi sayda kəsilmə nöqtələri olan bütün məhdud $f(x)$ funksiyaları həmin seqmentdə inteqrallanandırlar. Məsələn, kəsilmə nöqtələri çoxluğu hesabidən artıq olmayan bütün monoton funksiyalar, bütün məhdud variyasiyalı funksiyalar Riman mənada inteqrallanandırlar. Eyni zamanda $[0,1]$ seqmentində təyin edilən kəsilmə nöqtələri çoxluğu bütün seqmentlə üst-üstə düşən və ölçüsü seqmentin uzunluğuna bərabər olan $[0,1]$ seqmentində Dirixle funksiyası Riman mənada inteqrallanan deyil. Çünki, $[0,1]$ seqmentində təyin edilən Dirixle funksiyası üçün aşağı $\underline{J}$ və yuxarı $\overline{J}$ Darbu inteqralları var, bu halda $\overline{J}=1$, $\underline{J}=0$, yəni $\overline{J} \neq \underline{J}$ olur. Hətta, göstərmək olar ki, əgər məhdud $f(x)$ funksiyası $[a,b]$-də yerləşən hər hansı Δ seqmentinin hər bir nöqtəsində kəsiləndirsə, onda o, $[a,b]$-də Riman mənada inteqrallana bilməz.

Beləliklə, görürük ki, $[a,b]$-də Riman mənada inteqrallanan funksiya $[a,b]$-nin hər hansı hissəsində yerləşən və instənilən qədər kiçik olan bütün Δ intervalında kəsilməzlik nöqtəlrinə malik olmalıdır.

*1.3 **Riman inteqralının çatışmazlıqları.***

Riman mənada inteqralın varlığı teoremlərinin və inteqrallana bilən funksiyalar sinfi haqqında təkliflərin isbatı o halda təmin edilir ki, arqumentin sanki hər yerdə «kiçik» dəyişməsinə funksiyanın «kiçik» dəyişməsi uyğun olsun. Belə olduqda, $\lambda\to 0$ şərtində $f(x)$-in $f(\xi_k)$ $(k=1,2,\dots,n)$ qiymətləri də, Darbu cəmləri də bir-birindən az fərqlənəcəkdir, nəticədə σ inteqral cəmi və Darbu cəmləri ümumi bir limitə yaxınlaşacaqdır ki, bu da $f(x)$-in $[a,b]$-də Riman mənada inteqrallanan olduğunu təmin edir. Buna əsasən də qapalı məhdud oblastda bütün kəsilməz funksiyalar Riman mənada inteqrallanandır. Əgər verilən $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ də kəsilən olarsa, $[a,b]$-nin istənilən qayda ilə bölünməsində elə $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,\dots,n\text{-}1)$ seqmentləri tapmaq olar ki, $f(x)$-in qiymətləri orada kifayət qədər bir-birinə yaxın olmaz. Buna görə də Darbu cəmləri bir-birindən fərqlənər, ümumi limitə malik olmaya bilər, yəni verilmiş kəsilən $f(x)$ funksiyası $[a,b]$-də Riman mənada inteqrallanmayan ola bilər. Buna baxmayaraq bəzi kəsilən funksiyalar da Riman mənada inteqrallanır, lakin demək olar ki, inteqralın Riman tərifi birinci növbədə bütün kəsilməz funksiyaların inteqrallanmasını göstərmək üçün nəzərdə tutulmuşdur. Bu, Riman inteqralının çatışmazlıq cəhətlərindən birisidir. Bundan əlavə aşağdakı çatışmazlıqları da qeyd etmək olar:

- birinci, inteqralın Riman tərifində inteqrallama oblastı kifayət qədər sadə olmalıdır (qapalı məhdud oblast);
- ikincisi, inteqrallanan funksiyalar sinfi dardır, təyin edildiyi hər yerdə kəsilən, ölçülən funksiyar üçün inteqralın Riman konstruksiyası (mexanizmi) yaramır;
- üçüncüsü, inteqral işarəsi altında limitə keçmək çətinlik əmələ gətirir (limit funksiyasının inteqralının varlığı tələb edilir) və s.

Qeyd edilən çatışmazlıqları aradan qaldırmaq üçün 1902-ci ildə A.Lebeq tərəfindən onun adı ilə adlandırılan Lebeq inteqralı, riyaziyyata daxil edilmişdir.

Riman mənada inteqrala aid nümunələr və tapşırıqlar.

Misal 1. $f(x)=\sin x$ funksiyasının $[a,b]$ seqmentində Riman mənada inteqrallanan olduğunu isbat edin və $\int\limits_a^b f(x)dx$-i tapın.

Həlli. $[a,b]$-ni n bərabər hissəyə bölək: $h=\dfrac{b-a}{n}$ olsun. Onda $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=\overline{1,n})$ seqmenti üçün

$$\Delta x_k=\frac{b-a}{n}\ (k=1,2,...,n),\ h=\lambda=\max\Delta x_k=\frac{b-a}{n}$$

olar. $\delta=\dfrac{1}{n}<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ seçək, onda $h<\varepsilon$ olar. $[x_k,x_{k+1}]=[a,a+(k-1)h]$ $(k=1,2,..,n)$ seqmentində $\sin x$ funksiyasının dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədlərini uyğun olaraq m_k və M_k ilə işarə edək. $\sin x$ funksiyası $[a,b]$-də müntəzəm kəsilməz olduğundan $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=1,2,\ldots,n)$ hissələrinin hər birində

$$M_k-m_k=\omega_k<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

olar. Onda

$$\overline{S}-\underline{S}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k\le\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon$$

olar.

$\varepsilon>0$ istənilən kiçik ədəd olduğundan buradan alarıq:

$$\lim_{\lambda\to0}(\overline{S}-\underline{S})=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0.$$

Bu isə $[a,b]$ seqmentində $f(x)=\sin x$ funksiyasının Riman mənada inteqrallanan olduğunu göstərir.

İndi $\int_a^b f(x)dx$ inteqralını hesablayaq.

Buna görə $f(x)=\sin x$ funksiyası üçün σ_n inteqral cəmi düzəldərək, limitini hesablayaq.

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\sin(a+kh)h=h\sum_{k=1}^{n}\sin(a+kh)$$

şəklində olar. Müəyyən çevirmələr apararaq

$$\sigma_n=h\sum_{k=1}^{n}\sin(a+kh)=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}2\sin(a+kh)\cdot\sin\frac{h}{2}=$$

$$=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(a+k-\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+k+\frac{1}{2}h\right)\right]=$$

$$=h\cdot\frac{\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+n+\frac{1}{2}h\right)}{2\sin\frac{h}{2}}=$$

$$=h\frac{\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+nh+\frac{1}{2}h\right)}{2\sin\frac{h}{2}}$$

alarıq. Beləliklə,

$$\sigma_n = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right].$$

Onda

$$\int_a^b \sin x dx = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right]=$$

$$=\cos a-\cos b.$$

Misal 2. $f(x)=\cos x$ funksiyasının $[a,b]$ seqmentində Riman mənada inteqrallanan olduğunu isbat edin və $\int_a^b \cos x dx$-i tapın.

Misal 3. $a<x<b$ olduqda $h(x)=0$ və $h(a)$ və $h(b)$ istənilən qiymətlər olsun. $[a,b]$-də $h(x)$ funksiyasının Riman mənada inteqrallanan olduğunu və $\int_a^b h(x)dx=0$ olduğunu göstərin.

Həlli. $[a,b]$-nin istənilən bölgüsünə uyğun $h(x)$ üçün inteqral cəmi

$$\sigma = h(\xi_0)\Delta x + h(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

şəklində olacaqdır, burada $h(\xi_0)$ 0 və ya $h(a)$-dır, $h(\xi_{n-1})$ isə 0 və ya $h(b)$-dir. Aydındır ki, $\lambda=\max(\Delta x_0,\Delta x_{n-1})$ sıfra yaxınlaşdıqda $\sigma\to 0$ olar, bu da

$$\int_a^b h(x)dx=0$$

olduğunu göstərir.

Misal 4. $a\le x\le b$ olduqda $f(x)$ kəsilməz, $f_1(x)$ isə istənilən $f_1(a)$ və $f_1(b)$ qiymətlərini alan və $a<x<b$ olduqda $f(x)$ ilə üst-üstə düşən funksiya olsun. Onda $f_1(x)$

funksiyasının $[a,b]$-də Riman mənada inteqrallanan olduğunu və

$$\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

olduğunu göstərin (göstəriş: $h(x)=f_1(x)-f(x)$ ilə işarə etməli).

Misal 5. $[a,b]$ seqmentində hissə-hissə kəsilməz $f(x)$ funksiyasının həmin seqmentdə Riman mənada inteqrallanan olduğunu isbat edin və

$$\int_a^b f(x)dx$$

inteqralının hesablanması üsulunu verin.

Həlli. Əvvəlcə qeyd edək ki, $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ nöqtələri ilə $[a,b]$ seqmentini ixtiyari qayda ilə $[x_k,x_{k+1}]$ ($k=0,1,2,\ldots,n$-1) hissələrinə böldükdə hər bir $x_k<x<x_{k+1}$ intervalında $f(x)$ kəsilməzdirsə və sonlu

$$f(x_0+0),\ f(x_1-0),\ f(x_1+0),\ f(x_2-0),\ f(x_2+0),\ldots,f(x_n-0)$$

limit qiymətlərinə malikdirsə, yəni sonlu sayda $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ birinci növ kəsilmə nöqtələrinə malikdirsə, onda $f(x)$ $[a,b]$ seqmentində hissə-hissə kəsilməz funksiya olacaqdır.

$x_k\le x\le x_{k+1}$ seqmentində təyin edilən, bu seqmentin daxilində $f(x)$ ilə üst-üstə düşən, seqmentin uclarında uyğun olaraq $f(x_k+0)$ və $f(x_{k+1}-0)$ limit qiymətlərini alan funksiyanı $f_k(x)$ ilə işarə edək. $f_k(x)$ funksiyası $[x_k,x_{k+1}]$ ($k=0,1,2,\ldots,n$-1)-də kəsilməzdir. $[x_k,x_{k+1}]$-də kəsilməz $f(x)$ funksiyası Riman mənada inteqrallanan olduğuna görə

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x)dx .$$

Müəyyən inteqralın xassəsinə əsasən $f(x)$ funksiyası bütün $[a,b]$ seqmentində inteqrallanan olacaqdır və

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+!}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+!}} f_k(x)dx$$

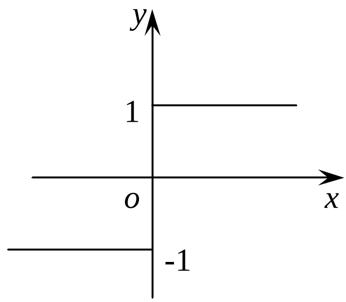
olacaq.

Misal 6. $[a,b]$ seqmentində bütün hissə-hissə sabit funksiyaların Riman mənada inteqrallanan olduğunu göstərin və inteqralını tapın.

Misal 7. $f(x)=[x]$ (x-in tam hissəsi) funksiyasının $[0,100]$ seqmentində Riman mənada inteqrallanan olduğunu göstərin və inteqralını tapın.

Misal 8.

$$f(x)=\operatorname{sign}x=\begin{cases} -1, & x<0 \text{ olduqda}, \\ 0, & x=0 \text{ olduqda}, \\ 1, & x>0 \text{ olduqda} \end{cases}$$



funksiyasının $(-\infty,+\infty)$ intervalında Riman mənada inteqrallanan olduğunu göstərin və inteqralını tapın. (göstəriş: 6, 7, 8-ci misallarda verilən funksiyalara hissə-hissə kəsilməz funksiyanın xüsusi halı kimi baxmaq lazımdır).

Misal 9.

$$f(x)=\begin{cases} 1\,, & 0\le x<1 \text{ olduqda}, \\ 0\,, & 1\le x<2 \text{ olduqda}, \\ 3\,, & 2\le x\le 3 \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyasının $[0,3]$ seqmentində Riman mənada inteqrallanan olduğunu göstərin və inteqralını hesablayın.

Misal 10. $[0,1]$ seqmentində

$$f(x)=\begin{cases} x\,, & 0\le x<\frac{1}{2} \text{ olduqda}, \\ 1\,, & \frac{1}{2}\le x\le 1 \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyasının Riman mənada inteqrallanan olduğunu göstərin və $\int_0^1 f(x)dx$ -i hesablayın.

Həlli. Bu funksiya $x = \frac{1}{2}$ nöqtəsi müstəsna olmaqla [0,1] seqmentində kəsilməzdir, həm də məhduddur, ona görə də [0,1]-də Riman mənada inteqrallanandır.

Misal 11.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} \quad, & 0 < x \le 1 \text{ olduqda,} \\ c = \text{const}, & x = 0 \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

funksiyasının [0,1] seqmentində Riman mənada inteqrallanan olduğunu göstərin.

Misal 12.

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad, \text{əgər } x \ne \frac{1}{n}, \\ -x^2, \text{ əgər } x = \frac{1}{n} \end{cases} \qquad (n \in N)$$

funksiyanın [0,1] seqmentində Riman mənada inteqrallanan olduğunu göstərin və $\int_0^1 f(x)dx$ -i hesablayın.

Misal 13. $f(x) = \frac{x \ln x}{1 - x}$ $(0 < x < 1)$ funksiyasının [0,1] seqmentində Riman mənada inteqrallanan olduğunu göstərin.

Həlli. Bu funksiya (0,1) intervalında kəsilməzdir.

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 0 \; ; \; \lim_{x \to 1-0} f(x) = -1$$

olduğunu nəzərə alsaq, $f(x)$ funksiyasını [0,1] seqmentində kəsilməz təyin etmək olar, nəticədə [0,1] seqmentində Riman mənada inteqrallanandır.

Misal 14. [0,1] seqmentində verilən və bütün $x=\dfrac{1}{n}$ nöqtələrində birinci növ kəsilmə nöqtələri olan

$$f(x)=\begin{cases} 1\,, \left(\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{2n-1}\right] (n=1,2,....) \text{ yarım seqmentində,} \\ -1\,, \left(\dfrac{1}{2n+1},\dfrac{1}{2n}\right] (n=1,2,....) \text{ yarım seqmentində,} \\ 0\,, \quad x=0 \quad \text{nöqtəsində} \end{cases}$$

funksiyasının Riman mənada inteqrallanan olduğunu göstərin.

Misal 15. [0,1] seqmentində monoton və $x=\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},...,\dfrac{1}{n},...$ nöqtələrində kəsilən

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{n}\,, & \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n} \text{ olduqda,} \\ 0\,, & x=0 \quad \text{olduqda} \end{cases} \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

funksiyasının [0,1] seqmentində Riman mənada inteqrallanan olduğunu göstərin (göstəriş: 14 və 15 nömrəli misallarda Lebeq kriterisindən istifadə edin).

Misal 16. Lebeq kriterisindən istifadə edərək [0,1] seqmentində Dirixle funksiyasının Riman mənada inteqrallanan olmadığını göstərin.

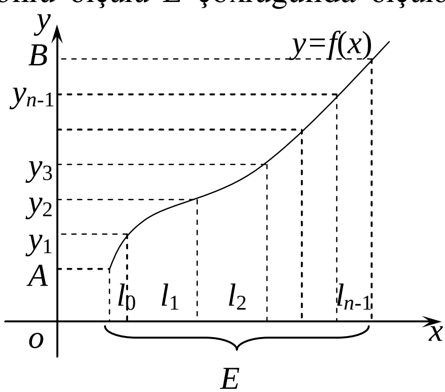
Həlli. Funksiyanın kəsilməzliyinin ardıcıllıq dilində tərifindən istifadə edək. a nöqtəsi [0,1] seqmentinin istənilən nöqtəsi olsun. Məlumdur ki, a nöqtəsinə yığılan $\{x_n\}$ rasional ədədlər ardıcıllığı və eləcə də $\{y_n\}$ irrasional ədədlər ardıcıllığı seçmək olar. $D(x_n)=1$, $D(y_n)=0$ olduğu üçün funksiyanın $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$-ə uyğun olan qiymətlər ardıcıllıqları müxtəlif limitlərə (1 və 0) malik olacaqdır. Bu onu göstərir ki, $D(x)$ funksiyası a nöqtəsində kəsiləndir. Beləliklə, göstərmiş oluruq ki, $D(x)$ funksiyası $[0,1]$ seqmentinin bütün nöqtələrində kəsiləndir. $D(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələri çoxluğunun ölçüsü sıfırdan fərqli (1-ə bərabər) olur, onda Lebeq kriterisinə əsasən $D(x)$ funksiyası $[0,1]$ seqmentində Riman mənada inteqrallanan deyil.

§ 2. **Məhdud funksiyanın Lebeq inteqralı**

*2.1. **Lebeq inteqralının tərifi. Lebeq cəmləri.***

Lebeq, Rimandan fərqli olaraq funksiyanın təyin oblastını deyil, qiymətlər çoxluğunu kiçik hissələrə bölür. Bu isə bir başa inteqral anlayışının daha geniş funksiyalar sinfinə yayılmasına (genişləndirilməsinə) imkan yaradır. Bundan əlavə, Lebeq inteqralı çoxluğun ölçüsü və ölçülən funksiyalarla sıx əlaqədardır.

İndi inteqralın Lebeq tərəfindən verilmiş tərifinə baxaq. Burada, söhbət sonlu ölçülü E çoxluğunda ölçülən məhdud funksiyaların inteqralından gedir.



Tutaq ki, E çoxluğunda ölçülən məhdud $f(x)$ funksiyası verilmişdir, belə ki, $mE<+\infty$. $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda məhdud olduğundan, onun E çoxluğunda dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədləri var, onları uyğun olaraq m və M ilə işarə edək.

$$A<m\leq f(x)\leq M<B$$

şərtlərini ödəyən A və B ədədləri götürüb, $[A,B]$ seqmentini

$$A=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_n=B$$

nöqtələri ilə sonlu sayda kiçik hissələrə bölək və hər bir $[y_k,y_{k+1})$ yarımseqmentində

$$e_k=E(y_k\le f(x)<y_{k+1})\ \ (k=0,1,2,\ldots,n\text{-}1)$$

çoxluğunu daxil edək.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, e_k çoxluqları aşağıdakı dörd xassəni ödəyirlər:

1) e_k çoxluqları cüt-cüt kəsişmirlər, $e_k\cap e_{k'}=\varnothing$ $(k\ne k')$,

2) e_k çoxluqları ölçüləndirlər,

3) $E=\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}e_k$,

4) $mE=\sum\limits_{k=0}^{n-1}me_k$.

Aşağıdakı kimi

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k me_k\ \ (y_k\le\xi_k<y_{k+1};\ k=0,1,2,\ldots,n-1),$$

$$\underline{S}=\sum_{k=0}^{n-1}y_k me_k\ ,\ \ \overline{S}=\sum_{k=0}^{n-1}y_{k+1}me_k$$

cəmlərini düzəldək.

σ - cəminə $f(x)$ funksiyasının Lebeq inteqral cəmi və ya «aralıq» inteqral cəmi, $\underline{S}$ və $\overline{S}$ cəmlərinə isə $f(x)$-in uyğun olaraq aşağı və yuxarı Lebeq cəmləri və ya sadəcə olaraq Lebeq cəmləri deyilir.

σ, $\underline{S}$, $\overline{S}$ cəmləri $[A,B]$ seqmentinin bölünməsi üsullarından asılıdırlar, $[A,B]$-nin hər bir bölgüsünə müəyyən σ, $\underline{S}$ və $\overline{S}$ qiymətləri uyğundur. Lakin $\underline{S}$ və $\overline{S}$ cəmləri σ cəmindən fərqli olaraq ξ_k $(y_k\le\xi_k<y_{k+1},\ k=0,1,2,\ldots,n\text{-}1)$ nöqtələrinin seçilməsindən asılı deyildirlər.

«Aralıq» inteqral cəminin və Lebeq cəmlərinin Riman və Darbu cəmlərinə uyğun aşağıdakı xassələri var.

Xassə 3.2.1. [*A*,*B*] seqmentinin verilmiş bölgüsünə uyğun istənilən σ «aralıq» inteqral cəmi, həmin bölgünün Lebeq cəmləri arasında yerləşir:

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S}\ .$$

İsbatı. Doğrudan da,

$$y_k \le \xi_k \le y_{k+1}$$

bərabərsizliklərinin hər tərəfini $0<me_k<+\infty$ ədədlərinə vurub *k*-ya görə cəmlədikdən sonra alınan

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k me_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k me_k \le \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} me_k$$

bərabərsizlikləri göstərir ki,

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S}\ .$$

Xassə 3.2.2. [*A*,*B*]-in verilmiş bölgüsünə uyğun aşağı $\underline{S}$ və yuxarı $\overline{S}$ Lebeq cəmləri, ξ_k nöqtələrinin dəyişməsi hesabına alınan σ Lebeq inteqral cəmlərinin bütün qiymətlər çoxluğu üçün dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədlərdir; yəni

$$\underline{S} = \inf\sigma,\ \overline{S} = \sup\sigma.$$

İsbatı. [*A*,*B*] seqmentinin verilmiş bölgüsünə uyğun $\underline{S}$, σ və $\overline{S}$ cəmləri arasındakı

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S}$$

münasibətindən alınır ki,

$$0 \le \sigma - \underline{S} \le \overline{S} - \underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) me_k \le \lambda \sum_{k=0}^{n-1} me_k = \lambda mE\ .$$

Burada $\lambda = \max\limits_k (y_{k+1} - y_k)$. $\forall \varepsilon>0$ üçün $\lambda < \dfrac{\varepsilon}{mE}$ götürmək olar. Onda $0 \le \sigma - \underline{S} < \varepsilon$ və ya $\sigma < \underline{S} + \varepsilon$ olur.

Odur ki,

$$\sigma \ge \underline{S} \text{ və } \sigma < \underline{S} + \varepsilon.$$

Bu bərabərsizliklərdən çoxluğun dəqiq aşağı sərhədinin tərifinə əsasən

$$\underline{S} = \inf\sigma$$

olması alınır.

$$0 \le \overline{S} - \sigma \le \overline{S} - \underline{S} < \lambda \cdot mE$$

olduğundan, analoji qayda ilə

$$\sigma \le \overline{S} \text{ və } \sigma > \overline{S} - \varepsilon$$

bərabərsizlikləri və çoxluğun dəqiq yuxarı sərhədinin tərifinə əsasən

$$\overline{S} = \sup\sigma$$

bərabərliyi alınır.

Xassə 3.2.3. $[A,B]$ seqmentinin bölgü nöqtələri sırasına yeni bölgü nöqtələri əlavə etdikdə $\underline{S}$ aşağı Lebeq cəmi yalnız arta bilər, $\overline{S}$ yuxarı Lebeq cəmi isə yalnız azala bilər.

İsbatı. Sadə olsun deyə $[A,B]$ seqmentinin bölgü nöqtələri sırasına yeni bir y^* bölgü nöqtəsi əlavə etməklə kifayətlənək. Fərz edək ki, yeni y^* nöqtəsi y_k və y_{k+1} bölgü nöqtələri arasında yerləşir, $[A,B]$ seqmentinin yeni bölgüsü

$$A=y_0<y_1<\ldots<y_k<y^*<y_{k+1}<\ldots<y_n=B$$

nöqtələrinin köməyi ilə qurulur.

$$e'_k = E\,[y_k \le f(x) < y^*]\,,\ e''_k = [y^* \le f(x) < y_{k+1}]$$

götürərək,

$$\underline{S}' = y_0 me_0 + y_1 me_1 + \ldots + y_{k-1} me_{k-1} + y_k\, m e'_k + y^* m e''_k +$$
$$+ y_{k+1} me_{k+1} + \ldots + y_{n-1} me_{n-1}$$

şəklində yeni aşağı Lebeq cəmi düzəldək.

Aydındır ki,

$$e'_k \cup e''_k = e_k \text{ və } m e'_k + m e''_k = me_k\,.$$

$\underline{S}$ cəminin k-cı $y_k me_k$ toplananından başqa bütün toplananları $\underline{S}'$ cəminə də daxildir, lakin $\underline{S}$ - in k- cı toplananın əvəzinə $\underline{S}'$-ə iki

$$y_k me'_k + y^* me''_k$$

həddi daxil olur. Buna görə

$$y_k me'_k + y^* me''_k \geq y_k me_k ,$$

$$\underline{S}' - \underline{S} = y_k me' + y^* me'' - y_k me_k \geq y_k me' + y_k me'' - y_k me_k = 0$$

olur və buradan da

$$\underline{S}' \geq S$$

olması alınır.

Analoji olaraq $\overline{S}$ yuxarı Lebeq cəminin artmaması isbat edilir.

Xassə 3.2.4. [A,B] seqmentinin müxtəlif bölgülərindən asılı olmayaraq hər bir aşağı Lebeq cəmi, yuxarı Lebeq cəmindən böyük deyil.

İsbatı. [A,B] seqmentinin birinci və ikinci üsulla hər hansı iki bölgüsünə baxaq. Bunlara uyğun olaraq aşağı və yuxarı cəmləri $\underline{S}_1$, $\overline{S}_1$ və $\underline{S}_2$, $\overline{S}_2$ ilə işarə edək. Onda, aydındır ki, $\underline{S}_1 \leq \overline{S}_1$ və $\underline{S}_2 \leq \overline{S}_2$ olacaqdır. Birinci və ikinci üsulla alınan bütün bölgü nöqtələrini birləşdirsək, bu üsullar ilə müqayisədə [A,B]-nin daha çox sayda yeni bölgü nöqtələrini alırq. Bu üçüncü bölgü üsulunun köməyi ilə təyin edilən Lebeq cəmlərini $\underline{S}_3$ və $\overline{S}_3$ ilə işarə edək, onda $\underline{S}_3 \leq \overline{S}_3$, olduğundan xassə 3.2.3-ə əsasən $\underline{S}_1 \leq \underline{S}_3$ və $\overline{S}_3 \leq \overline{S}_2$ olar. Bundan başqa, $\underline{S}_3 \leq \overline{S}_3$ olduğundan və bu bərabərsizliklərin müqayisəsindən

$$\underline{S}_1 \leq \underline{S}_3 \leq \overline{S}_3 \leq \overline{S}_2 \text{ və ya } \underline{S}_1 \leq \overline{S}_2$$

olur. Teorem isbat olur.

Xassə 3.2.5. [A,B] seqmentinin bütün mümkün olan bölgüləri üçün alınmış yuxarı Lebeq cəmlərinin qiymətləri çoxluğunun $\overline{J}$ dəqiq aşağı sərhədi, aşağı Lebeq cəmlərinin qiymətləri çoxluğunun $\underline{J}$ dəqiq yuxarı sərhədi var, yəni

$$\overline{J} = \inf \overline{S} \quad , \quad \underline{J} = \sup \underline{S}$$

və

$$\underline{J} \le \overline{J}$$

bərabərsizliyi, nəticədə

$$\underline{S} \le \underline{J} \le \overline{J} \le \overline{S}$$

bərabərsizliklər sistemi doğrudur.

İsbatı. Xassə 3.2.4-dən alınır ki, [A,B] seqmentinin bütün mümkün olan bölgülərinə uyğun, bütün $\underline{S}$ aşağı Lebeq cəmləri çoxluğu yuxarıdan istənilən $\overline{S}$ yuxarı Lebeq cəmi ilə məhduddur. Deməli, $\{\underline{S}\}$ çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhədi var,

$$\underline{J} = \sup \underline{S} \le \overline{S}\,.$$

Onda $\{\overline{S}\}$ çoxluğu aşağıdan $\underline{J}$ ədədi ilə məhduddur, buna görə də onun dəqiq aşağı sərhədi var,

$$\overline{J} = \inf \overline{S} \ge \underline{J}\ .$$

Deməli,

$$\underline{J} \le \overline{J}$$

bərabərsizliyi ödənir.

Buradan

$$\underline{S} \le \underline{J} \le \overline{J} \le \overline{S}$$

alınır.

Bu xassədən nəticə olaraq,

$$\underline{J} = \overline{J}$$

bərabərliyi alınır.

Doğrudan da, eyni bir bölgüyə görə Lebeq cəmləri üçün

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) me_k \le \lambda \sum_{k=0}^{n-1} me_k = \lambda\, mE,$$

$$\underline{S} \le \underline{J} \le \overline{J} \le \overline{S}$$

olduğu üçün, həm də

$$0 \le \overline{J} - \underline{J} \le \lambda mE$$

olar və buradan λ-nın ixtiyari kiçik olmasından

$$\overline{J} = \underline{J}$$

bərabərliyi alınır.

Xassə 3.2.6. $[y_k, y_{k+1}]$ seqmentlərinin ən böyük

$$\lambda = \max_k (y_{k+1} - y_k) \quad (k = 0,1,2,\dots,n-1)$$

uzunluğu sıfra yaxınlaşdıqda, $\underline{S}$ və $\overline{S}$ Lebeq cəmləri ortaq $J = \underline{J} = \overline{J}$ limitinə yaxınlaşır:

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \underline{S} = \lim_{\lambda \to 0} \overline{S}.$$

İsbatı. İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün $\eta > 0$ ədədini elə seçək ki, $\eta \cdot mE < \varepsilon$ şərti ödənsin. Onda $[A,B]$ seqmentinin $\lambda < \eta$ şərtini ödəyən istənilən bölgüsü üçün

$$0 \le \overline{S} - \underline{S} \le \lambda \cdot mE < \eta \cdot mE < \varepsilon$$

olar. Lakin

$$\underline{S} \le J \le \overline{S}$$

olduğuna görə

$$0 \le J - \underline{S} \le \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon \quad \text{və} \quad -\underline{S} \ge -J \ge -\overline{S}$$

olur. Buradan

$$\varepsilon > \overline{S} - \underline{S} \ge \overline{S} - J \ge 0,$$

bunlara əsasən isə

$$|\underline{S} - J| < \varepsilon \quad \text{və} \quad |\overline{S} - J| < \varepsilon$$

olar. Deməli,

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \underline{S} = \lim_{\lambda \to 0} \overline{S}.$$

Buradan və xassə 3.1.1-dən alınır ki, $[A,B]$ seqmentinin bölünməsi üsulundan asılı olmayaraq $\lambda \to 0$ olduqda, $\underline{S}$ və $\overline{S}$ Lebeq cəmləri və σ inteqral cəmi, ortaq J limitinə yaxınlaşır:

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \underline{S} = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \overline{S}.$$

Tərif. 3.2.1. $\underline{J} = \sup \underline{S} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \underline{S}$, $\overline{J} = \inf \overline{S} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \overline{S}$ ədədləri üçün

$$\underline{J} = \overline{J} = J$$

olur.

J ədədinə $f(x)$ funksiyasının E çoxluğu üzrə Lebeq inteqralı deyilir və

$$(L)\int_E f(x)dx \quad \text{və ya} \quad \int_E f(x)dx\,,$$

xüsusi halda $E=[a,b]$ olduqda isə,

$$(L)\int_a^b f(x)dx \quad \text{və ya} \quad \int_a^b f(x)dx$$

simvolları ilə işarə edilir.

Teorem 3.2.1. Sonlu ölçülü E çoxluğunda məhdud və ölçülən $f(x)$ funksiyasının Lebeq inteqralı var.

İsbatı. Doğrudan da, $[A,B]$ seqmentinin ixtiyari bölgüsü üçün $0 \le \overline{S} - \underline{S} \le \lambda \cdot mE$ olmasından

$$\lim_{\lambda \to 0}(\overline{S} - \underline{S}) = 0 \quad \text{və ya} \quad \lim_{\lambda \to 0} \overline{S} = \lim_{\lambda \to 0} \underline{S} = J$$

olur. Bu da teoremin isbatını göstərir. Bu teorem Lebeq inteqralının varlığı üçün kafi şərtdir. Asanlıqla isbat etmək olur ki, E çoxluğunda ölçülən və məhdud $f(x)$ funksiyasının E çoxluğunda Lebeq mənada inteqrallanan olması yalnız kafi şərt yox, həm də zəruri şərtdir. Daha doğrusu, məhdud funksiyaların Lebeq mənada inteqrallanan olmasının zəruri və kafi şərti (Lebeq kriterisi) aşağıdakı teoremlə verilir.

Teorem 3.2.2. Ölçülən E çoxluğunda məhdud $f(x)$ funksiyasının bu çoxluqda Lebeq mənada inteqrallanan olması üçün, bu funksiyanın E çoxluğunda ölçülən olması, zəruri və kafi şərtdir.

Misal 3.2.1.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasional nöqtədirsə,} \\ 0, & x \text{ irrasional nöqtədirsə,} \end{cases}$$

Dirixle funksiyasının [0,1]-də Lebeq mənada inteqrallanan olduğunu və

$$(L)\int_0^1 D(x)dx = 0$$

olduğunu göstərin.

Həlli. $D(x)$ funksiyasının ölçülən olması misal 2.2.2-də göstərilmişdir. Məhdudluğu isə aydındır. Deməli, $D(x)$-in Lebeq inteqralı var. Onu hesablayaq. Bu məqsədlə [0,1] seqmentinin σ_0 bölgüsünə baxaq. [0,1] seqmentini uyğun olaraq rasional və irrasional nöqtələrindən təşkil edilmiş altçoxluqlarına ayıraq. Onda

$$e_1 = E(1 \le D < 1+\delta),\ e_2 = E(0 \le D < \delta)\ \ (\delta > 0)$$

və

$$me_1 = 0,\ me_2 = 1$$

olur. Bu bölgüyə uyğun

$$\underline{S} = 1\cdot me_1 + 0\cdot me_2 = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0,$$

$$\overline{S} = 1\cdot me_1 + 0\cdot me_2 = 0.$$

Onda

$$J = \lim_{\lambda\to 0} \underline{S} = \lim_{\lambda\to 0} \overline{S} = 0\,.$$

Bu da [0,1] seqmentində Dirixle funksiyasının Lebeq mənada inteqrallanan və

$$J = \lim_{\lambda\to 0} \overline{S} = \lim_{\lambda\to 0} \underline{S} = 0$$

olduğu üçün

$$J = (L)\int_0^1 D(x)dx = 0$$

olduğunu göstərir.

Qeyd 3.2.1. Lebeq inteqralının qurulmasında $f(x)$ funksiyasının bütün qiymətlərini saxlayan hər hansı (A,B) aralığından istifadə olunur. Bu intervallar $f(x)$ funksiyasına görə birqiymətli təyin edildiyindən göstərmək lazımdır ki, Lebeq inteqralının qiyməti A və B ədədlərinin seçilməsindən asılı deyildir. İnteqralın, B ədədinin seçilməsindən asılı olmadığını göstərək. Analoji olaraq inteqralın A ədədindən asılı olmadığı göstərilir. Tutaq ki, $A<f(x)<B$, $A<f(x)<B'$ və $B'>B$.

Lebeq inteqralı (A,B') intervalının bölünməsi üsulundan asılı olmadığı üçün B-ni bölgü nöqtələri sırasına daxil edək:

$$A=y_0<y_1<\ldots<y_n = B<y_{n+1}<\ldots<y_p=B',$$

burada $y_n=B$.

Bu bölgünün köməyi ilə

$$\underline{S'} = \sum_{k=0}^{p-1} y_k \cdot me_k = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot me_k + \sum_{k=n}^{p-1} y_k \cdot me_k$$

aşağı Lebeq cəmini düzəldək.

Lakin $k\geq n$ olduqda

$$e_k=E_k\,[y_k\leq f(x)<y_{k+1}]\subset E[f(x)\geq B]=\varnothing,$$

buna görə də $me_k=0$ olur. Deməli,

$$\underline{S'} = \sum_{k=0}^{p-1} y_k \cdot me_k = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot me_k = \underline{S}$$

olacaqdır. Buradan alınır ki,

$$\lim_{\lambda\to 0} \underline{S'} = \lim_{\lambda\to 0} \underline{S}\,,$$

bu isə o deməkdir ki, (A,B) və (A,B') intervallarının köməyi ilə $f(x)$ funksiyası üçün qurulmuş Lebeq iteqralı üst-üstə düşür.

*2.2. **Lebeq inteqralının əsas xassələri.***

Lebeq inteqralının bir sıra sadə xassələrini qeyd edək. Burada baxılan və sonralar təsadüf edilən funksiyaların məhdud ölçülən olmaları, inteqrallarının isə sonlu ölçülü çoxluqlar üzrə götürüldüyü fərz edilir.

Teorem 3.2.3. $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda $a\leq f(x)\leq b$ bərabərsizliklərini ödəyərsə, onda

$$a \cdot mE \le \int_E f(x)dx \le b \cdot mE . \qquad (3.2.1)$$

Bu teorem orta qiymət haqqında teorem adlanır.

İsbatı. İstənilən natural n ədədi üçün $A = a - \frac{1}{n}$, $B = b + \frac{1}{n}$ götürək. Onda bütün $x \in E$ nöqtələri üçün $A<f(x)<B$ olar.

$$A=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_n<B$$

nöqtələrinin köməyi ilə $[A,B]$ seqmentini hissələrə bölək və Lebeq cəmləri düzəldək. $A\le y_k \le B$ hesab etsək, aydındır ki,

$$A \cdot \sum_{k=0}^{n-1} me_k \le \sum_{k=0}^{n-1} y_k me_k \le B \cdot \sum_{k=0}^{n-1} me_k$$

və ya

$$A \cdot mE \le \underline{S} \le B \cdot mE.$$

$\lambda = \max\limits_k (y_{k+1}, y_k) \to 0$ şərtində limitə keçsək,

$$\left(a - \frac{1}{n}\right) mE \le \int_E f(x)dx \le \left(b + \frac{1}{n}\right) mE$$

olar.

Burada $n \to \infty$ şərtində limitə keçsək (3.2.1) bərabərsizliyini alarıq.

Bu teoremdən bir neçə sadə nəticələr alınır.

Nəticə 3.2.1. $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda $f(x)=c$-dirsə, onda

$$\int_E f(x)dx = c \cdot mE .$$

Nəticənin doğruluğu (3.2.1)-də $a=c=b$ götürməklə alınır.

Nəticə 3.2.2. $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda mənfi deyildirsə (müsbət deyildirsə), yəni E-də $f(x)\ge 0$ ($f(x)\le 0$)-dırsa, onda

$$\int_E f(x)dx \ge 0 \quad \left(\int_E f(x)dx \le 0\right).$$

(3.2.1)-dən a=0 (b=0) olduqda alınır.

Nəticə 3.2.3. Əgər mE=0 olarsa, onda E çoxluğunda verilmiş istənilən məhdud $f(x)$ funksiyası üçün

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

(3.2.1.)-dən mE=0 olduqda alınır.

Nəticə 3.2.4. Əgər $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda $|f(x)|\leq L$ şərtini ödəyərsə, onda

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leq L\cdot mE.$$

İsbatı. Verilən şərtdən alınır ki, $-L\leq f(x)\leq L$ olur. Onda teorem 3.2.1-ə əsasən

$$-L\cdot mE \leq \int_E f(x)dx \leq L\cdot mE$$

olar ki, buradan da

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leq L\cdot mE$$

olması alınır.

Teorem 3.2.3. Tutaq ki, E çoxluğunda ölçülən məhdud $f(x)$ funksiyası verilmişdir, E çoxluğu isə sonlu və ya hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən ölçülən E_k çoxluqlarının birləşməsindən ibarətdir:

$$E = \bigcup_k E_k \quad (E_k \cap E_{k'} = \varnothing,\ k \neq k').$$

Onda

$$\int_E f(x)dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)dx. \qquad (3.2.2)$$

İnteqralın bu teoremlə ifadə olunan xassəsi onun tam additvlik xassəsi adlanır.

İsbatı. Əvvəlcə E-nin iki altçoxluğa bölündüyü sadə hala baxaq:

$$E=E' \cup E'' \quad (E' \cap E''=\varnothing).$$

Əgər E çoxluğunda $A<f(x)<B$ olarsa, $[A,B]$ seqmentini $y_0,y_1,\ldots,y_n$ nöqtələri ilə hissələrə bölərək

$$e_k = E(y_k \le f(x) < y_{k+1}),$$
$$e'_k = E'(y_k \le f(x) < y_{k+1}),$$
$$e''_k = E''(y_k \le f(x) < y_{k+1}),$$

çoxluqlarını düzəldək. Onda aydındır ki, hər bir k üçün $e_k = e'_k \cup e''_k$ $(e'_k \cap e''_k = 0)$, nəticədə $me_k = me'_k + me''_k$ olacaqdır, onda

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k me_k = \sum_{k=0}^{n-1} y_k me'_k + \sum_{k=0}^{n-1} y_k me''_k = \underline{S}' + \underline{S}''$$

olar. Buradan, $\lambda\to 0$ olduqda limitə keçsək, alarıq:

$$\int_E f(x)dx = \int_{E'} f(x)dx + \int_{E''} f(x)dx.$$

Beləliklə, teorem iki toplanan çoxluq halı üçün isbat olunur. Riyazi induksiya üsulundan istifadə edərək, teoremi istənilən sonlu sayda toplanan çoxluqlar halında asanlıqla isbat etmək olar.

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

halına baxmaq qalır. Bu halda

$$R_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k$$

ilə işarə edək. Onda

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \cup R_n \quad . \tag{3.2.3}$$

Aydındır ki,

$$mR_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} mE_k ,$$

yığılan

$$\sum_{k=1}^{\infty} mE_k = mE$$

sırasının qalıq həddidir. Odur ki, $\lim_{n\to\infty} mR_n = 0$ olur.

Sonlu sayda toplanan çoxluqlar üçün teorem isbat edildiyindən və (3.2.3) bərabərliyində sonlu sayda toplananlar olduğundan,

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)dx + \int_{R_n} f(x)dx$$

bərabərliyi doğrudur.

$A \le f(x) \le B$ götürsək, orta qiymət teoreminə əsasən

$$AmR_n \le \int_{R_n} f(x)dx \le BmR_n$$

olar. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \int_{R_n} f(x)dx = 0$$

olur. Deməli,

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)dx + \lim_{n\to\infty} \int_{R_n} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx .$$

Teorem isbat olundu.

Nəticə 3.2.5. E çoxluğunda $f \sim g$ olarsa (hər ikisi məhdud və ölçüləndir), onda

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx .$$

İsbatı. Doğrudan da, əgər $A=E$ $(f \ne g)$, $B=E$ $(f=g)$ olarsa, onda $f \sim g$ olduğuna görə $mA=0$ olar. Yəni E çoxluğunda $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları sanki hər yerdə üst-üstə düşür.

$$\int_E = \int_A + \int_B ,$$

buna görə də aşağıdakı iki bərabərlikləri alarıq:

$$\int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx = 0,$$

$$\int_B f(x)dx = \int_B g(x)dx.$$

Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq inteqralın additivlik xassəsinə əsasən alırıq:

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx\,.$$

Bu nəticə həm də göstərir ki, sıfır ölçülü çoxluq üzrə götürülmüş inteqralın qiyməti inteqralaltı funksiyadan asılı deyildir.

Qeyd etmək lazımdır ki, nəticə 3.2.5-də $g(x)=c=$const götürsək, onu aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.

Nəticə 3.2.5′. $f\sim c$ (c sabit ədəddir) olarsa, onda

$$\int_E f(x)dx = \int_E cdx = c\cdot mE$$

olar. Xüsusi halda, $f\sim 0$ olarsa

$$\int_E f(x)dx = 0$$

olur (sıfra ekvivalent olan funksiyanın inteqralı da sıfra bərabərdir).

Lakin inteqralı sıfır olan funksiya sıfra ekvivalent olmaya bilər. Məsələn, [-1,+1] seqmentində

$$f(x) = \begin{cases} 1\ , & x \ge 0 \text{ olduqda,} \\ -1\,, & x < 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

götürülərsə, onda

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = -1+1 = 0$$

olur, lakin $f(x)$ sıfra ekvivalent deyilidir.

Nəticə 3.2.6. Əgər E çoxluğunda

$$f(x)\ge 0 \ \text{ və } \int_E f(x)dx = 0$$

olarsa, onda bu funksiya sıfra ekvivalentdir, yəni $f(x)$~0.

İsbatı. Bu nəticənin isbatı üçün E (f>0) çoxluğunun ölçüsünün sıfra bərabər olmasını göstərmək lazımdır. Bu çoxluğu,

$$E\left(f>0\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f>\frac{1}{n}\right)$$

şəklində göstərmək olar. Əksini fərz edək, yəni $f(x)$ sıfra ekvivalent olmasın, onda $mE(f>0)>0$ olar. Odur ki, toplanan çoxluqlardan heç olmazsa birinin ölçüsü müsbət olacaqdır.

Məsələn, fərz edək ki, n_0 ədədi üçün $A=E\left(f>\frac{1}{n_0}\right)$ çoxluğunun ölçüsü müsbətdir:

$$mA=mE\left(f>\frac{1}{n_0}\right)=\sigma>0\,.$$

E çoxluğunu $A=E\left(f>\frac{1}{n_0}\right)$ və $B=E\backslash A$ çoxluqlarına ayıraq. Orta qiymət haqqında teoremə və ondan çıxan nəticə 3.2.2-yə əsasən A çoxluğunda $f(x)>\frac{1}{n_0}$ olduğundan,

$$\int_A f(x)dx\geq\frac{1}{n_0}mA=\frac{1}{n_0}\sigma\,,$$

B çoxluğunda isə $f(x)\geq 0$ olduğundan,

$$\int_B f(x)dx\geq 0$$

olar.

Axırıncı iki bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə toplasaq teorem 3.2.2-yə əsasən

$$\int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx = \int_E f(x)dx \geq \frac{1}{n_0}\sigma$$

alarıq ki, bu da

$$\int_E f(x)dx = 0$$

şərtinə ziddir, yəni $mA=mE\ (f>0)=0$ olmalıdır. Bu isə $f(x)\sim 0$ olduğunu göstərir.

Orta qiymət teoremindən çıxan nəticə 3.2.2-ni bir qədər qüvvətləndirmək olar.

Nəticə 3.2.7. E çoxluğunda sanki hər yerdə $f(x)\geq 0$ ($f(x)\leq 0$) olarsa, onda

$$\int_E f(x)dx \geq 0 \quad \left(\int_E f(x)dx \leq 0 \right)$$

olur.

Doğrudan da,

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{əgər} \quad f(x) \geq 0, \\ 0 \quad , & \text{əgər} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

$$\left(g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{əgər} \quad f(x) \leq 0, \\ 0 \quad , & \text{əgər} \quad f(x) > 0 \end{cases} \right)$$

fərz edərək, $f(x)$-ə ekvivalent funksiya alarıq. Bütün $x\in E$ nöqtələrində $g(x)\geq 0$ ($g(x)\leq 0$) olduğu üçün

$$\int_E g(x)dx \geq 0 \quad \left(\int_E g(x)dx \leq 0 \right)$$

olar. Buradan nəticə 3.2.2-yə əsasən

$$\int_E f(x)dx \geq 0 \quad \left(\int_E f(x)dx \leq 0 \right)$$

alırıq.

Nəticə 3.2.8. Tutaq ki, E_k çoxluqları ölçülən, cüt-cüt kəsişməyəndirlər və

$$f(x) = c_k \ (c_k = const),\ x \in E_k \ (k = 1,2,...)$$

olarsa, onda

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

çoxluğu üçün

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k mE_k \ .$$

Bu bərabərlik teorem 3.2.2 və nəticə 3.2.1-dən bir başa alınır, belə ki,

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} c_k dx = \sum_{k=1}^{n} c_k mE_k .$$

Nəticə 3.2.9. E_m çoxluqları ölçüləndirlərsə, artan $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ ardıcıllıq əmələ gətirilərsə və

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$$

olarsa, onda

$$\int_E f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int_{E'_m} f(x)dx .$$

İsbatı. $A_1=E_1$, $k\geq 2$ olduqda isə $A_k = E_k \setminus E_{k-1}$ qəbul edək. Onda A_k-lar cüt-cüt kəsişmirlər,

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \ ,$$

istənilən m üçün isə

$$E_m = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$$

olar. (3.2.2) bərabərliyindən bir başa alınır ki,

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{A_k} f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int_{E_m} f(x)dx.$$

Nəticə 3.2.7. Əgər mənfi olmayan $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçülən və məhduddursa, onda ölçülən $A\subset E$ üçün

$$\int_A f(x)dx \le \int_E f(x)dx.$$

İsbatı. Fərz edək ki, $B = E \setminus A$. $A \subset E$ olduğundan $\forall x \in B$ olduqda $x \in E$, $x \notin A$ olar. $\forall x \in E$ üçün isə $f(x) \ge 0$ olduğuna görə həmin $\forall x \in B$ nöqtələri üçün də $f(x) \ge 0$ olacaqdır. Onda nəticə 3.2.2-yə əsasən

$$\int_B f(x)dx \ge 0$$

olacaqdır. Digər tərəfdən $A \cap B = \varnothing$ və $E = A \cup B$ olduğundan teorem 3.2.2-yə əsasən

$$\int_E f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx$$

olar.

Sağ tərəfdən $\int_B f(x)dx$-i atsaq

$$\int_E f(x)dx \ge \int_A f(x)dx$$

alarıq ki, bu da tələb edilən bərabərsizlikdir.

Qeyd 3.2.2. Nəticə 3.2.1-ə əsasən, nəticə 3.2.2-ni bir qədər dəqiqləşdirərək aşağıdakı teorem şəklində söyləmək olar.

Teorem 3.2.3. Ölçülən məhdud $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda sanki hər yerdə $f(x) \ge 0$ olarsa və

$$\int_E f(x)dx = 0$$

olarsa, onda E-də $f \sim 0$ olur.

İsbatı. Fərz edək ki,

$$E_1 = E\,(f > 0),\ E_2 = E\,(f < 0),\ E_3 = E\,(f = 0).$$

Şərtə görə $f(x) \ge 0$-dir, buna görə də $mE_2 = 0$, həm də

$$\int_{E_2} f(x)dx = 0$$

olacaqdır. Bundan əlavə E_3 çoxluğunda $f(x) = 0$ olduğundan

$$\int_{E_3} f(x)dx = 0$$

olacaqdır. Nəticədə, şərtə əsasən

$$\int_{E} f(x)dx = 0$$

olduğundan,

$$\int_{E} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx + \\ + \int_{E_3} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx = 0. \tag{3.2.4}$$

Buradan nəticə 3.2.6-ya əsasən, $mE_1(f>0)=0$, yəni E_1 çoxluğunda $f\sim 0$ alınır. Şərtə görə $mE_2=0$ və E_3 çoxluğunda $f=0$ olduğunu nəzərə alsaq $mE(f\neq 0)=0$. Deməli, E-də $f\sim 0$. Teorem isbat olundu.

Teorem 3.2.4. Q çoxluğunda iki ölçülən məhdud $f(x)$ və $F(x)$ funksiyaları üçün

$$\int_{Q} [f(x) + F(x)]dx = \int_{Q} f(x)dx + \int_{Q} F(x)dx\,. \tag{3.2.5}$$

İsbatı. Tutaq ki, Q çoxluğunda $a<f(x)<b$, $A<F(x)<B$ verilib. Hər iki $[a,b]$ və $[A,B]$ seqmentlərini

$$a=y_0<y_1<\ldots<y_n=b, \quad A=Y_0<Y_1<\ldots<Y_N=B$$

nöqtələri ilə hissələrə bölək və

$$e_k=Q(y_k\leq f<y_{k+1}),\ \ E_i=Q(Y_i<F<Y_{i+1}),\ T_{i,k}=E\cap e_k$$

$$(i=0,1,2,\ldots,N\text{-}1;\ k=0,1,\ldots,n\text{-}1)$$

çoxluqlarını daxil edək.

Aydındır ki, $T_{i,k}$ çoxluqları cüt-cüt kəsişmirlər və

$$Q = \bigcup_{i,k} T_{i,k}\ .$$

Buna görə də teorem 3.2.2-yə əsasən

$$\int_{Q} [f(x) + F(x)]dx = \sum_{i,k} \int_{T_{i,k}} [f(x) + F(x)]dx\,.$$

Lakin $T_{i,k}$ çoxluğu üzrə

$$y_k+Y_i\leq f(x)+F(x)<y_{k+1}+Y_{i+1}$$

olacaqdır, buradan orta qiymət haqqında teoremə əsasən

$$(y_k+Y_i)mT_{i,k}\leq\int_{T_{i,k}}[f(x)+F(x)]dx\leq(y_{k+1}+Y_{i+1})mT_{i,k}.$$

Bu bərabərsizliklərin hamısını tərəf-tərəfə toplayaraq, alarıq:

$$\sum_{i,k}(y_k+Y_i)mT_{i,k}\leq\int_Q(f(x)+F(x))dx\leq$$
$$\leq\sum_{i,k}(y_{k+1}+Y_{i+1})mT_{i,k}. \qquad (3.2.6)$$

Buradakı

$$\sum_{i,k}y_k mT_{i,k} \qquad (3.2.7)$$

cəmini ayrıca hesablayaq. Bu cəmi

$$\sum_{k=0}^{n-1}y_k\left(\sum_{i=0}^{N-1}mT_{i,k}\right)$$

şəklində yazmaq olar.

Digər tərəfdən

$$\sum_{i=0}^{N-1}mT_{i,k}=m\left[\sum_{i=0}^{N-1}T_{i,k}\right]=m\left[\sum_{i=0}^{N-1}E_i\cap e_k\right]=$$
$$=m\left[e_k\cap\sum_{i=0}^{N-1}E_i\right]=m(e_k\cap Q)=me_k.$$

Demək, (3.2.7) cəmini $\sum_{k=0}^{n-1}y_k me_k$ şəklində göstərmək olur. Bu isə $f(x)$ fuknsiyasının $\underline{S}_f$ aşağı Lebeq cəmidir.

Analoji qayda ilə (3.2.6) bərabərsizliklərinə daxil olan başqa cəmlər də hesablanır. Həmin bərabərsizlikləri

$$\underline{S}_f+\underline{S}_F\leq\int_Q[f(x)+F(x)]dx\leq\overline{S}_f+\overline{S}_F \qquad (3.2.8)$$

şəklində yazmaq olar.

$[a,b]$ və $[A,B]$ seqmentlərinin bölgü nöqtələrini birləşdirərək, $\lambda\to 0$ şərtində (3.2.8) bərabərsizliyində limitə keçsək, teoremin isbatını alarıq.

Teorem 3.2.5. E çoxluğunda ölçülən məhdud $f(x)$ funksiyası və sonlu C sabiti üçün

$$\int_E Cf(x)dx = C\int_E f(x)dx.$$

İsbatı. $C=0$ olarsa, teoremin isbatı aydındır.

$C>0$ halına baxaq. $A<f(x)<B$ götürüb $[A,B]$ seqmentini y_k nöqtələri ilə hissələrə bölək və

$$e_k=E[y_k\le f<y_{k+1}] \quad (k=0,1,\dots,n\text{-}1)$$

çoxluqlarını düzəldək. Onda $x\in e_k$ üçün

$$Cy_k\le Cf(x)\le Cy_{k+1}$$

olur. Orta qiymət teoreminə əsasən

$$Cy_k me_k \le \int_{e_k} Cf(x)dx \le Cy_{k+1}me_k.$$

Bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə toplayaraq

$$C\sum_{k=0}^{n-1} y_k me_k \le \int_E Cf(x)dx \le C\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}me_k \qquad (3.2.9)$$

və ya

$$C\underline{S} \le \int_E Cf(x)dx \le C\overline{S}$$

alırıq, burada $\underline{S}$ və $\overline{S}$ isə $f(x)$ funksiyası üçün Lebeq cəmləridir. Axırıncı bərabərsizliklərdə $\lambda=\max(y_{k+1}-y_k)\to 0$ şərtində limitə keçsək

$$C\int_E f(x)dx \le \int_E Cf(x)dx \le C\int_E f(x)dx,$$

buradan da

$$\int_E Cf(x)dx = C\int_E f(x)dx$$

alırıq ki, bununla da $C>0$ olduqda teorem isbat edilir.

Əgər $C<0$ olarsa, (3.2.9) bərabərsizliklərində və sonrakı ifadələrin hamısında $\le$ işarəsini $\ge$ işarəsi ilə əvəz etmək, sonra isə $\lambda \to 0$ şərtində limitə keçmək lazımdır. Onda

$$0 = \int_E [Cf(x) + (-C) f(x)]dx = \int_E Cf(x)dx + (-C)\int_E f(x)dx$$

olur ki, buradan da teoremin isbatı alınır.

Nəticə 3.2.11. $f(x)$ və $F(x)$ funksiyaları E çoxluğunda ölçülən və məhdud olduqda

$$\int_E [f(x) - F(x)]dx = \int_E f(x)dx - \int_E F(x)dx .$$

İsbatı üçün $f(x)$-$F(x)$=$f(x)$+(-1)$F(x)$ yazaraq teorem 3.2.3 və teorem 3.2.4-ü tətbiq etmək kifayətdır.

Teorem 3.2.6. E çoxluğunda ölçülən və məhdud $f(x)$ və $F(x)$ funksiyaları üçün

$$f(x) \le F(x)$$

olarsa, onda

$$\int_E f(x)dx \le \int_E F(x)dx .$$

İsbatı. Doğrudan da, $x \in E$ olduqda $F(x)-f(x)$ funksiyası mənfi deyildir, onda

$$\int_E F(x)dx - \int_E f(x)dx = \int_E (F(x) - f(x))dx \ge 0 ,$$

buradan da

$$\int_E F(x)dx \ge \int_E f(x)dx$$

bərabərsizliyi alınır.

Teorem 3.2.7. E çoxluğunda ölçülən və məhdud $f(x)$ funksiyası üçün

$$\left| \int_E f(x)dx \right| \le \int_E | f(x) | dx .$$

İsbatı. $P=E$ $(f \ge 0)$, $N=E$ $(f<0)$ götürək.

Ölçülən funksiyanın xassəsinə əsasən $|f(x)|$ ölçülən olar. P və N çoxluqları ölçüləndirlər və $P \cap N = \varnothing$, $P \cup N = E$. Onda inteqralın additivlik xassəsinə əsasən

$$\int_E f(x)dx = \int_p f(x)dx + \int_N f(x)dx = \int_p |f(x)|dx - \int_N |f(x)|dx,$$

$$\int_E |f(x)|dx = \int_p |f(x)|dx + \int_N |f(x)|dx .$$

$|a - b| \le a + b$ ($a \ge 0$, $b \ge 0$) bərabərsizliyinə əsasən

$$\left|\int_E f(x)dx\right| = \left|\int_p |f(x)|dx - \int_N |f(x)|dx\right| \le$$

$$\le \int_p |f(x)|dx + \int_N |f(x)|dx = \int_E |f(x)|dx.$$

Buradan teoremin isbatı alınır.

§ 3. İnteqral altında limitə keçmək

Tutaq ki, E çoxluğunda ölçülən məhdud

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

funksiyalar ardıcıllığı hər hansı mənada (hər yerdə, sanki hər yerdə, ölçüyə görə və s.) ölçülən məhdud $F(x)$ funksiyasına yığılır.

Bu zaman

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E F(x)dx \qquad (3.3.1)$$

münasibəti doğru olarsa, onda deyirlər ki, inteqral altında limitə keçmək mümkündür.

Ümumiyyətlə, (3.3.1) münasibəti həmişə doğru olmaya bilər. Məsələn, $[0,1]$ seqmentində $f_n(x)$ funksiyaları

$$f_n(x) = \begin{cases} n,\ x \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right),\ 0 < x < \dfrac{1}{n} \ \text{olduqda}, \\ 0,\ x \notin \left(0, \dfrac{1}{n}\right),\ \dfrac{1}{n} \le x < 1 \ \text{olduqda} \ (n = 1,2,\ldots) \end{cases}$$

şəklində təyin edilərsə, onda bütün $x \in [0,1]$ nöqtələri üçün

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = F(x)$$

olduğu halda,

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} ndx + \int_{\frac{1}{n}}^0 0 \cdot dx = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

olur. Bu misal göstərir ki, həmişə inteqralaltında limitə keçmək olamaz.

Teorem 3.3.1 (**A.Lebeq**). Tutaq ki, E çoxluğunda ölçülən məhdud

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

funksyalar ardıcıllığı ölçüyə görə ölçülən məhdud $F(x)$ funksiyasına yığılır:

$$f_n(x) \Rightarrow F(x).$$

Əlavə olaraq $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığı müntəzəm məhduddur, yəni elə K sabit ədədi var ki,

$$|f_n(x)| < K$$

bərabərsizliyi $\forall n$ və $\forall x \in E$ üçün ödənir.

Onda

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E F(x)dx. \qquad (3.3.2)$$

İsbatı. Qeyd edək ki, sanki bütün $x \in E$ nöqtələri üçün

$$|F(x)| \leq K, \qquad (3.3.3)$$

Doğrudan da, Riss teoreminə əsasən $\{f_n(x)\}$ ardıcıllığından sanki hər yerdə $F(x)$-ə yığılan $\{f_{n_k}(x)\}$ altardıcıllığı ayırmaq olar:

$$f_{n_k}(x) \to F(x).$$

Onda $|f_{n_k}(x)| < K$ bərabərsizliyində $k \to \infty$ şərtində limitə keçsək (3.3.3) bərabərsizliyinin doğruluğunu alarıq.

İstənilən σ müsbət ədədi üçün

$$A_n(\sigma) = E(|f_n - F| \geq \sigma)\ ,\ B_n(\sigma) = E(|f_n - F| < \sigma);$$

çoxluqlarını düzəldək. Onda

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E F(x)dx\right| \le \int_E |f_n(x) - F(x)|\,dx =$$

$$= \int_{A_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx + \int_{B_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx. \qquad (3.3.4)$$

Buradan

$$|f_n(x) - F(x)| \le |f_n(x)| + |F(x)|$$

bərabərsizliyinə əsasən $A_n(\sigma)$ çoxluğunda sanki bütün x nöqtələr üçün

$$|f_n(x) - F(x)| < 2K$$

olar. $A_n(\sigma)$ çoxluğunda $|f_n(x) - f(x)| < 2K$ şərtini ödəməyən x nöqtələr çoxluğunu $Q_n(\sigma)$ ilə işarə edək. Onda $mQ_n(\sigma)=0$ olur.

$$P_n(\sigma)=A_n(\sigma) \setminus Q_n(\sigma)$$

ilə işarə edək. Onda orta qiymət haqqındakı teorem 3.2.1-ə əsasən

$$\int_{A_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx = \int_{P_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx +$$

$$+ \int_{Q_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx = \int_{P_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx \le$$

$$\le 2K \cdot mP_n(\sigma) = 2K \cdot mA_n(\sigma) \qquad (3.3.5)$$

olar.

Analoji qayda ilə alarıq:

$$\int_{B_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx \le \sigma \cdot B_n(\sigma) \le \sigma \cdot mE\,. \qquad (3.3.6)$$

(3.3.5) və (3.3.6) bərabərsizliklərini (3.3.4) bərabərsizliyində nəzərə alsaq

$$\left|\int_E f_n dx - \int_E F dx\right| \le 2K \cdot mA_n(\sigma) + \sigma \cdot mE\,. \qquad (3.3.7)$$

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün və $\sigma > 0$ ədədini kiçik götürməklə $\sigma \cdot mE < \frac{\varepsilon}{2}$ etmək olar. Qeyd olunmuş σ ədədi üçün ölçüyə görə yığılmaya əsasən elə N nömrəsi seçmək olar ki, $n>N$ üçün $2K \cdot mA_n(\sigma) < \frac{\varepsilon}{2}$ şərti ödənsin.

$n>N$ üçün (3.3.7) bərabərsizliyi

$$\left| \int_E f_n dx - \int_E F dx \right| < \varepsilon$$

şəklinə düşür. Buradan teoremin isbatı alınır.

İsbat olunan teorem $|f_n(x)|<K$ münasibəti E çoxluğunda sanki bütün nöqtələrdə ödəndikdə də doğrudur. Funksiyalar ardıcıllığının müntəzəm, nöqtəvi, sanki hər yerdə yığılmalarından ölçüyə nəzərən yığılması alınır. Odur ki, isbat edilən teorem həm də belə ardıcıllıqlar üçün doğrudur.

§ 4. **Riman və Lebeq inteqrallarının müqayisəsi**

Riman və Lebeq mənada inteqrallar arasındakı münasibəti aydınlaşdırmaq üçün aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 3.4.1. $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentində Riman mənada inteqrallanandırsa, onda

a) $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentində Lebeq mənada da inteqrallanandır;

b) $[a,b]$ seqmentində $f(x)$ funkisyasının Riman və Lebeq mənada inteqralları bərabərdir.

Əvvəlcə aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma. $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ seqmentində kəsildiyi nöqtələr çoxluğunun ölçüsü sıfra bərabərdirsə, onda $f(x)$ $[a,b]$-də ölçüləndir.

Lemmanın isbatı. $f(x)$ funksiyasının $S=[a,b]$ seqmentində kəsildiyi nöqtələr çoxluğunu E_0 ilə işarə edək. Onda $mE_0=0$ olur.

İxtiyari A ədədi üçün $S=[a,b]$ seqmentinin $f(x)\geq A$ şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğunu

$$E=S\,(\,f\geq A\,)$$

ilə işarə edək və bu çoxluğun ölçülən olduğunu isbat edək. Əvvəlcə göstərək ki, ξ nöqtəsi E çoxluğunun limit nöqtəsidirsə və $\xi \notin E$-dirsə, onda ξ nöqtəsi $f(x)$-in kəsilmə nöqtələri çoxluğu E_0-a daxildir, yəni $\xi \in E_0$.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası ξ nöqtəsində kəsilməzdir. $\xi \notin E$ olduğu üçün $f(\xi)<A$ olur, demək, ξ nöqtəsinin elə $(\xi-\delta,\xi+\delta)$ ətrafı var ki, bu ətrafda $f(x)<A$ olur. Bu onu göstərir ki, $(\xi-\delta,\xi+\delta)$ ətrafında E çoxluğunun heç bir nöqtəsi yoxdur, bu isə mümkün deyil, çünki ξ nöqtəsi E çoxluğunun limit nöqtəsidir. Alınan ziddiyyət göstərir ki, $f(x)$ funksiyası ξ nöqtəsində kəsilir. Odur ki, $\xi \in E_0$. E çoxluğunun özündə yerləşməyən limit nöqtələri çoğxluğunu D ilə işarə edək. Göstərdiyimizə görə $D \subset E_0$. E_0 çoxluğu ölçülən və $mE_0=0$ olduğu üçün D çoxluğu da ölçülən və $mD=0$ olur.

$$F=E\cup D$$

çoxluğu E çoxluğunun qapanmasıdır, buna görə qapalıdır və qapalı çoxluq ölçülən olduğuna görə, həm də ölçüləndir. Buradan alınır ki, E çoxluğu iki ölçülən çoxluğun

$$E=F \setminus D$$

fərqi kimi göstərildiyindən ölçüləndir.

Beləliklə, istənilən A ədədi üçün $E=S(f \geq A)$ çoxluğu ölçüləndir.

Bu da $f(x)$-in $[a,b]$ seqmentində ölçülən funksiya olduğunu göstərir. Lemma isbat oldu.

Teoremin isbatı. $f(x)$ funkisyası $[a,b]$ seqmentində Riman mənada inteqrallanan olmasından alırıq:

1) $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentində məhduddur;

2) $f(x)$ funkisyasının $[a,b]$ seqmentində kəsilmə nöqtələri çoxluğunun ölçüsü sıfra bərabərdir.

Lemmaya əsasən $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentində ölçüləndir. Nəticədə $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentində Lebeq mənada inteqrallanandır.

$[a,b]$ seqmentini

$$a=x_0<x_1<\ldots.<x_n=b$$

nöqtələri ilə

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$$

hissələrə bölək. $f(x)$ funksiyasının $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=\overline{0,n-1})$ seqmentlərində dəqiq yuxarı və dəqiq aşağı sərhədlərini uyğun olaraq M_k və m_k ilə işarə edək. $f(x)$ funkisyası $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=\overline{0,n-1})$ seqmentlərində məhdud və ölçüləndir, buna görə də onların hər birində Lebeq mənada inteqrallanandır. Odur ki, orta qiymət haqqında teoremə əsasən

$$m_k\cdot\Delta x_k\le(L)\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx\le M_k\Delta x_k,$$

burada $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$. Bu bərabərsizlikləri bütün k-lar üçün cəmləyərək alarıq:

$$\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k\le\sum_{k=0}^{n-1}(L)\int_{x_k}^{x_k+1}f(x)dx\le\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta x_k$$

və ya

$$\underline{S}\le(L)\int_a^b f(x)dx\le\overline{S},$$

burada $\underline{S}$ və $\overline{S}$ uyğun olaraq aşağı və yuxarı Darbu cəmləridir. Şərtə əsasən $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentində Riman mənada inteqrallanandır, onda

$$\lim_{\lambda\to0}\underline{S}=\lim_{\lambda\to0}\overline{S}=(R)\int_a^b f(x)dx$$

olar, burada $\lambda=\max(x_{k+1}-x_k)=\max\Delta x_k$.

Axırıncı bərabərsizliklərdən görünür ki, $\underline{S}$ və $\overline{S}$ cəmlərinin ortaq limiti

$$(L)\int_a^b f(x)dx$$

olur. Nəticədə

$$(L)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx .$$

Bununla teorem isbat olur.

Beləliklə, $f(x)$ Riman mənada inteqrallanandırsa, onda Lebeq mənada da inteqrallanandır və hər iki inteqral bərabərdir. Lakin bu təklifin tərsi doğru deyil, yəni $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ seqmentində Lebeq mənada inteqrallanmasından Riman mənada inteqrallanması alınmır. Buna Dirixle funksiyası misal ola bilər.

Nəticədə Lebeq inteqralının Riman inteqralının ümumiləşməsi olduğunu söyləmək olar. Bu fikri aşağıdakı faktlar da təsdiq edir.

1) Lebeq inteqralı altında limitə keçmə teoremində bütün şərtlər ödənməklə Riman mənada inteqrallamaya baxsaq limit funksiyası inteqrallanmaya bilər.

2) $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentinin hər bir nöqtəsində məhdud $f'(x)$ törəməsinə malikdirsə, onda $f'(x)$ Lebeq mənada inteqrallanandır və

$$f(x)=f(a) + (L)\int_a^x f(S)dS .$$

Deməli, Lebeq inteqralının köməyi ilə hər bir məhdud törəməsinə görə ibtidai funksiya tapılır. Bunu Riman inteqralının köməyi ilə həmişə etmək olmur. Buna səbəb törəməsi Riman mənada inteqrallana bilməyən funksiyanın varlığıdır.

Lebeq inteqralına aid nümunələr və tapşırıqlar.

Misal 1. $[0,1]$ seqmentində $f(x)=x$ funksiyasının Riman və Lebeq mənada inteqrallanan olduğunu göstərin və

$$(R)\int_0^1 xdx \text{ və } (L)\int_0^1 xdx \text{ -i}$$

tapın.

Həlli. Əvvəlcə

$$(R)\int_0^1 xdx$$

inteqralını hesablayaq. İstənilən $\varepsilon > 0$ üçün $\frac{1}{n} < \varepsilon$ şərtini ödəyən n ədədi götürək və [0,1] seqmentin n bərabər hissəyə bölək. Bu bölgünü σ_n ilə işarə edək. Onda

$$[0,1] = \left[0,\frac{1}{n}\right) \cup \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{n-2}{n},\frac{n-1}{n}\right) \cup \left[\frac{n-1}{n},1\right)$$

olur. Bu halda funksiyanın dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədləri

$$m_k = \frac{k-1}{n},\ M_k = \frac{k}{n},\ x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n} \quad (k = 1,2,\ldots,n)$$

olur. Buna görə də

$$\underline{S}(f,\sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}(k-1) =$$

$$= \frac{1}{n^2}(0+1+2+\cdots+n-1) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{0+n-1}{2}\cdot n = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Deməli,

$$\underline{S}(f,\sigma_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

$$\overline{S}(f,\sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n) =$$

$$= \frac{1+n}{2n^2}\cdot n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n},$$

$$\overline{S}(f,\sigma_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Onda

$$\overline{S}(f,\sigma_n)-\underline{S}(f,\sigma_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}=\frac{2}{2n}=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

olduğu üçün

$$\lim_{n\to\infty}\left[\overline{S}(f,\sigma_n)-\underline{S}(f,\sigma_n)\right]=0$$

olar.

Bu isə onu göstərir ki, [0,1] seqmentində $f(x)=x$ funksiyası Riman mənada inteqrallanandır.

$$J=\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,\sigma_n)=\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,\sigma_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}.$$

Demək,

$$J=(R)\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

İndi $f(x)=x$ funksiyasının [0,1]-də Lebeq inteqralını hesablayaq.

Funksiyanın [0,1] qiymətləri çoxluğunu n bərabər hissəyə bölək.

Bu zaman alınan

$$[y_k,y_{k+1}]=\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\ (k=0,1,2,\dots,n-1)$$

hissələr

$$e_k=\left(y_k\le f<y_{k+1}\right)=E\left(\frac{k}{n}\le f<\frac{k+1}{n}\right)=\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$$

olduğundan,

$$\underline{S}=\sum_{k=0}^{n-1}y_k\cdot me_k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}(0+1+2+\cdots+n-1)=$$

$$=\frac{0+n-1}{2n^2}\cdot n=\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n},$$

$$\underline{S}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

$$\overline{S}=\sum_{k=1}^{n-1} y_{k+1} me_k=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)=$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},$$

$$\overline{S}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

$$\overline{S}-\underline{S}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{S}-\underline{S})=0.$$

Deməl, $f(x)=x$ funksiyası Lebeq mənada da inteqrallanandır və

$$J=\lim_{n\to\infty}\overline{S}=\lim_{n\to\infty}\underline{S}=\frac{1}{2},$$

$$J=(L)\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

Cavab: $(R)\int_0^1 xdx=(L)\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$.

Misal 2. [0,1] seqmentində

$$f(x)=\begin{cases} 2\ ,\ x \text{ rasional olduqda,} \\ -x\ ,\ x \text{ irrasional olduqda} \end{cases}$$

funksiyasının Riman mənada inteqrallanmayan olduğunu və Lebeq mənada inteqrallanan olduğunu göstərin və $(L)\int_0^1 f(x)dx$-i tapın.

Həlli. [0,1] seqmentinin σ bölgüsünə baxaq. Onda hər bir $[x_k,x_{k+1}]$ seqmentində həm rasional və həm də irrasional nöqtələr var. Odur ki,

$$M_k=2,\ m_k=-x_k.$$

Buna görə yuxarı və aşağı Darbu cəmləri

$$\overline{S}(f;\delta)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k)=2\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=2\cdot 1=2,$$

$$\underline{S}(f;\delta)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k(x_{k+1}-x_k)=-\sum_{k=0}^{n-1}x_{k+1}(x_{k+1}-x_k)<0$$

olur.

$$\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}(f;\delta)\neq\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(f;\delta).$$

Bu da verilən funksiyanın Riman mənada inteqrallanan olmadığını göstərir.

E=[0,1] çoxluğunu uyğun olaraq rasional və irrasional nöqtəsindən təşkil edilmiş E_1 və E_2 altçoxluqlarına ayıraq. Aydındır ki, bu altçoxluqlar ölçüləndir və $mE_1=0$, $mE_2=1$-dir. [0,1] seqmentində $f(x)$ funksiyası

$$g(x)=-x$$

funksiyasına ekvivalentdir, çünki, yalnız ölçüsü sıfır olan E_1 çoxluğunda $f(x)\neq g(x)$, $mE_1=0$. $g(x)$ funksiyası [0,1]-də Riman mənada inteqrallanan olduğundan Lebeq mənada da inteqrallanandır və

$$(L)\int_0^1 g(x)dx=(R)\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 -xdx=-\frac{1}{2}.$$

Misal 3. $f(x)=\begin{cases} 1\ , & x\neq\dfrac{1}{n} \text{ olduqda,} \\ -x^2\ , & x=\dfrac{1}{n} \text{ olduqda} \end{cases}$ $(n\in N)$

funksiyasının [0,1] seqmentində Riman və Lebeq mənada inteqrallanan olduğunu göstərin və

$$(R)\int_0^1 f(x)dx \text{ və } (L)\int_0^1 f(x)dx$$

inteqrallarını tapın.

Misal 4.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}\,,\ x=\dfrac{p}{q} & \text{rasional ədəd olduqda } (\dfrac{p}{q}\neq 0\\ \text{ixtisar olunmayan rasional kəsrdir}), & \\ 0\,,\quad x & \text{irrasional olduqda,}\\ 1\,,\quad x=0 & \text{olduqda}\end{cases}$$

Riman funkisyasının [0,1] seqmentində Riman və Lebeq mənada inteqrallanan olduğunu isbat edin və

$$(R)\int_0^1 f(x)dx\,,(L)\int_0^1 f(x)dx$$

inteqrallarını tapın.

Misal 5. [0,1] seqmentində

$$f(x)=\begin{cases}+1, & x \quad \text{rasional ədəd olduqda,}\\ -1\,, & x \quad \text{irrasional ədəd olduqda}\end{cases}$$

funksiyasının Riman mənada inteqrallanmayan, lakin Lebeq mənada intqrallanan olduğunu göstərin və

$$(L)\int_0^1 f(x)dx\text{-i}$$

tapın.

Misal 6. [0,1] seqmentində

$$f(x)=\begin{cases}0, & x \quad \text{rasional ədəd olduqda,}\\ 1\,, & x \quad \text{irrasional ədəd olduqda}\end{cases}$$

funksiyasının Riman mənada inteqrallanmayan, lakin Lebeq mənada inteqrallanan olduğunu göstərin və

$$(L)\int_0^1 f(x)dx\text{-i}$$

tapın.

Misal 7. Riman mənada inteqrallanmayan, lakin Lebeq mənada inteqrallanan məhdud funksiyanın kəsilmə nöqtələri çoxluğu hansı xüsusiyyətlərinə görə fərqlənir (belə funksiyalara aid misallar göstərin).

Misal 8. Aşağıdakı funksiyanın [0,2] seqmentində inteqrallanan olduğunu isbat edin və inteqralını tapın:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ , & x\in J\cap[1,2] \text{ olduqda,}\\ 2x\ , & x\in J\cap[0,1] \text{ olduqda,}\\ \sin x\ , & x\in Q \quad \text{olduqda.}\end{cases}$$

Burada $J-[0,2]$ seqmentinin irrasional ədədlər çoxluğudur, Q rasional ədədlər çoxluğudur.

Həlli. $f(x)$ funksiyası [0,2] seqmentində

$$g(x)=\begin{cases} x^2\ , x\geq 1 & \text{olduqda,}\\ 2x\ , x<1 & \text{olduqda}\end{cases}$$

funksiyasına ekvivalentdir, çünki [0,2] seqmentinin yalnız rasional nöqtələrindən düzəldilmiş Q' çoxluğunda $f(x)\neq g(x)$-dir, $mQ'=0$-dır.

$g(x)$ funksiyası [0,2] seqmentində (yalnız bir kəsilmə nöqtəsi (x=1) olduğuna görə) Riman mənada inteqrallanandır. Belə ki,

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 g(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_{(1,2]} 2xdx\ .$$

Bir nöqtəli çoğxluğa görə inteqral sıfra bərabər olduğu üçün (onun ölçüsü sıfırdır) onda

$$\int_{(1,2]} 2xdx=\int_{(1,2]} 2xdx+\int_{(1)} 2xdx,$$

$$\int_0^1 x^2dx \text{ və } \int_1^2 2xdx$$

inteqralları kəsilməz funksiyaların seqmentə görə inteqrallarıdır, (onları Riman mənada başa düşmək olar) buna görə onları Nüton – Leybnis düsturunun köməyi ilə hesablamaq olar, yəni

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 2x dx = \frac{10}{3}.$$

Misal 9. Aşağıdakı funksiyanın [0,2] seqmentində inteqrallanan olduğunu göstərin və inteqralını hesablayın.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ , \ x \in A & \text{olduqda,} \\ \sin \pi x \ , \ x \in [0,1] \cap CA & \text{olduqda,} \\ \cos \pi x \ , \ x \in [1,2] \cap CA & \text{olduqda,} \end{cases}$$

burada A cəbri ədədlər çoxluğudur.

Misal 10. Sanki hər yerdə $f(x)=0$ olarsa, onda

$$\int_E f(x)dx = 0$$

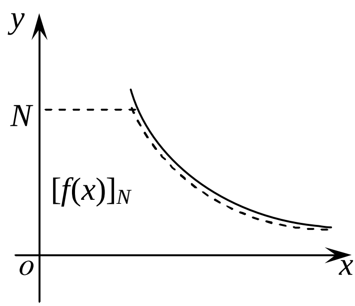
olduğunu göstərin.

Misal 11. $\int_E f^2(x)dx = 0$ olarsa, onda f~0 olduğunu göstərin.

Misal 12. [0,1]-də $f(x)\geq 0$, $\int_0^1 f(x)dx = 1$ olarsa, f~1 olduğunu göstərin.

§ 5. Qeyri-məhdud funksiya və ölçüsü sonsuz olan oblast üçün Lebeq inteqralı

1. Qeyri-məhdud funksiyalar və sonsuz oblastlar üçün birinci növ və ikinci növ qeyri-məxsusi Riman inteqralı anlayışına uyğun olaraq, Lebeq inteqralında da buna uyğun inteqral anlayışı verilir.



Tərif 3.4.1. Tutaq ki, ölçülən E çoxluğunda mənfi olmayan $f(x)$ funksiyası verilmişdir. İstənilən natural N ədədi üçün

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x), & f(x) \le N \text{ olduqda,} \\ N, & f(x) > N \text{ olduqda} \end{cases}$$

şəklində funksiyaya $f(x)$ funksiyasının kəsik funksiyası deyilir.

Tərifdən aydındır ki, $[f(x)]_N$ funksiyası məhduddur və $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda ölçüləndirsə, onda

$$E\left([f(x)]_N > a\right) = \begin{cases} E(f > a), & a < N \text{ olduqda,} \\ \varnothing, & a \ge N \text{ olduqda} \end{cases}$$

şəklində təyin edildiyindən $[f(x)]_N$ kəsik funksiyası da ölçüləndir. Deməli, $[f(x)]_N$ funksiyası Lebeq mənada inteqrallanandır.

Bundan əlavə

$$[f(x)]_1 \le [f(x)]_2 \le [f(x)]_3 \le \ldots,$$

olduğundan

$$\int_E [f(x)]_1\, dx \le \int_E [f(x)]_2\, dx \le \int_E [f(x)]_3\, dx \le \ldots.$$

olur və müəyyən sonlu və ya sonsuz

$$\lim_{N \to +\infty} \int_E [f(x)]_N\, dx \qquad (*)$$

limiti var.

Tərif 3.4.2. (*) limitinə $f(x)$ funksiyasının E çoxluğu üzrə Lebeq inteqralı deyilir və

$$\int_E f(x)dx \quad \left((L)\int_E f(x)dx \right)$$

simvolu ilə işarə edilir. Bu limit sonlu olduqda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda Lebeq mənada inteqrallanandır.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası ölçülən E çoxluğunda istənilən işarəli ölçülən funksiyadır. Onda

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x)\ , & f(x)\geq 0 \ \text{olduqda}, \\ 0 \ , & f(x)<0 \ \text{olduqda} \end{cases};$$

$$f_-(x)=\begin{cases} 0 \ , & f(x)\geq 0 \ \text{olduqda}, \\ -f(x)\ , & f(x)<0 \ \text{olduqda} \end{cases}$$

funksiyaları üçün $f_+(x)\geq 0$ və $f_-(x)\geq 0$ şərtləri ödənir. Bu funksiyalar E çoxluğunda ölçüləndirlər. Odur ki,

$$\int_E f_+(x)dx \ \text{ və } \int_E f_-(x)dx$$

inteqralları var.

$f(x)=f_+(x)-f_-(x)$ olduğunu nəzərə alsaq, heç olmazsa $\int_E f_+(x)dx$, $\int_E f_-(x)dx$ inteqrallarından birisi sonlu olarsa, $f(x)$ funksiyasının E çoxluğunda inteqralı

$$\int_E f(x)dx=\int_E f_+(x)dx-\int_E f_-(x)dx$$

kimi təyin olunur.

$$\int_E f_+(x)dx-\int_E f_-(x)dx$$

sonlu və ya sonsuz fərqi E çoxluğu üzrə $f(x)$ funksiyasının Lebeq inteqralı adlanır və

$$\int_E f(x)dx \quad \left((L)\int_E f(x)dx\right)$$

simvolu ilə işarə edilir.

$\int_E f(x)dx$ inteqralı varsa və sonludursa, onda $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda Lebeq mənada inteqrallanan adlanır.

2. İndi fərz edək ki, E sonsuz ölçülü çoxluqdur: $mE=+\infty$. Tutaq ki, ölçüsü sonlu olan

$$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\ldots$$

ardıcıllığı üçün

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$$

olur.

Mənfi olmayan $f(x)$ funksiyası E_k çoxluqlarında ölçülən olsun. Onda

$$\int_{E_1} f(x)dx \le \int_{E_2} f(x)dx \le \int_{E_3} f(x)dx \le \cdots$$

olur. Odur ki, sonlu və ya sonsuz

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)dx$$

limiti var. Bu limitə $f(x)$ funksiyasının E çoxluğunda Lebeq inteqralı deyilir və

$$\int_E f(x)dx \quad \left((L)\int_E f(x)dx\right)$$

simvolu ilə işarə olunur. Limit sonlu olduqda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda Lebeq mənada inteqrallanandır.

Müxtəlif işarəli $f(x)$ funksiyası üçün $f_+(x)$ və $f_-(x)$ funksiyalarının $\int_E f_+(x)dx$ və $\int_E f_-(x)dx$ inteqralları sonlu olduqda

$$\int_E f(x)dx = \int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx$$

kimi təyin olunur.

Misal 1. E=[1,2] seqmentində $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ funksiyasının Lebeq inteqralını hesablayın.

Həlli. $f(x)$ funksiyası E çoxluğunda qeyri-məhdud olduqda

$$[f(x)]_N=\begin{cases} f(x)\ , & f(x)\le N \text{ olduqda,}\\ N\ , & f(x)>N \text{ olduqda}\end{cases}$$

şəklində təyin olunduğundan verilən funksiya üçün

$$[f(x)]_N=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, & \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\le N \text{ olduqda,}\\ N, & \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}>N \text{ olduqda}\end{cases}$$

kimi təyin ediləcəkdir.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\le N \text{ və } \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}>N$$

bərabərsizliklərini həll etsək alarıq:

$$[f(x)]_N=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, & 1+\dfrac{1}{N^3}\le x\le 2 \text{ olduqda,}\\ N, & 1\le x<1+\dfrac{1}{N^3} \text{ olduqda.}\end{cases}$$

Onda

$$(L)\int_E [f(x)]_N\,dx=\int_1^{1+\frac{1}{N^3}} N\,dx+\int_{1+\frac{1}{N^3}}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}=$$

$$=N\cdot x\Big|_1^{1+\frac{1}{N^3}}+\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{1+\frac{1}{N^3}}^{2}=N\left(1+\frac{1}{N^3}-1\right)+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{N^2}\right)=$$

$$=N^2+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}N^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2N^2}.$$

Buradan

$$(L)\int_E f(x)dx=\lim_{N\to+\infty}(L)\int_E [f(x)]_N\,dx=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2N^2}\right].$$

Deməli,

$$(L)\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}=\frac{3}{2}.$$

Misal 2. $f(x)=\dfrac{1}{[x]!}$ funksiyasının $E=(0,+\infty)$ çoxluğunda Lebeq inteqralını tapın, burada $[x]$ ilə x ədədinin tam hissəsi işarə olunmuşdur.

Həlli. Bu misalda E çoxluğunun ölçüsü sonsuz olur. Odur ki,

$$E_n=(0,n)\quad (n=1,2,\ldots)$$

çoxluqlarına baxaq. Onda

$$E_1\supset E_2\supset E_3\supset\ldots \text{ və } E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$$

olur. Baxılan misalda

$$(L)\int_E f(x)dx=\lim_{N\to+\infty}(L)\int_E f(x)dx$$

limitini tapmaq lazımdır.

$$E_1'=E_1\ ,\ E_2'=E_2\setminus E_1\ ,\ E_3'=E_3\setminus E_2\ ,....$$

işarə edək. Onda

$$E_n=\bigcup_{k=1}^{n}E_k'\ ,\ E_k'\cap E_m'=\varnothing\ ,\ k\neq m.$$

$$[x]!=0!=1\ ,\ x\in E_1'\ ;[x]!=1!=1\ ,\ x\in E_2'\ ;[x]!=2!$$

$$x\in E_3';\ldots[x]!=n!\ ,\ x\in E_{n+1}';\ldots$$

olduğundan,

$$(L)\int_{E_n}\frac{dx}{[x]!}=\int_{E_1'}\frac{dx}{[x]!}+\int_{E_2'}\frac{dx}{[x]!}+\cdots+\int_{E_n'}\frac{dx}{[x]!}=$$

$$=\int_0^1 1\cdot dx+\int_1^2 1\cdot dx+\int_2^3\frac{dx}{2!}+\cdots+\int_{n=1}^{n}\frac{dx}{(n-1)!}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\ .$$

Buradan

$$(L)\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)dx=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=e\ .$$

Misal 3. (0,1] yarımseqmentində $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyasının Lebeq inteqralını hesablayın (cavab: $+\infty$).

Misal 4. (0,1] yarımseqmentində $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ funksiyasının Lebeq inteqralını hesablayın (cavab: 2).

Misal 5. (2,3] yarımseqmentində $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ funksiyasının Lebeq inteqralını hesablayın (cavab: $\frac{3}{2}$).

ƏDƏBİYYAT

1. И.П.Натансон. Теория функций вещественной переменной. Физматгиз. Москва, 1974.
2. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционалъного анализа. Физматгиз. Москва, 1968.
3. Б.З.Вулих. Краткий курс теории функций вещественной переменной. Физматгиз. Москва, 1965.
4. В.И.Соболев. Лекций по дополнителъным главам математического анализа. Физматгиз. Москва, 1968.
5. И.П.Макаров. Дополнителъные главы математического анализа. Издателъство «Просвещение». Москва, 1968.
6. И.П.Макаров. Теория функций действителъного переменного. Учпедгиз. Москва, 1958.
7. Н.А.Фролов. Теория функций действителъного переменного. Учпедгиз. Москва, 1953.
8. В.И.Смирнов. Курс высшей математики. Том V. Физматгиз. Москва, 1959.
9. В.А.Илъин, Э.Г.Позняк. Основы математического анализа. Частъ I, II. Физматгиз. Москва, 1973.
10. Г.Е.Шилов. Математический анализ функции одного переменного. Физматгиз. Москва, 1969.
11. Р.С.Гутер, Л.Д.Кудрявцев, Б.М.Левитан. Справочная математическая библиотека. Физматгиз. Москва, 1963.
12. В.АПетров, Н.Я.Виленкин, М.И.Граев. Элементы функционалъного анализа в задачах. Москва, «Просвещение», 1978.
13. Н.А.Давыдов, П.П.Коровкин, В.Н.Николъский. Сборник задач по математическому анализу. Москва, 1973.