X.M.QULİYEV, K.Q.HƏSƏNOV

DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR. MƏSƏLƏ VƏ MİSALLAR HƏLLƏRİ İLƏ

Dərs vəsaiti

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi tərəfindən təsdiq edilmişdir

Çaşıoğlu
BAKI - 2001

Rə'y verənlər: *Yaqubov M.N.* – BDU-nun professoru, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru
Süleymanov C.N. – ADPU-nun dosenti, fizika-riyaziyyat elmləri namizədi

Quliyev X.M., Həsənov K.Q. Diferensial tənliklər. Məsələ və misallar həlləri ilə. Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti. Bakı: Çaşıoğlu, 2001. – 322 s.

Dərs vəsaiti adi diferensial tənliklər və onlara aid məsələlər və misallar həllinə həsr olunub və universitetlərin, institutların tələbələri, elmi işçilər, mühəndislər, məşğələ dərsləri aparan müəllimlər üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Kitabda adi diferensial tənliklərə aid qısa nəzəri mə'lumatlar verilir, onlara aid çoxsaylı məsələ və misallar həll olunur, diferensial tənliklərin qurulmasına geniş yer ayrılır.

Sərbəst çalışmaq üçün məsələ və misalların, yoxlama sualların olması kitabdan məşğələ dərslərində və kollokviumlarda istifadə etməyə imkan yaradır.

Q $\frac{1602070100 - 377}{082 - 01}$

GİRİŞ

ALLAH SƏNƏ RƏHMƏT ELƏSİN ATA!

Diferensial tənliklər kursu riyazi fənnlər arasında mühüm yer tutur. Bu da təsadüfi deyil. Çünki həyatda baş verən bə'zi hadisələr, gedən proseslər, elmin, texnikanın bir çox məsələləri diferensial tənliklərə gətirilərək həll olunur.

Diferensial tənliklər adi və xüsusi törəməli tənliklərə bölünür. Birdəyişənli funksiyanın törəmələri daxil olan tənliklər adi diferensial tənliklər, çoxdəyişənli funksiyanın xüsusi törəmələri daxil olan tənliklər xüsusi törəməli diferensial tənliklər adlanır.

Dərs vəsaiti adi diferensial tənliklər kursuna aid qısa nəzəri mə'lumatlar verir, məsələ və misallar həllinə həsr olunmuşdur və dörd fəsildən ibarətdir.

Birinci fəsil birtərtibli diferensial tənliklərin həll üsullarına həsr olunmuşdur. Əvvəlcə izoklin üsuluna, dəyişənlərinə ayrıla bilən, bircins, xətti, Bernulli, tam diferensiallı, Rikkati tənliklərinə və inteqrallayıcı vuruğun tapılmasına aid misal və məsələlərin həll nümunələri verilir. Sonra isə törəməyə nəzərən həll olunmamış birtərtibli diferensial tənliklərə aid misallar həll edilir. Fəslin sonunda trayektoriyaya aid misalların həlli, təqribi həllin tapılması üçün Eyler və ardıcıl yaxınlaşmaların tətbiqi verilmişdir.

İkinci fəslin əvvəlində tərtibi aşağı salına bilən ikitərtibli tənliklərə aid misalların həlli verilmiş, ikitərtibli xətti tənliklərin ümumi həllinin tapılması üsullarına aid misallar həll olunmuşdur. Analoji misallar daha yüksək tərtibli tənliklər üçün də verilir, tənliklər sisteminin həllinə aid müxtəlif misallar, dayanıqlıq məsələsi, sərhəd məsələsi və həllin qüvvət sırasının köməkliyi ilə tapılmasına aid misallar həll olunur.

Üçüncü fəsildə elmin, texnikanın müxtəlif sahələrini əhatə edən və adi diferensial tənliklərə gətirilən məsələlərin həlli verilir. Burada əsas məsələ diferensial tənliyin qurulmasıdır. Diferensial tənliyin tapılmasını asanlaşdırmaq məqsədi ilə əlavə izahatlar verilir, tənliyin qurulma üsulları göstərilir.

Dördüncü fəsildə qiyabi oxuyan tələbələr və diferensial tənlikləri sərbəst öyrənənlər üçün adi diferensial tənliklərin bütün sahələrinə aid misalların həlləri,müstəqil həll edilmək üçün əlavə misallar, məsələlər və fərdi tapşırıqların variantları verilmişdir.

Hər fəslin axırında müstəqil həll etmək üçün misallar, məsələlər, yoxlama sualları verilmişdir.

I FƏSİL

BİRTƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

1. Adi diferensial tenliklər. Ün umi anlayışlar ve tə'riflər

Sərbəst dəyişən x, axtarılan $y = y(x)$ funksiyası və onun y', $y'', \ldots, y^{(n)}$ töremeləri arasındakı

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

münasibetinə *n-tertibli adi diferensial tenlik deyilir.*
Diferensial tənliyə funksiyanın törəmələrinin daxil olması vacibdir.

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad (2)$$

tənliyə *ən yüksək tertibli töreməyə nəzərən həll olunmuş* tenlik deyilir. Tənliyə daxil olan ən *yüksək tertibli töremənin tertibinə diferensial tənliyin tertibi* deyilir.

1) $y' - 2y = x + 1$, 2) $y' + 3y = 1$, 3) $y'' + 5y' + 6y = \sin x$,

4) $yy' + 2x = 0$, 5) $y''' = x^2 + 3$, 6) $y'' = tgx$.

tənliklərdən 1), 2), 4)-birtərtibli, 3), 6)-ikitertibli, 5)-üçtertiblidir.

Tənliyin (a, b) intervalında *həlli elə* $y = \varphi(x)$ funksiyasına deyilir ki, bu funksiyanın tenliyə daxil olan tertibdən töreməleri olsun, özünü və törəmələrini tənlikdə yazıdıqda alınan bərabərlik $x \in (a, b)$ nəzərən eynilik kimi ödənsin, yə'ni

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0, \quad x \in (a, b).$$

Tənliyin $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$-aşkar, $\Phi(x, y) = 0$-qeyri-aşkar və $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ parametrik şəkildə həlli verilə bilər.

Tənliyin həllinin qrafiknə *inteqral əyrisi* deyilir.

(1) tənliyinin

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \qquad (3)$$

şərtlərini ödəyən həllinin tapılmasına *Koşi məsələsi* deyilir.

Xüsusi halda, töreməyə nəzərən həll olunmuş

$$y' = f(x, y) \qquad (4)$$

tənliyinin

$$y(x_0) = y_0 \qquad (5)$$

şərtini ödəyən həllinin tapılmasına birtərtibli diferensial tənlik üçün Koşi məsələsi deyilir. Həndəsi olaraq, bu (4) tənliyinin (x_0, y_0) nöqtəsindən keçən inteqral əyrisini tapmaqdan ibarətdir.

$f(x, y)$ funksiyası (x_0, y_0) nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməz olduqda, (4)-(5) *Koşi məsələsinin həlli var.* Əlavə olaraq (x_0, y_0) nöqtəsi ətrafında $\frac{\partial f}{\partial y}$ kəsilməz xüsusi törəməsi varsa, Koşi məsələsinin həll yeganə olur.

$f(x, y)$ funksiyasının x və y dəyişənlərinə nəzərən k tərtibə qədər bütün xüsusi törəmələri varsa, onda (4) tənliyinin istənilən həllinin $k + 1$ tərtibə qədər törəməsi olur.

Tənliyin $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$ inteqral əyrisi üzərindəki hər bir nöqtədə Koşi məsələsinin həlli yeganə olarsa, ona *xüsusi həll* deyirlər.

$y = \psi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ inteqral əyrisi üzərindəki hər bir nöqtədə Koşi məslesinin həllinin yeganəliyi pozularsa, bu həll *məxsusi həll* adlanır.

Ancaq tənliyin ixtiyari xüsusi həllini $y = \varphi(x, c)$ ailəsindən c sabitinə qiymət verməklə almaq mümkündürsə, $y = \varphi(x, c)$ *ailəsinə (4) tənliyinin ümumi həlli* deyilir. Tənliyin ümumi həlli qeyri-aşkar $\Phi(x, y) = c$ şəkildə verildikdə $\Phi(x, y)$-ə tənliyin *inteqralı* deyilir. Ümumi həllin $x = \varphi(t, c)$, $y = \psi(t, c)$, $t \in (\alpha, \beta)$ ifadəsinə parametrik şəkildə *ümumi həll* deyilir.

Tənliyin $y = \varphi(x, c)$ ümumi həlli mə'lum olduqda Koşi məsələsinin həllini almaq üçün $y_0 = \varphi(x_0, c)$ bərabərliyini c-ə nəzərən həll edib, $c = c_0$ tapırıq və c_0 ümumi həlldə yazırıq: $y = \varphi(x, c_0)$. Ümumi həll qeyri-aşkar $\Phi(x, y, c) = 0$ şəkildə verildikdə Koşi məsələsinin həllini tapmaq üçün $\Phi(x_0, y_0, c) = 0$ tənliyinin c_0 həllini tapırıq. Onda $\Phi(x, y, c_0) = 0$ Koşi məsələsinin qeyri-aşkar şəkildə həlli olur.

Tənliyin *məxsusi həlli həllər ailəsinin qurşayanı kimi* tapılır. $\Phi(x,y,c)=0$ ailəsinin qurşayanı

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0,\\ \Phi'_c(x,y,c)=0\end{cases}$$

sistemindən c sabitini yox etməklə alınır. Ailənin qurşayanı varsa, 0, məxsusi həll olur.

Ümumi həll mə'lum olmadıqda, məxsusi həll diskrimat əyriləri arasında axtarılır.

$$F(x,y,y')=0$$

tənliyinin *diskrimat* əyrisi

$$\begin{cases}F(x,y,y')=0,\\ F'_{y'}(x,y,y')=0\end{cases}$$

sistemindən y' yox etməklə alınan $R(x,y)=0$ tənliyi ilə tə'yin olunur. Tənlik $y'=f(x,y)$ şəklində verilmişdirsə $\frac{1}{f'_y(x,y)}=0$ tənliyi ilə tə'yin olunan əyrilərə məxsusi həll üçün *şübhəli əyrilər* deyilir. Məxsusi həll məxsusi həll üçün şübhəli əyrilər arasında axtarılır.

Tutaq ki, $f(x,y)$ funksiyası xoy müstəvisinin D oblastında tə'yin olunmuşdur. Hər bir $(x,y)\in D$ nöqtəsi üçün bu nöqtədən bucaq əmsalı $k=f(x,y)$ olan düz xətt keçirək. Onda D oblastında *istiqamətlər meydanı* yaranır.

Həndəsi olaraq diferensial tənliyi həll etmək qrafiki D oblastında yerləşən elə əyrilər tapmaqdan ibarətdir ki, bu əyrilərin hər bir nöqtəsində çəkilən toxunan meydanın həmin nöqtəsindəki istiqaməti ilə üst-üstə düşsün.

1. $y=x\ln x$ funksiyasının $xy'-y=x$ tənliyinin həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. $y=x\ln x$ funksiyasının verilmiş tənliyin həlli olması üçün $y'=(x\ln x)'=\ln x+1$ törəməsinin olması vacibdir və y, y'-in qiymətlərini tənlikdə yazdıqda onu eyniliyə çevirməlidir:

$$x(\ln x+1)-x\ln x=x,\quad x=x.$$

Deməli, $y=x\ln x$ funksiyası verilmiş tənliyin həllidir.

2. $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^x$ funksiyasının $y'+2y=e^x$ tənliyinin ümumi həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^x$ funksiyası və onun $y'=-2Ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^x$ törəməsini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq

$$-2Ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^x+2Ce^{-2x}+\frac{2}{3}e^x=e^x,$$

Deməli, $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^x$ funksiyası C-sabitinin ixtiyari qiymətində verilən tənliyin həlli olur. İxtiyari $y(x_0)=y_0$ başlanğıc şərtinə baxaq. $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^x$ funksiyasında x, y əvəzinə verilən x_0, y_0 qiymətlərini yerinə yazaq: $y_0=Ce^{-2x_0}+\frac{1}{3}e^{x_0}$. Alınan bərabərliyi C-yə nəzərən həll edib, yerinə yazaq. Onda alınan $y=\left(y_0-\frac{1}{3}e^{x_0}\right)e^{2(x_0-x)}+\frac{1}{3}e^x$ funksiyası $y(x_0)=y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən həll olur. Deməli, $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^x$ ailəsi verilən tənliyin ümumi həlli olur.

3. Qeyri-aşkar şəkildə verilmiş $e^{-y}-cx=1$ funksiyasının $xy'+1=e^y$ tənliyinin ümumi həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. Verilən $e^{-y}-cx=1$ bərabərliyindən $y=-\ln(1+cx)$

funksiyasını tapaq. Buradan $y' = -\frac{c}{1+cx}$ alınq. Bunları verilən tənlikdə yazaq. $-\frac{cx}{1+cx}+1=e^{-\ln(1+cx)}$. Buradan $\frac{1}{1+cx}=\frac{1}{1+cx}$. Deməli, ixtiyari c ədədi üçün $y=-\ln(1+cx)$ funksiyası verilən tənliyin həlli olur. İxtiyari $y(x_0)=y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən həllə baxaq. $y_0=-\ln(1+cx_0)$ bərabərliyindən c sabitini tapaq. $x_0 \neq 0$ olduqda $cx_0=e^{-y_0}-1$, $c=\frac{1}{x_0}\left(e^{-y_0}-1\right)$ olur. Onda qeyri-aşkar şəkildə verilmiş $e^{-y}-\frac{x}{x_0}\left(e^{-y_0}-1\right)=1$ funksiyası Koşi məsələsinin həlli olur.

Deməli, $\Phi(x,y)=\frac{1}{x}\left(e^{-y}-1\right)$ funksiyası verilən tənliyin inteqralı olur.

4. Parametrik şəkildə verilmiş $x=te^t$, $y=e^{-t}$ funksiyasının $(1+xy)y'+y^2=0$ tənliyinin həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$, $x'_t=e^t(1+t)$, $y'_t=-e^{-t}$ olduğundan,

$y'_x=-\frac{e^{-t}}{e^t(1+t)}=-\frac{e^{-2t}}{1+t}$. x, y və y'-in ifadələrini verilmiş tənlikdə yazsaq,

$$\left(1+te^te^{-t}\right)\left(-\frac{e^{-2t}}{1+t}\right)+\left(e^{-t}\right)^2=-(1+t)\frac{e^{-2t}}{1+t}+e^{-2t}=-e^{-2t}+e^{-2t}=0$$

Deməli, verilmiş $x=te^t$, $y=e^{-t}$ funksiyası verilən tənliyin həlli olur.

5. $y=c\sin(\omega x+\varphi)$ funksiyasının φ və $c\geq 0$ ədədləri üçün $y''+\omega^2y=0$ $(\omega\geq 0)$ tənliyinin ümumi həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. İxtiyari φ və $c\geq 0$ ədədləri üçün $y=c\sin(\omega x+\varphi)$ funksiyasının verilən tənliyin həlli olduğunu göstərək. $y'=c\omega\cos(\omega x+\varphi)$, $y''=-c\omega^2\sin(\omega x+\varphi)$. y və y''-in ifadələrini verilmiş tənlikdə yazaq:

$$-c\omega^2\sin(\omega x+\varphi)+c\omega^2\sin(\omega x+\varphi)=0.$$

İxtiyari $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini c və φ sabitlərinə ədədi qiymətlər verməklə almaq mümkün olduğunu göstərək:

$$\begin{cases} y_0=c\sin(\omega x_0+\varphi), \\ y_1=c\omega\cos(\omega x_0+\varphi) \end{cases}$$

sistemindən

$$\begin{cases} \sin(\omega x_0+\varphi)=\frac{y_0}{c}, \\ \cos(\omega x_0+\varphi)=\frac{y_1}{\omega c} \end{cases}$$

tapıb, bərabərliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldib, tərəf-tərəfə toplasaq $y_0^2+\frac{y_1^2}{\omega^2}=c^2$, bərabərliyin hər iki tərəfini tərəf-tərəfə bölsək alarıq: $tg(\omega x+\varphi)=\frac{y_0\omega}{y_1}$.

Onda $c=\sqrt{y_0^2+\left(\frac{y_1}{\omega}\right)^2}$, $\varphi=arctg\frac{y_0\omega}{y_1}-\omega x_0$.

Tapılan ifadələri verilən funksiyada yazsaq:

$$y=\frac{1}{\omega}\sqrt{(y_0\omega)^2+y_1^2}\sin\left(\omega(x-x_0)+arctg\frac{y_0\omega}{y_1}\right).$$

Onda alınan ifadə Koşi məsələsinin həlli olur.

6. Parametrik şəkildə verilmiş $x=c\cos t$, $y=c\sin t$ funksiyasının $x+yy'=0$ tənliyinin ümumi həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{c\cos t}{-c\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$. x, y, y'_x-in ifadələrini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq

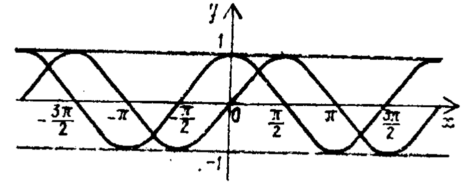
$$c\cos t + c\sin t\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right) = 0, \qquad 0 = 0.$$

Deməli, istənilən c üçün $x = c\cos t$, $y = c\sin t$ funksiyası verilmiş tənliyin həlli olur. Bu funksiya tənliyin ümumi həllidir. Doğrudan da, ixtiyari $y(x_0) = y_0$ şərtini ödəyən həll $c = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $x_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\cos t_0$, $t_0 = \arccos\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$ götürməklə alınır:

$$\begin{cases} x = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\cos t, \\ y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\sin t. \end{cases}$$

7. $y' = \sqrt{1 - y^2}$ tənliyinin həllin varlığı və yeganəliyini tə'min edən oblastı tapın.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$ funksiyası $\bar{D} = \{-\infty < x < +\infty, -1 \le y \le 1\}$ oblastında kəsilməzdir. Deməli, ixtiyari $(x_0, y_0) \in \bar{D}$ nöqtəsindən keçən inteqral əyrisi var. $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$ törəməsi $D = \{-\infty < x < +\infty, \ -1 < y < 1\}$ oblastında kəsilməzdir. Ona görə də $(x_0, y_0) \in D$ nöqtəsindən tənliyin yeganə inteqral əyrisi keçir. $y = \pm 1$ olduqda törəmə sonsuzluğa çevrilir. Bu, $y = \pm 1$ düz xətləri məxsusi həll üçün şübhəli əyrilər olur. $y = \pm 1$ düz xətləri tənliyi ödəyir. Göstərək ki, bunlar məxsusi həllərdir. Bilavasitə yoxlamaqla göstərmək olar ki, $y = \sin(x + c)$ tənliyin həllidir. $y = 1$ düz xətti üzərində ixtiyari $(x_0, 1)$ nöqtəsi götürək. Onda bu nöqtədən iki $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} - x_0\right)$ və $y = 1$ həlləri keçir. Deməli, $y = 1$ düz xətti üzərində həllin yeganəliyi pozulur, yə'ni $y = 1$ tənliyin məxsusi həlli olur. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, $y = -1$ də məxsusi həlldir (şəkil 1).



Şəkil 1.

8. $y' = \sqrt{x^2 - y} - x$ tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyini tə'min edən oblastı tapın.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y} - x$ funksiyası $\bar{D} = \{-\infty < x < +\infty, \ y \le x^2\}$ oblastında kəsilməzdir. Onda hər bir $(x_0, y_0) \in \bar{D}$ nöqtəsindən tənliyin inteqral əyrisi keçir. $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{x^2 - y}}$ törəməsi $D = \{-\infty < x < +\infty, \ y < x^2\}$ oblastında kəsilməzdir. $y = x^2$ əyrisi üzərində $\frac{\partial f}{\partial y}$ törəməsi sonsuzluğa çevrilir. Lakin $y = x^2$ funksiyası verilən tənliyi ödəmir: $2x \neq \sqrt{x^2 - x^2} - x$. Ona görə də tənliyin məxsusi həlli yoxdur. Deməli, $\bar{D}$ oblastında həll var və bu həll yeganədir.

9. $y' = x + y^{\frac{7}{3}}$ tənliyinin həllinin koordinat başlanğıcının ətrafında neçə tərtib törəməsi var?

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x, y) = x + y^{\frac{7}{3}}$ funksiyası koordinat başlanğıcının ətrafında kəsilməzdir və x, y dəyişənlərinə görə

$$f'_x(x, y) = 1, \quad f'_y(x, y) = \frac{7}{3}y^{\frac{4}{3}}, \quad f''_{xx}(x, y) = 0, \quad f''_{xy}(x, y) = 0,$$

$f'''_{yy}(x,y)=\frac{28}{9}y^{\frac{1}{3}}$ кəsilməz törəmələri var. Aydındır кi,

$f''''_{yyy}(x,y)=\frac{28}{9}\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}=\frac{28}{27}\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$ törəməsi $y=0$ olduqda sonsuzluğa çevrilir. Odur кi, $f(x,y)$ funкsiyasının $(0,0)$ nöqtəsi ətra-fında x və y dəyişənlərinə nəzərən iкinci tərtibə qədər кəsilməz xü-susi törəmələri olur. Onda baxılan tənliyin həllinin 0 nöqtəsi ətrafında üçüncü tərticə qədər törəməsi var.

2. İzoкlin üsulu

Tutaq кi,

$$y'=f(x,y) \tag{1}$$

tənliyi verilmişdir. Burada $f(x,y)$ funкsiyası xoy müstəvisinin D oblastında кəsilməzdir və кəsilməz xüsusi törəmələri var. Verilən $M(x,y)\in D$ nöqtəsində meydanın istiqamətini bu nöqtədən кeçən və bucaq əmsalı $k=f(x,y)$ olan düz xətt tə'yin edir. ***Meydanın eyni istiqamətli nöqtələrinin həndəsi yerindən ibarət olan əyriyə izoкlin*** deyilir. (1) tənliyinin izoкlinləri

$$f(x,y)=k \tag{2}$$

tənliyi ilə tə'yin olunur. Burada k-parametrdir. k-parametrinin hər bir qiymətində (2) bərabərliyi bir və ya bir neçə əyri verə bilər və bu əyrilər izoкlinlər olur. k-parametrinə bir-birinə yaxın qiymətər verməкlə bir-birinə yaxın izoкlinlər qurmaq olur. Bu da inteqral əyrilərinin daha dəqiq təqribi təsvirini verməyə imкan yaradır. $f(x,y)=0$ bərabərliyi ilə verilən izoкlin *eкstremal* adlanır, çünкi inteqral əyrilər bu izoкlin ilə кəsişdiyi nöqtədə maкsimum və ya minimum qiymət ala bilər. D oblastının $f(x,y)>0$ şərtini ödəyən hissəsində (nöqtələr üçün) inteqral əyriləri artan, $f(x,y)<0$ olan hissəsində azalan olur.

$$y''=f'_x(x,y)+f'_y(x,y)y'=f'_x(x,y)+f'_y(x,y)f(x,y)$$

olduğundan

$$f'_x(x,y)+f(x,y)f'_y(x,y)>0$$

olduqda, inteqral əyriləri çöкüк,

12

$$f'_x(x,y)+f(x,y)f'_y(x,y)<0$$

olduğu hissədə qabarıq olur.

$$f'_x(x,y)+f(x,y)f'_y(x,y)=0$$

tənliyini tə'yin etdiyi əyri nöqtələri inteqral əyriləri üçün əyilmə nöqtəsi olur (əgər varsa).

1. $y'=y-x$ tənliyinin inteqral əyrilərinin izoklin üsulu ilə təqribi qrafikini qurun.

HƏLLİ. Tənlikdə $y'=k$ əvəzləməsini aparsaq, $k=y-x$ alarıq. Deməli, $y=x+k$ tənliyin izoklin əyrilərinin parametrik tənliyi olur. $k=0$ olduqda $y=x$ ekstremal izoklin alınır. Bu düz xətt üzərindəki hər bir nöqtədə meydanın istiqaməti ox oxuna paralel olur. İnteqral əyriləri ekstremal əyrisi ilə kəsişdiyi nöqtədə özünün maksimum və ya minimum qiymətini ala bilər. $k=1$ olduqda $y=x+1$ izoklin üzərində meydanın istiqaməti 45^0 olur, $(k=y'=1=tg45^0)$. $k=-1$ olduqda $y=x-1$ izoklin üzərindəki hər bir nöqtədə meydanın istiqaməti 135^0 olur. $y>x$ olduqda $y'>0$, $y<x$ olduqda isə $y'<0$ olur. Deməli, $y=x$ düz xəttindən yuxarıda inteqral əyriləri artan, $y=x$ düz xəttindən aşağıda inteqral əyriləri azalan olur.

Verilmiş tənlikdən

$$y''=y'-1=y-x-1>0,$$

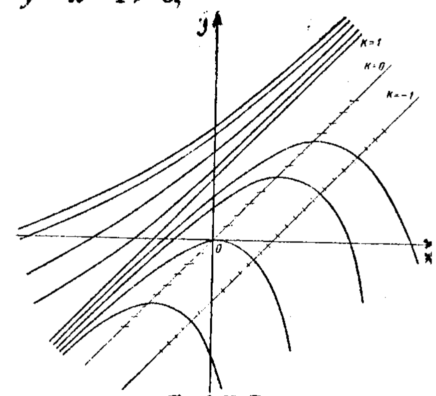
yə'ni $y>x+1$ olduqda inteqral əyriləri çökük,

$$y''=y-x-1<0,$$

yə'ni $y<x+1$ olduqda isə inteqral əyriləri qabarıq olur.

$y=x+1$ funksiyası verilən tənliyi ödəyir $(1=x+1-x)$, odur ki, tənliyin inteqral əyrilərinin əyilmə nöqtəsi yoxdur.

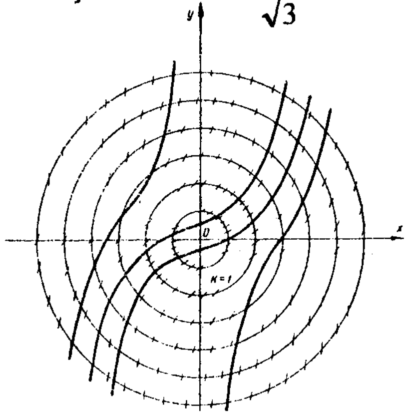
Yuxarıda deylənləri nəzərə alaraq verilən tənliyin inteqral əyrilərinin təqribi qrafikini qurmaq olar. (şəkil 2).



Şəkil 2.

2. İzoклin üsulu ilə $y' = x^2 + y^2$ tənliyinin inteqral əyrilərinin təqribi qrafiкini qurun.

HƏLLİ. $y' = k$ əvəzləməsini aparsaq, $x^2 + y^2 = k,\ (k > 0)$ izoклin əyrilərini alarıq. $y' > 0$ olduğundan inteqral əyriləri həmişə ar-tan olur. $k = 0$ olduqda $x^2 + y^2 = 0$, yə'ni $(0,0)$ nöqtəsi alınır. De-məli, inteqral əyrilərinin eкstremumu yoxdur. $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olduqda $x^2 + y^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ izoкli-ni üzərində meydanın istiqaməti 30^0, $k = 1$ olduqda, $x^2 + y^2 = 1$ izoклini üzərində mey-danın istiqaməti 45^0, $k = \sqrt{3}$ olduqda isə $x^2 + y^2 = \sqrt{3}$ izoклini üzərində meydanın istiqaməti 60^0, və s. olur.



Şəкil 3.

Bunları nəzərə alaraq verilən tənliyin inteqral əyrilərinin təqribi qra-fiкini qurmaq olar (şəкil 3).

3, $y' = y - x^2$ tənliyinin inteqral əyrilərinin əyilmə nöqtələrinin hən-dəsi yerindən ibarət olan əyrini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin əyilmə nöqtəsi üçün $y'' = 0$. Verilən tənliyi x-ə nəzərən diferensiallayaq. $y'' = y' - 2x$. Tənliкdən $y' = y - x^2$ qiy-mətini axırıncı bərabərliкdə yazaq: $y'' = y - x^2 = 2x$.

Buradan $y'' = 0$ olduğunu nəzərə alaq. Alınan $y = x^2 + 2x$ əyrisi verilmiş tənliyin inteqral əyrilərinin əyilmə nöqtələrinin həndəsi yeridir.

3. Dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənliklər

Tutaq ki, törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli diferensial tən-liyin sağ tərəfi iki funksiyanın hasili şəklində verilmişdir. Bu funk-siyalardan biri yalnız x-dən, o biri yalnız y-dən asılıdır:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \qquad (1)$$

Onda (1) tənliyinə *dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənlik* deyilir.
Bu tənliyin hər iki tərəfini dx-ə vurub $\varphi(y)$-ə bölsək,

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx \qquad (2)$$

dəyişənlərinə ayrılmış diferensial tənlik alarıq. Bu tənliyi inteqrallayaq

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C. \qquad (3)$$

Bu, verilən tənliyin ümumi inteqralı olur. Bundan başqa $\varphi(y) = 0$ şərtini ödəyən y_0 üçün $y = y_0$ tənliyin həlli olur. Bu həllin ümumi həlldən alınmayanları məxsusi həll olur.

Dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənliklər

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0 \qquad (4)$$

şəklində də verilə bilər.

(4) tənliyini həll etmək üçün bərabərliyin hər iki tərəfini $\varphi_1(y)f_2(x)$ hasilinə bölsək

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0 \qquad (5)$$

dəyişənlərinə ayrılmış diferensial tənlik alarıq. Bu tənliyi inteqrallasaq

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C. \qquad (6)$$

(6) ifadəsi (4) tənliyinin ümumi inteqralıdır. Nəzərə almaq lazımdır ki, (4) tənliyinin hər iki tərəfini $\varphi_1(y)f_2(x)$ hasilinə böldükdə, bu ha-

sili sıfıra çevirən nöqtələrə uyğun $y = y_k$, $x = x_i$ həllər də alına bilər: $\varphi_1(y_k) = 0$, $f_2(x_i) = 0$. Bu həllərdən ümumi həlldən alınmayanları məxsusi həll olur.

1. $xyy' = 1 - x^2$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Tənlik dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənlikdir. $y' = \dfrac{dy}{dx}$ olduğunu nəzərə alsaq və bərabərliyin hər iki tərəfini dx-ə vurub, x-ə bölsək alarıq. $ydy = \dfrac{1 - x^2}{x} dx$.

Bu tənlik dəyişənlərinə ayrılmış tənlikdir. Tənliyi inteqrallasaq

$$\int ydy = \int \frac{dx}{x} - \int xdx + \ln C, \quad y^2 + x^2 = 2\ln|Cx|.$$

2. $x(1 - y^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$ tənliyini həll edin və məxsusi həllin olub-olmadığını araşdırın.

HƏLLİ. Tənlik dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənlikdir. Bərabərliyin hər tərəfini $(1 - y^2)(1 - x^2)$ hasilinə bölək və inteqrallayaq.

$$\int \frac{xdx}{1 - x^2} + \int \frac{ydy}{1 - y^2} = C,$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1 - x^2)}{1 - x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1 - y^2)}{1 - y^2} = -\frac{1}{2}\ln C_1, \quad \left(C = -\frac{1}{2}C_1\right),$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1 - x^2| - \frac{1}{2}\ln|1 - y^2| = -\frac{1}{2}\ln C_1, \quad (1 - x^2)(1 - y^2) = C_1.$$

Bu, verilmiş tənliyin ümumi inteqralıdır. İndi məxsusi həlli araşdıraq. Bunun üçün $(1 - x^2)(1 - y^2) = 0$ tənliyini həll edək. Bu tənliyin bütün köklərini (yə'ni $x = \pm 1$, $y = \pm 1$) ümumi inteqraldan $C_1 = 0$ götürməklə almaq olar. Deməli, verilmiş tənliyin məxsusi həlli yoxdur.

3. $xydx + (1 + y^2)\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$ tənliyini həll edin və məxsusi həllin varlığını araşdırın.

HƏLLİ. Tənliyin hər iki tərəfini $y\sqrt{1 - x^2}$ hasilinə bölsək, dəyişənlərinə ayrılmış tənlik alarıq: $\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}dx + \dfrac{1 + y^2}{y}dy = 0$. Alınan tənliyi inteqrallayaq.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} + \int \frac{1 + y^2}{y}dy = \ln C,$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} + \int \frac{dy}{y} + \int ydy = \ln C,$$

$$-\sqrt{1 - x^2} + \ln|y| + \frac{y^2}{2} = \ln C, \quad y = Ce^{\sqrt{1 - x^2} - \frac{y^2}{2}}.$$

Bu, verilmiş tənliyin ümumi həllidir. $y\sqrt{1 - x^2} = 0$ tənliyinə baxaq. $y = 0$ həlli ümumi həlldən $C = 0$ götürməklə alındığından xüsusi, $x = \pm 1$ həlləri isə C sabitinə ədədi qiymətlər verməklə alınmadığından verilmiş tənliyin məxsusi həlli olur.

4. Radioaktiv maddənin parçalanma sür'əti maddənin miqdarı ilə mütənasibdir. Başlanğıc $t = 0$ anında maddənin miqdarının m_0 olduğunu bilərək, onun parçalanma qanununu tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında radioaktiv maddənin kütləsi $m(t)$, $t + \Delta t$ anında $m + \Delta m$ (Δm qədər azalır) olur. Δt müddətində radioaktiv parçalanmanın orta sür'əti $\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ olar. Ani sür'ət isə $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \dfrac{dm}{dt}$ olar. Onda məsələnin şərtinə görə yaza bilərik

$$\frac{dm}{dt} = -km.$$

Burada k -mütənasiblik əmsalıdır (mənfi işarə kütləsinin zaman keçdikcə azalmasını göstərir). Beləliklə, qoyulan məsələni həll etmək üçün alınan tənliyin həllini tapmaq lazımdır.

$$\frac{dm}{m} = -kdt, \quad \int \frac{dm}{m} = -k\int dt + \ln C, \quad \ln m = -kt + \ln C,$$

$$m = Ce^{-kt}.$$

$t = 0$ olduqda $m = m_0$ olduğundan $m_0 = C$ alınq. Beləliklə, verilmiş məsələnin həlli $m = m_0 e^{-kt}$. Mütənasiblik əmsalı k təcrübə yolu ilə tə'yin olunur, məsələn, radium üçün $k = 0{,}00044$ götürülür.

5. Əyri üzərində götürülmüş hər bir nöqtə üçün koordinat oxları, əyrinin özü və götürülmüş nöqtənin ordinatı ilə məhdud olan fiqurun sahəsi həmin nöqtənin koordinatları üzərində qurulmuş düzbucaqlının sahəsinin $\frac{1}{3}$-nə bərabərdir. Bu əyrini tapın.

HƏLLİ. Əyri üzərində götürülmüş nöqtəni $M(x, y)$ qəbul etsək, məsələnin şərtinə görə yaza bilərik:

$$\int_0^x y(s)ds = \frac{1}{3}xy.$$

Bərabərliyin hər tərəfini x dəyişəninə görə diferensiallayaq:

$y = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}xy'$, Buradan $xy' = 2y$. Dəyişənləri ayırıb, tənliyi inteqrallasaq $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$, $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C$, $y = Cx^2$.

Deməli, axtarılan əyri $y = Cx^2$ parabolalar ailəsini verir.

4. Bircins diferensial tənliklər

$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$ şərtini ödəyən $f(x, y)$ funksiyasına m

dərəcəli bircins funksiya deyilir. Məsələn, $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ funksiyası ikidərəcəli bircins funksiyadır. Doğrudan da $f(tx, ty) = t^2x^2 - txty + t^2y^2 = t^2(x^2 - xy + y^2) = t^2 f(x, y)$.

$f(x, y) = \dfrac{3xy}{x^2 + 2y^2}$ funksiyası isə sıfır dərəcəli bircins funksiyadır: $f(tx, ty) = \dfrac{3txty}{t^2x^2 + 2t^2y^2} = \dfrac{t^2(3xy)}{t^2(x^2 + 2y^2)} = t^0 f(x, y)$.

$f(x, y)$ funksiyası sıfır dərəcəli bircins funksiyadırsa $y' = f(x, y)$ diferensial tənliyi *bircins tənlik adlanır.* Bircins tənliyi

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1)$$

şəklində göstərmək olar. Bircins tənliyi $\frac{y}{x} = z$ $(y = xz)$ əvəzləməsi ilə (z yeni axtarılan funksiyadır) dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənliyinə gətirilir. $y = xz$ ifadəsini diferensiallasaq alarıq: $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$. y və y'-in qiymətlərini (1) tənliyində yerinə yazsaq alarıq:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \varphi(z), \qquad \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x} \qquad (2)$$

Bu tənliyi həll edib, $z = \frac{y}{x}$ əvəzləməsini nəzərə alsaq, verilən tənliyin həllini taparıq. z_0 ədədi $\varphi(z) = z$ tənliyinin həlli olduqda $y = z_0 x$ funksiyası da həll olur. Bu həll ümumi həldən alınmadıqda məxsusi həll olur.

$M(x, y)$, $N(x, y)$ funksiyaları *eyni dərəcəli bircins olduqda*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (3)$$

tənliyi bircins olur.

1. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$ funksiyası sıfır dərəcəli bircins funksiyadır:

$$f(tx,ty)=\frac{tx+ty}{tx-ty}=\frac{t(x+y)}{t(x-y)}=t^0\frac{x+y}{x-y}=f(x,y).$$

Verilmiş tənlik bircins diferensial tənlikdir. $y=xz$ əvəzləməsini aparaq. Onda $y'=z+xz'$. y və y'-in qiymətlərini verilən tənliyində yerinə yazsaq alarıq:

$$z+xz'=\frac{x+xz}{x-xz},\quad xz'=\frac{1+z^2}{1-z},\quad \frac{1-z}{1+z^2}dz=\frac{dx}{x}.$$

Axırıncı tənlik dəyişənlərinə ayrılmış tənlikdir. Bu tənliyi inteqrallayaq.

$$\int\frac{1-z}{1+z^2}dz=\int\frac{dx}{x}+\ln C,\quad \int\frac{dz}{1+z^2}-\int\frac{zdz}{1+z^2}=\ln|x|+\ln C,$$

$$arctgz-\frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right)=\ln|x|+\ln C,\quad z=\frac{y}{x}$$ olduğundan

$$arctg\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}.$$

2. $\left(3y^2+3xy+x^2\right)dx=\left(x^2+2xy\right)dy$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $M(xt,yt)=3(yt)^2+3(xtyt)+(xt)^2=t^2M(x,y)$

$$N(xt,yt)=(xt)^2+2xtyt=t^2\left(x^2+2xy\right)=t^2N(x,y)$$

olduğundan $M(x,y)$ və $N(x,y)$ ikidərəcəli bircins funksiyalardır. Deməli, verilən tənlik bircinsdir. $y=xz$ əvəzləməsini aparaq. Onda $dy=zdx+xdz$. y-in və dy-in bu qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazaq.

$$\left(3x^2z^2+3xxz+x^2\right)dx=\left(x^2+2xxz\right)\left(zdx+xdz\right)$$

Buradan

$$\left(z^2+2z+1\right)dx=x(1+2z)dz,\quad \int\frac{1+2z}{(1+z)^2}dz=\int\frac{dx}{x}+\ln C,$$

$$\int\left(\frac{2}{1+z}-\frac{1}{(1+z)^2}\right)dz=\ln|x|+\ln C,$$

$$2\ln|1+z|+\frac{1}{1+z}=\ln|x|+\ln C.$$

$z=\frac{y}{x}$ əvəzləməsini nəzərə alsaq $Cx^3=(x+y)^2e^{\frac{x}{x+y}}$.

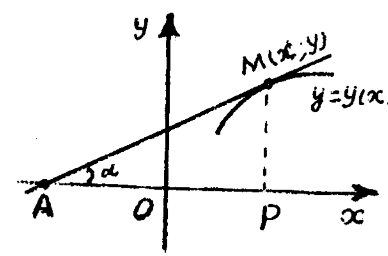
3. Hər bir nöqtəsində toxunma nöqtəsinin koordinatlarının cəmi toxunanaltının uzunluğuna bərabər olan əyrini tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, $y=y(x)$ əyrisinə $M(x,y)$ nöqtəsində çəkilən toxunan ox oxunu A nöqtəsində kəsir (şəkil 4). Onda AM parçasının ox oxu üzərində proyeksiyası, yə'ni AP parçası toxunanaltı olur.

ΔAMP-dən: $\frac{MP}{AP}=tg\alpha=y'$, $MP=y$.

Onda $AP=\frac{y}{y'}$, $y'=\frac{y}{AP}$. Məsələnin şərtinə görə $AP=x+y$.

Onda $y'=\frac{y}{x+y}$ diferensial tənliyini alarıq. Alınan tənlik bircins tənlikdir. $y=xz$ əvəzləməsini və $y'=z+xz'$ ifadəsini tənlikdə yerinə yazaq.



Şəkil 4.

$$z+xz'=\frac{xz}{x+xz},\quad xz'=-\frac{z^2}{1+z},\quad -\frac{1+z}{z^2}dz=\frac{dx}{x},$$

$$-\int\frac{dz}{z^2}-\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}+\ln C,\quad \frac{1}{z}-\ln|z|=\ln|x|+\ln C,$$

$$\frac{1}{z}=\ln|zxC|,\quad \ln|Cy|=\frac{x}{y},\quad x=y\ln|Cy|.$$

5. Bircins tənliyə gətirilə bilən tənliklər

$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$ şəklində verilmiş diferensial tənlik *bircins tənliyə* gətirilə bilir. Burada aşağıdakı halları nəzərdən keçirək:

1) $c = c_1 = 0$ olduqda tənlik bircins olur. Odur ki, c, c_1 ədədlərindən heç olmazsa birinin sıfırdan fərqli halına baxaq.

2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$ olduqda, $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a\alpha + b\beta + c = 0 \end{cases}$ sistemini həll edib, $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$ əvəzləməsi aparmaqla bircins olan $\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right)$ tənliyini alırıq.

3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ olduqda, $a_1x + b_1y = k(ax + by)$, $(k = const)$ olur və verilmiş tənlik $y' = F(ax + by)$ şəklinə düşür və $z = ax + by$ əvəzləməsi ilə həll olunur.

1. $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyi $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}$ şəklində yazaq. Onda $c_1 = 6$, $c = -3$ və $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ olduğundan

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6 = 0, \\ \alpha + \beta - 3 = 0 \end{cases}$$

sistemini həll edib $\alpha = 1$, $\beta = 2$ tapınq. Onda $x = 1 + \xi$, $y = 2 + \eta$ əvəzləməsinin köməkliyi ilə verilmiş tənlik $2(\xi - 2\eta)d\xi + (\xi + \eta)d\eta = 0$ bircins tənliyinə gətirilir. Tənliyini həll etmək üçün $\eta = \xi u$ əvəzləməsini aparaq. Onda tənlik $(2 - 3u + u^2)d\xi + \xi(1 + u)du = 0$ şəklinə düşür. Dəyişənləri ayırıb, həll etsək:

$$-\int \frac{1+u}{u^2 - 3u + 2}du = \int \frac{d\xi}{\xi} + \ln C, \quad 2\ln|u - 1| - 3\ln|u - 2| =$$

$$= \ln|\xi| + \ln C, \quad C\xi = \frac{(u-1)^2}{(u-2)^3}, \quad u = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y-2}{x-1},$$

$$C(y - 2x)^3 = (y - x - 1)^2.$$

2. $(2x + y - 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ olduğundan (3-cü hal) $z = 2x + y$ əvəzləməsini aparaq. Onda $dy = dz - 2dx$ və əvəzləməni nəzərə alsaq verilmiş tənlik $(z - 1)dx - (2z - 3)(dz - 2dx) = 0$, $(5z - 7)dx = (2z - 3)dz$ şəklinə düşər. Dəyişənləri ayırsaq və inteqrallasaq

$$\frac{2z - 3}{5z - 7}dz = dx, \quad \int \frac{2z - 3}{5z - 7}dz = \int dx - \ln C, \quad \frac{2}{5}\int \frac{5z - 7}{5z - 7}dz -$$

$$-\frac{1}{5}\int \frac{dz}{5z - 7} = \int dx - \ln C, \quad \frac{2}{5}\int dz - \frac{1}{5}\int \frac{dz}{5z - 7} = x - \ln C,$$

$$\frac{2}{5}z - \frac{1}{25}\ln|5z - 7| = x - \ln C, \quad 10z - \ln|5z - 7| = 25x - 25\ln C,$$

$$\ln|5z - 7| - \ln C_1 = 10z - 25x, \quad (\ln C_1 = 25\ln C).$$

$$\frac{5z - 7}{C_1} = e^{5(2y - x)}, \quad 10x + 5y - 7 = C_1e^{5(2y - x)}.$$

6. Ümumiləşmiş bircins diferensial tənliklər

$$F\left(tx, t^k y, t^{k-1}y'\right) = t^m F(x, y, y')$$

bərabərliyi ödəndikdə $F(x,y,y') = 0$ *ümumiləşmiş bircins tənlik* adlanır və $y = \pm x^k z$ əvəzləməsinin köməkliyi ilə dəyişənlərə ayrılan tənliyə gətirilir. Bə'zi tənliklər $y = \pm z^m$ əvəzləməsi ilə bircins tənliyə gətirilir.

1. $2x^2y' = y^3 + xy$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $x \to tx$, $y \to t^k y$, $y' \to t^{k-1}y'$ əvəzləməsini aparsaq $2t^2xt^{k-1}y' - t^{3k}y^3 - txt^k y = t^m\left(2x^2y' - y^3 - xy\right)$ ödənməsi üçün $2+k-1 = 3k = 1+k$ bərabərlikləri ödənilməlidir. Buradan $k = \frac{1}{2}$ alarıq. Onda $y = x^{\frac{1}{2}}z = \sqrt{x}z$, $(x>0)$ əvəzləməsi aparsaq: $y' = \frac{z}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}z'$. y və y'-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazaq:

$$2x^2\left(\frac{z}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}z'\right) = \left(\sqrt{x}z\right)^3 + x\sqrt{x}z,\quad 2xz' = z^3,\quad \frac{2dz}{z^3} = \frac{dx}{x},$$

$$2\int\frac{dz}{z^3} = \ln|x| + \ln C,\quad -\frac{x}{y^2} = \ln Cx,\quad y^2\ln Cx + x = 0.$$

$x<0$ olduqda, $y = \sqrt{-x}z$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır.

2. $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6+y^4} + y^2$ tənliyini $x>0$ üçün həll edin.

HƏLLİ. $y = z^m$ əvəzləməsi aparaq. Onda verilmiş tənlik

$\frac{2}{3}mxz^{2m-1}z' = \sqrt{x^6 + z^{4m}} + z^{2m}$ şəklinə düşür. Bu tənliyin bircins olması üçün $1 + 2m - 1 = \frac{6}{2} = \frac{4m}{2} = 2m$ şərti ödənməlidir. Buradan $m = \frac{3}{2}$. Deməli, $y = z^{\frac{3}{2}}$ əvəzləməsini aparmaqla $z' = \sqrt{\frac{x^4}{z^4} + \frac{z^2}{x^2}} + \frac{z}{x}$ bircins tənliyini alarıq.

Bu tənlik $z = xt$ əvəzləməsi ilə dəyişənlərinə ayrılan $xt' = \frac{\sqrt{1+t^6}}{t^2}$ tənliyinə gətirilir. Onun ümumi inteqralı $\frac{1}{3}\ln\left|t^3 + \sqrt{1+t^6}\right| = \ln(c_1x)$ olar. Onda $t = \frac{z}{x} = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x}$ olduğunu nəzərə alsaq $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{y^2}{x^3} + \sqrt{1+\frac{y^4}{x^6}}\right| = \ln(c_1x)$, $\frac{1}{3}\ln\frac{y^2+\sqrt{x^6+y^4}}{x^3} = \ln(c_1x)$, $y^2 + \sqrt{x^6+y^4} = cx^6$, $c = c_1^3$.

7. Tam diferensiallı tənliklər

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

tənliyinin sol tərəfi hər hansı $F(x,y)$ funksiyasının tam diferensialı şəklində göstərilə bilərsə, ye'ni

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = dF(x,y) \qquad (1')$$

bərabərliyi doğrudursa, *(1) tənliyi tam diferensiallı tənlik* adlanır (burada $M(x,y)$, $N(x,y)$ kəsilməzdir və kəsilməz $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ törəmələri var). Belə $F(x,y)$ funksiyası üçün

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

Buradan tənliyin ümumi inteqralı

$$F(x,y)=c \tag{3}$$

şəklində tapılır. Tənliyin tam diferensiallı tənlik olması üçün

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{4}$$

şərti zəruri və kafidir.

Əgər (4) şərti ödənirsə, (1) tənliyinin ümumi inteqralı

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi+\int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta=c \tag{5}$$

və ya

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi,y_0)d\xi+\int_{y_0}^{y} N(x,\eta)d\eta=c \tag{6}$$

şəklində olar. Burada (x_0,y_0) nöqtəsi $M(x,y)$, $N(x,y)$ funksiyalarının tə'yin oblastından götürülür. (5) düsturunu almaq üçün $\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$ götrülür və x-ə nəzərən inteqrallamaqla alınır.

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi+\varphi(y). \tag{7}$$

Burada y-ə nəzərən törəmə alıb $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ bərabərliyini nəzərə alsaq $\frac{\partial F}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(\xi,y)}{\partial \xi}d\xi+\varphi'(y)=N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)$.

$\varphi'(y)=N(x_0,y)$ götürülərsə, $\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$ şərti alınır. Deməli, $F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi+\int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta+C$ funksiyası üçün (1') bərabərliyi ödənir.

1. $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $M(x,y)=2xy$, $N(x,y)=x^2-y^2$, $\frac{\partial M}{\partial y}=2x$, $\frac{\partial N}{\partial x}=2x$ olduğundan, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ alırıq. Deməli, verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlikdir. Tənliyi həll etmək üçün elə $F(x,y)$ funksiyası tapmaq lazımdır ki, $\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)=2xy$ ödənsin. Bu bərabərliyi x-ə nəzərən inteqrallayaq. $F(x,y)=\int_0^x 2\xi y d\xi+\varphi(y)=x^2y+\varphi(y)$.

Buradan $\frac{\partial F}{\partial y}=x^2-y^2$ olması üçün $x^2+\varphi'(y)=x^2-y^2$, $\varphi'(y)=-y^2$, $\varphi(y)=-\frac{y^3}{3}$. Onda $F(x,y)=x^2y-\frac{y^3}{3}$ axtarılan funksiya və $3x^2y-y^3=C$ verilmiş tənliyin ümumi inteqralı olur.

2. $(\sin xy+xy\cos xy)dx+x^2\cos xydy=0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\sin xy+xy\cos xy)=2x\cos xy-x^2y\sin xy$,
$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos xy)=2x\cos xy-x^2y\sin xy$. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlikdir. Odur ki, (6) düsturuna əsasən ümumi inteqralı tapırıq:

$$\int_0^x(\sin\xi\cdot 0+\xi\cdot 0\cos\xi\cdot 0)d\xi+\int_0^y(x^2\cos x\eta)d\eta=C,\quad x\sin xy=C.$$

3. $\left(x^3+xy^2\right)dx+\left(x^2y+y^3\right)dy=0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $\frac{\partial M}{\partial y}=2xy,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan, verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlikdir. Digər tərəfdən, bu tənlik həm də bircins tənlikdir. Bu tip tənlikləri müəyyən qruplaşdırmalar aparmaqla daha asan həll etmək olar. Verilmiş tənliyi $x^3dx+xy(ydx+xdy)+$ $+y^3dy=0$ şəklində yazaq. Onda

$$d\left[\frac{x^4}{4}+\frac{(xy)^2}{2}+\frac{y^4}{4}\right]=0,\quad \frac{x^4}{4}+\frac{(xy)^2}{2}+\frac{y^4}{4}=C_1,$$

$$x^4+2x^2y^2+y^4=C,\quad C=4C_1.$$

8. İnteqrallayıcı vuruq

Bə'zi hallarda

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1}$$

tənliyi tam diferensiallı tənlik olmadıqda, elə sıfırdan fərqli $\mu(x,y)$ funksiyası seçmək olur ki, onu (1) tənliyinin hər tərəfinə vurduqda o tam diferensiallı tənliyə çevrilir:

$$du=\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy. \tag{2}$$

Onda $\mu(x,y)$ funksiyasına *inteqrallayıcı vuruq* deyilir. İnteqrallayıcı vuruğun tə'rifinə görə yaza bilərik: $\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$,

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}-M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} \tag{3}$$

Bu xüsusi törəməli diferensial tənliyi həll etməklə $\mu(x,y)$ inteqrallayıcı vuruğu tapırıq. Lakin (3) tənliyini həll etmək həmişə mümkün olmur və ya çətin olur. Ona görə də xüsusi hallara baxaq.

1). Tutaq ki, $\mu=\mu(x)$, yə'ni inteqrallayıcı vuruq x dəyişənindən asılıdır. Onda (3) tənliyi

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{4}$$

şəklinə düşür. Belə vuruğun varlığı üçün (4) bərabərliyinin sağ tərəfi yalnız x-dən asılı funksiya olmalıdır. Onda (4) tənliyini həll etməklə $\mu(x)$ inteqrallayıcı vuruğunu tapırıq.

2). İnteqrallayıcı vuruq ancaq y-dəyişənindən asılı olarsa, (3)-dən

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

alarıq. Bu bərabərliyin doğru olması üçün, bərabərliyin sağ tərəfi yalnız y-dəyişənindən asılı olmalıdır. Buradan inteqrallamaqla $\mu=\mu(y)$ vuruğunu tapırıq.

1. $\left(x+y^2\right)dx-2xydy=0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $\frac{\partial M}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=-2y,\quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan verilmiş tənlik tam diferensiallı deyil. Lakin $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2y+2y}{-2xy}=-\frac{2}{x}$ olduğundan, onun ancaq x-dən asılı $\mu(x)$ inteqrallayıcı vuruğu var. Onda (4)-ə əsasən $\frac{d\ln\mu}{dx}=-\frac{2}{x},\quad \ln\mu=-2\ln|x|,\quad \mu=\frac{1}{x^2}$. Verilmiş tənliyi $\mu=\frac{1}{x^2}$-na vurmaqla tam diferensiallı

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx-2\frac{xy}{x^2}dy=0.$$

tənliyini alırıq. Buradan $\int\limits_1^x\left(\frac{1}{\xi}+0\right)d\xi-\int\limits_0^y\frac{2\eta}{x}d\eta=\ln C,\quad \ln|x|-\frac{y^2}{x}=$

$$= \ln C, \quad y^2 = x\ln C_1 x, \quad C_1 = \frac{1}{C}.$$

2. $2xy\ln y dx + \left(x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş misal üçün alırıq:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2x - 2x(\ln y + 1)}{2xy\ln y} = \frac{2x - 2x\ln y - 2x}{2xy\ln y} = -\frac{1}{y}.$$

Deməli, tənliyin yalnız y -dəyişənindən asılı inteqrallayıcı vuruğu var:

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = -\frac{1}{y}, \quad \ln\mu = -\int\frac{dy}{y} = -\ln y, \quad \mu = \frac{1}{y}.$$

Onda verilmiş tənliyin hər tərəfini $\mu = \frac{1}{y}$ vuruğuna vursaq

$$2x\ln y dx + \frac{x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}}{y}dy = 0$$

tam diferensiallı tənlik alınar. Bu tənliyi inteqrallasaq

$$\int_0^x 2\xi\ln y d\xi + \int_1^y \eta\sqrt{\eta^2+1}d\eta = C, \quad x^2\ln y + \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{\frac{3}{2}} = C.$$

9. Xətti diferensial tənliklər

Axtarılan funksiya və onun törəməsi tənliyə birinci dərəcədən daxildirsə, *belə tənliyə xətti diferensial tənlik* deyilir.

Xətti diferensial tənliyi belə yazmaq olar:

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{1}$$

Burada $P(x)$ və $Q(x)$ kəsilməz funksiyalardır.

Xətti diferensial tənliklərin Bernulli üsulu ilə həllini tapaq. Tənliyin həllini iki $u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarının hasili şəklində axtaraq. Yə'ni

$y = u(x)v(x)$. Onda $y' = u'v + uv'$ olar. y və y' -in qiymətlərini (1) tənliyində yerinə yazaq.

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x).$$

Alınan bərabərliyi aşağıdakı kimi yazaq.

$$v[u' + P(x)u] + uv' = Q(x). \tag{2}$$

$u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarını

$$u' + P(x)u = 0, \quad uv' = Q(x) \tag{3}$$

şərtləri daxilində seçək.

Birinci tənliyi dəyişənlərinə ayırma üsulu ilə həll edək:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx, \quad \ln|u| = -\int P(x)dx, \quad u = e^{-\int P(x)dx}.$$

$u(x)$ -in bu qiymətini (3) bərabərliyinin ikinci tənliyində nəzərə alsaq

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x), \quad dv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

$$v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \tag{4}$$

$u(x)$ və $v(x)$ -in qiymətlərini $y = u(x)v(x)$ -də nəzərə alsaq (1) tənliyinin ümumi həllini alarıq:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]. \tag{5}$$

Xətti diferensial tənliyin sabitin variasiyası (Laqranj üsulu) ilə həllinə baxaq: Əvvəlcə bircins

$$y' + P(x)y = 0 \tag{6}$$

tənliyinin ümumi həllini tapaq:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{7}$$

(1) tənliyinin ümumi həllini

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{8}$$

şəklində axtaraq, burada $C(x)$ namə'lum funksiyadır. Bu əvəzləməni və

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

törəməni (1) tənliyində yerinə yazsaq alarıq:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x), \quad dC(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Buradan tapılan

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

(8)-də yerinə yazsaq (1) tənliyinin (5) şəklində ümumi həllini taparıq.

1. $y' - \frac{y}{x} = x$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş xətti tənliyi Bernulli üsulu ilə həll edək. $y = uv$ qəbul edək. Onda $y' = u'v + v'u$ alarıq. y və y'-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq

$$v\left(u' - \frac{u}{x}\right) + v'u = x$$

Burada u və v funksiyalarını

$$u' - \frac{u}{x} = 0, \quad v'u = x$$

bərabərliklərinə əsasən tə'yin edək. Birinci tənliyi həll edək.

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}, \quad \int\frac{du}{x} = \int\frac{dx}{x}, \quad \ln|u| = \ln|x|, \quad u = x.$$

u-nun bu qiymətini ikinci tənlikdə yazaq.

$$v'x = x, \quad v' = 1, \quad dv = dx, \quad v = x + C.$$

Beləliklə, verilmiş tənliyin ümumi həlli üçün alırıq:

$$y = x(x + C).$$

2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ tənliyinin $y(0) = 1$ şərtini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. $y' + 2xy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -2xy, \quad \int\frac{dy}{y} = -2\int xdx + \ln C,$

$\ln|y| = -x^2 + \ln C, \quad y = Ce^{-x^2}$. Bircins olmayan tənliyin ümumi həllini sabitin variasiyası üsulu ilə tapaq: $y = C(x)e^{-x^2}$ əvəzləməsini və $y' = C'(x)e^{-x^2} - 2C(x)xe^{-x^2}$ törəməsini verilmiş tənlikdə yazaq: $C'(x)e^{-x^2} - 2C(x)xe^{-x^2} + 2C(x)xe^{-x^2} = xe^{-x^2}$.

Buradan $C'(x) = x, \quad dC(x) = xdx, \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + C$.

Onda əvəzləməyə əsasən $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur. Burada, başlanğıc şərtini nəzərə alsaq $1 = (0 + C)\cdot 1$, $C = 1$.

Beləliklə, verilmiş tənliyin başlanğıc şərtini ödəyən həllini alırıq:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-x^2}.$$

3. $A(a, a)$ nöqtəsindən keçən elə əyri tapın ki, onun ixtiyari nöqtəsində çəkilən toxunan, toxunma nöqtəsinin ordinatı və koordinat oxları ilə əhatə olunmuş trapesiyanın sahəsi sabit olub, a^2-na bərabər olsun.

HƏLLİ. Əyri üzərində götürülmüş $M(x, y)$ nöqtəsindən keçən toxunanın tənliyini yazaq: $Y - y = y'(X - x)$. Toxunanın ordinat oxundan ayırdığı OT parçasını (şəkil 5.) tapmaq üçün toxunanın tənliyində $X = 0$ qəbul etmək kifayətdir. Onda $Y = OT = y - y'x$. $PM = y$, $OP = x$ olduğundan məsələnin şərtinə əsasən

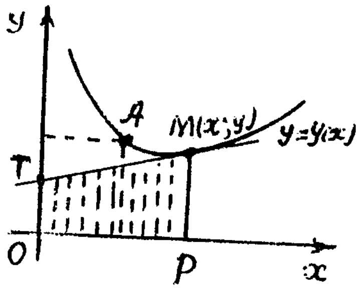
$$\frac{y - y'x + y}{2}x = a^2, \quad y' - \frac{2y}{x} = -\frac{2a^2}{x^2}.$$

Alınan xətti tənliyi ümumi həll üçün hazır düsturdan istifadə etməklə alırıq:

$$y = e^{2\ln x}\left(-2a^2\int\frac{e^{-2\ln x}}{x^2}dx + C\right)$$

Buradan

$e^{2\ln x} = x^2$, $e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$ olduğunu nəzərə alsaq



Şəkil 5.

$$y = x^2\left(-2a^2\int\frac{dx}{x^4}+C\right) =$$

$$= x^2\left(\frac{2a^2}{3x^3}+C\right) = \frac{2a^2}{3x}+Cx^2.$$ Başlanğıc şərtdən istifadə etsək

$(x = a,\quad y = a)$ $C = \frac{1}{3a}$. Beləliklə, $y = \frac{2a^2}{3x}+\frac{x^2}{3a}$.

4. Sarğının müqaviməti R, avtoinduksiya əmsalı L, ilk cərəyan $L_0 = a$ olarsa və elektrik hərəkətetdirici qüvvə $E = E_0\sin\omega t$ qanunu üzrə dəyişərsə, sarğıda cərəyanın t zamanından asılı olaraq dəyişməsini tapın.

HƏLLİ. Özünüinduksiyanın elektrik hərəkətetdirici qüvvəsi cərəyan şiddətinin artma sür'əti ilə mütənasibdir. Mütənasiblik əmsalı burada L-dir. Şəbəkə qapanarkən iki əks elektrik hərəkətetdirici qüvvə: E gərginliyi və özünüinduksiyanın elektrik hərəkətetdirici qüvvəsi $E_1 = L\frac{di}{dt}$ yaranır. Kirxhof qanununa əsasən $E - L\frac{di}{dt}$ şəbəkədə yaranan Ri gərginliyinə bərabərdir. Yə'ni

$$E - L\frac{di}{dt} = Ri,\quad L\frac{di}{dt}+Ri = E \quad .$$

Buradan $L\frac{di}{dt}+Ri = E_0\sin\omega t$ diferensial tənliyini alırıq.

Əvvəlcə bircins $L\frac{di}{dt}+Ri = 0$ tənliyi həll edək:

$$\int\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int dt,\quad \ln i = -\frac{R}{L}t+\ln C,\quad i = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Bircins olmayan tənliyinin həllini $i = C(t)e^{-\frac{R}{L}t}$ şəklində axtaraq. Onda bu əvəzləməni və $i' = C'(t)e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}C(t)$ törəməsini tənlikdə nəzərə alsaq

$$L\left(C'(t)e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}C(t)\right) + \mathrm{Re}^{-\frac{R}{L}t}C(t) = E_0\sin\omega t.$$

Buradan $C'(t) = \frac{E_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t,\ C(t) = \frac{E_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt + C$.

İki dəfə hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edərək alırıq:

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt = \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t - \frac{L\omega}{R}\left(\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{L\omega}{R}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt\right);$$

Buradan

$$\left(1+\frac{L^2\omega^2}{R^2}\right)\cdot\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt = \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\left(\sin\omega t - \frac{L\omega}{R}\cos\omega t\right),$$

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt = \frac{R^2}{R^2+L^2\omega^2}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\left(\sin\omega t - \frac{L\omega}{R}\cos\omega t\right).$$

Onda $C(t)=\frac{E_0R}{R^2+L^2\omega^2}e^{\frac{R}{L}t}\left(\sin\omega t-\frac{L\omega}{R}\cos\omega t\right)+C$.

Beləliklə, $i=\frac{E_0R}{R^2+L^2\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{L\omega}{R}\cos\omega t\right)+Ce^{-\frac{R}{L}t}$ verilmiş məsələnin ümumi həlli olur. $t=0$ olduqda $i=0$ olduğundan $C=$

$$=\frac{E_0L\omega}{R^2+L^2\omega^2},\quad i(t)=\frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}\left(L\omega e^{-\frac{R}{L}t}+R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t\right).$$

10. Bernulli tənliyi

Elə birtərtibli diferensial tənliklər var ki, onlar xətti olmasalar da xətti tənliyə gətirilə bilirlər. Belə diferensial tənliklərə misal olaraq Bernulli tənliyini göstərmək olar:

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (1)$$

$n=1$ olduqda (1) tənliyi bircins, $n=0$ olduqda xətti tənliyə çevrilir. n sıfırdan və vahiddən fərqli olduqda (1) tənliyinin hər iki tərəfini y^{-n}-ə vursaq və alınan

$$y^{-n}y'+P(x)y^{1-n}=Q(x) \qquad (2)$$

tənliyində $z=y^{1-n}$ əvəzləməsini aparsaq,

$$z'+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x) \qquad (3)$$

tənliyi alınar. (3) tənliyi z-ə nəzərən xətti diferensial tənlikdir. (3) tənliyini həll edib $z(x)$-i tapırıq. Əvvəlki y dəyişəninə qayıdaraq (1) tənliyinin ümumi həllini alırıq. $0<n<1$ olduqda $y=0$ həlli Bernulli tənliyinin məxsusi həlli olur. Bernulli tənliyini xətti tənliyə gətirmədən də $y=u(x)v(x)$ əvəzləməsi aparmaqla həll etmək olar.

1. $xy'+y=y^2\ln x$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik Bernulli tənliyidir. Burada $n=2$-dir. Verilmiş tənliyin hər tərəfini y^{-2}-na vuraq: $xy^{-2}y'+y^{-1}=\ln x$.

$z=y^{-1}$ əvəzləməsini aparaq. Onda $-xz'+z=\ln x$. Bircins tənliyin ümumi həllini tapaq:

$$-xz'+z=0,\quad \int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}+\ln C,\quad \ln|z|=\ln|x|+\ln C,\quad z=xC.$$

$z=C(x)x$ əvəzləməsi aparaq:

$$-x[C'(x)x+C(x)]+xC(x)=\ln x,\quad x^2C'(x)=\ln x,$$

$$C'(x)=-\frac{\ln x}{x^2},\quad C(x)=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx+C.$$

Axırıncı inteqralı hissə-hissə inteqrallasaq $\left(u=\ln x,\quad dv=\frac{dx}{x^2}\right)$

$$C(x)=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{x}(\ln x+1)+C.$$

$C(x)$-in bu qiymətini $z=C(x)x$ ifadəsində yerinə yazsaq

$$z=\ln x+1+Cx.$$

Burada $z=y^{-1}$ olduğunu nəzərə alsaq: $y(\ln x+1+Cx)=1$.

2. $y'+\frac{y}{x}=y^2\ln x$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş Bernulli tənliyində $y=u(x)v(x)$ əvəzləməsini aparaq. Onda $v\left(u'+\frac{u}{x}\right)+uv'=u^2v^2\ln x$.

Burada $u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarını $u'+\frac{u}{x}=0,\quad v'=uv^2\ln x$ bərabərliklərinə əsasən seçək. Bu tənlikləri həll edək.

$$u'+\frac{u}{x}=0,\quad \int\frac{du}{u}=-\int\frac{dx}{x},\quad \ln|u|=-\ln|x|,\quad u(x)=\frac{1}{x}.$$

$$v' = \frac{1}{x} v^2 \ln x, \quad \int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{\ln x}{x} dx + \frac{C}{2}, \quad -\frac{1}{v} = \int \ln x \, d(\ln x) + \frac{C}{2},$$

$$-\frac{1}{v} = \frac{(\ln x)^2}{2} + \frac{C}{2}, \quad v(x) = \frac{-2}{C + (\ln x)^2}.$$

Beləliklə, $y = u(x)v(x) = \dfrac{-2}{x\left[C + (\ln x)^2\right]}$ ümumi həllini alırıq.

3. Elə əyri tapın ki, onun hər bir nöqtəsində çəkilmiş toxunanın ordinat oxundan ayırdığı parçanın uzunluğu, radiusu toxunma nöqtəsinin ordinatı olan dairənin sahəsinə qiymətcə bərabər olsun.

HƏLLİ. Tutaq ki, $M(x, y)$ əyrinin ixtiyari nöqtəsidir. Onda həmin nöqtədə əyriyə çəkilən toxunanın tənliyi $Y - y = y'(X - x)$ şəklində olur. Toxunanın ordinat oxundan ayırdığı parça $y - xy'$ və radiusu $|y|$-ə bərabər olan dairənin sahəsi πy^2 olduğundan, şərtə görə $y - xy' = \pi y^2$ Bernulli diferensial tənliyini alarıq. Hər tərəfi y^{-2}-yə vursaq

$$-xy^{-2}y' + y^{-1} = \pi.$$

$z = y^{-1}$ əvəzləməsini aparaq. Onda $xz' + z = \pi, \quad x\dfrac{dz}{dx} = \pi - z,$

$$\int \frac{dz}{\pi - z} = \int \frac{dx}{x} - \ln C, \quad -\ln|\pi - z| = \ln x - \ln C, \quad \ln|\pi - z| = \ln C - \ln x,$$

$$\pi - z = \frac{C}{x}, \quad z = \pi - \frac{C}{x}, \quad z = \frac{\pi x - C}{x}.$$

$z = y^{-1}$ olduğundan $y = \dfrac{x}{\pi x - C}$.

11. Rikkati tənliyi

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 + c(x) = 0$$

şəklində tənliyə *Rikkati tənliyi* deyilir. Rikkati tənliyi $b(x) = 0$ olduqda

xətti, $c(x) = 0$ olduqda isə Bernulli tənliyinə çevrilir. Rikkati tənliyinin hər hansı $y_1(x)$ xüsusi həlli mə'lum olduqda, $y(x) = y_1(x) + z(x)$ əvəzləməsi vasitəsilə Bernulli tənliyinə gətirilir. Ümumi halda, Rikkati tənliyi kvadraturaya gətirilə bilmir, yə'ni həll etmək olmur.

Rikkati tənliyi xüsusi hallarda:

1) $y' + m(x)\left(Ay + By^2 + C\right) = 0$ olduqda dəyişənlərinə ayrılan,

2) $y' + A\dfrac{y}{x} + B\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + C = 0$ olduqda bircins,

3) $y' + A\dfrac{y}{x} + By^2 + \dfrac{C}{x^2} = 0$ olduqda ümumiləşmiş bircins tənliyə çevrilir.

1. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Bərabərliyin hər tərəfini x^2-na bölək: $y' + \dfrac{1}{x}y + y^2 = \dfrac{4}{x^2}$. Bu tənlik Rikkati tənliyinin xüsusi halı (3-cü hal) olub ümumiləşmiş bircins tənlikdir. Onu həll edək. $x \to tx$, $y \to t^k y$, $y' \to t^{k-1}y'$ əvəzləməsi nəticəsində axırıncı tənlikdən alırıq: $k - 1 = k - 1 = 2k = -2$, $k = -1$. Onda $y = \dfrac{z}{x}$ əvəzləməsi ilə dəyişənlərinə ayrılan tənlik alınır:

$$y' = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}, \quad \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{z}{x} + \frac{z^2}{x^2} = \frac{4}{x^2}, \quad \frac{z'}{x} + \frac{z^2}{x^2} = \frac{4}{x^2}, \quad xz' = 4 - z^2, \quad xdz = \left(4 - z^2\right)dx, \quad \frac{dz}{4 - z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Axırıncı tənliyi inteqrallayaq.

$$\int \frac{dz}{4 - z^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln C, \quad \frac{1}{4}\ln\frac{z + 2}{2 - z} = \ln x + \ln C,$$

$$\frac{2+z}{2-z}=C_1x^4, \quad (C_1=C^4), \quad z=\frac{2(C_1x^4-1)}{C_1x^4+1}.$$

$z=xy$ olduğundan $y=\dfrac{2(C_1x^4-1)}{x(C_1x^4+1)}$.

2. $y'+2ye^x-y^2=e^{2x}+e^x$ Rikkati tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $y_1=e^x$ tənliyin həlli olduğunu bilavasitə yoxlamaq olar. Onda $y=z+e^x$ əvəzləməsini aparmaqla alırıq:

$$z'+e^x+2(z+e^x)e^x-(z+e^x)^2=e^{2x}+e^x, \quad z'-z^2=0.$$

Alınan tənliyi həll etsək $z=-\dfrac{1}{x+C}$.

Deməli, $y=e^x-\dfrac{1}{x+C}$ Rikkati tənliyinin ümumi həlli olur.

12. Törəməyə nəzərən həll olunmamış tənliklər

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1)$$

şəkildə olan tənliyə *törəməyə nəzərən həll olunmamış tənlik* deyilir. Belə tənlikləri həll etmək üçün əvvəlcə həmin tənlikdən törəməyə nəzərən həll olunmuş tənliklərə keçmək lazımdır:

$$y'=f_k(x,y), \quad k=1,2,\ldots,m \qquad (2)$$

Alınan tənliklərin həllərini tapmaqla (1) tənliyinin həllini tapmış oluruq. (1) tənliyinin

$$y(x_0)=y_0 \qquad (3)$$

şərtini ödəyən həllinin tapılmasına *Koşi məsələsi* deyilir. (1) tənliyinin (3) şərtini ödəyən həllərin sayı

$$F(x_0,y_0,z)=0 \qquad (4)$$

cəbri tənliyin həqiqi və müxtəlif köklərinin sayına bərabər olduqda Koşi məsələsinin həlli *yeganə sayılır.* Koşi məsələsinin həlli (2) tənliklərinin (3) şərtini ödəyən həlləri olur. (2) tənliklərinin ümumi həllərinə

birlikdə (1) tənliyinin ümumi həlli deyilir.

(1) tənliyini y'-ə nəzərən həll etmək mümkün olmadıqda həmin tənliyi x və ya y-ə nəzərən həll edib $x=\varphi(y,y')$ və ya $y=\varphi(x,y')$ şəklində tənliklər alırlar. Bu tənliklərdə $y'=p$ əvəzləməsi aparmaqla parametrik şəkildə

$$\begin{cases} x=\varphi(y,p), \\ y'=p \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} y=\varphi(x,p), \\ y'=p \end{cases}$$

tənlikləri alınır. Burada $dy=y'dx$ əsas diferensial münasibətindən istifadə etməklə törəməyə nəzərən həll olunmuş tənlik alınır və onu həll etməklə verilən tənliyin həlli tapılır. Misal üçün, $x=\varphi(y,p)$, $y'=p$ olduqda $dy=y'dx=p[\varphi'_y dy+\varphi'_p dp]$, $(p\varphi'_y-1)dy+p\varphi'_p dp=0$.

Alınan tənlik törəməyə nəzərən həll olunmuş tənlikdir. Tutaq ki, $y=\omega(p,c)$ tənliyin həllidir. Onda

$$\begin{cases} x=\varphi(\omega(p,c),p), \\ y=\omega(p,c) \end{cases}$$

parametrik şəkildə tənliyin ümumi həlli olur.

1. $y'^2-2xy'-8x^2=0$ tənliyinin həllərini tapın.

HƏLLİ. Tənliyi y'-ə nəzərən həll edək:

$$y'=x\pm\sqrt{x^2+8x^2}, \quad y'=4x, \quad y'=-2x.$$

Alınan tənlikləri həll etsək $y=2x^2+c$, $y=-x^2+c$.

Onda $(y-2x^2-c)(y+x^2-c)=0$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

2. $y'^2-2yy'=y^2(e^x-1)$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Tənliyi y'-ə nəzərən həll edək:

$y'=y\pm\sqrt{y^2+y^2(e^x-1)}$, $\quad y'=y\pm ye^{\frac{x}{2}}$. Alınmış tənlikləri həll edək. $\int \frac{dy}{y} = \int\left(1 \pm e^{\frac{x}{2}}\right)dx - \ln C, \quad \ln|y| = x \pm 2e^{\frac{x}{2}} - \ln C, \ln|Cy| =$

$= x \pm 2e^{\frac{x}{2}}.$

Onda verilmiş tənliyin ümumi həlli

$$\left(\ln|Cy| - x - 2e^{\frac{x}{2}}\right)\left(\ln|Cy| - x + 2e^{\frac{x}{2}}\right) = 0.$$

3. $x = y'^3 + y'$ tənliyinin parametr daxil etmək üsulu ilə həll edin.

HƏLLİ. $y' = p$ qəbul etsək, $x = p^3 + p$ alarıq. $dy = y'dx$ olduğundan yazmaq olar: $dy = pd\left(p^3 + p\right), \quad dy = p\left(3p^2 + 1\right)dp$.

Axırıncı tənliyi inteqrallayaq $y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{p^2}{2} + C.$

Beləliklə, verilən tənliyin $\begin{cases} x = p^3 + p, \\ 4y = 3p^4 + 2p^2 + C \end{cases}$ parametrik şəkildə ümumi həlli alınır.

4. $y = (y' - 1)e^{y'}$ tənliyini parametr daxil etməklə həll edin.

HƏLLİ. $y' = p$ qəbul edək. Onda $y = (p-1)e^p$ olar. $dy = y'dx$ olduğundan alırıq: $dy = pe^p dp, \quad pe^p dp = pdx, \quad p = 0, \quad dx = e^p dp,$
$x = e^p + C, \quad p = 0, \quad y = (0-1)e^0 = -1.$

Beləliklə, verilən tənliyin $\begin{cases} x = e^p + C, \\ y = (p-1)e^p \end{cases}$ parametrik şəklində ümumi həlli və $y = -1$ məxsusi həlli var.

13. Laqranj tənliyi

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \quad (1)$$

şəklində tənliyə *Laqranj tənliyi* deyilir. Laqranj tənliyi $y' = p$ əvəzləməsinin köməkliyi ilə x-ə nəzərən xətti tənliyə gətirilir:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \quad (2)$$

Xətti tənliyin $x = \omega(p, c)$ həllini tapmaqla Laqranj tənliyinin ümumi həllini

$$\begin{cases} x = \omega(p, c), \\ y = \omega(p, c)\varphi(p) + \psi(p) \end{cases} \quad (3)$$

parametrik şəkildə tapırıq. p_0 ədədi $\varphi(p) - p = 0$ tənliyinin həllidirsə, Laqranj tənliyinin $y = p_0 x + \psi(p_0)$ həlli də var. Bu həll məxsusi həll ola bilər.

1. $y = 2xy' + \ln y', \quad (y' > 0)$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik Laqranj tənliyidir. $y' = p$ əvəzləməsini aparaq. Onda verilmiş tənlik $\begin{cases} y = 2xp + \ln p, \\ y' = p \end{cases}$ parametrik şəklinə düşür. Birinci bərabərliyi diferensiallayaq: $dy = 2pdx + \left(2x + \frac{1}{p}\right)dp$.

Onda $dy = pdx$ münasibətinə əsasən $\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -\frac{1}{p^2}$. Bu x-ə nəzərən xətti tənlikdir. Onun ümumi həlli $x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}$ olduğundan,

verilmiş tənliyin ümumi həlli $\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}, \\ y = \ln p + \frac{2C}{p} - 2 \end{cases}$

2. $y = xy'^2 + y'^2$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $y' = p$ əvəzləməsini aparaq. Onda verilmiş tənlik

$$y = (x+1)p^2, \quad y' = p$$

parametrik şəklinə düşər. Buradan $dy = pdx$ münasibətinə əsasən alırıq: $\dfrac{2dp}{1-p} = \dfrac{dx}{x+1}$. Bu tənliyi inteqrallasaq $-2\ln|1-p|\ln|x+1|-\ln C$,

$$x+1 = \frac{C}{(1-p)^2}, \quad x = \frac{C}{(1-p)^2} - 1, \quad p = 1.$$

Onda verilmiş tənliyin parametrik şəkildə $x = \dfrac{C}{(1-p)^2} - 1$, $y = \dfrac{Cp^2}{(1-p)^2}$ ümumi həlli və $y = x+1$ həlli alınır.

Buradan p parametrini yox edək. Bunun üçün birinci bərabərlikdən $(1-p)^2 = \dfrac{C}{x+1}$ və $p^2 = \left(1 - \sqrt{\dfrac{C}{x+1}}\right)^2$ tapıb, ikinci bərabərlikdə nəzərə alsaq, verilmiş tənliyin ümumi həllini taparıq: $y = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{C}\right)^2$. Burada $C = 0$ olduqda $y = x+1$ həlli alınır.

14. Klero tənliyi

$y = xy' + \psi(y')$ şəklində tənliyə *Klero tənliyi* deyilir. Göründüyü kimi Klero tənliyi Laqranj tənliyinin xüsusi halıdır. Həll üsulu isə eynidir. $y = xp + \psi(p)$, $y' = p$ tənliyin parametrik şəkli olur. Buradan $dy = pdx$ münasibətinə əsasən $\dfrac{dp}{dx}[x + \psi'(p)] = 0$, $\dfrac{dp}{dx} = 0$, $x + \psi'(p) = 0$ tənlikləri alınır. Bu tənliklərin $p = C$ və $x = -\psi'(p)$ həlləri vardır. Onda $y = xC + \psi(C)$ Klero tənliyinin ümumi həlli və $x = -\psi'(p)$, $y = -p\psi'(p) + \psi(p)$ parametrik şəklində həlli olur. $\psi''(p) \neq 0$ olduqda axırıncı Klero tənliyinin məxsusi həlli olur.

1. $y = xy' + \dfrac{a}{2y'}$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $y' = p$ əvəzləməsini aparaq: $y = xp + \dfrac{a}{2p}$ alınq. Buradan $dy - pdx$ bərabərliyinə əsasən alırıq: $\left(x - \dfrac{a}{2p^2}\right)\dfrac{dp}{dx} = 0$, $\dfrac{dp}{dx} = 0$,

$$p = C, \quad x = \frac{a}{2p^2}.$$

Onda verilmiş tənliyin $y = Cx + \dfrac{a}{2C}$ ümumi və $x = \dfrac{a}{2p^2}$, $y = \dfrac{a}{p}$ həlli alınır. Buradan p parametrini yox etsək Klero tənliyinin $y^2 = 2ax$ məxsusi həlli alınar.

2. Əyrinin toxunanlarının koordinat oxları arasında qalan parçalarının orta nöqtələrinin həndəsi yeri $y = kx + \dfrac{l}{2}$ düz xəttidir. Bu əyrini tapın.

HƏLLİ. Əyriyə $M(x, y)$ nöqtəsində çəkilən toxunanın tənliyi $Y - y = y'(X - x)$ olduğundan toxunanın absis və ordinat oxları ilə kesişmə nöqtələri uyğun olaraq $\left(x - \dfrac{y}{y'}, 0\right)$ və $(0; y - xy')$. Buradan parçanın orta nöqtəsinin koordinatları $\left(\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{y}{y'}\right), \dfrac{1}{2}(y - xy')\right)$ olduğu alınır. Bu nöqtə $y = kx + \dfrac{l}{2}$ tənliyini ödədiyindən $\dfrac{1}{2}(y - xy') =$

$=\frac{k}{2}\left(x-\frac{y}{y'}\right)+\frac{l}{2}$. Buradan $y=xy'+\frac{ly'}{k+y'}$ Klero tənliyi alınır.

Onda $y=xC+\frac{lC}{k+C}$. Klero tənliyinin ümumi həlli, $x=-\frac{kl}{(k+p)^2}$,

$y=\frac{lp^2}{(k+p)^2}$ isə parametrik şəkildə məxsusi həll olur.

15. Əyrilər ailəsinin diferensial tənliyi. Trayektoriya məsələsi

15.1. Əyrilər ailəsinin diferensial tənliyinin qurulması. Tutaq ki, p parametrindən asılı hamar

$$\Phi(x,y,p)=0 \tag{1}$$

əyrilər ailəsi verilmişdir. Bu ailənin diferensial tənliyi

$$\begin{cases}\Phi(x,y,p)=0,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'=0\end{cases} \tag{2}$$

sistemindən p parametrini yox etməklə tapılır. Bu zaman alınan $F(x,y,y')=0$ tənliyi ailənin diferensial tənliyi olur. n parametrdən asılı

$$\Phi(x,y,p_1,p_2,\dots,p_n)=0 \tag{3}$$

ailəsinin diferensial tənliyi

$$\begin{cases}\Phi(x,y,p_1,p_2,\dots,p_n)=0,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y' \qquad =0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{\partial^n\Phi}{\partial x^n}+\dots+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y^{(n)}=0\end{cases} \tag{4}$$

sistemindən $p_1,p_2,\dots,p_n$ parametrlərini yox etməklə alınan

$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$ tənliyi olur.

1. $\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{1}=1$ hiperbolalar ailəsinin diferensial tənliyini tapın.

HƏLLİ. Verilmiş bərabərlikdə y-ə x-dən asılı funksiya kimi baxıb x-ə görə törəmə alsaq: $\frac{x}{p^2}=yy'$. Axırıncı bərabərliyin hər tərəfini x-ə vuraq. Onda $\frac{x^2}{p^2}=xyy'$ alınq. $\frac{x^2}{p^2}$ ifadəsini verilmiş ailənin tənliyində yerinə yazaq. $xyy'-y^2=1$. Bu tənlik verilmiş hiperbolalar ailəsinin diferensial tənliyidir.

2. $y=p\left(1-e^{-\frac{x}{p}}\right)$ əyrilər ailəsinin diferensial tənliyini tapın.

HƏLLİ. Verilmiş tənlikdə y-ə x-dən asılı funksiya kimi baxıb, hər tərəfi x-ə görə diferensiallayaq: $y'=e^{-\frac{x}{p}}$. Buradan $p=-\frac{x}{\ln y'}$ tapıb, verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq, ailənin $y\ln y'+x(1-y')=0$ diferensial tənliyini alarıq.

3. $x+c_2=y^3+c_1y$ ailəsinin diferensial tənliyini tapın.

HƏLLİ. Verilən bərabərlikdə y-ə x dəyişəninin funksiyası kimi baxıb, ardıcıl olaraq iki dəfə törəmə alaq. $1=3y^2y'+c_1y'$, $0=6yy'^2+3y^2y''+c_1y''$. Alınan birinci bərabərlikdən $c_1=\frac{1}{y'}-3y^2$ tapıb, axırıncı bərabərlikdə yazaq: $0=6yy'^2+3y^2y''+\frac{y''}{y'}-3y^2y''$. Buradan $6yy'^3 + y'' = 0$ tənliyi alınır.

15.2. Trayektoriya məsələsi. Tutaq ki, p parametrindən asılı

$$\Phi(x, y, p) = 0 \qquad (5)$$

əyrilər ailəsi verilmişdir. Hər bir nöqtəsində ailənin əyrisi ilə eyni bir α bucağı altında kəsişən əyriyə *trayektoriya* deyilir. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ olarsa, belə trayektoriya *ortoqonal*, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ olduqda isə *izoqonal* trayektoriya adlanır.

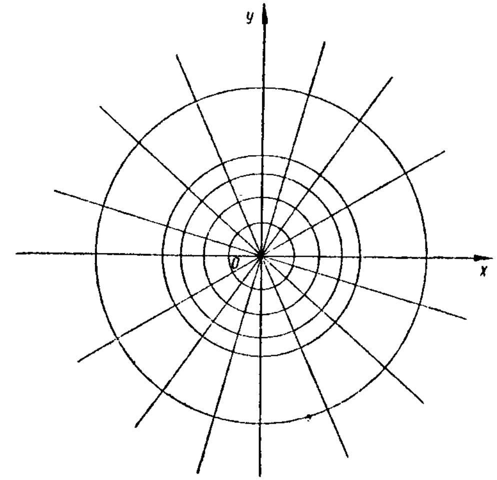
a) Ortoqonal trayektoriya. Ailənin trayektoriyalarını tapmaq üçün, əvvəlcə onun $F(x, y, y') = 0$ diferensial tənliyi tapılır. Bu tənlikdə $y' \to -\frac{1}{y'}$ əvəz etməklə alınan $F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$ tənliyi ailənin *ortoqonal trayektoriyasının diferensial tənliyi* olur. Onu həll etməklə ailənin ortoqonal trayektoriyaları tapılır.

b) İzoqonal trayektoriya. İzoqonal trayektoriyaları tapmaq üçün ailənin diferensial tənliyində $y' \to \frac{y' - k}{1 + ky'}$, $k = tg\alpha$ əvəz edilir. Alınan $F\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0$ tənliyi *izoqonal trayektoriyaların diferensial tənliyi* olur. Bu tənliyi həll etməklə ailənin izoqonal trayektoriyalarını tapırıq.

4. $y = kx$ əyrilər ailəsinin ortoqonal trayektoriyalarını tapın.

HƏLLİ. $y = kx$ koordinat başlanğıcından keçən düz xəttlər ailəsinin tənliyidir. Bu ailənin diferensial tənliyini tapmaq üçün verilən tənliyi x-ə görə diferensiallayaq. $y' = k$. Onda verilmiş ailənin diferensial tənliyini alırıq. $xy' = y$. Buradan ortoqonal trayektoriyanın diferensial tənliyini tapmaq üçün $y' \to -\frac{1}{y'}$ əvəzləməsini aparmalıyıq. Onda $yy' + x = 0$ tənliyini alarıq. Bu tənlik ortoqonal trayektoriyaların

diferensial tənliyidir. Onu həll etsək (dəyişənlərinə ayrılan tənlikdir) alarıq: $x^2 + y^2 = C^2$. Ortoqonal trayektoriyalar radiusu C, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan çevrələrdir (şəkil 6).



Şəkil 6.

5. $x^2 + y^2 = 2px$ əyrilər ailəsinin ortoqonal trayektoriyalarını tapın.

HƏLLİ. Verilmiş əyrilər ailəsi mərkəzi ox oxu üzərində olub, oy oxuna toxunan çevrələrdir. Tənliyi x-ə görə diferensiallayaq: $x + yy' = p$. Verilmiş ailənin diferensial tənliyini

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2px, \\ x + yy' = p \end{cases}$$

sistemindən p parametrini yox etməklə ala bilərik. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$.

Ortoqonal əyrilər ailəsinin diferensial tənliyini tapmaq üçün bu tənlikdə $y' \to -\frac{1}{y'}$ əvəzləməsi etmək lazımdır: $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$. Bu, ortoqonal əyrilər ailəsinin diferensial tənliyidir. Tənlik bircinsdir. Onu inteqrallasaq alarıq: $x^2 + y^2 = Cy$.

Bu, əyrilər ailəsi mərkəzi oy oxu üzərində olub, ox oxuna toxunan çevrələrdir.

6. $\rho^2 = a\cos 2\varphi$ lemniskatlar ailəsinin ortoqonal trayektoriyalarını tapın.

HƏLLİ. ρ-ya φ-dən asılı funksiya kimi baxıb törəmə alaq:

$\rho\rho' = -a\sin 2\varphi$. Onda $\begin{cases}\rho^2 = a\cos 2\varphi, \\ \rho\rho' = -a\sin 2\varphi\end{cases}$ sistemindən a parametrini yox etməklə ailənin $\rho' = -\rho tg2\varphi$ diferensial tənliyini alırıq. Burada $\rho' \to -\frac{\rho^2}{\rho'}$ ilə əvəz etsək ortoqonal trayektoriyaların $-\frac{\rho^2}{\rho'} = -\rho tg2\varphi$ və ya $\frac{d\rho}{\rho} = ctg2\varphi d\varphi$ diferensial tənliyini alarıq. Axırıncı tənliyi inteqrallasaq $\rho^2 = C\sin 2\varphi$ ortoqonal trayektoriyaların tənliyini alarıq.

7. $y = kx$ ailəsini 60^0 bucaq altında kəsən izoqonal trayektoriyasını tapın.

HƏLLİ. $k = tg60^0 = \sqrt{3}$ olduğundan ailənin $xy' = y$ diferensial tənliyində $y' \to \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y'\sqrt{3}}$ əvəzləməsi aparsaq, $x\frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y'\sqrt{3}} = y$ tənliyi alınır. Buradan alınan $y' = \frac{x\sqrt{3} + y}{x - y\sqrt{3}}$ bircins tənliyin ümumi həlli:

$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{y}{x}}$ izoqonal trayektoriyaları verir.

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ polyar koordinat sisteminə keçsək, onda izoqonal trayektoriya $\rho = Ce^{\frac{\varphi}{\sqrt{3}}}$ loqarifmik spirallar ailəsi olar.

8. $\rho = a\sin\varphi$ ailəsinin 45^0 bucaq altında kəsən izoqonal trayektoriyasının diferensial tənliyini yazmalı.

HƏLLİ. $\rho = a\sin\varphi$, $\rho' = a\cos\varphi$ bərabərliklərindən a parametrini yox etsək, alınan $\frac{\rho'}{\rho} = ctg\varphi$ tənliyi ailənin diferensial tənliyi olur.

Burada $\frac{\rho'}{\rho} \to \frac{1 + \frac{\rho}{\rho'}}{\frac{\rho}{\rho'} - 1}$ əvəzləməsi aparsaq $\frac{1 + \frac{\rho}{\rho'}}{\frac{\rho}{\rho'} - 1} = ctg\varphi$, $\rho' + \rho = (\rho - \rho')ctg\varphi$, $\rho' = \rho\frac{ctg\varphi - 1}{1 + ctg\varphi}$, $\rho' = \rho ctg(\varphi + 45^0)$.

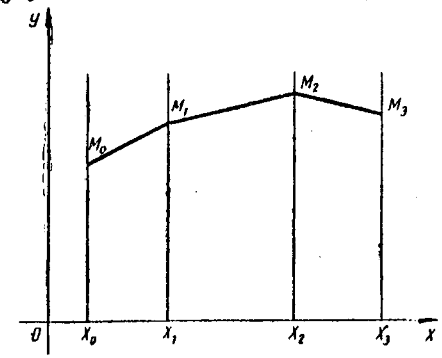
Beləliklə, $\rho' = \rho ctg(\varphi + 45^0)$ ailənin izoqonal trayektoriyasının diferensial tənliyidir.

16. Birtərtibli diferensial tənliyin Eyler və ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə təqribi həlli

16.1. Eyler üsulu. Tutaq ki,

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

diferensial tənliyinin $y(x_0) = y_0$ şərtini ödəyən həllini tapmaq tələb olunur. Həndəsi olaraq, bu $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən inteqral əyrisini tapmaq deməkdir. Eyler üsulunun mahiyyəti inteqral əyrisinə sınıq xətlər vasitəsilə yaxınlaşmaqdan ibarətdir. Bu sınıq xəttin $[x_0, b]$ parçasında qurulmasına baxaq (şəkil 7).



Şəkil 7.

$[x_0, b]$ parçasını $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ nöqtələri ilə $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, b]$ hissələrə bölək. Bucaq əmsalı $k_0 = f(x_0, y_0)$ olan və M_0 nöqtəsindən keçən düz xətt tənliyini yazaq. $y - y_0 = k_0(x - x_0)$. Burada $x = x_1$ yazıb $y_1 = y_0 + k(x_1 - x_0)$ hesablayaq. Onda $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı $k_1 = f(x_1, y_1)$ olan $y - y_1 = k_1(x - x_1)$ düz xətt tənliyini qurmaq olar. Prosesi bu qayda ilə davam etdirsək, $[x_0, b]$ parçası üçün $M_0M_1M_2\ldots$ sınıq xətti alınq. Bu sınıq xəttə Eyler sınıq xətti deyilir. $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi Eyler sınıq xətti və axtarılan inteqral əyrisi üçün ortaq nöqtədir. Bu nöqtədən aralandıqca sınıq xətt inteqral əyrisindən daha çox fərqlənir. Əgər $[x_0, b]$ parçasını n bərabər hissəyə bölsək, onda $h = \frac{b - x_0}{n}$ hesablama addımı olur. Aydındır ki, bu addım nə qədər kiçik olarsa, sınıq xətt inteqral əyrisinə bir o qədər yaxın olar. Tənliyin həlli yeganə olduqda $h \to 0$ şərtində Eyler sınıq xətti dəqiq həllə yaxınlaşır. Sınıq xəttin təpə nöqtələrinin ordinantları diferensial tənliyin axtarılan həllinin təqribi qiymətləri kimi qəbul edilir:

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})h, \quad i = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Göstərmək olur ki, $f(x,y)$ funksiyası kəsilməz olduqda qurulan Eyler sınıq xətləri ya özü, ya da ondan seçilmiş alt ardıcıllığın limiti Koşi məsələsinin həlli olur.

1. $[0,1]$ parçasını 5 bərabər hissəyə bölərək $y' = xy^2 + 1$ tənliyinin $y(0) = 0$ şərtini ödəyən təqribi həllini tapın.

HƏLLİ. $[0,1]$ parçasını 5 bərabər hissəyə bölək $(n = 5)$. Onda alarıq: $h = \frac{1-0}{5} = 0{,}2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}4$, $x_3 = 0{,}6$, $x_4 = 0{,}8$, $x_5 = 1{,}0$.

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 0 + 1\cdot 0{,}2 = 0{,}2,$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h = 0{,}2 + (0{,}2\cdot 0{,}2^2 + 1)0{,}2 = 0{,}4016,$$

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h = 0{,}4016 + (0{,}4\cdot 0{,}4016^2 + 1)0{,}2 \approx 0{,}6145,$$

$$y_4 = y_3 + f(x_3, y_3)h = 0{,}6145 + (0{,}6\cdot 0{,}6145^2 + 1)0{,}2 \approx 0{,}8598,$$

$$y_5 = y_4 + f(x_3, y_3)h = 0{,}8598 + (0{,}8\cdot 0{,}8598^2 + 1)0{,}2 \approx 1{,}1781.$$

Cədvəl düzəldək.

№	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$f(x_i, y_i)h$	$y_i + f(x_i, y_i)h$
$i=0$	0	0	1	0,2	0,2
$i=1$	0,2	0,2	1,008	0,2016	0,4016
$i=2$	0,4	0,4016	1,0645	0,2119	0,6145
$i=3$	0,6	0,6145	1,2266	0,2453	0,8598
$i=4$	0,8	0,8598	1,5914	0,3183	1,1781
$i=5$	1,0	1,1781			

Cədvəlin axırıncı sütunundakı qiymətlər tənliyin həllinin təqribi ədədi qiymətləridir.

2. $y' = x^2y + 2$ tənliyinin $y(0) = 0$ şərtini ödəyən həllinin $h = 0{,}2$ addımına uyğun $x = 1$ nöqtəsindəki qiymətini tapın.

HƏLLİ. $[0,1]$ parçası $h = 0{,}2$ addıma uyğun hissələrə bölündüyündən

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0{,}2, \quad x_2 = 0{,}4, \quad x_3 = 0{,}6, \quad x_4 = 0{,}8, \quad x_5 = 1,$$

$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1})$ düsturuna əsasən

$$y_k = y_{k-1} + (x_{k-1}^2 y_{k-1} + 2)h, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, \quad y_0 = 0.$$

Buradan ardıcıl olaraq tapırıq:

$$y_1 = y_0 + (x_0^2 y_0 + 2)0{,}2 = (0^2\cdot 0 + 2)0{,}2 = 0{,}4,$$

$$y_2 = y_1 + (x_1^2 y_1 + 2)0{,}2 = 0{,}4 + (0{,}2^2\cdot 0{,}4 + 2)0{,}2 =$$

$$=0{,}4+2{,}016\cdot 0{,}2=0{,}8032,$$

$$y_3=y_2+\left(x_2^2y_2+2\right)0{,}2=0{,}8032+(0{,}16\cdot 0{,}8032+2)\,0{,}2=$$

$$=0{,}8032+2{,}1285\cdot 0{,}2=1{,}2289,$$

$$y_4=y_3+\left(x_3^2y_3+2\right)0{,}2=1{,}2289+(0{,}36\cdot 1{,}2289+2)\,0{,}2=$$

$$=1{,}2289+0{,}4885=1{,}7174,$$

$$y_5=y_4+\left(x_4^2y_4+2\right)0{,}2=1{,}7174+(0{,}64\cdot 1{,}7174+2)\,0{,}2=$$

$$=1{,}7174+(1{,}0901+2)\,0{,}2=1{,}7174+0{,}6198=2{,}3372.$$

Tələb olunan qiymət $2{,}3372$ olur.

16.2. Ardıcıl yaxınlaşma üsulu. *TEOREM: Tutaq ki, $f(x,y)$ funksiyası $D=\{x_0-a\le x\le x_0+a;\ \ y_0-b\le y\le y_0+b\}$ düzbucaqlısında kəsilməzdir və y arqumentinə nəzərən Lipşis şərtini ödəyir:*

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le K|y_2-y_1|. \qquad (1)$$

Onda

$$y'=f(x,y) \qquad (2)$$

tənliyinin $y(x_0)=y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən və $[x_0-h,\ \ x_0+h]$ parçasında tə'yin olunan yeganə $y=y(x)$ həlli var, burada $h=$ $=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$, $M=\sup\limits_{D}|f(x,y)|$. Bu həll

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))dt,\quad y_0(x)=y_0 \qquad (3)$$

rekurrent düsturları ilə tə'yin olunan $\{y_n(x)\}$ ardıcıllığının müntəzəm limiti olur. Bu zaman $y(x)$ həlli ilə $y_n(x)$ ardıcıl yaxınlaşmalar arasındakı xəta

$$|y(x)-y_n(x)|\le bK^n\frac{h^n}{n!},\quad x\in[x_0-h,x_0+h]\quad n=1,2,\ldots \qquad (4)$$

bərabərsizliyi ilə tə'yin olunur.

3. $y'=x^2+y^2$ tənliyinin $y(0)=0$ başlanğıc şərtini ödəyən həlli üçün $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ ardıcıl yaxınlaşmaları tapın.

HƏLLİ. D-oblastı olaraq $\{-1\le x\le 1,\ \ -1\le y\le 1\}$ düzbucaqlını götürək. Onda $M=\sup\limits_{D}|f(x,y)|=2$, $h=\min\left\{1,\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{1}{2}$.

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|=|y_2^2-y_1^2|=|y_2+y_1||y_2-y_1|\le$$

$$\le 2|y_2-y_1|,$$

Sıfırıncı yaxınlaşma olaraq $y_0(x)=0$ qəbul edib, aşağıdakı yaxınlaşmaları tapaq: $y_1(x)=\displaystyle\int_0^x\left(t^2+0^2\right)dt=\frac{x^3}{3}$.

$$y_2(x)=\int_0^x\left(t^2+y_1^2(t)\right)dt=\int_0^x\left(t^2+\frac{t^6}{9}\right)dt=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x)=\int_0^x\left(t^2+y_2^2(t)\right)dt=\int_0^x\left(t^2+\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^7}{63}\right)^2\right)dt=$$

$$=\int_0^x\left(t^2+\frac{t^6}{9}+\frac{2}{3\cdot 63}t^{10}+\frac{t^{14}}{3969}\right)dt=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}.$$

4. $y'=y^2+3x^2-1$, $y(1)=1$ məsələsi üçün $y_0(x)$, $y_1(x)$,

$y_2(x)$ ardıcıl yaxınlaşmalarını tapın.

HƏLLİ. Sıfırıncı yaxınlaşma olaraq $y_0(x)=1$ götürək. Onda

$$y_1(x)=y_0+\int_1^x\left(y_0^2(t)+3t^2-1\right)dt=1+\int_1^x\left(1^2+3t^2-1\right)dt=$$

$$=1+\int_1^x 3t^2dt=1+x^3-1=x^3,$$

$$y_2(x)=y_0+\int_1^x\left(y_1^2(t)+3t^2-1\right)dt=1+\int_1^x\left(t^6+3t^2-1\right)dt=$$

$$=1+\frac{x^7}{7}-\frac{1}{7}+x^3-1-x+1=1+x^3-x+\frac{1}{7}\left(x^7-1\right).$$

YOXLAMA SUALLARI

1. Diferensial tənlik nəyə deyilir?
2. Diferensial tənliyin tərtibi nəyə deyilir?
3. Diferensial tənliyin ümumi, xüsusi və məxsusi həlləri nəyə deyilir?
4. İzoklin nədir? İzoklin üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?
5. Birtərtibli diferensial tənlik üçün Koşi məsələsi necə qoyulur?
6. Koşi məsələsinin varlığı və yeganiliyi haqqında şərtlər necədir?
7. Dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənlik nəyə deyilir?
8. Bircins diferensial tənlik nəyə deyilir və necə həll olunur?
9. Bricins tənliyə gətirilən tənliklərə misal göstərin.
10. Ümumiləşmiş bircins tənliklər nəyə deyilir?
11. Tam diferensiallı tənlik nəyə deyilir? Onun həll üsulu. İnteqrallayıcı vuruq nəyə deyilir və necə tapılır?
12. Xətti diferensial tənliklər nəyə deyilir?
13. Xətti tənliklərin həlli üçün Bernulli və Laqranj (sabitin variasiyası) üsullarının mahiyyəti nədən ibarətdir?
14. Bernulli tənliyi necə yazılır və xətti tənliyə necə gətirilir?
15. Rikkati tənliyi nəyə deyilir və onu hansı hallarda həll etmək olur?
16. Törəməyə nəzərən həll olunmamış diferensial tənlik hansı üsullarla həll olunur?

17. Parametr daxil etmək üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?
18. Hansı hallarda parametr daxil etmək əlverişli olur?
19. Laqranj tənliyi nəyə deyilir və necə həll olunur?
20. Klero tənliyi nəyə deyilir və necə həll olunur?
21. Əyrilər ailəsinin diferensial tənliyi necə tapılır?
22. Trayektoriya məsələsi nəyə deyilir?
23. Ortoqonal trayektoriya nəyə deyilir?
24. İzoqonal trayektoriya nəyə deyilir?
25. Diferensial tənliklərin təqribi həlli üçün Eyler və ardıcıl yaxınlaşma üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?

MÜSTƏQİL HƏLL ETMƏK ÜÇÜN MİSALLAR

1. Verilmiş funksiyaların verilmiş tənliyin həlli olduğunu göstərin

1. $y=\dfrac{\sin x}{x};\quad xy'+y=\cos x.$ 2. $y=\dfrac{1}{3}e^x;\quad y'+2y=e^x.$

3. $y=e^x\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt+Ce^x;\quad y'-y=e^{x+x^2}.$

4. $x=\cos t,\quad y=\sin t;\quad x+yy'=0.$

5. $y=C_1\sin x+C_2\cos x;\quad y''+y=0.$

2. Verilən funksiyaların tənliyin ümumi həlli olduğunu göstərin

1. $y=\dfrac{C}{\cos x};\quad y'-ytgx=0.$ 2. $y=\ln\left(C+e^x\right);\quad y'=e^{x-y}.$

3. $x=y\ln Cy;\quad y'(x+y)=y.$

4. $y^2+2Cx=C^2;\quad yy'^2+2xy'=y.$

3. Həllin varlığı və yeganəliyi oblastını tapın

1. $y' = \sqrt{x - y}$, CAVAB: $[x \geq y]$.
2. $y' = \sqrt[3]{3x - y} - 1$, [bütün müstəvi].
3. $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$, $[y \neq 2x]$.
4. $y' = \sqrt[3]{y^2}$, $[y \neq 0]$.
5. $y' = 1 + \sqrt{y - x}$, $[y > x]$.
6. $y' = \sqrt{4y^2 - 1}$, $\left[|y| > \frac{1}{2}\right]$.

4. İzoklin üsulu ilə tənliklərin inteqral əyrilərini təqribi qurun

1. $y' = y + x$.
2. $y' = y - x$.
3. $y' = 2x - y$.
4. $y' = y - x^2$.
5. $y' = y + x^2$.
6. $y' = y - x^2 + 2x$.

5. Həll edin

5.1. Dəyişənlərinə ayrıla bilən tənliklər

1. $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$, $[arctgx + arctgy = C]$.
2. $\sqrt{y^2 + 1}dx - xydy = 0$, $\left[\sqrt{y^2 + 1} = \ln xC\right]$.
3. $xydx + (x + 1)dy = 0$, $\left[y = C(x + 1)e^{-x}\right]$.
4. $y' = 10^{x+y}$, $\left[10^x + 10^{-y} = C\right]$.

5. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$, $\left[y \ln C(x^2 - 1) = 1\right]$.
6. $y' = \sin(x - y)$, $\left[x + C = ctg\left(\frac{y - x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

5.2. Bircins tənliklər

1. $(x + 2y)dx - xdy = 0$, $\left[x + y = Cx^2, \quad x = 0\right]$.
2. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$, $\left[\ln(x^2 + y^2) = C - 2arctg\frac{y}{x}\right]$.
3. $(x - 2y)y' = x - y$, $\left[xy - y^2 - \frac{x^2}{2} = C\right]$.
4. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$, $\left[x(y - x) = Cy, \quad y = 0\right]$.
5. $4x - 3y + (2y - 3x)y' = 0$, $\left[y^2 - 3xy + 2x^2 = C\right]$.
6. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$, $\left[y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^3 e^{\frac{y\left(y + \sqrt{y^2 - x^2}\right)}{x^2}}\right]$.

5.3. Bircins tənliyə gətirilən tənliklər

1. $(6x + y - 1)dx + (4x + y - 2)dy = 0$, $\left[(y + 2x - 3)^2 = C\left(y + 3x - \frac{5}{2}\right)\right]$.

2. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$, $\left[y+2 = Ce^{-2arctg\frac{y+2}{x-3}}\right]$.

3. $(x-y-1)dx+(y-x+2)dy=0$, $\left[(y-x+2)^2+2x=C\right]$.

4. $(x+4y)y' = 2x+3y-5$, $\left[(y-x+5)^5(x+2y-2)=C\right]$.

5. $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$, $\left[(y-2x)^3 = \right.$
$\left.= C(y-x-1)^2, \quad y=x+1\right]$.

6. $(3y-7x+7)dx-(3x-7y-3)dy=0$,
$\left[(x+y+1)^5(x-y-1)^2=C\right]$.

5.4. Ümumiləşmiş bircins tənliklər

1. $2y'+x=4\sqrt{y}$, $\left[\left(2\sqrt{y}-x\right)\ln C\left(2\sqrt{y}-x\right)=x, \quad 2\sqrt{y}=x\right]$.

2. $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$, $\left[1-xy=Cx^3(2+xy), \quad xy=-2\right]$.

3. $x^3(y'-x)=y^2$, $\left[x^2=\left(x^2-y\right)\ln Cx, \quad y=x^2\right]$.

4. $2x^2y'=y^3+xy$, $\left[x=-y^2\ln Cx, \quad y=0\right]$.

5.5. Xətti və Bernulli tənlikləri

1. $y'+2y=e^{-x}$, $\left[y=Ce^{-2x}+e^{-x}\right]$.

2. $xy'-2y=x^3\cos x$ $\left[y=Cx^2+x^2\sin x\right]$.

3. $y'tgx-y=a$, $\left[y=C\sin x-a\right]$.

4. $y'+ytgx=\sin 2x$, $\left[y=-2\cos^2 x+C\cos x\right]$.

5. $y'-y\cos x=\sin 2x$, $\left[y=Ce^{\sin x}-2\sin x-2\right]$.

6. $y'-\dfrac{2y}{x}=x^2e^x$, $y(1)=0$, $\left[y=x^2\left(e^x-e\right)\right]$.

7. $xy'-y=x^2y^2$, $\left[y=-\dfrac{3x}{\left(x^3+C\right)^2}\right]$.

8. $xy'-4y=2x^2\sqrt{y}$, $\left[y=x^4\ln^2 Cx, \quad y=0\right]$.

9. $y'-ytgx+y^2\cos x=0$, $\left[y=\dfrac{1}{(x+C)\cos x}\right]$.

10. $y'+2y=y^2e^x$, $\left[y\left(e^x+Ce^{2x}\right)=1, \quad y=0\right]$.

5.6. Rikkati tənliyi

1. $y'-2xy+y^2=1-x^2$, $y_1=x$, $\left[y=x+\dfrac{1}{x-C}\right]$.

2. $xy'-(2x+1)y+y^2=-x^2$, $y_1=x$, $\left[y=x+\dfrac{x}{x+C}\right]$.

3. $y'-2xy+y^2=5-x^2$, $y=x+2$, $\left[y=x+2+\dfrac{4}{Ce^{4x}-1}\right]$.

5.7. Tam diferensiallı tənliklər

1. $2xydx+\left(x^2-y^2\right)dy=0$, $\left[3x^2y-y^3=C\right]$.

2. $e^{-y}dx-\left(2y+xe^{-y}\right)dy=0$, $\left[xe^{-y}-y^2=C\right]$.

3. $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$, $\left[x^3+3x^2y^2+y^4=C\right]$.

4. $\frac{y}{x}dx+\left(y^3+\ln x\right)dy=0$, $\left[4y\ln x+y^4=C\right]$.

5. $\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$, $\left[\frac{\sin^2 x}{y}+\frac{x^2+y^2}{2}=C\right]$.

6. $\left(3x^2-2x-y\right)dx+\left(2y-x+3y^2\right)dy=0$,

$\left[x^3+y^3-x^2-xy+y^2=C\right]$.

5.8. İnteqrallayıcı vuruq

1. $\left(x^2+y^2+1\right)dx-2xydy=0$, $\mu=\varphi(x)$, $\left[1+y^2-x^2=Cx\right.$,

$\left.\mu=\frac{1}{x^2}\right]$.

2. $\left(2xy^2-3y^3\right)dx+\left(7-3xy^2\right)dy=0$, $\mu=\varphi(y)$, $\left[x^2-\frac{7}{y}\right.$

$\left.-3xy=C,\ \ \mu=\frac{1}{y^2}\right]$.

3. $\left(x^2+y\right)dx-xdy=0$, $\mu=\varphi(x)$, $\left[x-\frac{y}{x}=C,\ \ \mu=\frac{1}{x^2}\right]$.

4. $2xydx-\left(x^2+y\right)dy=0$, $\mu=\varphi(y)$, $\left[y\ln|y|-x^2=Cy,\right.$

$\left.\mu=\frac{1}{y^2}\right]$.

5. $(x+\sin x+\sin y)dx+\cos y\,dy=0$, $\mu=\varphi(x)$,

$\left[2e^x\sin y+e^x(x-1)+e^x(\sin x-\cos x)=C,\ \ \mu=e^x\right]$.

5.9. Törəməyə nəzərən həll olunmamış tənliklər

1. $y'^2-y^2=0$, $\left[y=Ce^{\pm x}\right]$.
2. $8y'^3=27y$, $\left[y^2=(x+C)^3,\ \ y=0\right]$.
3. $y'^2-2xy'=8x^2$, $\left[y=2x^2+C,\ \ y=-x^2+C\right]$.
4. $xy'^2+2xy'-y=0$, $\left[(y-C)^2=4Cx\right]$.
5. $4y'^2-9x=0$, $\left[(y-C)^2=x^3\right]$.
6. $xy'^2-2yy'+x=0$, $\left[x^2+C^2=2Cy,\ \ y=\pm x\right]$.

5.10. Parametr daxil etmə

1. $x=y'+y'^3$, $\left[x=p+p^3,\ \ 4y=3p^4+2p^2+C\right]$.
2. $y=y'^2+2y'^3$, $\left[x=3p^2+2p+C,\ \ y=p^2+3p^2,\ \ y=0\right]$.
3. $x=y'\sqrt{y'^2+1}$, $\left[x=p\sqrt{p^2+1},\ \ 3y=\left(2p^2-1\right)\sqrt{p^2+1}+C\right]$.
4. $y=xy'-x^2y'^3$, $\left[xp^2=C\sqrt{|p|}-1,\ \ y=xp-x^2p^3,\ \ y=0\right]$.
5. $y=\ln\left(1+y'^2\right)$, $\left[x=arctgp+C,\ \ y=\ln\left(1+p^2\right), y=0\right]$.
6. $y=\left(y'-1\right)e^{y'}$, $\left[x=e^p+C,\ \ y=(p-1)e^p,\ \ y=1\right]$.

5.11. Laqranj və Klero tənlikləri

1. $y=xy'-y'^2$, $\left[y=Cx-C^2,\ \ 4y=x^2\right]$.

2. $y = -xy' + 4\sqrt{y'}$, $\left[x\sqrt{p} = \ln p + C, \quad y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C); \quad y = 0\right]$.

3. $y = 2xy' - 4y'^3$, $\left[x = 3p^2 + Cp^{-2}, \quad y = 2p^3 + 2Cp^{-1}; \quad y = 0\right]$.

4. $y = xy' + \dfrac{9}{y'}$, $\left[y = Cx + \dfrac{9}{C}; \quad y^2 = 36x\right]$.

5. $y = xy' - (2 + y')$, $\left[y = Cx - C - 2\right]$.

6. $y'^3 = 3(xy' - y)$, $\left[C^3 = 3(Cx - y); \quad 9y^2 = 4x^3\right]$.

Ailələrin diferensial tənliklərini qurun

1. $y = Cx^3$, $\left[xy' = 3y\right]$.

2. $y = (x - C)^3$, $\left[y' = 3y^{\frac{2}{3}}\right]$.

3. $y = \sin(x + C)$, $\left[y^2 + y'^2 = 1\right]$.

4. $y = C_1x^2 + C_2e^x$, $\left[x(x-2)y'' - (x^2 - 2)y' + 2(x-1)y = 0\right]$.

5. $(x - C_1)^2 + C_2y^2 = 1$, $\left[\left(yy'' + y'^2\right)^2 = -y^3y''\right]$.

6. $y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x$, $\left[x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0\right]$.

Ailələrin göstərilən φ bucağı altında kəsilən trayektoriyalarının diferensial tənliyini qurun

1. $x^2 = y + Cx$, $\varphi = 90^0$, $\left[\left(x^2 + y\right)y' = -x\right]$.

2. $x^2 + y^2 = a$, $\varphi = 45^0$, $\left[(x + y)y' = y - x; \quad (x - y)y' = x + y\right]$.

3. $y = kx$, $\varphi = 60^0$, $\left[\left(x \mp y\sqrt{3}\right)y' = y \pm x\sqrt{3}\right]$.

4. $y^2 = 2px$, $\varphi = 60^0$. $\left[\left(2x \mp y\sqrt{3}\right)y' = y \pm 2x\sqrt{3}\right]$.

5. $r = a\cos^2\theta$, $\varphi = 90^0$, $\left[r' = \dfrac{1}{2} r ctg\theta\right]$.

6. $r = a\sin\theta$, $\varphi = 45^0$, $\left[r' = r ctg\left(\theta \pm 45^0\right)\right]$.

7. $xy = C$ hiperbolalar ailəsinin ortoqonal trayektoriyasını tapın.

$\left[y^2 - x^2 = C\right]$.

Verilmiş parça və addıma əsasən Eyler üsulu ilə həll edin

1. $y' = \dfrac{1}{2}xy$, $y(0) = 1$, $[0, 1]$, $h = 0{,}1$.

2. $y' = 1 + xy^2$, $y(0) = 0$, $[0, 1]$, $h = 0{,}1$.

3. $y' = x + y$, $y(1) = 2$, $[1, 3]$, $h = 0{,}2$, $y(3) = ?$.

4. $y' = x^2y^3 + x^3$, $y(0) = 0$, $[0, 1]$, $h = 0{,}1$.

Verilmiş məsələlərin həlli üçün $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ ardıcıl yaxınlaşmalarını tapın

1. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $\left[y_0 = 0, \quad y_1 = \dfrac{x^2}{2}, \quad y_2 = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^5}{20}\right]$.

2. $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$, $\left[y_0 = 0, \quad y_1 = \dfrac{x^2}{2}, \quad y_2 = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^5}{20}\right]$.

2. $y' = x - y^2, \quad y(0) = 0, \quad \left[y_0 = 0, \quad y_1 = \frac{x^2}{2}, \quad y_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} \right].$

3. $y' = 1 + x\sin y, \quad y(\pi) = 2\pi, \qquad [y_0 = 2\pi, \quad y_1 = \pi + x,$

$y_2 = 2\pi + x + x\cos x - \sin x].$

II FƏSİL

YÜKSƏK TƏRTİBLİ TƏNLİKLƏR

1. İkitərtibli diferensial tənliklər. Koşi məsələsi

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (1)$$

tənliyinə *ikitərtibli diferensial* tənlik,

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (2)$$

tənliyinə isə ***yüksək tərtib törəməyə nəzərən həll olunmuş tənlik*** deyilir. İkitərtibli diferensial tənliyin ümumi həlli elə $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ funksiyasına deyilir ki, c_1 və c_2 sabitlərinin mümkün qiymətlərində həmin tənliyin həllərini almaq mümkün olsun. İkitərtibli diferensial tənliyin *xüsusi həlli* c_1 və c_2 sabitlərinin mümkün qiymətlərində $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ ümumi həllindən alınan həllə deyilir. İkitərtibli diferensial tənliyin

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \qquad (3)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllinin tapılmasına *Koşi məsələsi* deyilir. Hər bir nöqtəsində Koşi məsələsinin həllinin yeganəliyi pozulan həllə məxsusi həll deyilir. İkitərtibli diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həlli həndəsi olaraq, verilmiş $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən və bu nöqtədə y_0' toxunanına malik inteqral əyrisinin tapılmasıdır.

$f(x, y, y')$ funksiyası (x_0, y_0, y_0') nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməzdirsə, (2) tənliyinin (3) şərtlərini ödəyən həlli var. Əlavə olaraq $\frac{\partial f}{\partial y}$ və $\frac{\partial f}{\partial y'}$ xüsusi törəmələri də kəsilməzdirsə, onda bu həll yeganədir.

2. Tərtibi aşağı salına bilən diferensial tənliklər

2.1. $y'' = f(x)$ şəklində tənliklər. Bu tənlikdə $f(x)$ funksiyası (a, b) intervalında kəsilməz olduqda ümumi həlli tapaq. Verilən tənliyi $dy' = f(x)dx$ şəklində yazıb, inteqrallayaq:

$$y' = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C_1, \quad x_0 \in (a,b), \quad x \in (a,b).$$

Buradan alarıq: $dy = \left[\int_{x_0}^{x} f(t)dt + C_1\right]dx$. Hər tərəfi inteqrallasaq:

$$y = \int_{x_0}^{x}\left[\int_{x_0}^{\xi} f(t)dt\right]d\xi + C_1(x - x_0) + C_2.$$

Axırıncı bərabərliyi $y = \int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)dt + C_1(x-x_0) + C_2$ şəklində yazmaq olar.

1. $y'' = x + \sin x$ tənliyinin $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Tənliyi $dy' = (x + \sin x)dx$ şəklində yazıb, inteqrallayaq: $y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1$. Buradan $dy = \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1\right)dx$ yazıb, inteqrallasaq verilmiş tənliyin ümumi həllini $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$ şəklində alırıq.

Başlanğıc şərtlərdən istifadə edək. Ümumi həlldə $x = 0$, $y = 2$ yazsaq $C_2 = 2$ alarıq, $x = 0$, $y' = 3$ yazsaq, $C_1 = 4$ alarıq. Onda $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + 4x + 2$ funksiyası Koşi məsələsinin həlli olur.

2.2. $y'' = f(x, y')$ şəklində tənliklər. Tənliyin sağ tərəfinə axtarılan y funksiyası aşkar şəkildə daxil olmur. Verilmiş tənliyi həll etmək üçün $y' = z$ əvəzləməsini aparaq. Onda, verilmiş tənlik $z' = f(x, z)$ şəklinə düşər. Bu tənliyin ümumi həlli $z = \varphi(x, C_1)$ olarsa, onda $y' = \varphi(x, C_1)$ tənliyi alınar. Buradan inteqrallamaqla verilmiş tənliyin $y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2 = \Phi(x, C_1, C_2)$ ümumi həllini alarıq.

2. $y'' = \frac{y'}{3-x}$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. $y' = z(x)$ əvəzləməsini aparsaq, onda verilmiş tənlik $z' = \frac{z}{3-x}$ şəklinə düşər. Buradan alarıq. $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{3-x}$, $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{3-x} + \ln C_1$, $\ln|z| = -\ln|3-x| + \ln C_1$, $z = \frac{C_1}{3-x}$.

$z = y'$ əvəzləməsinə əsasən alırıq: $y' = \frac{C_1}{3-x}$, $dy = \frac{C_1}{3-x}dx$,

$$\int dy = C_1 \int \frac{dx}{3-x} + C_2, \quad y = -C_1 \ln|3-x| + C_2.$$

Beləliklə, $y = -C_1 \ln|3-x| + C_2$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

2.3. Sərbəst dəyişən aşkar daxil olmayan tənliklər. x dəyişəni aşkar şəkildə daxil olmayan

$$y'' = f(y, y') \tag{1}$$

tənliyində $y' = p(y)$ əvəzləməsini aparaq. Onda alarıq. $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. y' və y''-in qiymətlərini tənlikdə nəzərə alsaq birtərtibli

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p) \tag{2}$$

diferensial tənliyi alınar. Burada y sərbəst dəyişən, $p = p(y)$ axtarılan funksiyadır.

Tutaq ki, bu tənliyin ümumi həlli $p=\varphi(y,C_1)$ şəklindədir. Onda $dy=\varphi(y,C_1)dx$ dəyişənlərinə ayrılan tənlik alınır:

$$\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx,\quad \int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=\int dx+C_2,$$

Buradan verilmiş tənliyin $\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$ şəklində ümumi həlli tapılır.

3. $(3+y)y''+y'^2=0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Verilən tənliyə x dəyişəni aşkar şəkildə daxil olmur. $y'=p(y)$ əvəzləməsini aparaq. Onda $y''=p\frac{dp}{dy}$ olar. y' və y''-in qiymətlərini tənlikdə yerinə yazaq. $(3+y)p\frac{dp}{dy}+p^2=0$. Buradan $p=0$ və $(3+y)\frac{dp}{dy}+p=0$ bərabərlikləri alınır.

Onda $p=0$ tənliyindən $y'=0$, $y=C$ alınq. İkinci tənliyi dəyişənlərinə ayıraq və inteqrallayaq: $\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{3+y}$, $\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{dt}{3+y}+\ln C_1$, $\ln|p|=-\ln|3+y|+\ln C_1$, $p=\frac{C_1}{3+y}$.

$p=y'$ olduğunu nəzərə alsaq yaza bilərik: $y'=\frac{C_1}{3+y}$, $(3+y)dy=C_1dx$, $\int(3+y)dy=C_1\int dx+C_2$, $3y+\frac{y^2}{2}=C_1x+C_2$.

Beləliklə, $3y+\frac{y^2}{2}=C_1x+C_2$ verilmiş tənliyin ümumi inteqralı olur.

2.4. Axtarılan funksiya və onun törəmələrinə nəzərən bircins

tənliklər. Tutaq ki,

$$F(x,y,y',y'')=0 \tag{1}$$

tənliyi verilmişdir. $F(x,ty,ty',ty'')=t^m(x,y,y',y'')$ şərti ödənərsə, (1) tənliyinə *axtarılan funksiya və onun törəmələrinə nəzərən bircins tənlik* deyilir. $y'=yz$ əvəzləməsini aparaq. Onda alarıq: $y''=(y')'=$ $=(yz)'=y'z+yz'=yz^2+yz'=y(z^2+z')$.

Bu əvəzləməni tənlikdə yazsaq alarıq:

$$F[x,\ y\cdot 1,\ yz,\ y(z^2+z')]=y^mF(x,\ 1,\ z,\ z^2+z')=0.$$

Buradan birtərtibli

$$F(x,1,z,z^2+z')=0 \tag{2}$$

tənliyi alınır.

4. $xyy''-xy'^2-yy'=0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilən tənlik axtarılan funksiya və onun törəmələrinə nəzərən bircinsdir. Odur ki, $y'=yz$, $y''=y(z^2+z')$, $xy^2(z^2+z')-$ $-xy^2z^2-y^2z=0$. Buradan $y=0$, $x(z^2+z')-xz^2-z=0$, $xz'-z=0$, $xz'=z$, $\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}+\ln C_1$, $\ln|z|=$ $=\ln|x|+\ln C_1$, $z=C_1x$.

$z=\frac{y'}{y}$ olduğunu nəzərə alsaq $\frac{y'}{y}=C_1x$ tənliyi alınar. $\frac{dy}{y}=C_1xdx$, $\int\frac{dy}{y}=C_1\int xdx+\ln C_2$, $\ln|y|=C_1\frac{x^2}{2}+\ln C_2$, $y=C_2e^{C_1x^2}$.

Deməli, $y=C_2e^{C_1x^2}$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

2.5. Sol tərəfi tam diferensial olan tənliklər. Tutaq ki,

$$F(x,y,y',y'')=0 \tag{1}$$

tənliyinin sol tərəfi hər hansı $\Phi(x,y,y')$ funksiyasının tam diferensialıdırsa, yə'ni $F(x,y,y',y'')=\frac{d}{dx}[\Phi(x,y,y')]=\Phi'_x(x,y,y')+$

$+\Phi'_y(x,y,y')y'+\Phi'_{y'}(x,y,y')y''$, onda onu $\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y')=0$ şeklində yazmaq olar. Buradan birtertibli $\Phi(x,y,y')=C_1$ tənliyi alınar.

5. $xy''+(1+2y)y'=0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyin sol tərəfi $\Phi(x,y,y')=xy'+y^2$ funksiyasının tam diferensial şəklində göstərilə bilər. Odur ki, $\frac{d}{dx}(xy'+y^2)=0$,

$$xy'+y^2=C_1,\quad xy'=C_1-y^2,\quad \frac{dy}{C_1-y^2}=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{dy}{C_1-y^2}=$$

$=\int\frac{dx}{x}+\ln C_2$. $C_1>0$ olduqda $\int\frac{dy}{C_1-y^2}=\frac{1}{2\sqrt{C_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{C_1}+y}{\sqrt{C_1}-y}\right|$ olduğundan yaza bilərik. $\frac{1}{2\sqrt{C_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{C_1}+y}{\sqrt{C_1}-y}\right|=\ln x+\ln C_2$. $C_1<0$ olduqda $\int\frac{dy}{C_1-y^2}=-\int\frac{dy}{y^2-C_1}=-\sqrt{-C_1}\,arctg\frac{y}{\sqrt{-C_1}}$ olduğundan alınq: $\sqrt{-C_1}\,arctg\frac{y}{\sqrt{-C_1}}=\ln|x|+\ln C_2$.

2.6. Ümumiləşmiş bircins tənliklər. $F(x,y,y',y'')$ funksiyası üçün

$$F\left(tx,t^k y,t^{k-1}y',t^{k-2}y''\right)=t^m F(x,y,y',y'') \tag{1}$$

bərabərliyi ödənildikdə

$$F(x,y,y',y'')=0 \tag{2}$$

tənliyinə *ümumiləşmiş bircins tənlik* deyilir. Belə tənliyi həll etmək üçün $x=e^t$, $y=ze^{kt}$ $(x>0)$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır. Burada t yeni sərbəst dəyişən, z isə yeni axtarılan funksiya olur. $y'=$ $=\frac{dy}{dx}=e^{(k-1)t}\left(\frac{dz}{dt}+kz\right)$, $y''=e^{(k-2)t}\left(\frac{d^2z}{dt^2}+(2k-1)\frac{dz}{dt}+k(k-1)z\right)$.

Bunları tənlikdə yerinə yazıb, (1) bərabərliyini nəzərə alsaq, (2) tənliyi

$$F\left(1,z,\frac{dz}{dt}+kz,\frac{d^2z}{dt^2}+(2k-1)\frac{dz}{dt}+k(k-1)z\right)=0 \tag{3}$$

şəklinə düşür. Alınan tənliyə sərbəst dəyişən aşkar şəkildə daxil olmur.

6. $4x^2y^3y''=x^2-y^4$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Verilən tənliyin ümumiləşmiş bircins olduğunu yoxlayaq: $x\to tx$, $y\to t^k y$, $y'\to t^{k-1}y'$, $y''\to t^{k-2}y''$ əvəzləməsini aparsaq, alınan bərabərlikdə t-nin dərəcələri eyni olması üçün $2+3k+k-2=2=4k$. Buradan $4k=2$, $k=\frac{1}{2}$. Tənliyi həll etmək üçün $x=e^t$, $y=ze^{\frac{t}{2}}$ əvəzləməsi aparaq. Onda $y'=e^{\left(\frac{1}{2}-1\right)t}\left(\frac{dz}{dt}+\frac{1}{2}z\right)$, $y''=e^{\left(\frac{1}{2}-2\right)t}\left(\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{z}{4}\right)$. Bunları verilən tənlikdə yerinə yazmaqla alınq.

$$4z^3\left(\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{z}{4}\right)=1-z^4,\quad 4z^3\frac{d^2z}{dt^2}=1$$

tənliyi alınar. Bu tənliyi həll etmək üçün onu $\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{1}{4z^3}$ şəklində yazıb hər tərəfi $2\frac{dz}{dt}$-ə vuraq: $2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{1}{2z^3}\frac{dz}{dt}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=$ $=\frac{1}{2z^3}\frac{dz}{dt}$. Buradan

$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=C_1-\frac{1}{4z^2}$, $\frac{dz}{dt}=\sqrt{C_1-\frac{1}{4z^2}}$. Alınan dəyişənlərə ayrıla bilən tənlikdir. $\frac{2zdz}{\sqrt{C_1 z^2 - 1}} = dt, \quad \int \frac{2zdz}{\sqrt{C_1 z^2 - 1}} = t + \ln C_2,$

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 z^2 - 1} = t + \ln C_2.$$

Əvəzləməyə əsasən $t = \ln x, \quad z = \frac{y}{\sqrt{x}}$ olur. Odur ki,

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 \frac{y^2}{x} - 1} = \ln x + \ln C_2; \quad 2\sqrt{\frac{C_1 y^2 - x}{x}} = C_1 \ln C_2 x.$$

Hər tərəfi kvadrata yüksəldək: $4\left(C_1 y^2 - x\right) = x\left(C_1 \ln C_2 x\right)^2$. Bu, verilən tənliyin ümumi həlli olur.

3. İkitərtibli xətti tənliklər

3.1. Ümumi anlayışlar. Qeyd edək ki,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

tənliyi *ikitərtibli xətti*,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

tənliyi isə *ikitərtibli xətti bircins tənlik* adlanır. $y_1(x)$ və $y_2(x)$ xətti bircins tənliyinin iki həllidirsə, onda ixtiyari C_1 və C_2 sabitləri üçün

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (3)$$

tənliyin həlli olur. Tənliyin $y_1(x)$ və $y_2(x)$ həllərinin nisbəti sabit bir ədədə bərabər deyilsə (yə'ni $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq const$), onda həmin həllər *xətti asılı olmayan* həllər olur. Əks halda, yə'ni $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = const$ olduqda *xətti asılı* həllər olur. $y_1(x)$ və $y_2(x)$ funksiyaları (2) tənliyinin xətti asılı olmayan həllərdirsə, onlara *fundamental həll* deyirlər və (3) həmin tənliyin ümumi həlli olur. (2) tənliyinin ümumi həllini tapmaq üçün həmin tənliyin xətti asılı olmayan iki həllinni tapmaq kifayətdir. Tutaq

$y_1(x)$ və $y_2(x)$ funksiyaları (a,b) intervalında diferensiallanandır. Onda

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

determinantına bu funksiyalardan düzəldilmiş Vronski determinantı deyilir. $W(x) \neq 0, \quad x \in (a,b)$ olduqda verilmiş funksiyalar xətti asılı olmur. $W(x) = 0, \quad x \in (a,b)$ olarsa, verilmiş funksiyaların xətti asılı olub-olmaması haqqında fikir söyləmək olmur. Lakin $y_1(x), \quad y_2(x)$ funksiyaları (2) bircins tənliyin həlləri olarsa,

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int p(x)dx}$$

Ostroqradski-Liuvill düsturuna əsasən bu həllərin xətti asılı olmaması üçün onlardan düzəldilmiş Voronski determinantının $W(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$ olması zəruri və kafidir.

Qeyd edək ki, ümumi halda (2) tənliyini həll etmək mümkün olmur. Lakin bu tənliyin hər hansı bir həlli mə'lum olarsa, onun ümumi həllini tapmaq olur. Tutaq ki, $y_1(x)$ funksiyası (2) tənliyinin həllidir. Onda $y = y_1(x)\int u(x)dx$ əvəzləməsi vasitəsilə o, birtərtibli xətti tənliyə gətirməklə həll olunur. Bu halda ümumi həlli Ostroqradski-Liuvill düsturuna əsasən də tapmaq olar. Tənliyin ixtiyari həlli $y(x)$ olarsa, Ostroqradski-Liuvill düsturuna əsasən

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)dx};$$

Buradan $\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C_1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}$ yazıb, inteqrallasaq alarıq:

$$y = y_1(x)\left\{C_1\int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx + C_2\right\}.$$

Bircins olmayan (1) tənliyinin ümumi həlli ona uyğun (2) bircins tənliyin (3) ümumi həlli ilə verilmiş tənliyin hər hansı bir $\tilde{y}(x)$ xüsusi həllinin cəminə bərabərdir:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x) \qquad (4)$$

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$ tənliyi üçün e^{2x}, e^{3x} funksiyalarının fundamental həll olduğunu göstərin.

HƏLLİ. Bilavasitə yoxlamaqla göstərmək olar ki, e^{2x}, e^{3x} funksiyaların hər biri verilmiş tənliyin həllidir. Bu həllər üçün

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{e^{3x}}{e^{2x}} = e^{x} \neq const \text{ və ya } W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{5x} \neq 0$$

olduğundan xətti asılı deyil. Onda $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olar. Burada C_1 və C_2 ixtiyari sabitlərdir.

2. $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$ tənliyinin bir xüsusi həllini çoxhədli şəklində tapıb, həll edin.

HƏLLİ. Tənliyin həllini $y = x^n + ax^{n-1} + \cdots$ şəklində axtaraq. Onda $(2x+1)\left(n(n-1)x^{n-2} + \cdots\right) + 4x\left(nx^{n-1} + \cdots\right) - 4\left(x^n + \cdots\right) = 0$.

Buradan aydındır ki, $y_1 = x$ götürsək, bu verilən tənliyin həlli olur. Onda tənlikdə $y = y_1 \int u dx = x \int u dx$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır.

$$y' = \int u dx + xu, \quad y'' = xu' + 2u.$$

Bunları verilən tənlikdə yerinə yazaq:

$$(2x+1)(xu' + 2u) + 4x\left(\int u dx + xu\right) - 4x\int u dx = 0.$$

Buradan birtərtibli xətti bircins $(2x+1)xu' + \left(4x^2 + 4x + 2\right)u = 0$ tənliyi alınır. Alınan tənliyi həll edək: $\frac{du}{u} + \frac{4x^2 + 4x + 2}{x(2x+1)}dx = 0$, $\frac{du}{u} +$

$$+\left(2 + \frac{2}{x} - \frac{2}{2x+1}\right)dx = 0, \quad \ln u + 2x + 2\ln x - \ln(2x+1) = \ln C.$$

$$u = C\frac{2x+1}{x^2}e^{-2x} = C\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-2x} = C\left(-\frac{e^{-2x}}{x}\right)'.$$

Əvəzləməyə əsasən

$$y = x\int u dx = Cx\int\left(-\frac{e^{-2x}}{x}\right)' dx = -Cx\frac{e^{-2x}}{x} = -Ce^{-2x}, \; C = -1$$

qəbul etsək, $y_2 = e^{-2x}$ verilən tənliyin həlli olur. Onda x, e^{-2x} funksiyalara verilən tənlik üçün fundamental həllər təşkil edir. Odur ki, $y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$ tənliyin ümumi həllini verir.

Həlli Vronski determinatından istifadə etməklə tapaq. x və y həlləri üçün Vronski determinatının ostroqradski-Liuvill düsturuna əsasən

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p(x)dx} = C_1 e^{-\int \frac{4xdx}{2x+1}} = C_1 e^{-\int\left(2 - \frac{2}{2x+1}\right)dx} =$$

$$= C_1 e^{-2x + \ln(2x+1)} = C_1 e^{-2x} e^{\ln(2x+1)} = C_1(2x+1)e^{-2x}.$$

Buradan $\left(\frac{y}{x}\right)' = C_1\frac{2x+1}{x^2}e^{-2x} = C_1\left(-\frac{e^{-2x}}{x}\right)'$, $\frac{y}{x} = -C_1\frac{e^{-2x}}{x} + C_2$,

$y = C_2 x - C_1 e^{-2x}$.

3.2. İkitərtibli sabit əmsallı xətti bircins tənliklər. Tutaq ki,

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1)$$

tənliyində p və q sabit ədədlərdir. Bu tənliyin xüsusi həllini

$$y = e^{kx} \qquad (2)$$

şəklində axtaraq. Burada k namə'lum həqiqi və ya kompleks ədəddir. Əvəzləməyə əsasən $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Bunları (1) tənliyində nəzərə alsaq $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$. Buradan $e^{kx} \neq 0$ olduğuna görə

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (3)$$

cəbri tənliyi alınır. Buna xarakteristik tənlik deyilir. Göründüyü kimi, xarakteristik tənliyi almaq üçün (1) tənliyində funksiyanın törəməsini k-nın uyğun dərəcələri ilə əvəz etmək kifayətdir.

1-ci hal: Xarakteristik tənliyinin kökləri k_1, k_2 həqiqi və müxtəlifdir. Onda $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ xətti asılı olmayan həllərdir. Doğrudan da $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq const$.

Deməli, $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ tənliyinin ümumi həlli olur.

2-ci hal: Xarakteristik tənliyin kökləri bərabərdir: $k_1 = k_2 = \alpha$.

Onda $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$ tənliyin xətti asılı olmayan həlləri olur. Odur ki, $y = e^{\alpha x}(C_1 + xC_2)$ tənliyinin ümumi həlli olur.

3-cü hal: Xarakteristik tənliyinin kökləri kompleks ədədlərdir: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$. Onda

$$e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$e^{k_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

olduğundan $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ funksiyaları tənliyin xətti asılı olmayan həlləridir. Ona görə $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$ tənliyin ümumi həlli olur.

3. $y'' + 2y' - 15y = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik ikitərtibli, sabit əmsallı xətti bircins tənlikdir. Ona uyğun xarakteristik tənliyi yazaq. $k^2 + 2k - 15 = 0$. Buradan $k_1 = -5$, $k_2 = 3$ alırıq. Köklər həqiqi və müxtəlif olduğundan (1-ci hal) $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-3x}$ tənliyin ümumi həlli olur.

4. $y'' - 6y' + 9y = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. $k^2 - 6k + 9 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1 = k_2 = 3$, yə'ni bərabər olduğundan (2-ci hal) $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

5. $y'' - 4y' + 20y = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. $k^2 - 4k + 20 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri: $k_1 = 2 + 4i$, $k_2 = 2 - 4i$. Yə'ni köklər kompleks ədədlərdir (3-cü hal). Onda $y = e^{2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$ verilmiş tənliyin ümumi həllidir.

3.3. İkitərtibli sabit əmsallı xətti bircins olmayan tənliklər.

Yuxarıda göstərdiyimiz kimi ikitərtibli sabit əmsallı xətti bircins olmayan

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

tənliyinin ümumi həlli

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (2)$$

bircins tənliyinin y_b ümumi həlli ilə (1) tənliyinin hər hansı $\tilde{y}$ xüsusi həllinin cəminə bərabərdir:

$$y = y_b + \tilde{y}. \qquad (3)$$

Bircins tənliyin ümumi həllinin tapılması yollarını yuxarıda göstərdik. Əvvəlcə $f(x)$ funksiyasının verilməsindən asılı olaraq bir xüsusi həlli qeyri-müəyyən əmsallar üsulu ilə tapmaq qaydasına baxaq. Qeyd edək ki, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funksiyaları sağ tərəfi uyğun olaraq $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ olan tənliyin həlləri isə, onda $y_1(x) + y_2(x) + \cdots + y_n(x)$ funksiyası sağ tərəfi $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ olan tənliyin həlli olur.

1-ci hal: (1) tənliyinin sağ tərəfi $f(x)$ n dərəcəli çoxhədlidirsə və 0 (sıfır) xarakteristik tənliyin kökü deyildirsə, onda xüsusi həlli dərəcəsi həmin çoxhədlinin dərəcəsinə bərabər olan və əmsalları namə'lum çoxhədli şəklində axtarmaq lazımdır. Xarakteristik tənliyin köklərindən sıfıra bərabər olanı varsa, onda xüsusi həlli götürülmüş çoxhədlinin x-ə hasili şəklində axtarılır.

6. $y''+5y'+6y=6x^2+4x+3$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $y''+5y'+6y=0$ bircins tənliyin $k^2+5k+6=0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1=-3$, $k_1=-2$ həqiqi, müxtəlif olduğundan onun ümumi həlli $y_b=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}$. Sıfır xarakteristik tənliyin kökü olmadığından bircins olmayan tənliyin xüsusi həllini $\tilde{y}=Ax^2+Bx+C$ şəklində axtaraq. Burada A,B,C -namə'lum əmsallardır. Onda alarıq:

$$\tilde{y}'=2Ax+B,\quad \tilde{y}''=2A.$$

$\tilde{y},\tilde{y}'$ və $\tilde{y}''$ -in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yazsaq alarıq:

$$2A+5(2Ax+B)+6(Ax^2+Bx+C)=6x^2+4x+3,$$

$$6Ax^2+(10A+6B)x+2A+5B+6C=6x^2+4x+3.$$

Buradan x dəyişəninin eyni dərəcəli əmsallarını bərabərləşdirməklə alırıq:

$$\begin{cases}6A=6,\\ 10A+6B=4,\\ 2A+5B+6C=3\end{cases},\quad A=1,\quad B=-1,\quad C=1.$$

Onda $\tilde{y}=x^2-x+1$ bircins olmayan tənliyin xüsusi həlli, $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}+x^2-x+1$ isə ümumi həlli olur.

7. $y''+4y'=12x^2-2x+2$ tənliyinin $y(0)=y'(0)=0$ şərtini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Bircins $y''+4y'=0$ tənliyinə uyğun $k^2+4k=0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1=0$, $k_2=-4$ olduğundan onun ümumi həlli $y=C_1+C_2e^{-4x}$ olur. İndi verilmiş tənliyin hər hansı xüsusi həllini tapaq. Tənliyin sağ tərəfi kvadrat üçhədlidir və $k_1=0$ xarakteristik tənliyin köküdür. Onda xüsusi həlli $\tilde{y}=x(Ax^2+Bx+C)$ şəklində axtarmaq lazımdır. Burada A,B,C namə'lum əmsallardır. Buradan $\tilde{y}'=Ax^2+Bx+C+x(2Ax+B)=3Ax^2+2Bx+C$, $y''=6Ax+2B$. Bunları verilmiş tənlikdə yerinə yazaq.

$$6Ax+2B+4(3Ax^2+2Bx+C)=12x^2-2x+2$$

Bərabərliyin hər iki tərəfində eyni dərəcədən olan x dəyişəninin əmsallarını bərabərləşdirsək

$$\begin{cases}12A=12,\\ 2(3A+4B)=-2,\\ 2B+4C=2\end{cases}$$

Buradan $A=1$, $B=-1$, $C=1$, onda $\tilde{y}=x(x^2-x+1)$ tənliyin xüsusi, $y=C_1+C_2e^{-4x}+x(x^2-x+1)$ isə ümumi həlli olur.

İndi isə tənliyin başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapaq. Başlanğıc şərtlərə əsasən $C_1+C_2=0$, $-4C_2+1=0$. Buradan $C_2=\frac{1}{4}$, $C_1=-\frac{1}{4}$. Deməli, $y=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-4x}+x(x^2-x+1)$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həll olur.

2-ci hal: Tənliyin sağ tərəfi üstlü funksiyadırsa, yə'ni $f(x)=ae^{mx}$ və m xarakteristik tənliyin kökü deyildirsə, onda xüsusi həlli $\tilde{y}=Ae^{mx}$ şəklində axtarmaq lazımdır. Burada A -namə'lum əmsaldır. Xarakteristik tənliyin köklərindən biri m -ədədinə bərabərdirsə $(k_1=m)$, onda xüsusi həll $\tilde{y}=Axe^{mx}$ şəklində, hər iki kökü m -ədədinə bərabər olduqda isə $\tilde{y}=Ax^2e^{mx}$ şəklində axtarılır.

8. $y''+3y'+2y=3e^{2x}$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Bircins tənliyin $k^2+3k+2=0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1=-1$, $k_2=-2$. Onda $y_b=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ bircins tənliyin ümumi həlli olar. $m=2$ xarakteristik tənliyin kökü olmadığı üçün xüsusi həll $\tilde{y}=Ae^{2x}$ şəklində axtarılmalıdır. Buradan törəmələr alıb, $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə nəzərə alsaq $12Ae^{3x}=3e^{3x}$, $A=\frac{1}{4}$ taparıq. Onda $\tilde{y}=\frac{1}{4}e^{2x}$ tənliyin xüsusi, $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{4}e^{2x}$ ümumi həlli olur.

9. $y''-y'-2y=9e^{2x}$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Bircins tənliyə uyğun $k^2-k-2=0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1=-1$, $k_2=2$ olduğundan $y_b=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ onun ümumi həlli olur. $m=2$ xarakteristik tənliyin köklərindən birinə $(k_2=2)$ bərabər olduğundan xüsusi həlli $\tilde{y}=Axe^{2x}$ şəklində axtarmaq lazımdır. Buradan $\tilde{y}'=Ae^{2x}+2Axe^{2x}$, $\tilde{y}''=4Ae^{2x}+4Axe^{2x}$ törəmələrini tapıb, onların və $\tilde{y}$-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yazsaq alarıq: $3Ae^{2x}=9e^{2x}$, $A=3$. Deməli, $\tilde{y}=3xe^{2x}$ tənliyin xüsusi həllidir. Onda $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+3xe^{2x}$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

10. $y''-6y'+9y=e^{3x}$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. $k^2-6k+9=0$, $k_1=k_2=3$ olduğundan $y_b=(C_1+xC_2)e^{3x}$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. $m=3$ ədədi iki dəfə xaratkteristik tənliyin kökü olduğundan xüsusi həll $\tilde{y}=Ax^2e^{3x}$ şəklində axtarılmalıdır. Onda yuxarıda göstərilən qayda ilə alırıq: $2Ae^{3x}=e^{3x}$, $A=\frac{1}{2}$.

Deməli, $\tilde{y}=\frac{1}{2}x^2e^{3x}$ xüsusi həll, $y=e^{3x}\left(C_1+xC_2+\frac{1}{2}x^2\right)$ isə ümumi həll olur.

3-cü hal: Tənliyin sağ tərəfi $f(x)=e^{\alpha x}(a\cos\beta x+b\sin\beta x)$ şəklində funksiyadır və $\alpha\pm\beta i$ xarakteristik tənliyin kökü olmadıqda, onda xüsusi həlli $\tilde{y}=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ şəklində, $\alpha\pm\beta i$ xarakteristik tənliyin kökü olduqda isə $\tilde{y}=xe^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ şəklində axtarılır.

11. $y''+6y'+9y=10\sin x$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Bircins tənliyə uyğun $k^2+6k+9=0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1=k_2=-3$ olduğundan $y_b=(C_1+C_2x)e^{-3x}$ onun ümumi həlli olur. Verilmiş tənliyn sağ tərəfi üçün $\alpha\pm\beta i=\pm i$ $(\alpha=0,$ $\beta=1)$ xarakteristik tənliyin kökü olmadığından xüsusi həll $\tilde{y}=A\cos x+B\sin x$ şəklində axtarılır. Buradan $\tilde{y}'=-A\sin x+B\cos x$, $\tilde{y}''=-A\cos x-B\sin x$. Bunları tənlikdə yazaq. $(8B-6A)\sin x+(8A+6B)\cos x=10\sin x$. Buradan $\sin x$ və $\cos x$ əmsallarını bərabərləşdirməklə alırıq:

$$\begin{cases}8A+6B=0,\\ 8B-6A=10\end{cases},A=-\frac{3}{5},\quad B=\frac{4}{5}$$

Onda verilmiş tənliyin $\tilde{y}=-\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\sin x$, xüsusi və $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}-\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\sin x$ ümumi həlli olur.

12. $y''-y'=-5e^{-x}(\cos x+\sin x)$ tənliyinin $y(0)=4$, $y'(0)=5$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. $k^2-k=0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1=0$, $k_2=1$ olduğundan $y_b=C_1+C_2e^{x}$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. Baxılan misal üçün $\alpha=-1$, $\beta=1$ olduğundan $\alpha\pm\beta i=-1\pm i$ ədədi xarakteristik tənliyin kökü olmadığından, xüsusi həll $\tilde{y}=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$ şəklində axtarılır. Buradan $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ törəmələrini tapıb verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq alarıq:

$$e^{-x}(3A+B)\sin x + e^{-x}(-3B+A)\cos x = -5e^{-x}\cos x - 5e^{-x}\sin x,$$

Buradan e^{-x} ixtisar edib, $\sin x$ və $\cos x$ əmsallarını bərabərləşdirsək:

$$\begin{cases} 3A+B=-5, \\ -3B+A=-5 \quad , \quad A=-2, \quad B=1 \end{cases}$$

Onda $\tilde{y}=e^{-x}(-2\cos x+\sin x)$ verilmiş tənliyin xüsusi, $y=C_1+C_2e^{x}+e^{-x}(-2\cos x+\sin x)$ isə ümumi həlli olur. Başlanğıc şərtləri nəzərə alsaq

$$\begin{cases} 4=C_1+C_2-2 \quad , \quad C_1+C_2=6 \\ 5=C_2+3 \quad , \quad C_2=2, \quad C_1=4 \end{cases}$$

Beləliklə, $y=4+2e^{x}+e^{-x}(-2\cos x+\sin x)$ verilmiş tənliyin başlanğıc şərtləri ödəyən həlli olar.

13. $y''-4y'+8y=e^{2x}(\sin 2x-\cos 2x)$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Bircins tənliyə uyğun $k^2-4k+8=0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1=2-2i$, $k_2=2+2i$ olduğundan $y_b=e^{2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. Baxılan misalda $\alpha+\beta i=2+2i$ olduğu üçün bircins olmayan tənliyin xüsusi həlli $\tilde{y}=xe^{2x}(A\sin 2x+B\cos 2x)$ şəklində axtarılır. Buradan

$$\tilde{y}'=e^{2x}[(A+2Ax-2Bx)\sin 2x+(B+2Ax+2Bx)\cos 2x],$$

$$\tilde{y}''=e^{2x}[(4A-4B-8Bx)\sin 2x+(4B+4A+8Ax)\cos 2x].$$

tapıb, tənlikdə yerinə yazsaq:

$$e^{2x}[(-4B\sin 2x+4A\cos 2x)]=e^{2x}(\sin 2x-\cos 2x).$$

Hər tərəfi e^{2x}-ə bölüb, $\sin 2x$ və $\cos 2x$ əmsallarını bərabərləşdir-

sək, $4A=-1$, $-4B=1$, $A=B=-\dfrac{1}{4}$. Tapılmış qiymətləri xüsusi həllin ifadəsində yerinə yazsaq $\tilde{y}=-\dfrac{x}{4}e^{2x}(\sin 2x+\cos 2x)$ tənliyin xüsusi, $y=e^{2x}\left[\left(C_1-\dfrac{x}{4}\right)\cos 2x+\left(C_2-\dfrac{x}{4}\right)\sin 2x\right]$ isə ümumi həlli olar.

4-cü hal: Tənliyin sağ tərəfi $f(x)=e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x]$ şəklində verilərsə və $\alpha\pm\beta i$ xaraktkristik tənliyin kökü olmadıqda, xüsusi həlli $\tilde{y}=e^{\alpha x}\left[\tilde{P}(x)\cos\beta x+\tilde{Q}(x)\sin\beta x\right]$ şəklində axtarmaq lazımdır. Burada $\tilde{P}(x)$, $\tilde{Q}(x)$ əmsalları namə'lum və dərəcəsi $P(x)$, $Q(x)$ çoxhədlilərinin dərəcələrinin ən böyüyünə bərabər olan çoxhədlidirlər. $\alpha\pm\beta i$ xarakteristik tənliyin köküdürsə, onda xüsusi həlli $\tilde{y}=xe^{\alpha x}\left[\tilde{P}(x)\cos\beta x+\tilde{Q}(x)\sin\beta x\right]$ şəklində götürmək lazımdır.

14. $y''-3y'+2y=e^{3x}(x^2+x)$ tənliyin həll edin.

HƏLLİ. Bircins tənliyin $k^2-3k+2=0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1=1$, $k_2=2$ olduğundan $y_b=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$ onun ümumi həlli olur. $\alpha\pm\beta i$ xarakteristik tənliyin kökü olmadığından xüsusi həlli $\tilde{y}=e^{3x}(Ax^2+Bx+C)$ şəklində axtarmalıyıq. Buradan alırıq. $\tilde{y}'=e^{3x}[3Ax^2+(3B+2A)x+3C+B]$, $\tilde{y}''=9e^{3x}(Ax^2+Bx+C)+3e^{3x}(2Ax+B)+3e^{3x}(2Ax+B)+2Ae^{3x}$.

Bunları verilən tənlikdə yazıb, hər tərəfdən e^{3x}-i ixtisar edib, x dəyişəninin eyni dərəcəli əmsallarını tutuşdursaq alarıq:

$$\begin{cases} 2A=1, \\ 2B+6A=1, \\ 2A+3B+2C=0, \quad A=\dfrac{1}{2}, \quad B=-1, \quad C=1 \end{cases}$$

Beləliklə, $\tilde{y}=e^{3x}\left(\frac{x^2}{2}-x+1\right)$ verilən tənliyin xüsusi həlli, $y=C_1e^x+$ $+C_2e^{2x}+e^{3x}\left(\frac{x^2}{2}-x+1\right)$ isə ümumi həlli olur.

15. $y''-2y'+y=xe^{-x}\cos x$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $k^2-2k+1=0$, $(k-1)^2=0$, $k_1=k_2=1$ olduğundan, $y_b=(C_1+C_2x)e^x$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. $\alpha\pm\beta i=$ $=-1\pm i$ xarakteristik tənliyin kökü olmadığından xüsusi həlli $\tilde{y}=$ $=e^{-x}[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$ şəklində axtarmaq lazımdır. Buradan tapırıq: $\tilde{y}'=e^{-x}\{[(A-B+D)-(A-C)x]\cos x+[(C-B-$ $-D)-(A+C)x]\sin x\}$, $\tilde{y}''=e^{-x}\{[(2C-2A-2D)-2Cx]\cos x+$ $+[(2B-2A-2C)++2Ax]\sin x\}$.

Bunları tənlikdə yerinə yazıb, hər tərəfdən e^{-x} ixtisar etsək, sağ və sol tərəfdə alınan $\cos x$ və $\sin x$ əmsallarını tutuşdursaq alarıq:

$$A=\frac{3}{25},\quad B=\frac{4}{125},\quad C=-\frac{4}{25},\quad D=\frac{22}{125}.$$

Onda $\tilde{y}=\frac{1}{125}e^x[(15x+4)\cos x-(20x+22)\sin x]$ verilmiş tənliyin xüsusi həlli, $y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{125}e^x[(15x+4)\cos x-(20x+$ $+22)\sin x]$ isə ümumi həlli olur.

5-ci hal: Tənliyin sağ tərəfi yuxarıda göstərilən funksiyaların cəmi şəklində olan hal.

16. $y''-3y'+2y=x+1-e^{-2x}$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyin sağ tərəfi $f_1(x)=x+1$, $f_2(x)=-e^{-2x}$

funksiyalarının cəmidir. Əvvəlcə bircins tənliyin ümumi həllini tapaq. $k^2-3k+2=0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1=1$, $k_2=2$ olduğundan $y_b=C_1e^x+C_2e^{2x}$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. $y''-3y+$ $+2y=x+1$ tənliyinin xüsusi həllini tapaq. Sıfır xarakteristik tənliyin kökü olmadığından xüsusi həlli $\tilde{y}_1=Ax+B$ şəklində axtaraq. Yuxarıdakı qayda ilə $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{5}{4}$. Deməli, $\tilde{y}_1=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ sağ tərəfi $x+1$ olan tənliyin xüsusi həlli olur.

İndi isə $y''-3y'+2y=-e^{-2x}$ tənliyinin xüsusi həllini tapaq. $x=-2$ xarakteristik tənliyin kökü olmadığından, xüsusi həll $\tilde{y}_2=Ae^{-2x}$ şəklində axtarılır. Onda $A=-\frac{1}{12}$. Deməli, $\tilde{y}_2=-\frac{1}{12}e^{-2x}$ funksiyası sağ tərəfi $-e^{-2x}$ olan tənliyin xüsusi həllidir. Onda $\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2=$ $=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}$ verilmiş tənliyin xüsusi, $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-$ $-\frac{1}{12}e^{-2x}+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ isə ümumi həlli olur.

17. $2y''-3y'+y=2x+\sin x$ tənliyinin $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{1}{2}$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyin sağ tərəfi $f_1(x)=2x$, $f_2(x)=\sin x$ funksiyalarının cəmidir. Əvvəlcə bircins tənliyin ümumi həllini tapaq. $2k^2-3k+1=0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1=1$, $k_2=\frac{1}{2}$ olduğundan $y_b=C_1e^x+C_2e^{\frac{x}{2}}$ bircins tənliyin ümumi həlli olur.

İndi sağ tərəfi $f_1(x)=2x$ olan tənliyin xüsusi həllini $\tilde{y}_1=Ax+B$ şəklində axtaraq. (Sıfır xarakteristik tənliyin həlli deyil). Onda $Ax-3A+$

$+B=2x$ bərabərliyinə əsasən $A=2,\quad B=6$. Onda $\widetilde{y}_1=2x+6$ sağ tərəfi $2x$ olan tənliyin xüsusi həlli olur.

İndi də sağ tərəfi $f_2(x)=\sin x$ olan tənliyinin xüsusi həllini tapaq. $\alpha\pm\beta i=i\quad(\alpha=0,\quad\beta=1)$ xarakteristik tənliyin kökü olmadığından, xüsusi həlli $\widetilde{y}_2=A\cos x+B\sin x$ şəklində axtarmaq lazımdır. Bu funksiyanın sağ tərəfi $\sin x$ olan tənlikdə yerinə yazsaq: $(-B+3A)\sin x-(A+3B)\cos x=\sin x$.

Buradan $\begin{cases}-B+3A=1,\\ A+3B=0,\end{cases}\quad A=\frac{3}{10},\quad B=-\frac{1}{10}.$

Onda $\widetilde{y}_2=\frac{3}{10}\cos x-\frac{1}{10}\sin x$ sağ tərəfi $\sin x$ olan tənliyin xüsusi həlli olur.

Beləliklə, $\widetilde{y}=\widetilde{y}_1+\widetilde{y}_2=2x+6+\frac{3}{10}\cos x-\frac{1}{10}\sin x,$ verilmiş tənliyin xüsusi, $y=C_1e^x+C_2e^{\frac{x}{2}}+2x+6+\frac{3}{10}\cos x-\frac{1}{10}\sin x$ isə ümumi həlli olur. İndi də başlanğıc şərtləri ödəyən həlli tapaq. Onda başlanğıc şərtləri nəzərə alaq:

$$\begin{cases}0=C_1+C_2+6+\frac{3}{10},\\ \frac{1}{2}=C_1+\frac{1}{2}C_2+2-\frac{1}{10}\end{cases},\quad C_1=3{,}5,\quad C_2=-9{,}8$$

Beləliklə, $y=3{,}5e^x-9{,}8e^{\frac{x}{2}}+0{,}3\cos x-0{,}1\sin x+2x+6$ verilmiş məsələnin həlli olur.

18. $y''-4y'+5y=\sin x$ tənliyinin $x\to+\infty$ şərtində məhdud olan həllini tapın.

HƏLLİ. $k^2+4k+5=0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_{1,2}=2\pm i$ olduğundan $y_b=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. Verilən tənliyin xüsusi həlli $y=A\cos x+B\sin x$ şəklində olur. Bu funksiyaları və onun törəmələrini tənlikdə yazsaq $(4A+4B)\cos x+$ $+(4B-4A)\sin x=\sin x$.

Buradan alırıq:

$$\begin{cases}4A+4B=0,\\ 4B+4A=1\end{cases},\quad A=-\frac{1}{8},\quad B=\frac{1}{8}$$

Beləliklə, $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{8}(\sin x-\cos x)$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur. Bu həllin $x\to+\infty$ şərtində məhdud olması üçün $C_1=C_2=0$ götürmək lazımdır. Onda $y(x)=\frac{1}{8}(\sin x-\cos x)$ axtarılan həll olur.

3.4. Sabitlərin variasiyası üsulu. Tənliyin sağ tərəfi yuxarıda göstərilən hallardan fərqli olduqda, xüsusi həlli qeyri-müəyyən əmsallar üsulunun köməkliyi ilə tapmaq mümkün olmur. Belə hallarda sabitlərin variasiyası üsulu tətbiq olunur.

Bircins olmayan

$$y''+py'+qy=f(x)\tag{1}$$

tənliyinin həllini tapmaq üçün sabitlərin variasiyası üsulunu tətbiq edək. Tutaq ki,

$$y_b=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\tag{2}$$

(1) tənliyinə uyğun bircins tənliyin ümumi həllidir. Burada C_1 və C_2 ixtiyari sabitlər, $y_1(x)$ və $y_2(x)$ xətti asılı olmayan həllərdir. (1) tənliyinin həllini

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)\tag{3}$$

şəklində axtaraq. Burada $C_1(x),\quad C_2(x)$-naməlum funksiyalardır.

$$y'=[C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)]+C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x).$$

$C_1'(x)$, $C_2'(x)$-funksiyalarını elə seçək ki, $C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)\times$ $\times y_2(x)=0$.

Onda $y'=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x),\quad y''=C_1'(x)y_1'(x)+$

$+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x).$

(3) əvəzləməsini və ondan tapılan törəmələri (1) tənliyində yazıb, $C_1(x)$ və $C_2(x)$-nəzərən qruplaşdıraq:

$$C_1(x)[y_1''(x)+py_1'(x)+qy_1(x)]+C_2(x)[y_2''(x)+$$

$$+py_2'(x)+qy_2(x)]+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).$$

Buradan $y_1(x)$, $y_2(x)$ bircins tənliyin həlli olduğundan

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).$$

Beləliklə, $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ funksiyalarını tapmaq üçün

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases}$$

sistemini həll etmək lazımdır. Buradan $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ tapıb, inteqrallayaq və alınan ifadələri (3)-də yerinə yazaq, onda (1) tənliyinin ümumi həllini alarıq.

19. $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyin sağ tərəfi $f(x)=\dfrac{1}{\cos 2x}$ funksiyası yuxarıda göstərilən halların heç birinə uyğun gəlmir. Ona görə də sabitlərin variasiyası üsulunu tətbiq etmək lazımdır. $k^2+4=0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_{1,2}=\pm 2i$ olduğundan $y_b=C_1\cos 2x+$ $+C_2\sin 2x$ bircins tənliyin ümumi həlli olur.

Bircins olmayan tənliyin həllini $y=C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x$ şəklində axtaraq. Bu həlli verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq, $C_1(x)$ və $C_2(x)$-funksiyaların tapmaq üçün

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x+C_2'(x)\sin 2x=0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x+2C_2'(x)\cos 2x=\dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases}$$

sistemini alarıq. Buradan

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}=2(\cos^2 2x+\sin^2 2x)=2,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix}=-\frac{\sin 2x}{\cos 2x},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix}=1.$$

olduğundan Kramer üsuluna görə

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{\sin 2x}{2\cos 2x},\quad C_2'(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{2}.$$

Buradan

$$C_1(x)=-\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx+C_1=\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|+C_1,$$

$$C_2(x)=\frac{1}{2}\int dx+C_2=\frac{x}{2}+C_2.$$

Onda $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

4. Yüksək tərtibli sabit əmsallı xətti tənliklər

Tutaq ki, n tərtibli sabit əmsallı bircins

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\dots+p_{n-1}y'+p_ny=0 \qquad (1)$$

tənliyi verilmişdir. Burada $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ sabit ədədlərdir. Verilmiş tənlik üçün

$$k^n+p_1k^{n-1}+p_2k^{n-2}+\dots+p_{n-1}k+p_n=0 \qquad (2)$$

xarakteristik tənlik olur. Xarakteristik tənliyin kökləri həqiqi və müxtəlifdirsə, onda (1) tənliyinin ümumi həlli aşağıdakı kimi yazılır:

$$y_b=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}+\dots+C_ne^{k_nx}. \qquad (3)$$

Burada $k_1, k_2, \ldots, k_n$ xarakteristik tənliyinin kökləri, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ixtiyari sabitlərdir.

Tutaq ki, xarakteristik tənliyinin kökləri həqiqi, k_1-kökü m-dəfə təkrarlanan $(m < n)$ və qalan $k_{m+1}, k_{m+2}, \ldots, k_n$ kökləri müxtəlifdirsə, onda

$$y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_m x^{m-1}\right)e^{k_1 x} + C_{m+1}e^{k_{m+1}x} +$$
$$+ C_{m+2}e^{k_{m+2}x} + \cdots + C_n e^{k_n x} \qquad (4)$$

tənliyin ümumi həlli olur.

Xarakteristik tənliyin kompleks $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ köklərinə uyğun tənliyin xətti asılı olmayan $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ həlləri var. Xarakteristik tənliyin m dəfə təkrarlanan $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ kompleks köklərinə uyğun $2m$ sayda $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots,$ $\ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots,$ $x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$ xətti asılı olmayan həlləri uyğun gəlir. Bu halda tənliyin ümumi həllini $y = \sum_k e^{\alpha_k x}\left(P_k(x)\cos\beta_k x + Q_k(x)\sin\beta_k x\right)$ şəklində yazmaq olar, burada $P_k(x)$ və $Q_k(x)$ dərəcəli xarakteristik tənliyin $\lambda_k = \alpha_k + i\beta$ kökünün təkrarlanma sayından bir vahid aşağı olan ixtiyari əmsallı çoxhədlidir.

1. $y''' - 7y'' + 10y' = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyə uyğun xarakteristik tənliyi yazaq: $k^3 - 7k^2 + 10k = 0$. Buradan $k_1 = 0$, $k^2 - 7k + 10 = 0$, $k_2 = 2$, $k_3 = 5$.

Xarakteristik tənliyin kökləri həqiqi və müxtəlifdir. Onda $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x}$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

2. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Xarakteristik tənliyi yazaq və həll edək: $k^3 + 2k^2 - k - 2 = 0$; $k^2(k+2) - (k+2) = 0$, $(k+2)\left(k^2 - 1\right) = 0$, $k_1 = -2$, $k_2 = -1$, $k_3 = 1$.

Onda $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x}$ ümumi həll olur.

3. $y''' - 7y'' + 19y' - 13y = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $k^3 - 7k^2 + 19k - 13 = 0$, $(k-1)\left(k^2 - 6k + 13\right) = 0$, $k - 1 = 0$, $k_1 = 1$, $k^2 - 6k + 13 = 0$, $k_{2,3} = 3 \pm 2i$.

Onda $y = C_1 e^{x} + e^{3x}\left(C_2\cos 2x + C_3 \sin 2x\right)$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

4. $y^{IV} - 16y = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $k^4 - 16 = 0$, $\left(k^2 - 4\right)\left(k^2 + 4\right) = 0$, $k^2 = 4$, $k_{1,2} = \pm 2$, $k^2 = -4$, $k_{3,4} = \pm 2i$. Onda $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3\cos 2x + C_4 \sin 2x$ ümumi həll olur.

5. $y''' - y = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. $k^3 - 1 = 0$, $(k-1)\left(k^2 + k + 1\right) = 0$, $k - 1 = 0$, $k_1 = 1$, $k^2 + k + 1 = 0$, $k_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Onda ümumi həll $y = C_1 e^{x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

6. $y''' - y'' - 4y' + 4y = x^2 + 3$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik sabit əmsallı bircins olmayan xətti diferensial tənlikdir. Onun ümumi həlli bircins tənliyin ümumi həlli (y_b) ilə

bircins olmayan tənliyin bir xüsusi həllinin $(\tilde{y})$ cəminə bərabərdir:
$y = y_b + \tilde{y}$.
Uyğun bircins tənliyin xarakteristik tənliyini həll etsək:

$$k^3 - k^2 - 4k + 4 = 0, \quad k^2(k-1) - 4(k-1) = 0, \quad (k-1)\times$$

$$\times\left(k^2 - 4\right) = 0, \quad k - 1 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k^2 - 4 = 0,, \quad k_{2,3} = \pm 2.$$

Onda $y_b = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x}$ uyğun bircins tənliyin ümumi həlli olur. Bircins olmayan tənliyin sağ tərəfi ikidərəcəli çoxhədli olduğundan və sıfır xarakteristik tənliyin kökü olmadığından, xüsusi həlli $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$ şəklində axtarırıq. Bunu verilən tənlikdə yazmaqla alırıq:

$$4Ax^2 - (8A - 4B)x - 2A - 4B + 4C = x^2 + 3$$

Buradan

$$\begin{cases} 4A = 1, \\ 8A - 4B = 0, \\ -2A - 4B + 4C = 3 \end{cases}, \quad A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{11}{8}$$

Deməli, $\tilde{y} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{8}$ verilmiş tənliyin xüsusi, $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{8}$ isə ümumi həlli olur.

5. Yüksək tərtibli tənliklər haqqında

1. İkitərtibli tənliklər üçün göstərilən həll üsulla tərtibi ikidən böyük olan

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

tənliyinə də tətbiq olunur. Belə tənliklər tərtibi aşağı salmaq yolu ilə həll edilir.

2. (a,b)-intervalında tə'yin olunan $y_1(x), \quad y_2(x), \ldots, y_n(x)$

funksiyaları üçün

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) = 0, \quad x \in (a,b)$$

bərabərliyi ancaq $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ olduqda ödənərsə, onlara *xətti asılı olmayan* funksiyalar deyilir.

3. Tutaq ki, $y_1(x), \quad y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funksiyalarının (a,b) intervalında n tərtibə qədər törəmələri var. Bu funksiyalardan düzəldilmiş

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

determinantına Vronski determinantı deyilir. Vronski determinantı sıfırdan fərqli olduqda $y_1(x), \quad y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funksiyaları (a,b) intervalında xətti asılı olmur. Lakin determinant sıfır olduqda bu funksiyaların xətti asılı olub-olmaması haqqında fikir söyləmək olmur.

4. $y_1(x), \quad y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funksiyaları

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

tənliyinin həlli olduqda, bu həllərin xətti asılı olmaması üçün zəruri və kafi şərt onlardan düzəldilmiş Vronski determinantının sıfırdan fərqli olmasıdır. (2) tənliyinin xətti asılı olmayan n sayda $y_1(x), \quad y_2(x), \ldots, y_n(x)$ həllərinə *fundamental həllər* deyilir. $y_1(x), \quad y_2(x), \ldots, y_n(x)$ fundamental həllər olduqda

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \qquad (3)$$

tənliyin *ümumi həlli* olur. Burada $c_1, \quad c_2, \ldots, c_n$ ixtiyari sabitlərdir.

5. $y_1(x), \quad y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funksiyalarından düzəldilmiş $W(x)$ Vronski determinantı sıfırdan fərqli olduqda, bu funksiyalar

$$
\frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)
$$

tənliyinin fundamental həlləri olur. Determinantı axırıncı sütun elementlərinə nəzərən açsaq (4) tənliyi (2) şəklinə düşər.

6. $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funksiyaları (2) tənliyi üçün fundamental həllər olduqda bircins olmayan

$$
y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \qquad (5)
$$

tənliyinin həllini sabitlərin variasiyası üsulu ilə tapmaq olur. Həlli

$$
y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x) \qquad (6)
$$

şəklində axtarsaq, $c_1(x),\ c_2(x), \ldots, c_n(x)$ funksiyalarını tapmaq üçün

$$
\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \ldots + c_n'(x)y_n(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \ldots + c_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}
$$

sistemi alınır. Sistem $c_1'(x), c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$ tapmaq üçün xətti bircins olmayan cəbri tənliklər sistemi olur. Sistemin əsas determinantı $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ fundamental həllərdən düzəldilmiş Vronski determinantı olduğundan sıfırdan fərqli olur. Odur ki, sistemin yeganə həlli vardır. Həlləri tapıb, inteqrallasaq, $C_k(x) = C_k^0(x) + C_k$, $k = 1, 2, \ldots n$, $C_k^0(x)$ -mə'lum funksiyadır. Onda (5) tənliyinin

$$
y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k^0(x) y_k(x) \qquad (7)
$$

ümumi həlli tapılır. Birinci cəm bircins tənliyin ümumi həlli, ikinci cəm isə bircins olmayan tənliyin bir xüsusi həlli olur.

1. $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ tənliyin çoxhədli olan həllini tapın.

HƏLLİ. Tənliyin həllini $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots$ şəklində axtaraq. $y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots$, $y'' = n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \cdots$ olduğundan

$$
(2x+1)\left[n(n-1)a_0x^{n-2} + \cdots\right] + 2(2x-1)\left[na_0x^{n-1} + \cdots\right] - 8\left[a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\right] = 0.
$$

Buradan $4na_0 - 8a_0 = 0$, $a_0 \neq 0$, $n = 2$. Deməli, həlli $y(x) = ax^2 + bx + c$ şəklində axtarmaq lazımdır. $y'(x) = 2ax + b$, $y''(x) = 2a$. Bunları tənlikdə yazaq:

$$
2(2x+1)a + (4x-2)(2ax+b) - 8\left(ax^2 + bx + c\right) = 0.
$$

Buradan x dəyişəninin eyni dərəcəli əmsallarını tutuşdurmaqla alırıq:

$$
8a - 8a = 0, \quad 4a + 4b - 4a - 8b = 0, \quad b = 0,
$$

$$
2a - 2b - 8c = 0, \quad a - 4c = 0, \quad a = 4c, \quad c = 1, \quad a = 4.
$$

Beləliklə, $y = 4x^2 + 1$ verilən tənliyin çoxhədli şəklində həlli olur.

2. $xy''' + 2y'' + xy' = 0$ tənliyinin $y_1(x) = \int \frac{\sin x}{x}dx$ həlli olduğunu bilərək ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Tənlikdə $y' = z$ əvəzləməsi aparsaq $xz'' + 2z' + xz = 0$ tənliyi alınar. Əvəzləməyə əsasən $z_1(x) = y_1'(x) = \frac{\sin x}{x}$ funksiyası alınan tənliyin həlli olur. Alınan tənlik üçün Vronski determinantının Ostroqradski - Liuvill düsturunu yazaq:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z \\ z_1' & z' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int \frac{2}{x}dx};$$

Buradan

$$\begin{vmatrix} z_1 & z \\ z_1' & z' \end{vmatrix} = C_1 e^{-2\ln x}, \quad \begin{vmatrix} z_1 & z \\ z_1' & z' \end{vmatrix} = C_1 x^{-2};$$

Axırıncı bərabərliyi

$$\left(\frac{z}{z_1}\right)' = \frac{C_1}{z_1^2} x^{-2}; \quad \left(\frac{z}{z_1}\right)' = \frac{C_1}{\sin^2 x}$$

şəklində yazıb, inteqrallayaq. Onda

$$\frac{z}{z_1} = C_1 \int \frac{dx}{\sin^2 x} + C_2; \quad \frac{z}{z_1} = -C_1 ctgx + C_2.$$

Buradan $z = C_2 z_1(x) - C_1 z_1(x) ctgx = C_2 \frac{\sin x}{x} - C_1 \frac{\cos x}{x}$.

Deməli, $y' = C_2 \frac{\sin x}{x} - C_1 \frac{\cos x}{x}$.

Onda $y = C_2 \int \frac{\sin x}{x} dx - C_1 \int \frac{\cos x}{x} dx + C_3$ verilən tənliyin ümumi həlli olar.

3 $xy''' + 2y'' + xy' = 1$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Bircins tənliyin ümumi həlli mə'lum olduğundan bircins olmayan tənliyin həllini sabitlərin variasiyası üsulu ilə tapaq. Ümumi həlli

$$y = C_1(x) \int \frac{\sin x}{x} dx + C_2(x) \int \frac{\cos x}{x} dx + C_3(x)$$

şəklində axtaraq. Onda $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $C_3'(x)$ üçün

$$\begin{cases} C_1'(x) \int \frac{\sin x}{x} dx + C_2'(x) \int \frac{\cos x}{x} dx + C_3'(x) = 0, \\ C_1'(x) \frac{\sin x}{x} + C_2'(x) \frac{\cos x}{x} = 0, \\ C_1'(x) \left(\frac{\sin x}{x}\right)' + C_2'(x) \left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

cəbri tənliklər sistemi alınır. Buradan alırıq:

$$C_1'(x) = \cos x, \quad C_2'(x) = -\sin x,$$

$$C_3'(x) = -\cos x \int \frac{\sin x}{x} dx + \sin x \int \frac{\cos x}{x} dx$$

Alınan bərabərlikləri inteqrallayaq:

$$C_1(x) = \sin x + C_1, \quad C_2(x) = \cos x + C_2,$$

$$C_3(x) = -\int \cos x \left(\int \frac{\sin x}{x} dx \right) dx + \int \sin x \left(\int \frac{\cos x}{x} dx \right) dx + C_3 =$$

$$= -\sin x \int \frac{\sin x}{x} dx - \cos x \int \frac{\cos x}{x} dx + \ln|x| + C_3$$

(hissə-hissə inteqrallama düsturuna əsasən).

Bunları həllin ifadəsində yazsaq, alınan

$$y = C_1 \int \frac{\sin x}{x} dx + C_2 \int \frac{\cos x}{x} dx + \ln|x| + C_3$$

funksiyası verilən tənliyin ümumi həlli olur.

4. Fundamental həlləri e^x, e^{-x} olan tənliyi tapın.

HƏLLİ. Bu həllərdən düzəldilmiş Vronski determinantı

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

olduğundan uyğun tənlik üçün alırıq:

$$-\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix}=0.$$

Buradan $y''-y=0$ tənliyi alınır.

5. Fundamental həlləri x, x^2, e^x olan xətti bircins tənliyi tapın.

HƏLLİ. Bu funksiyalardan düzəldilmiş Vronski determinantı

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix}=e^x\left(x^2-2x+2\right)\neq 0,$$

olduğundan verilmiş funksiyalar xətti asılı olmur. Fundamental həlləri x, x^2, e^x olan tənliyi

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & e^x & y \\ 1 & 2x & e^x & y' \\ 0 & 2 & e^x & y'' \\ 0 & 0 & e^x & y''' \end{vmatrix}=0,$$

şəklində yazaq. buradan determinantı axırıncı sütün elementlərinə nəzərən açsaq:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix}y'''-\begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix}y''+\begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 0 & 2 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix}y'-\begin{vmatrix} 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix}y=0,$$

Hər tərəfi e^x-ə ixtisar edib, sadələşdirsək, onda

$$\left(x^2-2x+2\right)y'''-x^2y''+2xy'-2y=0$$

tələb olunan tənliyi alarıq.

6. 1, $\sin^2 x$, $\cos 2x$ funksiyalarının xətti asılı olub-olmamasını araşdırın.

HƏLLİ. Bu funksiyalardan düzəldilmiş Vronski determinantı sıfır olur:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos 2x \\ 0 & \sin 2x & -2\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -4\cos 2x \end{vmatrix}=0,$$

Deməli, Vronski determinantının köməyi ilə verilən funksiyaların xətti asılı olub-olmaması haqqında fikir söyləmək olmur.

$$\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\sin^2 x+\lambda_3\cos 2x=0$$

bərabərliyinə baxaq.

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

olduğundan

$$\lambda_1\cdot 1+\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\sin^2 x+\lambda_3\cos^2 x=0.$$

Burada $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=-1$ götürək, bərabərlik istənilən x üçün ödənir. Deməli, verilən funksiyalar xətti asılı olur.

6. Eyler tənliyi

$$a_0(\alpha x+\beta)^n y^{(n)}+a_1(\alpha x+\beta)^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+$$
$$+a_{n-1}(\alpha x+\beta)y'+a_n y=0 \qquad (1)$$

şəklində olan tənliyə *Eyler tənliyi* deyilir, burada $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $\alpha\neq 0$, β sabit ədədlərdir. $\alpha=1$, $\beta=0$ olduqda (1) tənliyi

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=0 \qquad (2)$$

şəklinə düşür. Eyler tənliyi

$$\alpha x+\beta=e^t \qquad (3)$$

əvəzləməsi vasitəsilə sabit əmsallı bircins

$$b_0z^{(n)}+b_1z^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}z'+b_nz=0$$

tənliyinə gətirilir, Burada t yeni sərbəst dəyişən, z isə t dəyişənindən asılı axtarılan funksiyadır.

1. $x^2y''+2xy'-6y=0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilən tənlik Eyler tənliyidir. Bu tənliyi həll etmək üçün $x=e^t$ əvəzləməsi aparaq. $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$, $y''=\frac{dy'}{dx}=$
$\frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{d}{dt}\left[e^{-t}\frac{dy}{dt}\right]=e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]$.

Əvəzləməni və tapılan törəmələri verilən tənlikdə yerinə yazaq:

$$(e^t)^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+2e^te^{-t}\frac{dy}{dt}-6y=0.$$

Buradan $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y=0$. Alınan sabit əmsallı tənliyin həllini tapaq. $k^2+k-6=0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1=-3$, $k_2=2$ olduğundan alınan tənliyin ümumi həlli $y=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}$. Buradan $x=e^t$ əvəzləməsinə əsasən alınan $y=C_1x^{-3}+C_2x^2$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

2. $(2x+3)^3y'''+3(2x+3)y'-6y=0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Tənlik Eyler tənliyi olduğundan $2x+3=e^t$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır. $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=2e^{-t}$ olduğundan $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=$

$=2e^{-t}\frac{dy}{dt}$, $y''=\frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx}=4e^{-t}\frac{d}{dt}\left[e^{-t}\frac{dy}{dt}\right]=4e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]$,

$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{dy''}{dt}\frac{dt}{dx}=2e^{-t}\frac{d}{dt}\left[4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right]=8e^{-3t}\left[\frac{d^3y}{dt^3}-\right.$

$\left.-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right]$.

Bunları tənlikdə yerinə yazsaq alarıq:

$$8\frac{d^3y}{dt^3}-24\frac{d^2y}{dt^2}+22\frac{dy}{dt}-6y=0.$$

Alınan sabit əmsallı tənliyin $8k^3-24k^2+22k-6=0$ xarakteristik tənliyinin $k_1=1$, $k_2=\frac{1}{2}$, $k_3=\frac{3}{2}$ köklərinə uyğun $y=C_1e^t+C_2e^{\frac{1}{2}t}+C_3e^{\frac{3}{2}t}$ ümumi həlli alınır. Buradan $2x+3=e^t$ əvəzləməsinə əsasən

$$y=(2x+3)C_1+(2x+3)^{\frac{1}{2}}C_2+(2x+3)^{\frac{3}{2}}C_3$$

verilmiş tənliyin ümumi həllini alırıq.

3. $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilən tənlikdə $x=e^t$ əvəzləməsi aparaq. $y'=\frac{dy}{dx}=$
$=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$, $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{d}{dt}\left[e^{-t}\frac{dy}{dt}\right]=$
$=e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]$.

Bunları verilən tənlikdə yerinə yazaq. Onda

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2y=te^t.$$

Uyğun bircins tənliyin $k^2-2k+2=0$ xarakteristik tənliyinin $k_1=1+i$, $k_2=1-i$ köklərinə əsasən $y=e^t(C_1\cos t+C_2\sin t)$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. Bircins olmayan tənliyin bir xüsusi həllini $\tilde{y}=e^t(at+b)$ şəklində axtaraq. Bu əvəzləməni və $\tilde{y}'=e^t(at+a+b)$, $\tilde{y}''=e^t(at+2a+b)$ törəmələrini bircins olmayan tənlikdə yazaq:

$$e^t(at+2a+b)-2e^t(at+a+b)+2e^t(at+b)=te^t$$

Buradan e^t-yə ixtisar etsək, alarıq: $at+b=t$; $a=1$; $b=0$; $\tilde{y}=te^t$.

Onda $y=e^t(C_1\cos t+C_2\sin t+t)$ alınan sabit əmsallı, bircins olmayan tənliyin ümumi həlli olur. $e^t=x$, $t=\ln x$ olduğundan $y=x(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x+\ln x)$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

7. Diferensial tənliklər sistemi

t sərbəst dəyişən x, y, z axtarılan funksiyalar və onların $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ törəmələri arasında verilmiş

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=f_1(t,x,y,z), \\ \frac{dy}{dt}=f_2(t,x,y,z), \\ \frac{dz}{dt}=f_3(t,x,y,z) \end{cases} \tag{1}$$

münasibətinə *üçtərtibli normal diferensial tənliklər sistemi* deyilir.

Sistemin

$$x(t_0)=x_0, \quad y(t_0)=y_0, \quad z(t_0)=z_0 \tag{2}$$

şərtlərini ödəyən $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ həllinin tapılmasına *Koşi məsələsi* deyilir. Bə'zi hallarda sistemi yüksək tərtibli tənliyə gətirmək yolu ilə həll etmək əlverişli olur. Sistemin birinci tənliyini diferensiallayaq:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Buradan (1) sisteminə əsasən alırıq:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x}f_1+\frac{\partial f_2}{\partial y}f_2+\frac{\partial f_1}{\partial z}f_3=g(t,x,y,z).$$

Axırıncı bərabərliyi diferensiallayıb, sistemi nəzərə almaqla alırıq.

$$\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial x}f_1+\frac{\partial g}{\partial y}f_2+\frac{\partial g}{\partial z}f_3=\Phi(t,x,y,z). \tag{3}$$

Tutaq ki,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=f_1(t,x,y,z), \\ \frac{d^2x}{dt^2}=g(t,x,y,z). \end{cases} \tag{4}$$

sistemi y, z dəyişənlərinə nəzərən həll olunandır:

$$y=\varphi\left(t,x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\right), \quad z=\psi\left(t,x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\right). \tag{5}$$

Bunları (3) bərabərliyində yerinə yazsaq üçtərtibli

$$\frac{d^3x}{dt^3}=F\left(t,x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

tənliyi alınar. Bu tənliyin $x=\omega(t,C_1,C_2)$ həllini (5) bərabərliklərində yazmaqla (1) sisteminin həlli tapılır.

Sabit əmsallı bircins tənliklər sisteminə baxaq:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z, \\ \frac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z, \\ \frac{dz}{dt}=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z. \end{cases} \tag{6}$$

Sistemin sıfırdan fərqli xüsusi həllərini

$$x=k_1e^{rt}, \quad y=k_2e^{rt}, \quad z=k_3e^{rt} \tag{7}$$

şəklində axtaraq. Burada r, k_1, k_2, k_3 sabitləri elə seçilməlidir ki, (7) funksiyaları (6) sisteminin sıfırdan fərqli həlli olsun. (7) funksiyalarını və onların törəmələrini (6) sistemində yazaq:

$$\begin{cases} rk_1e^{rt} = a_{11}k_1e^{rt} + a_{12}k_2e^{rt} + a_{13}k_3e^{rt}, \\ rk_2e^{rt} = a_{21}k_1e^{rt} + a_{22}k_2e^{rt} + a_{23}k_3e^{rt}, \\ rk_3e^{rt} = a_{31}k_1e^{rt} + a_{32}k_2e^{rt} + a_{33}k_3e^{rt} \end{cases}$$

Buradan alırıq.

$$\begin{cases} (a_{11}-r)k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0, \\ a_{21}k_1 + (a_{22}-r)k_2 + a_{23}k_3 = 0, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + (a_{33}-r)k_3 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Bu xətti bircins cəbri tənliklər sistemidir. Belə sistemin sıfırdan fərqli həllinin varlığı üçün əsas determinantın sıfıra bərabər olması zəruri və kafi şərtdir:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-r & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-r \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Determinantı açsaq, r-ə nəzərən üç dərəcəli cəbri tənlik alarıq. Həmin tənliyə *sistemin xarakteristik tənliyi* deyilir. Bu tənliyi həll edib, r_1, r_2, r_3 köklərini tapırıq. Bu kökləri (8)-də yazıb k_1, k_2, k_3-ü tapmaq üçün sistem alırıq. Həmin sistemdən sıfırdan fərqli k_1, k_2, k_3 həlləri tapılır və (7) bərabərliklərində yazılır.

(9) tənliyinin kökləri həqiqi və müxtəlifdirsə, onda r_1, r_2, r_3 köklərinin hər bir qiymətinə (7)-şəklində xüsusi həlləri uyğun gəlir. Xüsusi həlləri ixtiyari C_1, C_2, C_3 sabitlərlə vurub, toplasaq sistemin ümumi həllini alarıq.

Xarakteristik tənliyin $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ qoşma kompleks köklərinə uyğun (8) cəbri tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli qoşma kompleks həlləri tapılır. Onda bu köklərə uyğun (7) şəklində həllərin həqiqi və xəyali hissələri sistemin həlli olur. Bu qayda ilə sistemin ümumi həlli tapılır.

Tutaq ki, r_1 ədədi xarakteristik tənliyin iki dəfə təkrarlanan köküdür. Bu kökə uyğun (8) cəbri tənliklər sisteminin iki k_1^1, k_2^1, k_3^1 və

k_1^2, k_2^2, k_3^2 xətti asılı olmayan həlləri varsa, onda $k_1^1e^{r_1t}$, $k_2^1e^{r_1t}$, $k_3^1e^{r_1t}$ və $k_4^2e^{r_1t}$, $k_2^2e^{r_1t}$, $k_3^2e^{r_1t}$ sistemin xətti asılı olmayan həlləri olur. r_1 kökünə uyğun (8) cəbri tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli xətti asılı olmayan ancaq bir həlli varsa, sistemin həllini $e^{r_1t}(a_1 + tb_1)$, $e^{r_1t}(a_2 + tb_2)$, $e^{r_1t}(a_3 + tb_3)$ şəklində axtarmaq lazımdır. Onda $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ ədədləri

$$\begin{cases} (a_{11}-r_1)b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 = 0, \\ a_{21}b_1 + (a_{22}-r_1)b_2 + a_{23}b_3 = 0, \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + (a_{33}-r_1)b_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11}-r_1)a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3 = b_1, \\ a_{21}a_1 + (a_{22}-r_1)a_2 + a_{23}a_3 = b_2, \\ a_{31}a_1 + a_{32}a_2 + (a_{33}-r_1)a_3 = b_3 \end{cases}$$

sistemlərini ardıcıl olaraq həll etməklə tapılır.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases}$ sistemin həllini tapın.

HƏLLİ. Sistemin həllini $x = k_1e^{rt}$, $y = k_2e^{rt}$, $z = k_3e^{rt}$ şəklində axtaraq. Bunları verilmiş sistemdə yerinə yazıb, e^{rt}-yə ixtisar etməklə,

$$\begin{cases} (-1-r)k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + (-1-r)k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 + (1-r)k_3 = 0 \end{cases}$$

cəbri tənliklər sistemi və

$$\begin{vmatrix} -1-r & 1 & 1 \\ 1 & -1-r & 1 \\ 1 & 1 & 1-r \end{vmatrix} = (1+r)^2(1-r)+3+3r = 0$$

xarakteristik tənliyi alınır. Buradan

$$r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0, \quad r^2(r+1) - 4(r+1) = 0,$$

$$(r+1)\left(r^2-4\right) = 0, \quad r+1 = 0, \quad r_1 = -1, \quad r^2 - 4 = 0, \quad r_{2,3} = \pm 2.$$

$r_1 = -1$ kökü üçün cəbri tənliklər sistemini həll edək:

$$\begin{cases} 0 + k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + 0 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = -k_3, \\ k_1 = -k_3, \\ -2k_3 + 2k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 = -k_3, \\ \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$k_3 = -1$ qəbul etsək $k_1 = k_2 = 1$ alarıq. Onda $r_1 = -1$ kökü üçün $x_1 = e^{-t}$, $y_1 = e^{-t}$, $z_1 = -e^{-t}$ həlli alınır.

$r_2 = -2$ kökü üçün cəbri tənliklər sistemini yazaq:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases}$$

Buradan $k_3 = 0$, $k_1 + k_2 = 0$, $k_1 = -k_2$ alınq. $k_2 = -1$ qəbul etsək, $k_1 = 1$ alarıq. Beləliklə, $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = 0$ üçün $x_2 = e^{-2t}$, $y_2 = -e^{-2t}$, $z_2 = 0$ həlli alınır.

$r_3 = 2$ kökü üçün

$$\begin{cases} -3k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 - 3k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 - k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2k_1 + 2k_2 = 0, \\ 2k_1 - 2k_2 = 0, \\ k_1 = k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_3 = 2k_2, \\ \\ k_1 = k_2 \end{cases}$$

$k_2 = 1$ qəbul etsək, $k_1 = 1$, $k_3 = 2$ alarıq. Onda $r_3 = 2$-yə uyğun $x_3 = e^{2t}$, $y_3 = e^{2t}$, $z_3 = 2e^{2t}$ həlli alınır.

Sistemin ümumi həllini tapmaq üçün tapılan xüsusi həlləri uyğun olaraq C_1, C_2, C_3 sabitlərinə vurub, toplamaq lazımdır. Onda

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + C_3e^{2t}, \\ y = C_1e^{-t} - C_2e^{-2t} + C_3e^{2t}, \\ z = -C_1e^{-t} + 0 \cdot e^{-2t} + 2C_3e^{2t} \end{cases}$$

verilmiş sistemin ümumi həlli olur.

Aşağıda bu sistemin yüksək tərtibli tənliyə gətirmək yolu ilə həlli tapılır.

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases}$ sistemin yüksək tərtibli tənliyə gətirib, həllini tapın.

HƏLLİ. Verilmiş sistemi üçtərtibli xətti bircins sabit əmsallı tənliyə gətirək. Sistemin birinci tənliyinin hər tərəfini t arqumentinə görə diferensiallayaq: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dz}{dt}$. Burada $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}$-ni sistemdə verilmiş qiymətlərilə əvəz edək:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(-x + y + z) + (x - y + z) + (x + y + z) = 3x - y + z.$$

Deməli, $\frac{d^2x}{dt^2} = 3x - y + z$. Alınmış tənliyi t-yə görə bir də diferensiallayaq: $\frac{d^3x}{dt^3} = 3\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$.

Yenə də $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$-nin sistemdəki qiymətlərini burada yerinə yazaq: $\frac{d^3x}{dt^3} = 3(-x+y+z) - (x-y+z) + (x+y+z) = -3x+5y+3z$.

Onda $\frac{d^3x}{dt^3} = -3x+5y+3z$.

$$\begin{cases} y+z = x+\frac{dx}{dt}, \\ z-y = -3x+\frac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$$

sistemdən $y = 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$, $z = -x + \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\right)$ tapıb, axırıncı tənlikdə yerinə yazaq: $\frac{d^3x}{dt^3} = -3x + 10x + \frac{5}{2}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\right) - 3x + \frac{3}{2}\left(\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\right)$. Buradan $\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 4x = 0$ tənliyi alınır. Beləliklə, verilmiş sistem sabit əmsallı üçtərtibli bircins tənliyə gətirildi. Bu tənliyi həll edək. Xarakteristik tənliyi yazıb, həllini tapaq:

$k^3 + k^2 - 4k - 4 = 0,\quad k^2(k+1) - 4(k+1) = 0, (k+1)(k^2-4) = 0,$

$k+1=0,\quad k_1 = -1,\quad k^2-4=0,\quad k_{2,3} = \pm 2$. Deməli, $x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}$ alınmış tənliyin ümumi həlli olur. Bu həlli y və z üçün tapılan ifadələrdə yazaq: $y = 2\left(C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}\right) + \frac{1}{2}\left(-C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} - 2C_3e^{-2t} - C_1e^{-t} - 4C_2e^{2t} - 4C_3e^{-2t}\right) =$

$C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - C_3e^{-2t}$, $\quad z = -\left(C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}\right) + \frac{1}{2}\left(-C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} - 2C_3e^{-2t} + C_1e^{-t} + 4C_2e^{2t} + 4C_3e^{-2t}\right) =$

$= -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}$.

Beləliklə, $x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}$, $\quad y = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - C_3e^{-2t}$, $z = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}$ verilən sistemin ümumi həlli olur.

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x+y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x+3y \end{cases}$ sistemi həll edin.

HƏLLİ. Sistemin həllini $x = k_1e^{rt}$, $\quad y = k_2e^{rt}$ şəklində axtaraq. Onda

$$\begin{cases} (1-r)k_1 + k_2 = 0, \\ -2k_2 + (3-r)k_2 = 0 \end{cases}$$

cəbri tənliklər sistemi və

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ -2 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 4r + 5 = 0$$

xarakteristik tənliyi alınır. Xarakteristik tənliyin $r_{1,2} = 2 \pm i$ kökünə uyğun

$$\begin{cases} (-1 \mp i)k_1 + k_2 = 0, \\ -2k_1 + (-1 \mp i)k_2 = 0 \end{cases}$$

sistemin $k_1 = 1$, $\quad k_2 = 1 \pm i$ həllərinə baxaq. Onda sistemin $e^{(2\pm i)t} = e^{2t}\cos t \pm ie^{2t}\sin t$, $\quad (1\pm i)e^{(2\pm i)t} = e^{2t}(\cos t \mp \sin t) \pm$

$ie^{2t}(\cos t+\sin t)$ həllərinə uyğun $x_1=e^{2t}\cos t$, $y_1=e^{2t}(\cos t-\sin t)$ və $x_2=e^{2t}\sin t$, $y_2=e^{2t}(\cos t+\sin t)$ xətti asılı olmayan həlləri alınır. Odur ki, $x=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$, $y_2=e^{2t}[(C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t]$ sistemin ümumi həlli olur.

4. $\begin{cases}\dot x = 4x-y-z,\\ \dot y = x+2y-z,\\ \dot z = x-y+2z\end{cases}$ sistemini həll edin.

HƏLLİ. Baxılan sistemin $x=k_1e^{rt}$, $y=k_2e^{rt}$, $z=k_3e^{rt}$ həlli üçün

$$\begin{cases}(4-r)k_1-k_2-k_3=0,\\ k_1+(2-r)k_2-k_3=0,\\ k_1-k_2+(2-r)k_3=0\end{cases}$$

cəbri tənliklər sistemi və

$$\begin{vmatrix}4-r & -1 & -1\\ 1 & 2-r & -1\\ 1 & -1 & 2-r\end{vmatrix}=(2-r)(r^2-6r+9)=0,\quad r_1=2,\quad r_2=r_3=3$$

alınır. Xarakteristik tənliyin $r_1=2$ kökünə uyğun

$$\begin{cases}2k_1-k_2-k_3=0,\\ k_1-k_3=0,\\ k_1-k_2=0\end{cases}$$

cəbri sisteminin $k_1=k_2=k_3=1$ həllini götürək. Onda $x_1=e^{2t}$, $y_1=e^{2t}$, $z_1=e^{2t}$ sistemin həlli olur. Xarakteristik tənliyin

$r_2=r_3=3$ kökünə uyğun

$$\begin{cases}k_1-k_2-k_3=0,\\ k_1-k_2-k_3=0,\\ k_1-k_2-k_3=0\end{cases}$$

sisteminin iki $k_1=1$, $k_2=1$, $k_3=0$ və $k_1=1$, $k_2=0$, $k_3=1$ xətti asılı olmayan həllərinə baxaq. Onda sistemin $x_2=e^{3t}$, $y_2=e^{3t}$, $z_2=0$ və $x_3=e^{3t}$, $y_3=0$, $z_3=e^{3t}$ xətti asılı olmayan həlləri alınır. Beləliklə,

$$x=C_1e^{2t}+(C_2+C_3)e^{3t},\quad y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t},\quad z=C_1e^{2t}+C_3e^{3t}.$$

sistemin ümumi həlli olur.

5. $\begin{cases}\dot x = x-y+z,\\ \dot y = x+y-z,\\ \dot z = -y+2z\end{cases}$ sistemini həll edin.

HƏLLİ. Bu sistemin $x=k_1e^{rt}$, $y=k_2e^{rt}$, $z=k_3e^{rt}$ həlli üçün

$$\begin{cases}(1-r)k_1-k_2+k_3=0,\\ k_1+(1-r)k_2-k_3=0,\\ 0\cdot k_1-k_2+(2-r)k_3=0\end{cases}$$

cəbri tənliklər sistemi və

$$\begin{vmatrix}1-r & -1 & 1\\ 1 & 1-r & -1\\ 0 & -1 & 2-r\end{vmatrix}=(1-r)^2(2-r)=0,\quad r_1=2,\quad r_2=r_3=1$$

$$\begin{cases} -k_1 - k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 - k_2 - k_3 = 0, \\ -k_2 = 0 \end{cases}$$

alınır. Xarakteristik tənliyin $r_1 = 2$ kökünə uyğun

sistemin $k_1 = 1,\ \ k_2 = 0,\ \ k_3 = 1$ həllinə baxaq. Bu həllə uyğun sistemin $x_1 = e^{2t},\ \ y_1 = 0,\ \ z_1 = e^{2t}$ həlli alınır. Xarakteristik tənliyin $r_2 = r_3 = 1$ kökünə uyğun alınan

$$\begin{cases} -k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 - k_3 = 0, \\ -k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

sistemin ancaq bir $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ xətti asılı olmayan həlli vardır. Odur ki, $r_2 = r_3 = 1$ kökünə uyğun həlli $x = (a_1 + tb_1)e^t$, $y = (a_2 + tb_2)e^t$, $z = (a_3 + tb_3)e^t$ şəklində axtarmaq lazımdır. Bu zaman $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ ədədlərini tapmaq üçün

$$\begin{cases} -b_2 + b_3 = 0, \\ b_1 - b_3 = 0, \\ -b_2 + b_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -a_2 + a_3 = b_1, \\ a_1 - a_3 = b_2, \\ -a_2 + a_3 = b_3 \end{cases}$$

sistemləri alınır. Birinci sistemin $b_1 = b_2 = b_3 = C_2$ həllinə uyğun ikinci sistemin $a_1 = C_1,\ \ a_2 = C_1 - 2C_2,\ \ a_3 = C_1 - C_2$ həlləri uyğun gəlir, burada C_1 və C_2 ixtiyari ədədlərdir. Onda

$x = (C_1 + tC_2)e^t + C_3 e^{2t},\ \ y = (C_1 - 2C_2 + tC_2)e^t + C_3 e^{2t}$,

$z = (C_1 - C_2 + tC_2)e^t + C_3 e^{2t}$ sistemin ümumi həlli olur.

8. Tənliklərin qüvvət sıraları vasitəsilə inteqrallanması

Tutaq ki,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

tənliyində $p(x)$ və $q(x)$ əmsalları x_0 nöqtəsi ətrafında yığılan

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k$$

qüvvət sıralarına ayrılır. Onda x_0 nöqtəsi tənliyin requlyar və ya adi nöqtəsi adlanır. Əks halda x_0 məxsusi nöqtə adlanır. x_0 nöqtəsi tənliyin adi nöqtəsi olduqda tənliyin $y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_1$ şərtlərini ödəyən və x_0 nöqtəsi ətrafında analitik olan həlli, yə'ni yığılan

$$y = y_0 + y_1(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

qüvvət sırası şəklində göstərilən həlli var. Sadəlik üçün $x_0 = 0$ qəbul edək. Onda (1) tənliyini

$$y'' + y'\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k + y\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k = 0, \tag{1'}$$

həlli isə

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad c_0 = y_0, \quad c_1 = y_1 \tag{2}$$

şəklində yazmaq olar.

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1}, \quad y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^{m-2}$$

törəmələrini tapıb, (1') tənliyində nəzərə alsaq:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^{m-2} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} m p_k c_m x^{k+m-1} +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} q_k c_m x^{k+m} = 0.$$

Buradan x dəyişəninin eyni dərəcəli əmsalları cəmini sıfıra bərabər etməklə alırıq:

$$\begin{array}{l|l}
x^0 & 2\cdot 1c_2 + 1\cdot p_0c_1 + q_0c_0 = 0, \\
x^1 & 3\cdot 2c_3 + 1p_1c_1 + 2p_0c_2 + q_1c_0 + q_0c_1 = 0, \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x^{k-2} & k(k-1)c_k + \sum_{m=0}^{k-2} p_{k-m-2}(m+1)c_{m+1} + \sum_{m=0}^{k-2} q_{k-m-2}c_m = 0, \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Alınan bərabərliklərdən c_0, c_1 ədədlərini ixtiyari götürüb, ardıcıl olaraq $c_2, c_3, \dots, c_k, \dots$ əmsallarını yeganə qayda ilə tapmaq olur. Tənliyin $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həlli üçün $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ götürməklə

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m$$

həlli və $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ həlli üçün $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ götürməklə

$$y_2(x) = x + \sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m$$

həlli alınır. Bunlar xətti asılı olmayan həllər olur. Onda $y = Ay_1(x) + By_2(x)$ tənliyin ümumi həlli olur, burada A, B ixtiyari sabitlərdir.

$x_0 = 0$ nöqtəsi tənliyin məxsusi nöqtəsi olduqda həlli yuxarıda göstərilən qayda ilə tapmaq olmur. Tutaq ki, tənliyin əmsalları

$$p(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad q(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$$

şəklindədir. Onda tənliyin həlli

$$y(x) = x^{\rho}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \qquad (c_0 \neq 0)$$

ümumiləşmiş qüvvət sırası şəklində axtarılır, burada ρ ədədi $\rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0 = 0$ tənliyinin həllidir, $p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x)$, $q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x)$.

1. $y'' - xy' - 2y = 0$ tənliyinin həllini qüvvət sırası şəklində tapın.

HƏLLİ. Baxılan misal üçün $p(x) = -x$, $q(x) = -2$ olduğundan $x = 0$ nöqtəsi tənliyin adi nöqtəsi olur. Odur ki, həlli $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ sırası şəklində axtarmaq lazımdır. Buradan $y' = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}$, $y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$ olduğunu nəzərə alıb, verilən tənlikdə yazmaqla alırıq.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k = 0.$$

Əvvəlcə tənliyin $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ başlanğıc şərtlərini ödəyən $y_1(x)$ həllini tapaq. Bu həll üçün $c_0 = 1$, $c_1 = 0$. Alınan bərabərlikdə x dəyişəninin eyni dərəcəli əmsallarının cəmi sıfır olduğundan aşağıdakı cədvəli düzəldək:

$$
\begin{array}{l|l}
x^0 & 2\cdot 1c_2-2c_0=0, \quad \textit{buradan} \quad c_2=c_0=1, \\
x^1 & 3\cdot 2c_3-1c_1-2c_1=0, \quad \textit{buradan} \quad c_3=\dfrac{1}{2}c_1=0, \\
x^2 & 4\cdot 3c_4-2c_2-2c_2=0, \quad \textit{buradan} \quad c_4=\dfrac{1}{3}, \\
x^3 & 5\cdot 4c_5-3c_3-2c_3=0, \quad \textit{buradan} \quad c_5=0, \\
x^4 & 6\cdot 5c_6-4c_4-2c_4=0, \quad \textit{buradan} \quad c_6=\dfrac{1}{5}c_4=\dfrac{1}{15}, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Deməli, $y_1(x)=1+x^2+\dfrac{x^4}{3}+\dfrac{x^6}{15}+\cdots$ axtarılan həll olur. $y(0)=0$, $y'(0)=1$ şərtlərini ödəyən həll üçün $c_0=0$, $c_1=1$ olduğunu nəzərə alsaq

$$
\begin{array}{l|l}
x^0 & 2\cdot 1c_2-2c_0=0, \quad \textit{buradan} \quad c_2=c_0=0, \\
x^1 & 3\cdot 2c_3-1c_1-2c_1=0, \quad \textit{buradan} \quad c_3=\dfrac{1}{2}c_1=\dfrac{1}{2}, \\
x^2 & 4\cdot 3c_4-2c_2-2c_2=0, \quad \textit{buradan} \quad c_4=\dfrac{1}{3}c_2=0, \\
x^3 & 5\cdot 4c_5-3c_3-2c_3=0, \quad \textit{buradan} \quad c_5=\dfrac{1}{4}c_3=\dfrac{1}{8}, \\
x^4 & 6\cdot 5c_6-4c_4-2c_4=0, \quad \textit{buradan} \quad c_6=\dfrac{1}{5}c_4=0, \\
x^5 & 7\cdot 6c_7-5c_5-2c_5=0, \quad \textit{buradan} \quad c_7=\dfrac{1}{6}c_5=\dfrac{1}{48}, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Onda $y_2(x)=x+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^5}{2\cdot 4}+\dfrac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots=x\left[1+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)+\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2+\right.$

$\left.+\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^3+\cdots\right]=xe^{\frac{x^2}{2}}.$

Alınan $y_1(x)$ və $y_2(x)$ həlləri xətti asılı olmadığından $y=$ $=Ay_1(x)+By_2(x)$ verilən tənliyin ümumi həlli olur, burada A, B ixtiyari sabitlərdir.

2. $4xy''+2y'+y=0$ tənliyin həllini qüvvət sırasının köməyi ilə tapın.

HƏLLİ. Tənliyi $y''+\dfrac{1}{2x}y'+\dfrac{1}{4x}y=0$ şəklində yazsaq, $p(x)=\dfrac{1}{2x}$, $q(x)=\dfrac{1}{4x}$ olduğundan $x=0$ tənliyin məxsusi nöqtəsi olur. Odur ki, həlli $y=x^{\rho}\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ $(c_0\neq 0)$ ümumiləşmiş qüvvət sırası şəklində axtarmaq lazımdır. Burada $p_0=\lim\limits_{x\to 0}xp(x)=\dfrac{1}{2}$, $q_0=\lim\limits_{x\to 0}x^2q(x)=0$ olduğundan ρ ədədi

$$\rho(\rho-1)+\frac{1}{2}\rho+0=0$$

tənliyinin həlli götürülür. Buradan $\rho_1=0$, $\rho_2=\dfrac{1}{2}$ olduğunu nəzərə alsaq həlləri

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k, \quad y_2(x)=x^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \quad (x\geq 0, \quad c_0\neq 0),$$

sıraları şəklində axtarmaq lazımdır. Birinci sıradan törəmələr alıb, tənlikdə yerinə yazaq:

$$\sum_{k=2}^{\infty}4k(k-1)c_kx^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kx^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0.$$

Bu bərabərliyi sadələşdirsək alarıq:

$$\sum_{k=1}^{\infty}2k(2k-1)c_kx^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0.$$

Alınan bərabərlikdə x dəyişəninin eyni dərəcəli əmsallarının cəmi sıfır olduğundan alınq:

$$\begin{array}{l|lll}
x^0 & 2c_1+c_0=0, & c_0=A, & c_1=-\dfrac{A}{2} \\
x^1 & 4\cdot 3c_2+c_1=0, & & c_2=-\dfrac{c_1}{3\cdot 4}=\dfrac{A}{2\cdot 3\cdot 4}=\dfrac{A}{4!}, \\
x^2 & 6\cdot 5c_4+c_2=0, & & c_3=-\dfrac{c_2}{5\cdot 6}=-\dfrac{A}{4!\cdot 5\cdot 6}=-\dfrac{A}{6!}, \\
\dots & \dots\dots\dots & & \\
x^{k-1} & 2k(2k+1)c_k+c_{k-1}=0, & & c_k=-\dfrac{c_{k-1}}{(2k-1)2k}=(-1)^k\dfrac{A}{(2k)!}, \\
\dots & \dots\dots\dots & &
\end{array}$$

Deməli,

$$y_1(x)=A\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\dots+(-1)\frac{x^k}{(2k)!}+\dots\right)=A\cos\sqrt{x}\,.$$

$$y_2(x)=x^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+\frac{1}{2}}$$

sırasından törəmələr alıb, verilən tənlikdə yazmaqla alınq.

$$\sum_{k=0}^{\infty}4\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)c_kx^{k-\frac{1}{2}}+\sum_{k=0}^{\infty}2\left(k+\frac{1}{2}\right)c_kx^{k-\frac{1}{2}}+$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+\frac{1}{2}}=0.$$

Bu bərabərliyi $x^{\frac{1}{2}}$ ixtisar edib sadələşdirək:

$$\sum_{k=1}^{\infty}2k(2k+1)c_kx^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0\,.$$

Buradan

$$\begin{array}{l|lll}
x^0 & 2\cdot 3c_1+c_0=0, & c_0=B, & c_1=-\dfrac{B}{3!} \\
x^1 & 4\cdot 5c_2+c_1=0, & & c_2=-\dfrac{c_1}{4\cdot 5}=\dfrac{B}{3!\cdot 4\cdot 5}=\dfrac{B}{5!}, \\
x^2 & 6\cdot 7c_3+c_2=0, & & c_3=-\dfrac{c_2}{6\cdot 7}=-\dfrac{B}{5!\cdot 6\cdot 6}=-\dfrac{B}{7!}, \\
\dots & \dots\dots\dots & & \\
x^{k-1} & 2k(2k+1)c_k+c_{k-1}=0, & & c_k=-\dfrac{c_{k-1}}{(2k+1)2k}=(-1)^k\dfrac{B}{(2k+1)!}, \\
\dots & \dots\dots\dots & &
\end{array}$$

Onda $y_2(x)=B\sqrt{x}\left(1-\dfrac{x}{3!}+\dfrac{x^2}{5!}-\dfrac{x^3}{7!}+\dots+(-1)^k\dfrac{x^k}{(2k+1)!}+\dots\right)=$

$$=B\left(\sqrt{x}-\frac{(\sqrt{x})^3}{3!}+\frac{(\sqrt{x})^5}{5!}-\frac{(\sqrt{x})^7}{7!}+\dots+(-1)^k\frac{(\sqrt{x})^{2k+1}}{(2k+1)!}+\dots\right)=$$

$=B\sin\sqrt{x}.$ $y_1(x)=\cos\sqrt{x}$ və $y_2(x)=\sin\sqrt{x}$ həlləri xətti asılı olmadığından $y=A\cos\sqrt{x}+B\sin\sqrt{x}$ verilən tənliyin ümumi həlli olur, A, B ixtiyari sabitlərdir.

9. Həllin dayanıqlığı

Tutaq ki, $x=\varphi(t)$, $t\in[t_0,+\infty)$ funksiyası

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{1}$$

sisteminin

$$x(t_0)=x^0 \tag{2}$$

başlanğıc şərtini ödəyən həllidir. Burada $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$,

$$f(t,x)=\big(f_1(t,x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,f_n(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\big),$$

$$x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right), \quad \varphi(t) = \left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\right).$$

Sistemin

$$x(t_0) = \xi, \quad \xi = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right) \tag{3}$$

başlanğıc şərtini ödəyən həllini $x = \varphi(t, \xi)$ ilə işarə edək.

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, $\left\|\xi - x^0\right\| < \delta$ olduqda $t \geq t_0$ üçün $\left\|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)\right\| < \varepsilon$. Onda $x = \varphi(t)$ həlli *Lyapunov mə'nada dayanıqlı* adlanır. Burada

$$\left\|\xi - x^0\right\| = \left|\xi_1 - x_1^0\right| + \left|\xi_2 - x_2^0\right| + \cdots + \left|\xi_n - x_n^0\right|.$$

Əlavə olaraq, elə $\sigma > 0$ $(\sigma \leq \delta)$ ədədi var ki, $\left\|\xi - x^0\right\| < \sigma$ olduqda $\lim\limits_{t \to +\infty} \left\|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)\right\| = 0$ olarsa $x = \varphi(t)$ *Lyapunov mə'nada asimptotik dayanıqlı həll* adlanır.

Aydındır ki, $f(t, a) = 0$ olduqda $x = a$ sistemin həlli olur. Bu həll sistemin *tarazlıq vəziyyəti* adlanır. Sistemin hər hansı həllinin dayanıqlığı əvəzləmə vasitəsilə tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığına gətirilir.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{4}$$

xətti bircins sistemi üçün $x = 0$ tarazlıq halıdır. Burada $A(t)$ elementləri $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ olan $n \times n$ ölçülü matrisdir. (4) sisteminin hər hansı həllinin dayanıqlığından onun istənilən həllinin dayanıqlığı alınır. Bütün həlləri dayanıqlı (və ya asimptotik dayanıqlı) olan sistemə dayanıqlı (və ya asimptotik dayanıqlı) sistem deyilir. Belə sistemlərin dayanaqlığı haqqında aşağıdakı teorem doğrudur:

***TEOREM 1.** (I) Xətti bircins sistemin dayanıqlı olması üçün onun hər bir həllinin $t \to +\infty$ şərtində məhdud olması zəruri və kafidir.*

(II) Xətti bircins sistemin asimptotik dayanıqlı olması üçün onun hər bir həllinin $t \to +\infty$ şərtində limitinin sıfır olması zəruri və kafidir.

A sabit matris olduqda

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{5}$$

sistemində *sabit əmsallı xətti bircins* sistem adlanır. Tutaq ki, A matrisi $a_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ ədədlərindən düzəldilmişdir. Onda

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} +$$

$$+ \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

çoxhədlisi (5) sisteminin və ya A matrisinin xarakteristik çoxhədlisi, $f(\lambda) = 0$ isə xarakteristik tənliyi adlanır. Xarakteristik tənliyin köklərinə (5) sisteminin və ya A matrisinin xarakteristik ədədləri deyilir. (5) sisteminin dayanıqlığı haqqında aşağıdakı teorem doğrudur.

***TEOREM 2.** (I) Sabit əmsallı xətti bircins sistemin dayanıqlı olması üçün zəruri və kafi şərt A matrisinin bütün xarakteristik ədədlərinin həqiqi hissələri müsbət olmamaqla, həqiq hissəsi sıfır olan xarakteristik ədədlərinə uyğun Jordan hücrələrinin birelementli olmasıdır.*

(II) Sabit əmsallı xətti bircins sistemin asimptotik dayanıqlı olması üçün A matrisinin xarakteristik ədədlərinin hamısının həqiqi hissələrinin mənfi olması zəruri və kafidir.

Xüsusi halda, $n = 2$ olduqda $-\alpha = a_{11} + a_{22}$, $\beta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ işarə edək. Onda teorem 2-ni aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.

***TEOREM 2'.** (I)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{5'}$$

sisteminin dayanıqlı olması üçün $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$ şərtlərinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

(II) sisteminin asimptotik dayanıqlı olması üçün $\alpha > 0$, $\beta > 0$ şərtləri zəruri və kafidir.

Köklərin həqiq hissəsi mənfi olan çoxhədliyə *Qurviç çoxhədlisi* deyilir.

TEOREM (Qurviç). $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ *çoxhədlisinin Qurviç çoxhədlisi olması üçün* $a_1>0, a_2>0,\ldots a_n>0$ *zəruri şərtdir.* $n\le 2$ *olduqda bu şərt həm də kafi şərt olur.*

TEOREM (Rauss-Qurviç). $f(\lambda)$ *çoxhədlisinin Qurviç çoxhədlisi olması üçün*

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

matrisinin baş diaqonal minorlarının $\Delta_1=a_1>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}>0,$

$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}>0,\ldots,\Delta_n>0$ *olması zəruri və kafidir.*

Qeyri-xətti sistemlərin dayanıqlığı iki üsulla: birinci yaxınlaşmalar və Lyapunov funksiyalar üsulu ilə araşdırılır.

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t,x) \tag{6}$$

sistem üçün

$$\lim_{|x|\to 0}\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}=0$$

olduqda

$$\frac{dx}{dt}=Ax$$

sisteminə (6) sisteminin *birinci yaxınlaşmalar sistemi* deyilir.

Sağ tərəfi sərbəst dəyişəndən aşkar asılı olmayan

$$\frac{dx}{dt}=f(x) \tag{7}$$

sisteminə *avtonom sistem* deyilir. Tutaq ki, $x=0$ avtonom sistemin tarazlıq vəziyyətidir, yə'ni $f(0)=0$. Onda

$$a_{i,j}=\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j},\quad i,j=1,2,\ldots,n$$

ədədlərindən düzəldilmiş A matrisi üçün (5) sistemi (7) avtonom sistemi üçün birinci yaxınlaşmalar sistemi olur.

TEOREM (Birinci yaxınlaşmalar üsulu). (5) sistemi asimptotik dayanıqlı olduqda (6), (və ya (7)) sisteminin $x=0$ *tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur.*

Sadəlik üçün avtonom sistemlərin $x=0$ tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığını Lyapunov funksiyalar üsulu ilə araşdırılması məsələsinə baxaq. Tutaq ki, koordinat başlanğıcını öz daxilində saxlayan D oblastında kəsilməz və kəsilməz xüsusi törəmələri olan $v(x)=v(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyası üçün $v(0)=0$, $v(x)>0,\ x\ne 0$ $(v(x)<0,\ x\ne 0)$ şərtləri ödənir. Onda $v(x)$ funksiyası müsbət-müəyyən (mənfi-müəyyən) adlanır. $v(x)\ge 0,\ x\in D$ $(v(x)\le 0,\ x\in D)$ olduqda $v(x)$ funksiyası işarəsi müsbət (mənfi) olan adlanır.

(7) sisteminin ixtiyari $x(t)$ həlli üçün $v=v(x(t))$ funksiyasından t-yə nəzərən törəmə alaq:

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i(x)=<gradv(x),\quad f(x)>.$$

Onda $\frac{dv}{dt}=<gradv(x),\quad f(x)>$ bərabərliyinə $v(x)$ funksiyasının (7) sisteminə nəzərən törəməsi deyilir. Burada $gradv(x)=\left(\frac{\partial v}{\partial x_1},\frac{\partial v}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)$, $<\cdot,\cdot>$-skalyar hasildir.

TEOREM (Lyapunov funksiyalar üsulu) (I) Müsbət-müəyyən olan elə $v(x)$ funksiyası var ki, onun (7) sisteminə nəzərən törəməsi $\frac{dv}{dt}$ işarəsi mənfi olan funksiya olur. Onda (7) sisteminin $x=0$ tarazlıq vəziyyəti dayanıqlıdır.

(II) Özü müsbət-müəyyən olan elə $v(x)$ funksiyası var ki, onun (7) sisteminə nəzərən törəməsi $\frac{dv}{dt}$ mənfi müəyyən olur. Onda (7) sisteminin $x=0$ tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur.

1. $x^{IV}+5x'''+13x''+19x'+10x=0$ tənliyinin $x=0$ həllinin asimptotik dayanıqlı olduğunu araşdırın.

HƏLLİ. Tənliyin $f(\lambda)=\lambda^4+5\lambda^3+13\lambda^2+19\lambda+10$ xarakteristik çoxhədlisi üçün Qurviç matrisi

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

olduğundan vu matrisin baş diaqonal minorlarını hesablayaq:

$$\Delta_1=5>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix}=46>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix}=$$

$$=624>0,\quad \Delta_4=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}=10\Delta_3=6240>0.$$

Buradan Rauss-Qurviç teoreminə əsasən baxılan həlli asimptotik dayanıqlı olur.

2. α ədədinin hansı qiymətlərində $y'''+2y''+\alpha y'+3y=0$ tənliyinin $y=0$ həlli asimptotik dayanıqlı olur?

HƏLLİ. Tənliyin $f(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2+\alpha\lambda+3$ xarakteristik çoxhədlisi üçün Qurviç matrisi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & \alpha & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

olduğundan, bu matrisin baş diaqonal minorlarının

$$\Delta_1=2>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix}=2\alpha-3>0,\quad \Delta_3=3\Delta_2>0$$

olması üçün $\alpha>\frac{3}{2}$ olmalıdır. Deməli, $\alpha>\frac{3}{2}$ üçün baxılan həll asimptotik dayanıqlı olur.

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=\ln\left(4y+e^{-3x}\right), \\ \frac{dy}{dt}=2y-1+\sqrt[3]{1-6x} \end{cases}$ sisteminin $(0,\ 0)$ tarazlıq vəziyyətinin birinci yaxınlaşmalar üsulu ilə asimptotik dayanıqlı olduğunu göstərin.

HƏLLİ. Baxılan sistem üçün

$$f_1(x,y)=\ln\left(4y+e^{-3x}\right),\quad f_2(x,y)=2y-1+\sqrt[3]{1-6x},$$

$$a_{11}=\frac{\partial f_1(0,\ 0)}{\partial x}=-3,\quad a_{12}=\frac{\partial f_1(0,\ 0)}{\partial y}=4,$$

$$a_{21}=\frac{\partial f_2(0,\ 0)}{\partial x}=-2,\quad a_{22}=\frac{\partial f_2(0,\ 0)}{\partial y}=2.$$

Onda

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y, \\ \dfrac{dx}{dt} = -2x + 2y \end{cases}$$

sistemi verilən sistemin birinci yaxınlaşmalar sistemi olur. Bu sistemin xarakteristik çoxhədlisi

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2$$

olduğundan köklərin həqiqi hissələri mənfi olur. Yə'ni $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Odur ki, verilən sistemin $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur. (Teorem 2 (II)).

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$ sisteminin dayanıqlığını araşdırın.

HƏLLİ. Baxılan sistemdə

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -(-1+1) = 0, \quad \beta = -1 + 3 = 2,$$

olduğundan teorem 2'-yə əsasən verilmiş sistem dayanıqlı olur. Lakin bu sistem asimptotik dayanıqlı deyil. Doğrudan da, sistemin $x(0) = \xi$, $y(0) = \eta$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həlli

$$\begin{cases} x(t) = \xi \cos\sqrt{2}t + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(3\eta - \xi)\sin\sqrt{2}t, \\ y(t) = \eta\cos\sqrt{2}t + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \xi)\sin\sqrt{2}t \end{cases}$$

olduğundan

$$|x(t)| + |y(t)| \le |\xi| + \frac{1}{\sqrt{2}}|3\eta - \xi| + |\eta| + \frac{1}{\sqrt{2}}|\eta - \xi| \le |\xi| +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{2}}|\eta| + \frac{1}{\sqrt{2}}|\xi| + |\eta| + \frac{1}{\sqrt{2}}|\eta| + \frac{1}{\sqrt{2}}|\xi| = \left(1 + \sqrt{2}\right)|\xi| + \left(1 + \sqrt{2}\right)|\eta|.$$

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədinə qarşı $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\left(1 + 2\sqrt{2}\right)}$ götürsək, onda $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$, $t \in [0, +\infty)$. Deməli, sistemin $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyəti dayanıqlı olur. Lakin göstərilən həllərin $t \to +\infty$ şərtində limiti sıfıra yaxınlaşmır (limiti yoxdur). Odur ki, $(0, 0)$ həlli asimptotik dayanıqlı olmur.

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \ln\left(x^2 - 3\right) \end{cases}$ sisteminin tarazlıq vəziyyətlərini tapın və onların dayanıqlığını araşdırın.

HƏLLİ. Baxılan sistem üçün $f_1(x, y) = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}$, $f_2(x, y) = \ln\left(x^2 - 3\right)$. Sistemin tarazlıq vəziyyətləri üçün

$$\begin{cases} 3 - \sqrt{4 + x^2 + y} = 0, \\ \ln\left(x^2 - 3\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + x^2 + y = 9, \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 5 - x^2, \\ x = \pm 2 \end{cases}, \quad x = \pm 2, \quad y = 1.$$

Deməli, baxılan sistemin iki $(2; 1)$ və $(-2; 1)$ tarazlıq vəziyyəti var. $(2; 1)$ tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığını öyrənmək məqsədilə bu nöqtəyə uyğun sistemin birinci yaxınlaşmalarını tapaq:

$$a_{11} = \frac{\partial f_1(2,1)}{\partial x} = -\frac{2}{3}, \quad a_{12} = \frac{\partial f_1(2,1)}{\partial y} = -\frac{1}{6},$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2(2,1)}{\partial x} = 4, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2(2,1)}{\partial y} = 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2}{3}(x-2) - \dfrac{1}{6}(y-1), \\ \dfrac{dy}{dt} = 4(x-2) + 0(y-1) \end{cases}$$

sistemi $(2;1)$ tarazlıq vəziyyəti üçün birinci yaxınlaşmalar olur. Xarakteristik çoxhədli

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\dfrac{2}{3}-\lambda & -\dfrac{1}{6} \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{2}{3}$$

olduğundan Qurviç teoreminə əsasən bu, Qurviç çoxhədlisidir. Deməli, $(2;1)$ tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlıdır.

İndi $(-2;1)$ tarazlıq vəziyyəti üçün birinci yaxınlaşmalar sistemini tapaq.

$$a_{11} = \frac{\partial f_1(-2,1)}{\partial x} = \frac{2}{3}, \quad a_{12} = \frac{\partial f_1(-2,1)}{\partial y} = -\frac{1}{6},$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2(-2,1)}{\partial x} = -4, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2(-2,1)}{\partial y} = 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{3}(x+2) - \dfrac{1}{6}(y-1), \\ \dfrac{dy}{dt} = -4(x+2) + 0(y-1) \end{cases}$$

sistemi $(-2;1)$ nöqtəsi üçün birinci yaxınlaşmalar sistemi olur. Bu sistemin xarakteristik çoxhədlisi

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3}-\lambda & -\dfrac{1}{6} \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{2}{3}$$

Qurviç teoreminə əsasən Qurviç çoxhədlisi ola bilməz. Deməli, $(-2;1)$ tarazlıq vəziyyəti dayanıqlı deyil.

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x + xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y - x^2 - y^3 \end{cases}$ sisteminin $(0,0)$ tarazlıq vəziyyətinin Lyapunov funksiyalar üsulu ilə dayanıqlığını araşdırın.

HƏLLİ. $v(x,y) = x^2 + y^2$ funksiyası müsbət-müəyyəndir Bu funksiyanın verilən sistemə nəzərən törəməsini hesablayaq:

$$\frac{dv}{dt} = 2x(y - x + xy) + 2y\left(x - y - x^2 - y^3\right) = -2(x-y)^2 -$$

$$-2y^4 < 0, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Onda Lyapunov funksiyalar üsulu teoreminin (II) hissəsinə görə $(0,0)$ tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur.

Baxılan misala birinci yaxınlaşmalar üsulunu tətbiq etsək

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

sistemin birinci yaxınlaşmaları olur. Bu sistemin xarakteristik çoxhədlisi

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda$$

olduğundan Qurviç çoxhədlisi olmur və deməli, birinci yaxınlaşmalara nəzərən $(0,0)$ tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığı haqqında fikir söyləmək olmur.

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x^3 + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 4y^5 \end{cases}$ sisteminin $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığını araşdırın.

HƏLLİ. Baxılan sistem üçün

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

birinci yaxınlaşmalar sistemi olur. Bu sistemin xarakteristik tənliyini yazaq.

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3 = 0.$$

$\lambda^2 + 3$ çoxhədlisi Qurviç çoxhədlisi olmur. Odur ki, birinci yaxınlaşmalara nəzərən verilən sistemin $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığı haqqında fikir söyləmək mümkün olmur.

İndi Lyapunovun funksiyalar üsulu ilə sistemin $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığını araşdıraq. Lyapunov funksiyası olaraq $v(x, y) = x^2 + 3y^2$ götürək. Bu müsbət-müəyyən funksiyanın verilən sistemə nəzərən törəməsini hesablayaq:

$$\frac{dv}{dt} = 2x\left(-2x^3 + 3y\right) + 6y\left(-x - 4y^5\right) = -4\left(x^4 + 6y^6\right) < 0,$$

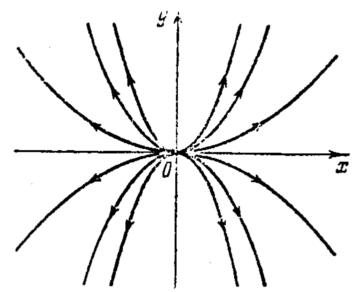
$(x, y) \neq (0, 0)$. Onda Lyapunovun funksiyalar üsulu teoreminin (II) hissəsinə əsasən $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur. Çünki $v(x, y)$- funksiyasının özü müsbət müəyyən, sistemə nəzərən törəməsi $\dfrac{dv}{dt} = -4\left(x^4 + 6y^6\right)$ isə mənfi-müəyyəndir.

10. Məxsusi nöqtə

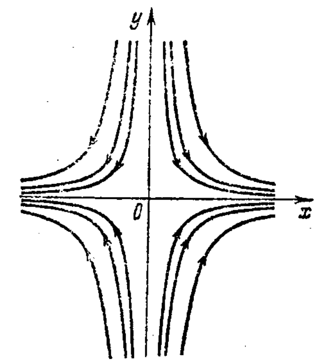
$P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$ şərtlərini ödəyən (x, y) nöqtəsinə $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$ sisteminin və ya $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Q(x, y)}{P(x, y)}$ tənliyinin *məxsusi nöqtəsi* deyilir.

Xüsusi halda, $(0, 0)$ nöqtəsi $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$ sisteminin və ya $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{cx + dy}{ax + dx}$ tənliyinin məxsusi nöqtəsi olur.

$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - cb = 0$ tənliyin kökləri həqiqi, müxtəlif və eyni işarəli və ya köklər bərabər və sıfırdan fərqli olduqda $(0, 0)$ məxsusi nöqtəsi *düyün* (şəkil 8), köklər həqiqi və müxtəlif işarəli olarsa $(0, 0)$ məxsusi nöqtəsi

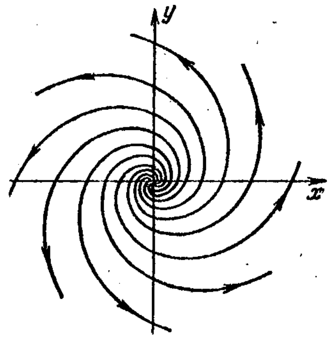


Şəkil 8.

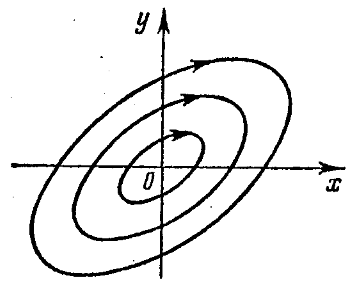


Şəkil 9.

yəhərvari (şəkil 9), köklərin həqiqi hissəsi sıfırdan fərqli kompleks ədədlər olarsa $(0,0)$ nöqtəsi *foks* (şəkil 10), köklər xəyali ədədlər olarsa $(0,0)$ məxsusi nöqtəsi *mərkəz* (şəkil 11) adlanır.



Şəkil 10.



Şəkil 11.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$ sisteminin $(0,0)$ məxsusi nöqtəsinin tipini tə'yin edin.

HƏLLİ. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1.$

Köklər həqiqi, müxtəlif və eyni işarəli olduğundan $(0,0)$ nöqtəsi düyün nöqtəsi olur.

2. $y' = \dfrac{2x+y}{3x+4y}$ tənliyinin $(0,0)$ məxsusi nöqtəsinin tipini tə'yin edin.

HƏLLİ. $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1.$

Köklər həqiqi və müxtəlif işarəli olduğundan $(0,0)$ nöqtəsi yəhərvari

olur.

3. $y' = \dfrac{y-2x}{y}$ tənliyinin $(0,0)$ məxsusi nöqtəsinin tipini tə'yin edin.

HƏLLİ. $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{11}}{2}.$

Köklər kompleks, həqiqi hissəsi sıfırdan fərqli olduğu üçün $(0,0)$ nöqtəsi foks olur.

4. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$ sisteminin $(0,0)$ məxsusi nöqtəsinin tipini tə'yin edin.

HƏLLİ. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$

Köklər xəyali olduğundan $(0,0)$ nöqtəsi mərkəz olur.

11. Sərhəd məsələsi

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{1}$$

tənliyinin

$$\begin{cases} \alpha y'(a) + \beta y(a) = 0, \\ \gamma y'(b) + \delta y(b) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə sərhəd məsələsi, (2) şərtlərinə isə *sərhəd şərtləri* deyilir.

Tutaq ki, $y_1(x)$, $y_2(x)$ funksiyaları bircins

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{3}$$

tənliyinin fundamental həlləri, $\tilde{y}(x)$ isə (1) tənliyinin bir xüsusi həllidir. Onda (1) tənliyinin ümumi həlli

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x). \tag{4}$$

Sərhəd məsələsinin həllini tapmaq üçün (4) ümumi həllini (2) sərhəd şərtlərində yerinə yazıb, C_1 və C_2 sabitlərinə nəzərən qruplaşdıraq. Onda C_1, C_2 sabitlərini tapmaq üçün

$$\begin{cases} A_{11}C_1 + A_{12}C_2 = B_1, \\ A_{21}C_1 + A_{22}C_2 = B_2 \end{cases} \qquad (5)$$

sistemi alınır. Alınan (5) sistemi uyuşan olduqda (1), (2) sərhəd məsələsinin həlli olur. Bu həlli tapmaq üçün (5) sistemində $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ ədədlərini tapıb, (4) ümumi həllində yerinə yazmaq lazımdır.

(1), (2) sərhəd məsələsinin $G(x,s)$ *Qrin funksiyası* aşağıdakı şərtləri ödəyir:

(I). $G(x,s)$ funksiyası $D = \{a \le x \le b, \quad a \le s \le b\}$ oblastında kəsilməzdir.

(II). Hər bir $a < s < b$ üçün $G(x,s)$ funksiyası x dəyişəninə nəzərən (a, s) və (s, b) intervallarında (3) bircins tənliyinin həlli olur.

(III). $G(x,s)$ funksiyasının x arqumentinə nəzərən $G'_x(x,s)$ törəməsi $x = s$ nöqtəsində kəsiləndir və $G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = 1$.

(IV). $G(x,s)$ funksiyası x dəyişəninə nəzərən (2) sərhəd şərtlərini ödəyir.

(1), (2) sərhəd məsələsinin $G(x,s)$ Qrin funksiyası mə'lum olduqda onun həlli

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds \qquad (6)$$

Qrin düsturu ilə tə'yin olunur.

λ ədədinin

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y , \qquad (7)$$

$$\begin{cases} \alpha y'(a) + \beta y(a) = 0, \\ \gamma y'(b) + \delta y(b) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

sərhəd məsələsinin sıfırdan fərqli həllinin varlığını tə'min edən qiymət-

lərinə *məxsusi ədəd*, sıfırdan fərqli həllə isə *məxsusi funksiya* deyilir. Məsələnin özünə isə *məxsusi ədəd* və *məxsusi funksiya haqqında məsələ* deyilir.

1. $y'' - y = 2x$ tənliyinin $y(0) = 0$, $y(1) = -1$ sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. $y'' - y = 0$ tənliyinin xarakteristik tənliyi $k^2 - 1 = 0$ və onun kökləri $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ olur. Onda bircins tənliyin ümumi həlli $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, bircins olmayan tənliyin xüsusi həlli $\tilde{y}(x) = -2x$ olur. Odur ki, $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur. Bu həlli sərhəd şərtlərində nəzərə alaq.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ eC_1 + e^{-1}C_2 = 1 \end{cases}$$

Sistemin $C_1 = \dfrac{1}{e - e^{-1}}$, $C_2 = -\dfrac{1}{e - e^{-1}}$ həllini ümumi həldə yerinə yazaq. $y(x) = \dfrac{e^x}{e - e^{-1}} - \dfrac{e^{-x}}{e - e^{-1}} - 2x$, $y(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^1 - e^{-1}\right)} - 2x = \dfrac{shx}{sh1} - 2x$. Beləliklə, $y(x) = \dfrac{shx}{sh1} - 2x$ sərhəd məsələsinin həlli olur.

2. $y'' - y' = 0$ tənliyinin $y(0) = -1$, $y'(1) - y(1) = 2$ sərhəd şərtini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Tənliyin ümumi həlli $y(x) = C_1 + C_2 e^x$ olar. Bu həlli sərhəd şərtlərində yerinə yazaraq alırıq.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ -C_1 = 2 \end{cases}$$

Buradan $C_1 = -2$, $C_2 = 1$. Onda $y(x) = e^x - 2$ sərhəd məsələsinin həlli olar.

3. $y'' - y = f(x)$, $y'(0) = 0$, $y'(2) + y(2) = 0$ sərhəd məsələsinin Qrin funksiyasını tapın.

HƏLLİ. $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ funksiyaları bircins $y'' - y = 0$ tənliyinin fundamental həlləri olur. Onda

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 e^x + C_2 e^{-x}, & 0 \le x \le s, \\ C_3 e^x + C_4 e^{-x}, & s \le x \le 2 \end{cases}.$$

Qrin funksiyasının kəsilməzliyindən və $G'_x(x, s)$ törəməsi $x = s$ nöqtəsində $G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = 1$ şərtini ödəməsindən alırıq:

$$\begin{cases} (C_3 - C_1)e^s + (C_4 - C_2)e^{-s} = 0, \\ (C_3 - C_1)e^s - (C_4 - C_2)e^{-s} = 1 \end{cases}$$

Buradan $C_3 - C_1 = \frac{1}{2}e^{-s}$, $C_4 - C_2 = -\frac{1}{2}e^s$.

Deməli,

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 e^x + C_2 e^{-x}, & 0 \le x \le s, \\ \left(C_1 + \frac{1}{2}e^{-s}\right)e^x + \left(C_2 - \frac{1}{2}e^s\right)e^{-x}, & s \le x \le 2. \end{cases}$$

$G(x, s)$ funksiyası x-ə nəzərən sərhəd şərtlərini ödəyir:

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0, \\ C_1 + \frac{1}{2}e^{-s} = 0, \end{cases}$$

Buradan alırıq: $C_1 = -\frac{1}{2}e^{-s}$, $C_2 = -\frac{1}{2}e^{-s}$. Bu qiymətləri $G(x, s)$ funksiyasının axırıncı ifadəsində yerinə yazaq:

$$G(x, s) = \begin{cases} -e^{-s} chx, & 0 \le x \le s, \\ e^{-x} chs, & s \le x \le 2. \end{cases}$$

4. λ ədədinin hansı qiymətlərində $y'' - \lambda y = 0$ tənliyinin $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ sərhəd şərtlərini ödəyən və sıfırdan fərqli həlli var?

HƏLLİ. λ ədədinin $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ və $\lambda > 0$ qiymətlərinə baxaq. $\lambda < 0$ olduqda $y'' - \lambda y = 0$ tənliyinin ümumi həlli $y = C_1 \sin\sqrt{-\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{-\lambda}x$ olur. Sərhəd şərtlərini ödəyən həlli tapaq: $y(0) = C_2 = 0$, $y(\pi) = C_1 \sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$. Deməli, $C_2 = 0$, C_1 ədədini sıfırdan fərqli götürmək lazımdır, əks halda tənliyin sıfır həlli alınar. Ona görə $\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$ olar. Buradan $\sqrt{-\lambda}\pi = k\pi$, $k \ne 0$ $-\lambda_k = k^2$, $\lambda_k = -k^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Bu qiymətləri ümumi həlldə yerinə yazaq. $y_k(x) = C_k \sin kx$, $C_k \ne 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

$C_k = 1$ qəbul etsək $y_k(x) = \sin kx$ funksiyası $\lambda_k = -k^2$ məxsusi ədədinə uyğun həll olur. Beləliklə, sonsuz sayda məxsusi ədədlər və sonsuz sayda məxsusi funksiyalar var. $\lambda = 0$ olduqda tənlik $y'' = 0$ şəklinə düşür. Buradan alarıq. $y(x) = C_1 x + C_2$. Sərhəd şərtlərinə əsasən $y(0) = C_2 = 0$, $y(\pi) = C_1\pi = 0$. Deməli, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ olur. Yə'ni $y(x) = 0$ həlli alınır. Bu halda $\lambda = 0$ məxsusi ədəd olmur.

$\lambda > 0$ olduqda $y'' - \lambda y = 0$ tənliyin ümumi həlli $y(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ olur. Sərhəd şərtlərinə əsasən alırıq.

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad y(\pi) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0.$$

Buradan alırıq. $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Deməli, bu halda məxsusi ədəd yoxdur. Beləliklə, baxılan məsələ üçün $-1, -4, -9, \ldots -k^2, \ldots$ ədədləri məxsusi ədədlər, $\sin x$, $\sin 2x, \sin 3x, \ldots \sin kx, \ldots$ məxsusi funksiyalar olur.

YOXLAMA SUALLARI

1. İkitərtibli diferensial tənliklərin ümumi həlli, xüsusi həlli nəyə

deyilir?
2. İkitərtibli diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsi necə qoyulur? Həllin varlığı və yeganəliyi haqqında hansı teoremi bilirsiniz?
3. Tərtibi aşağı salına bilən diferensial tənliklər hansılardır?
4. Sərbəst dəyişən aşkar şəkildə daxil olmayan tənliyi həll etmək üçün hansı əvəzləmə aparılır?
5. Axtarılan funksiya və onun törəmələrinə nəzərən bircins tənlik nəyə deyilir və həll etmək üçün hansı əvəzləmə aparılır?
6. Ümumiləşmiş bircins tənliklər nəyə deyilir və necə həll edilir?
7. İkitərtibli xətti tənlik hansı hallarda həll edilir?
8. Xətti asılı və xətti asılı olmayan funksiyalar nəyə deyilir? Vronski determinantı necə düzəldilir?
9. Fundamental həllər nəyə deyilir?
10. Sabit əmsallı ikitərtibli xətti bircins tənliyin ümumi həlli necə tapılır?
11. Tənliyə uyğun xarakteristik tənlik necə yazılır?
12. Bircins olmayan sabit əmsallı ikitərtibli diferensial tənliklərin xüsusi həlləri hansı hallarda qeyri-müəyyən əmsallar üsulu ilə tapılır?
13. Sabitlərin variasiyası üsulu hansı hallarda tətbiq olunur?
14. n tərtibli sabit əmsallı bircins xətti tənliklər necə həll edilir?
15. n tərtibli xətti diferensial tənliklər ümumi şəkildə necə yazılır? Onlar necə həll edilir?
16. n tərtibli xətti diferensial tənliklər üçün Vronski determinantı necə yazılır? Vronski determinantının köməkliyilə tənlik necə qurulur?
17. Eyler tənliyi necə yazılır? Onun həlli üçün hansı əvəzləmə aparılır?.
18. Diferensial tənliklər sistemi nəyə deyilir? Sistem necə həll edilir?
19. Sabit əmsallı bircins tənliklər sistemi nəyə deyilir? Sistemin xarakteristik tənliyi necə yazılır?
20. Diferensial tənliklər hansı hallarda qüvvət sıralarının köməkliyi ilə həll edilir?
21. Həllin dayanıqlığı nəyə deyilir?
22. Asimptotik dayanıqlı həll dedikdə nə başa düşülür?
23. Xətti diferensial tənliklərin dayanıqlığı və asimptotik dayanıqlığı haqqında teorem nədir?
24. Sabit əmsallı xətti bircins tənliyin dayanıqlı olması üçün zəruri və kafi şərtlər nədən ibarətdir?
25. Qurviç çoxhədlisi nəyə deyilir?
26. Çoxhədlinin Qurviç çoxhədlisi olması üçün hansı zəruri və kafi şərtlər vardır?
27. Birinci yaxınlaşmalar üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?
28. Müsbət-müəyyən funksiya nəyə deyilir?
29. Lyapunov funksiyalar üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?
30. Məxsusi nöqtə nəyə deyilir?

31. Məxsusi nöqtənin hansı tipləri var?
32. Sərhəd məsələsi nəyə deyilir?
33. Qrin funksiyası nəyə deyilir və necə tapılır?
34. Məxsusi ədəd və məxsusi funksiya haqqında məsələ nəyə deyilir?

MÜSTƏQİL HƏLL ETMƏK ÜÇÜN MİSALLAR

Tərtibini aşağı salmaq yolu ilə həll edin

a). Axtarılan funksiya və onun müəyyən tərtibə qədər törəmələri daxil olmayan tənliklər

1. $y'' = x - \sin x$, **CAVAB:** $\left[y = \frac{x^3}{6} + \sin x + C_1 x + C_2 \right]$.
2. $y'' = arctgx$. $\left[y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) arctgx - \frac{x}{2}\ln(x^2+1) + C_1 x + C_2 \right]$.
3. $xy'' = y'$, $\left[y = C_1 x^2 + C_2 \right]$.
4. $y'' = \frac{y'}{x} + xe^x$, $\left[y = (x-1)e^x + C_1 x^2 + C_2 \right]$.
5. $x^2 y'' = y'^2$, $\left[y = \frac{x}{C_1} - \frac{\ln(C_1 x + 1)}{C_1^2} + C_2 \right]$.
6. $2xy'y'' = y'^2 + 1$, $\left[y = \pm \frac{2}{3C_1}(C_1 x - 1)^{\frac{3}{2}} + C_2 \right]$.
7. $xy'' = y' - xy'$, $\left[y = C_1(x+1)e^{-x} + C_2 \right]$.
8. $y'' = y'^2$, $\left[y = -\ln(x + C_1) + C_2 \right]$.

b). Sərbəst dəyişən aşkar şəkildə daxil olmayan tənliklər

1. $y^3 y'' = 1$, $\left[C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2 \right]$.

2. $y''=2yy'$. $\left[y=C_1 tg(C_1x+C_2),\quad \ln\left|\dfrac{y-C_1}{y+C_1}\right| = 2C_1x+C_2,\quad y(C-x)=1,\quad y=C\right]$.

3. $y''=\dfrac{1}{4\sqrt{y}},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-1$. $\left[y=\left(1-\dfrac{3}{4}x\right)^{\frac{4}{3}}\right]$.

4. $yy''+y=y'^2$. $\left[C_1^2y+1=\pm ch(C_1x+C_2),\quad C_1^2y-1=\sin(C_1x+C_2),\quad 2y=(x+C)^2,\quad y=0\right]$.

5. $y''=e^y$, $\left[e^y\sin^2(C_1x+C_2)=2C_1^2,\quad e^y sh^2(C_1x+C_2)=2C_1^2,\quad e^y(x+C)^2=2\right]$.

6. $yy''+1=y'^2$, $\left[C_1y=\pm\sin(C_1x+C_2),\quad C_1y=\pm sh(C_1x+C_2),\quad y=C\pm x\right]$.

c). Axtarılan funksiya və onun törəmələrinə nəzərən bircins olan tənliklər

1. $xyy''-xy'^2=yy'$. $\left[y=C_2e^{C_1x^2}\right]$.

2. $yy''=y'^2+15y^2\sqrt{x}$. $\left[\ln C_2y=4x^{\frac{5}{2}}+C_1x,\quad y=0\right]$.

3. $xyy''+xy'^2=2yy'$. $\left[y^2=C_1x^3+C_2\right]$.

4. $(x^2+1)(y'^2-yy'')=xyy'$. $\left[y=C_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{C_1}\right]$.

5. $x^2yy''=(y-xy')^2$. $\left[y=C_2xe^{\frac{-C_1}{x}}\right]$.

6. $x^2yy''+y'^2=0$. $\left[|y|^{C_1^2+1}=C_2\left(x-\dfrac{1}{C_1}\right)|x+C_1|^{C_1^2},\quad y=C\right]$.

d). Ümumiləşmiş bircins tənliklər

1. $\dfrac{y^2}{x^2}+y'^2=3xy''+\dfrac{2yy'}{x}$. $\left[\dfrac{y}{x}=C_2-3\ln\left|\dfrac{1}{x}-C_1\right|,\quad y=Cx\right]$.

2. $x^2(2yy''-y'^2)=1-2xyy'$. $\left[4(C_1y-1)=C_1^2\ln^2C_2x\right]$

3. $y''=\left(2xy-\dfrac{5}{x}\right)y'+4y^2-\dfrac{4y}{x^2}$. $\left[x^2y=C_1tg(C_1\ln C_2x)\right.$ $\left.C_2(x^2y+C_1)|x|^{2C_1}=x^2y-C_1,\quad x^2y\ln Cx=-1\right]$.

4. $x^4(y'^2-2yy'')=4x^3yy'+1$. $\left[2C_2x^2y=(C_2x-C_1)^2-1,\quad xy=\pm1\right]$.

e). Çevirmələr aparmaqla tənliyin hər tərəfini tam diferensial şəklinə salın və həll edin

1. $yy''=y'(y'+1)$. $\left[C_1y-1=C_2e^{C_1x},\quad y=C-x,\quad y=0\right]$.

2. $y''=xy'+y+1$. $\left[y=e^{\frac{x^2}{2}}\left(C_1\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx+C_2\right)-1\right]$.

3. $yy''+y'^2=1$. $\left[y^2=x^2+C_1x+C_2\right]$.

4. $xy'' = 2yy' - y'$, $\left[y = C_1 tg(C_1 \ln C_2 x),\quad C_2(y + C_1)|x|^{2C_1} = \right.$

$\left. = y - C_1, y\ln Cx = -1\right]$.

Verilmiş bir xüsusi həllinə əsasən ümumi həllini tapın

1. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0, \quad y_1(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $\left[y = C_1\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \right.$

$\left. + C_2\left(\frac{x}{2} + 1 - \frac{x+1}{x}\ln|x+1|\right)\right]$.

2. $xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y_1(x) = \frac{e^x}{x}$, $\left[yx = C_1 e^{-x} + C_2 e^x\right]$.

3. $y'' - 2(1 + tg^2 x)y = 0, \quad y_1(x) = tgx$, $\left[y = C_1 tgx + C_2(1 + xtgx)\right]$.

4. $y'' - y'tgx + 2y = 0, \quad y_1(x) = \sin x$, $\left[y = C_1 \sin x + \right.$

$\left. + C_2\left(2 - \sin x \ln\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)\right]$.

Sabit əmsallı xətti bircins tənliklərin ümumi həllini tapın

1. $y'' + y' - 2y = 0$, $\left[y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}\right]$.

2. $y'' - 4y' + 5y = 0$, $\left[y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)\right]$.

3. $y'' + 6y' + 13y = 0$, $\left[y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\right]$.

4. $y'' - 7y' + 10y = 0$, $\left[y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}\right]$.

5. $y^{IV} - y = 0$, $\left[y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x\right]$.

6. $y''' - 13y' + 12y = 0$, $\left[y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-4x}\right]$.

kiçikdir. Əyrinin $(-3; 4)$ nöqtəsindən keçdiyini bilərək, onun tənliyini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin ixtiyari $M(x,y)$ nöqtəsinin radius-vektorunun uzunluğu $\sqrt{x^2+y^2}$ bərabərdir. Toxunanaltının uzunluğunun $\left|\frac{y}{y'}\right|$ olduğunu nəzərə alsaq, məsələnin şərtinə görə yaza bilərik: $\sqrt{x^2+y^2} = \left|\frac{y}{y'}\right| - x$.

Burada $\left|\frac{y}{y'}\right| = \frac{y}{y'}$ qəbul etsək alınq: $\left(\sqrt{x^2+y^2} + x\right)dy - ydx = 0$.

Tənlik bircins olduğundan $x = zy$ əvəzləməsi aparaq. Onda $dx = zdy + ydz$, $\sqrt{z^2+1}dy - ydz = 0$, $\frac{dy}{y} - \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = 0$,

$$\int\frac{dy}{y} - \int\frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = -\ln C, \quad \ln|y| = \ln\left|z + \sqrt{z^2+1}\right| - \ln C,$$

$$Cy = z + \sqrt{z^2+1}, \quad Cy^2 = x + \sqrt{x^2+y^2}.$$

Buradan $y(-3) = 4$ şərtinə əsasən $16C = -3 + \sqrt{9+16}$, $C = \frac{1}{8}$.

$\frac{y^2}{8} - x = \sqrt{x^2+y^2}$ bərabərliyin hər tərəfini kvadrata yüksəldib sadələşdirsək $y^2 = 16x + 64$ parabolası alınar.

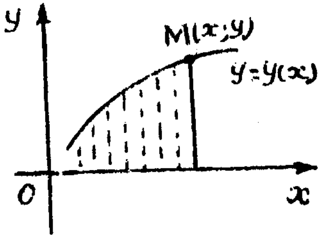
$\left|\frac{y}{y'}\right| = -\frac{y}{y'}$ götürsək $\left(\sqrt{x^2+y^2} + x\right)y' + y = 0$ tənliyi alınar. Bu tənliyi $y(-3) = 4$ şərtini ödəyən həllini yuxarıda göstərilən qayda ilə tapmaq olar.

9. Biri sabit, o biri dəyişən ordinatlarla absis oxu və əyri ilə məhdud olan fiqurun sahəsi, dəyişən ordinatın kubunun dəyişən absisinə olan

nisbətinə bərabərdir. Bu əyrinin tənliyini tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, $M(x,y)$ əyrinin ixtiyari nöqtəsidir (şəkil 13). $x=0$ uyğun ordinatı sabit qəbul etsək, məsələnin şərtinə görə

$$\int_0^x y(s)ds=\frac{y^3}{x}.$$



Şəkil 13.

Buradan y-ə x dəyişəninin funksiyası kimi baxıb törəmə alsaq

$$y=\frac{3y^2y'x-y^3}{x^2}.$$

Bu bərabərlikdən $y'=\dfrac{x^2+y^2}{3xy}$ bircins tənliyini alarıq. Bu tənliyi həll edək.

$$y=ux,\quad dy=udx+xdu,\quad \frac{dx}{x}=\frac{3udu}{1-2u^2},\quad \int\frac{dx}{x}=$$

$$=3\int\frac{udu}{1-2u^2},\quad \ln x=-\frac{3}{4}\ln\left(2u^2-1\right)+\frac{\ln C}{4},\quad 4\ln x+$$

$$+3\ln\left(2u^2-1\right)=\ln C,\quad x^4\left(2u^2-1\right)^3=C.$$

Burada $u=\dfrac{y}{x}$ əvəzləməsini nəzərə alaq.

$$x^4\left(\frac{2y^2-x^2}{x^2}\right)^3=C,\quad \left(2y^2-x^2\right)^3=Cx^2.$$

10. Verilmiş $M_1(-a;0)$ və $M_2(a;0)$ nöqtələrindən əyrinin ixtiyari toxunanına qədər olan məsafələrin hasili sabit olub, b^2-na bərabərdir. Bu əyrini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin $M(x,y)$ nöqtəsində çəkilən toxunanın $Y-y=$

$=y'(X-x)$ tənliyini $y'X-Y-xy'+y=0$ şəklində yazaq. Verilmiş $M_1(-a;0)$ və $M_2(a;0)$ nöqtələrindən bu düz xəttə qədər məsafə uyğun olaraq

$$\delta_1=\frac{\left|-ay'-xy'+y\right|}{\sqrt{1+y'^2}},\quad \delta_2=\frac{\left|ay'-xy'+y\right|}{\sqrt{1+y'^2}}$$

olar. Onda məsələnin şərtinə görə yazmaq olar.

$$\delta_1\delta_2=\frac{\left|(xy'-y)^2-a^2y'^2\right|}{1+y'^2}=b^2.$$

Buradan $\left|(xy'-y)^2-a^2y'^2\right|=(xy'-y)^2-a^2y'^2$ olan hala baxaq. Onda törəməyə nəzərən həll olunmamış

$$y^2-2xy'y+\left(x^2-a^2-b^2\right)y'^2-b^2=0$$

tənliyi alınır. Bu bərabərliyi y-ə nəzərən kvadrat tənlik kimi həll edək:

$$y=xy'+\sqrt{\left(a^2+b^2\right)y'^2+b^2}$$

Alınan Klero tənliyini həll etsək

$$y=Cx\pm\sqrt{\left(a^2+b^2\right)C^2+b^2}$$

ümumi və

$$\begin{cases} x=\mp\dfrac{\left(a^2+b^2\right)p}{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)p^2+b^2}}, \\ y=\pm\dfrac{b^2}{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)p^2+b^2}} \end{cases}$$

parametrik şəklində məxsusi həlli alınır. $a^2+b^2=k^2$ işarə edib, məxsusi həlli

$$\begin{cases} \dfrac{x}{k}=\mp\dfrac{kp}{\sqrt{k^2p^2+b^2}}, \\ \dfrac{y}{b}=\pm\dfrac{b}{\sqrt{k^2p^2+b^2}} \end{cases}$$

şəklində yazıb, hər iki bərabərliyi kvadrata yüksəldib, tərəf-tərəfə toplasaq,

$$\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ellipsi alınar. $\left|(xy'-y)^2-a^2y'^2\right|=-(xy'-y)^2+a^2y'^2$ olan halda

yuxarıda göstərilən qayda ilə $\frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad k^2=a^2-b^2,\ (a>b)$

hiperbolası alınır.

11. Əyrinin ixtiyari nöqtəsində əyrilik radiusu həmin nöqtəyə çəkilmiş normalın absis oxu arasında qalan hissəsinin kubuna bərabərdir. Əyrinin $(0;1)$ nöqtəsindən keçdiyini və həmin nöqtədə toxunanı absis oxuna paralel olduğunu bilərək ,onun tənliyini tapın.

HƏLLİ. Normalın uzunluğu $\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|$, əyrilik radiusu $R=$

$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$ olduğundan məsələnin şərtinə görə yazmaq olar.

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\left(\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|\right)^3$$

Buradan alarıq: $\left|y''y^3\right|=1,\quad y''y^3=\pm1.$

Onda, verilmiş məsələnin həlli $y''y^3=\pm1$ diferensial tənliyinin $y(0)=1,\quad y'(0)=0$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həllinin tapılmasına gətirilir. $y'=p(y)$ əvəzləməsini aparaq:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},\qquad pdp=\pm\frac{dy}{y^3},$$

$$\frac{p^2}{2}=\mp\frac{y^{-2}}{2}+\frac{C_1}{2},\quad p^2=C_1\mp y^{-2},\quad y'^2=C_1\mp y^{-2},$$

Burada başlanğıc şərtləri nəzərə alsaq $C_1=\pm1$, $\quad yy'=\pm\sqrt{\pm y^2\mp1}$,

$$\frac{ydy}{\pm\sqrt{\pm y^2\mp1}}=dx,\quad \pm\sqrt{\pm y^2\mp1}=x+C,\quad y(0)=1,$$

$$\pm\sqrt{\pm y^2\mp1}=x,\quad y^2\pm x^2=1.$$

12. $(1;-2)$ nöqtəsində əyriyə çəkilən toxunan absis oxuna paraleldir. Əyrinin ixtiyari nöqtəsində əyrilik radiusu nöqtənin absisinin kvadratına bərabərdir. Əyrinin tənliyini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin əyrilik radiusu $R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$ düsturu ilə tapılır.

Onda məsələnin şərtinə görə yazmaq olar: $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=x^2,\quad y''>0$

olan halına baxaq. $y'=p(x)$ qəbul edək. Onda $y''=p'(x)$ olduğundan tənlik $x^2p'=(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$ şəklinə düşər. Buradan alarıq.

$$\frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}=\frac{dx}{x^2},\quad \int\frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}=\int\frac{dx}{x^2}+C_1,\quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=C_1-\frac{1}{x}.$$

Əyri $(1;-2)$ nöqtəsindən keçdiyindən və həmin nöqtədə toxunan absis oxuna paralel olduğundan, yə'ni $x=1$ olduqda $y'=p=0$ olduğu üçün axırıncı bərabərlikdən $C_1=1$ alırıq. Onda $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=1-\frac{1}{x}$.

Buradan alırıq.

$$p=\pm\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}},\quad y'=\pm\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}},\quad \int dy=\pm\int\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx,$$

$$y+C_2=\pm\frac{1}{6}(2x-1)^{\frac{3}{2}}\mp\frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}},$$

$$y+C_2=\pm\frac{1}{6}\sqrt{2x-1}[(2x-1)-3],\quad y+C_2=\pm\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}(x-2).$$

Bu hәllәrdәn $y''>0$ şәrtini ödәyәn hәll $y+C_2=\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}(x-2)$ olduğundan vә әyri $(1;-2)$ nöqtәsindәn keçdiyindәn, yә'ni $x=1$ olduqda $y=-2$ olduğu üçün $C_2=\frac{5}{3}$, $3y=\sqrt{2x-1}(x-2)-5$, $y''<0$ üçün $3y=-\sqrt{2x-1}(x-2)-7$ axtarılan әyrinin tәnliyi olur.

13. Əyrinin ixtiyari nöqtәsindәn çәkilmiş normalın absis oxundan ayırdığı parça hәmin nöqtәnin radius-vektorunun kvadratına bәrabәrdir. Əyrinin $(0;3)$ nöqtәsindәn keçdiyini bilәrәk әyrini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin ixtiyari $M(x,y)$ nöqtәsindәn әyriyә çәkilәn normalın tәnliyi: $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$. Normalın absis oxundan ayırdığı parçanı X_0 qәbul etsәk, bu parça normalın Ox oxu ilә kәsişmә nöqtәsinin absisinә bәrabәr olar. Hәmin nöqtәnin koordinatları

$$\begin{cases} Y_0-y=-\frac{1}{y'}(X_0-x), \\ Y_0=0 \end{cases}$$

sistemindәn tapılır: $X_0=x+y\frac{dy}{dx}$, $Y_0=0$. Əyrinin ixtiyari $M(x,y)$ nöqtәsinin radius vektorunun kvadratı x^2+y^2 olduğundan mәsәlәnin şәrtinә görә yaza bilәrik. $x+y\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$.

Buradan alırıq: $y\frac{dy}{dx}-y^2=x^2-x$. Bu tәnlik Bernulli tәnliyidir. Onu hәll etsәk alarıq: $x^2+y^2=Ce^{2x}$.

Əyrinin $(0;3)$ nöqtәsindәn keçdiyini nәzәrә alsaq taparıq: $C=9$.

Onda $x^2+y^2=9e^{2x}$ axtarılan әyri olur.

14. Əyriyә ixtiyari nöqtәdә çәkilәn toxunanın toxunma nöqtәsinin koordinatlarının hәndәsi ortası toxunanın ordinat oxundan ayırdığı parça ilә toxunma nöqtәsinin ordinatının iki mislinә olan nisbәtinә bәrabәrdir. Əyrinin $(1;1)$ nöqtәsindәn keçdiyini bilәrәk, onun tәnliyini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin ixtiyari toxunma $M(x,y)$ nöqtәsinin koordinatlarının hәndәsi ortası $\sqrt{xy}$ olar. Toxunanın ordinat oxundan ayırdığı parça toxunanın Oy oxu ilә kәsişmә nöqtәsinin ordinatına bәrabәrdir. Bu nöqtәnin koordinatları toxunanın tәnliyi ilә Oy oxunun tәnliyindәn ibarәt sistemdәn tapılır:

$$\begin{cases} Y-y=y'(X-x), \\ X=0. \end{cases}$$

Sistemi hәll etsәk alarıq. $Y=y-x\frac{dy}{dx}$, $X=0$. Mәsәlәnin şәrtinә görә yazmaq olar. $\dfrac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y}=\sqrt{xy}$. Buradan alarıq: $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=$ $=-2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$. Bu, Bernulli tәnliyidir. Onu hәll etsәk alarıq: $x-$ $-y(C+x)^2=0$ әyri $(1;1)$ nöqtәsindәn keçdiyindәn yazmaq olar. $C_1=0,\ C_2=-2$. C_1 vә C_2-nin qiymәtlәrini axırıncı tәnlikdә yerinә yazaq. Onda alarıq: $xy=1$, $x=y(x-2)^2$.

15. $y=y(x)$ әyrisi ilә $(y(x)\geq 0,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=1)$ mәhdud olan әyrixәtli trapesin oturacağı $[0,x]$-dir, sahәsi isә y-in $(n+1)$-ci qüvvәti ilә mütәnasibdir. Bu әyrini tapın.

HƏLLİ. Axtarılan әyrini $y=y(x)$ olduğundan tәlәb olunan әyrixәtli trapesin sahәsi $S=\int_0^x y(x)dx$ düsturu ilә tә'yin olunur.

HƏLLİ. Axtarılan əyrini $y = y(x)$ götürək. Onda $[0, x]$ parçasında həmin əyrinin ordinatının orta qiyməti bu əyri ilə məhdud olan əyrixətli trapesin sahəsinin x-ə nisbətinə bərabər olduğundan məsələnin şərtinə görə yaza bilərik:

$$\int_0^x ydx : x = ky.$$

Burada k-mütənasiblik əmsalıdır. Buradan alırıq:

$$\int_0^x ydx = kxy$$

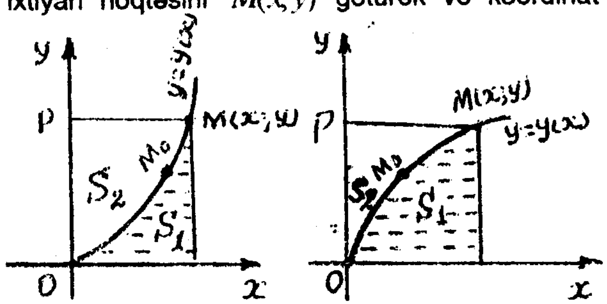
Axırıncı bərabərliyin hər tərəfindən x-ə görə törəmə alaq.

$$y = ky + kxy', \quad kxy' = (1-k)y.$$

Alınan tənliyi dəyişənlərinə ayırıb həll etsək, $y = C\sqrt[k]{x^{1-k}}$ axtarılan əyrilər olar.

21. Əyri koordinat oxları və əyrinin hər bir nöqtəsindən koordinat oxlarına paralel çəkilmiş düz xətlərin əmələ gətirdiyi düzbucaqlını iki hissəyə ayırır. Bu hissələrdən birinin sahəsi o birindən iki dəfə böyükdür. Əyrinin $M_0(3, 3)$ nöqtəsindən keçdiyini bilərək onun tənliyini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin ixtiyari nöqtəsini $M(x, y)$ götürək və koordinat oxlarına paralel düz xətlər çəkək (şəkil 15). Onda alınan düzbucaqlının sahəsi $S = xy$, əyrixətli trapesin sahəsi isə $S_1 = \int_0^x ydx$



Şəkil 15.

olduğundan məsələnin şərtinə əsasən

$$S_2 = 2S_1, \quad S_{OPM} = S_2.$$

Onda yaza bilərik:

$$xy - \int_0^x ydx = 2\int_0^x ydx, \quad xy = 3\int_0^x ydx.$$

Axırıncı bərabərliyin hər tərəfindən x dəyişəninə görə törəmə alaq:

$$y + xy' = 3y, \quad xy' = 2y,$$

Axırıncı tənliyi həll etsək alarıq: $y = Cx^2$

Əyrinin $M_0(3, 3)$ nöqtəsindən keçdiyini nəzərə alsaq yaza bilərik:

$$3 = 9C, \quad C = \frac{1}{3}, \; y = \frac{x^2}{3}$$

$S_1 = 2S_2$ götürsək, yaza bilərik: $2xy = 3\int_0^x ydx$. Bərabərliyin hər tərəfindən x dəyişəninə nəzərən törəmə alsaq $2xy' = y$ tənliyini alarıq. Bu tənliyi həll etsək alarıq. $y = C\sqrt{x}$.

Əyrinin $M_0(3, 3)$ nöqtəsindən keçdiyini nəzərə alsaq taparıq.

$$3 = C\sqrt{3}, \quad C = \sqrt{3}, \; y = \sqrt{3x}.$$

Beləliklə, verilmiş məsələnin şərtini ödəyən iki $y = \frac{x^2}{3}$, $y = \sqrt{3x}$ parabolalarını alırıq.

2. Fiziki məsələlər

Fiziki məsələləri həll edərkən:

1. Hansı kəmiyyətin sərbəst dəyişən, hansının axtarılan funksiya kimi götürmək lazım olduğunu müəyyənləşdirmək, sərbəst dəyişən x kəmiyyəti Δx qədər dəyişdikdə axtarılan $y(x)$ funksiyasının $y(x + \Delta x) - y(x)$ fərqini məsələnin şərtlərinə əsasən ifadə etmək lazımdır. Alınan bərabərliyin hər tərəfini Δx-ə bölüb, $\Delta x \to 0$ şərtində limiti tapılır.
2. Bə'zi məsələlərin həlli zamanı törəmənin fiziki mə'nasından istifadə edilir. Məsələn, t-zaman, $S(t)$-gedilən yol olduqda $\frac{ds}{dt}$ hərə-

kətin sür'ətini, $\frac{d^2s}{dt^2}$ isə tə'cili verir.

3. Bir çox məsələləri həll edərkən fiziki və başqa təbiət elmlərinin qanunlarını tətbiq etmək lazım gəlir. Bu qanunların bə'ziləri məsələnin şərtində verilir.
4. Hərəkət zamanı cismin kütləsi $m(t)$ dəyişən olursa, tə'sir edən qüvvə $\frac{d(mv)}{dt}$-yə bərabər götürülür.
5. Qabda olan maye h səviyyəsindən aşağıda yerləşən kiçik deşikdən axma sür'əti Toriçelli qanununa əsasən $v=\mu\sqrt{2gh}$ düsturu ilə verilir. Burada g-sərbəstdüşmə tə'cili, μ-ixrac əmsalıdır. Su üçün $\mu=0,62$, neft üçün $\mu=0,6$-dır.

1. Həcmi 100 m³ olan otaq havasının 0,14 faizi karbon qazıdır. Otağa fasiləsiz olaraq hər dəqiqə tərkibində 0,05 faiz karbon qazı olan 10m³ hava vurulur və həmin sür'ətlə otaqdan qarışıq çıxır. Nə qədər vaxtdan sonra karbon qazının miqdarı iki dəfə azalır?

HƏLLİ. t anında otaqda olan karbon qazının miqdarını x ilə işarə edək. Δt zamanda otağa $10\Delta t$ m³ qarışıq vurulur. Bunun da tərkibində $\frac{10\cdot 0,05\%}{100\%}\Delta t=0,005\Delta t$ qədər karbon qazı var. Deməli, Δt müddətdə otağa $0,005\Delta t$ miqdarda karbon qazı daxil olur. Δt müddətdə otaqdan çıxarılan $10\Delta t$ miqdarda qarışığın tərkibində $\frac{10}{100}(x+\alpha)\Delta t=0,1(x+\alpha)\Delta t$ qədər karbon qazı var. Onda karbon qazının miqdarının Δt müddətində dəyişməsi

$$x(t+\Delta t)-x(t)=0,005\Delta t-0,1(x+\alpha)\Delta t,\quad \lim_{\Delta t\to 0}\alpha=0$$

şəklində olar. Bərabərliyin hər tərəfini Δt-yə bölüb, $\Delta t\to 0$ şərtində limitə keçsək alarıq:

$$\frac{dx}{dt}=0,005-0,1x.$$

Tənliyi dəyişənlərinə ayırıb, inteqrallasaq alarıq:

$$\int\frac{dx}{0,005-0,1x}=\int dt+\ln C,\quad 0,1x-0,005=Ce^{-0,1t}.$$

Beləliklə, otaqda karbon qazının miqdarının t zamanından asılı olaraq dəyişməsi $x(t)=0,05+Ce^{-0,1t}$ tənliyi ilə müəyyənləşir. Məsələnin şərtinə görə $x(0)=0,14$ olduğundan yaza bilərik:

$$0,14=0,05+C\cdot 1,\quad C=0,09,\quad x(t)=0,05+0,09e^{-0,1t}.$$

Otaqda karbon qazının iki dəfə azalması üçün tələb olunan T zamanı üçün $x(T)=x(0):2=0,07$ olmalıdır. Onda alarıq: $0,07=0,05+$ $+0,09e^{-0,1T}$, $e^{-0,1T}=\frac{2}{9}$, $T=10\ln\frac{9}{2}$.

Deməli, $T=10\ln\frac{9}{2}$ dəqiqədən sonra otaqda karbon qazının miqdarı iki dəfə azalır.

2. Tutumu 3000 litr olan çəndə tərkibində 10 kq duz olan 100 litr su məhlulu var. Çənə fasiləsiz olaraq hər dəqiqədə 30 litr təmiz su vurulur, məhlul ilə qarışdırılır və dəqiqədə 20 litr məhlul axıdılır. çən yarıya qədər dolduqda alınan məhlulda olan duzun miqdarını tapın.

HƏLLİ. t anında çəndə $100+(30-20)t=100+10t$ məhlul olur. t anında məhlulda olan duzun miqdarını $x(t)$ ilə işarə edək. Δt müddətində məhlulda olan duzun miqdarının dəyişəmsinə baxaq.

Aşkardır ki, $x(t)-x(t+\Delta t)$ fərqi Δt zamanda çəndən çıxan duzun miqdarı olur. Bu müddət ərzində məhlulun qatılığı (konsentrasiyası) $\frac{x(t)}{100+10t}$-dən $\frac{x(t+\Delta t)}{100+10(t+\Delta t)}$-ə qədər azalır. Odur ki,

$$\frac{x(t+\Delta t)}{100+10(t+\Delta t)}20\Delta t\le x(t)-x(t+\Delta t)\le\frac{x(t)}{100+10t}20\Delta t.$$

Buradan $\Delta t>0$ olduğundan

$$\frac{x(t+\Delta t)}{100+10(t+\Delta t)}20\le\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\le\frac{x(t)}{100+10t}20.$$

Proses kəsilməz olduğu üçün $\lim\limits_{\Delta t\to 0} x(t+\Delta t)=x(t)$. Onda axırıncı bərabərsizlikdə $\Delta t\to 0$ şərtində limitə keçsək alarıq:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{20x(t)}{100t+10t},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2x}{10+t}.$$

Alınan tənliyin $x(0)=10$ başlanğıc şərtini ödəyən həlli

$$x(t)=\frac{1000}{(10+t)^2}.$$

Çənin yarıyı qədər $(1500l)$ dolma müddəti: $1500=100+10T$, $T=140$ dəqiqə. Onda həmin andı $(T=140)$ məhlulda olan duzun miqdarı

$$x(140)=\frac{1000}{(10+140)^2}=\frac{2}{45}\text{kq}.$$

3. Kütləsi m olan maddi nöqtə h yüksəklikdən ağırlıq qüvvəsinin tə'siri altında yerə düşür (müqavimət qüvvəsi nəzərə alınmır). Düşmə qanununu tapın.

HƏLLİ. $y(t)$ ilə maddi nöqtənin t anında yer səviyyəsindən olan məsafəsini işarə edək. Nyutonun ikinci qanununa əsasən

$$F=ma,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g.$$

Axırıncı tənliyi həll edək.

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d(y')}{dt}=-g,\quad d(y')=-gdt,\quad \int d(y')=-g\int dt+C_1,$$

$$y'=-gt+C_1,\quad \frac{dy}{dt}=-gt+C_1,\quad \int dy=-g\int tdt+C_1\int dt+C_2,$$

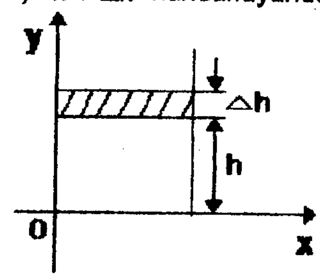
$$y=-\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2.$$

Beləliklə, $y=-\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2$ verilmiş məsələnin ümumi həlli olur.

C_1 və C_2 ixtiyari sabitləri tapmaq üçün başlanğıc şərtlərdən istifadə edək. Tutaq ki, $t=0$ olduqda nöqtə yerdən h məsafədə olub, sür'əti sıfıra bərabərdir: $y(0)=h$, $y'(0)=0$. Onda yazmaq olar: $y'=-gt+C_1$, $0=0+C_1$, $C_1=0$, $h=0+0+C_2$, $h=C_2$. $y=h-\frac{gt^2}{2}$ verilmiş məsələnin həlli olur.

4. Boyl-Mariott qanununa əsasən atmosfer təzyiqi havanın sıxlığı ilə mütənasibdir. Dəniz səviyyəsində təzyiqin 1 kq/sm^2, sıxlığın 0,0012 q/sm^3 olduğunu bilərək atmosfer təzyiqinin dəniz səviyyəsindən olan yüksəklikdən asılılığını tapın.

HƏLLİ. Dəniz səviyyəsindən olan yüksəkliyi h ilə, atmosfer təzyiqini $P(h)$ işarə edək. Dəniz səviyyəsində ölçüsü $1\,\text{m}^2$ olan sahə və bu sahə üzərində prizmatik hava sütunu götürək. Bu sütunun h hündürlüyündə kəsiyinə baxaq (şəkil 16). $h+\Delta h$ hündürlüyündə hava sütunun ikinci bir kəsiyini keçirək. h hündürlükdə atmosfer təzyiqini $P(h)$, $h+\Delta h$ hündürlükdə isə $P(h+\Delta h)$ olar. Göstərilən hündürlükdə təzyiqin fərqi $\Delta P(h)=P(h+\Delta h)-P(h)<0$ (azalan proses olduğu üçün) ədədi qiymətcə kəsiklər arasında qalan havanın çəkisinə bərabərdir. $\Delta P(h)=-\Delta mg$.



Şəkil 16.

Burada Δm-havanın kütləsi, g-sərbəstdüşmə tə'cilidir. Kəsiyin həcmi $\Delta v=S\Delta h=\Delta h$, $\left(S=1\,\text{m}^2\right)$ olduğundan $\Delta m=\rho_0\Delta h$ olar. Burada ρ_0-götürülən Δh kəsiyində havanın orta sıxlığıdır. Deməli, $\Delta p(h)=-g\rho_0\Delta h$ olur. Bu bərabərliyin hər tərəfini Δh bölüb, $\Delta h\to 0$ şərtində limit alsaq, $\frac{dp}{dh}=-g\rho(h)$ tənliyi alınar, burada $\rho(h)$

ilə h hündürlüyündə havanın sıxlığı işarə olunmuşdur. Boyl-Mariott qanununa görə təzyiq havanın sıxlığı ilə mütənasibdir: $p(h) = b\rho(h)$. Buradan

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{g}{b}p(h).$$

Bu, dəyişənlərinə ayrılan tənliyi həll etsək alarıq:

$$\int\frac{dp}{p} = -\frac{g}{b}\int dh + \ln C, \quad \ln p = -\frac{g}{b}h + \ln C, \quad p(h) = Ce^{-\frac{g}{b}h}.$$

$p(0) = 1\,\text{kq/sm}^2$, $\rho(0) = 0{,}0012\,\text{q/sm}^3$, $p(0) = b\rho(0)$ şərtlərinə əsasən

$$C = 1, \quad \frac{g}{b} = \frac{g\rho(0)}{p(0)} = \frac{g\cdot 0{,}0012\,\text{q/sm}^3}{g\cdot 100\,\text{q/sm}^2} = \frac{0{,}0012}{1000\,\text{sm}} = 0{,}12\frac{1}{\text{km}}.$$

Beləliklə, h km hündürlükdə atmosfer təzyiqi $p(h) = e^{-0{,}12h}$ düsturu ilə tə'yin olunur.

5. Qatar $90\,\text{km/saat}$ sür'ətlə hərəkət edir. Tormozlanma zamanı müqavimət qüvvəsinin onun çəkisinin $0{,}3$-nə bərabər olduğunu bilərək qatarın hansı vaxta və hansı məsafədə dayanacağını tə'yin edin.

HƏLLİ. Qatarın kütləsi m, çəkisi $P = mg$, tormozlanmadan sonrakı t zamanda gedilən yol $S(t)$ olarsa, Nyutonun ikinci qanununa görə

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = -0{,}3mg.$$

Buradan alarıq: $\dfrac{d^2S}{dt^2} = -0{,}3g, \quad \dfrac{dS}{dt} = -0{,}3gt + C_1, \quad S(t) =$

$$= -0{,}3\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2, \quad S(t) = -0{,}15gt^2 + C_1t + C_2.$$

Şərtə görə $S(0) = 0, \quad S'(0) = 90\dfrac{\text{km}}{\text{saat}}$. Onda alarıq.

$$C_2 = 0, \quad C_1 = 90\frac{\text{km}}{\text{saat}} = 25\frac{\text{m}}{\text{san}}, \quad S(t) = -0{,}15gt^2 + 25t.$$

Qatarın tormozlanmadan sonra dayanması vaxtını $S'(T) = 0$ tənliyindən tapmaq olar: $S'(T) = -0{,}3Tg + 25 = 0, \quad T = \dfrac{25}{0{,}3g} \approx 8{,}5\,\text{san}$.

Tormozlanmadan sonra gedilən yolu tapmaq üçün qatarın hərəkət qanununda $t = T = 8{,}5$ san götürmək lazımdır:

$$S = -0{,}15\cdot 9{,}81(8{,}5)^2 + 25\cdot 8{,}5 \approx 106{,}3\,\text{m}.$$

6. Güllə $V_0 = 400\dfrac{\text{m}}{\text{san}}$ sür'ətlə $h = 20\,\text{sm}$ qalınlığında divara daxil olur və $V_1 = 100\dfrac{\text{m}}{\text{san}}$ sür'ətlə oradan çıxır. Divarın müqavimət qüvvəsinin güllənin hərəkət sür'ətinin kvadratı ilə mütənasib olduğunu qəbul edərək, güllənin divarı deşmə müddətini tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, güllənin kütləsi m, t anında divarda keçdiyi yol $S = S(t)$-dir. Burada t-güllənin divara daxil olduğu vaxtdan hesablanır. Onda güllənin divarda hərəkət tənliyi Nyutonun ikinci qanununa görə tapılır:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = -k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2.$$

Buradan alarıq:

$\dfrac{d^2S}{dt^2} = -a\left(\dfrac{dS}{dt}\right)^2, \quad a = \dfrac{k}{m}, \quad v = \dfrac{dS}{dt}, \quad \dfrac{d^2S}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt}$ olduğunu nəzərə alsaq axırıncı tənliyi $\dfrac{dv}{dt} = -av^2$ şəklində yazmaq olar. Tənliyi dəyişənlərinə ayırıb inteqrallasaq alarıq:

$$\int\frac{dv}{v^2} = -a\int dt - C_1, \quad -\frac{1}{v} = -at - C_1, \quad v = \frac{1}{at + C_1}.$$

$t = 0$ olduqda $v = 400\dfrac{\text{m}}{\text{san}}$ olduğundan axırıncı bərabərlikdən

$C_1 = \frac{1}{400}$, $v(t) = \frac{400}{1+400at}$. $v = \frac{dS}{dt}$ olduğundan yazmaq olar:

$\frac{dS}{dt} = \frac{400}{1+400at}$. Dəyişənləri ayırıb inteqrallasaq alarıq:

$$S(t) = \frac{1}{a}\ln(1+400at) + C_2.$$

Məsələnin şərtinə görə yaza bilərik. $S(0) = 0$, $v(0) = 400$, $S(T) = 20sm = 0{,}2m$, $v(T) = 100\frac{m}{san}$. Burada T güllənin divarda hərəkət müddətidir: Onda $1 + 400\,aT = 4$, $aT = \frac{3}{400}$, $0{,}2 = \frac{1}{a}\ln\left(1+400\cdot\frac{3}{400}\right)$, $a = 10\ln 2$. $T = \frac{3}{4000\ln 2} \approx 0{,}001san$.

Beləliklə, güllə divarı $T = 0{,}001san$ müddətdə deşib keçir.

7. Çənin en kəsiyinin $S = s(h)$ sahəsi h hündürlüyünün mə'lum funksiyasıdır. Çən H səviyyəsinə qədər su ilə doldurulmuşdur. Çənin dibində sahəsi S_0 olan deşikdən çəndəki su axıdılır. Çəndəki suyun H səviyyəsindən $0 \le h \le H$ səviyyəsinə qədər enmə və tam boşalma vaxtını tapın. Suyun azalma sür'ətinin $v(h) = \mu\sqrt{2gh}$ olduğunu nəzərə alın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında çəndə olan suyun səviyyəsi h-dır. Δt zaman müddətində, yə'ni t anından $t+\Delta t$ anına qədər çəndən axıdılan suyun miqdarını Δv ilə işarə edək. Onda çəndən axan suyun miqdarı hər an oturacağın sahəsi S_0, hündürlüyü $v(h)$ olan silindrin həcminə bərabər olduğunu qəbul edərək yazmaq olar: $\Delta v = S_0 v(h)\Delta t$

Digər tərəfdən, su çəndən axıdıldığı Δt müddətində suyun h səviyyəsi $\Delta h < 0$ qədər aşağı düşür. Ona görə də Δt müddətində çəndən $\Delta v = -s(h)\Delta h$ qədər su axıdılır. Deməli, $-s(h)\Delta h = S_0 v(h)\Delta t$.

Bərabərliyin hər tərəfini Δt-yə bölüb, $\Delta t \to 0$ şərtində limitə keçsək

alarıq:

$$-s(h)\frac{dh}{dt} = S_0 v(h)$$

Toriçelli qanununa əsasən $v(h) = \mu\sqrt{2gh}$, $\mu = 0{,}62$ oldluğundan yaza bilərik:

$$dt = -\frac{s(h)}{S_0\mu\sqrt{2gh}}dh, \quad t = -\frac{1}{S_0\mu\sqrt{2g}}\int_H^h \frac{s(x)}{\sqrt{x}}dx.$$

Beləliklə, alırıq ki, çəndə suyun səviyyəsinin $0 \le h \le H$ olması üçün keçən vaxt

$$t = \frac{1}{S_0\mu\sqrt{2g}}\int_h^H \frac{s(x)}{\sqrt{x}}dx$$

ilə tə'yin olunur. Çəndə su qurtardıqda $h = 0$ olur. Bu hala uyğun T vaxtı

$$T = \frac{1}{S_0\mu\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{s(x)}{\sqrt{x}}dx$$

bərabərliyi ilə müəyyənləşir.

Bu düsturlardan istifadə edərək aşağıdakı məsələni həll edək:

Oturacığının diametri 4m, hündürlüyü 6m olan dairəvi silindrik çən şaquli vəziyyətdə qoyulmuşdur. Çənin dibində radiusu $r = \frac{1}{12}$m olan deşik açılmışdır. Çənin su ilə dolu olduğunu nəzərə alaraq, suyun həmin deşikdən axıb qurtarması müddətini tapın.

HƏLLİ. Baxılan hal üçün $S(h) = \pi\frac{D^2}{4} = 4\pi$, $S_0 = \pi r^2 = \frac{\pi}{144}$, $\mu = 0{,}62$, $H = 6$, $g = 9{,}81$ olduğundan

$$T = \frac{4\pi}{\frac{\pi}{144}0{,}62\sqrt{19{,}62}}\int_0^6 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{4\cdot 144}{0{,}62\sqrt{19{,}62}}2\sqrt{x}\Big|_0^6 =$$

$$=\frac{576\cdot 2\sqrt{6}}{2{,}746}\approx 1028\,\text{san}=17{,}13\ \text{dəq}.$$

8. Kütləsi m olan cisim düz xətt boyunca hərəkət edir. Cismə hərəkət istiqamətinin əksinə yönəlmiş və qiyməti gedilən məsafə ilə mütənasib qüvvə tə'sir edir. Mütənasiblik əmsalını ω^2 qəbul edərək, cismin hərəkət qanununu tapın.

HƏLLİ. Cismin t anında qət etdiyi məsafəni $S(t)$ ilə işarə edək. Nyutonun ikinci qanununa görə $F=ma$. Digər tərəfdən $a=\frac{d^2S}{dt^2}$ və şərtə görə $F=-\omega^2 S$ olduğundan yaza bilərik:

$$m\frac{d^2S}{dt^2}+\omega^2 S=0.$$

Bu sabit əmsallı xətti bircins diferensial tənlikdir. Onun xarakteristik tənliyini yazıb həll edək:

$$mk^2+\omega^2=0,\quad k_{1,2}=\pm\frac{\omega}{\sqrt{m}}i,\quad S(t)=C_1\cos\frac{\omega}{\sqrt{m}}t+C_2\sin\frac{\omega}{\sqrt{m}}t.$$

9. Bircins ip masa üzərinə qoyulmuşdur. İpin bir ucu masadan a məsafə hündürlükdə yerləşən blokdan keçirilib, uzunluğu $2a$-ya bərabər olan hissəsi şaquli aşağı yönəlmişdir. İpin bu ucu sıfır başlanğıc sür'əti ilə öz ağırlıq qüvvəsinin tə'siri altında aşağıya sürüşür. Sürüşmə qüvvəsinin hərəkət sür'ətinin kvadratına bərabər olduğunu bilərək sürüşmə sür'ətinin gedilən yoldan asılılığını tapın. İpin vahid uzunluğunun kütləsini vahid qəbul edin.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında ipin hərəkət edən ucunun blokdan olan məsafəsi $s(t)$-dir. İpə $s(t)$ uzunluğunun ağırlıq qüvvəsi, hərəkətin əksinə yönəlmiş a uzunluğunda ipin ağırlıq qüvvəsi və v^2 $\left(v=\frac{ds}{dt}\right)$-müqavimət qüvvəsi tə'sir edir. İpin hərəkətdə olan hissəsi $s+a$ olduğundan $m(t)=s(t)+a$ kütləsi zamandan asılı dəyişir. Odur ki, hərəkətin diferensial tənliyi üçün alırıq:

$$\frac{d(mv)}{dt}=(s-a)g-v^2,\quad (s+a)\frac{dv}{dt}+2v^2=(s-a)g.$$

Alınan tənliyi $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=v\frac{dv}{ds}$, $\quad (s+a)v\frac{dv}{ds}+2v^2=(s-a)g$ şəklində yazaq. Bu tənlik Bernulli tənliyidir. Onu həll etsək alarıq:

$$(s+a)^4v^2=C+\frac{2g}{5}(s+a)^5-ag(s+a)^4.$$

Buradan $v(2a)=0$ şərtini nəzərə alsaq, $C=-\frac{81ga^5}{5}$,

$$v=\frac{1}{(s+a)^2}\sqrt{\frac{g}{5}\left[(2s-3a)(s+a)^4-81a^5\right]}.$$

10. Hamar qarmaqdan asılmış zəncir aşağıya sürüşür. Hərəkət başlayan anda qarmağın bir tərəfində zəncirin uzunluğu 10m, o biri tərəfdə isə 8m-dir. Müqavimət qüvvəsini nəzərə almadan aşağıdakıları tapın.
1) hansı vaxtdan sonra zəncir sərbəst düşməyə başlayır?
2) zəncir sərbəst düşməyə başlayanda onun sür'əti nəyə bərabərdir?

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında zəncirin sürüşən hissəsinin uzunluğu $S(t)$-yə bərabərdir. Zəncirə, sürüşməsinə səbəb olan, zəncirin $S(t)$ uzunluğunun ağırlıq qüvvəsi və əks istiqamətə yönəlmiş $(18-S(t))$ uzunluğunun ağırlıq qüvvəsi tə'sir edir. Ona görə Nyutonun ikinci qanununa əsasən hərəkətin diferensial tənliyi üçün yazmaq olar:

$$18\delta\frac{d^2S}{dt^2}=\delta gS-\delta g(18-S).$$

Burada δ-zəncirin 1m uzunluqda olan hissəsinin kütləsidir. Diferensial tənliyi

$$9\frac{d^2S}{dt^2}=g(S-9)$$

şəklində yazıb həll edək. $\frac{dS}{dt}=v$, $\frac{d^2S}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dS}\frac{dS}{dt}=v\frac{dv}{dS}$ nəzərə alsaq $9v\frac{dv}{dS}=g(S-9)$, $9vdv=g(S-9)dS$.

$$\frac{9}{2}v^2=\frac{g}{2}(S-9)^2+\frac{C_1}{2},\quad 9v^2=g(S-9)^2+C_1.$$

Başlanğıc anda $v(10)=0$, $g+C_1=0$, $C_1=-g$ olur. Onda yazmaq olar: $9v^2=g(S-9)^2-g$, $v=\frac{\sqrt{g}}{3}\sqrt{(S-9)^2-1}$.

$S=18\,\text{m}$ olduqda zəncir sərbəst düşməyə başlayır. Onda

$$v(18)=\frac{\sqrt{g}}{3}\sqrt{80}\approx 9{,}3\,\text{m/san}$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{g}}{3}\sqrt{(S-9)^2-1},\quad \frac{dS}{\sqrt{(S-9)^2-1}}=\frac{\sqrt{g}}{3}dt,$$

$$\int\frac{dS}{\sqrt{(S-9)^2-1}}=\frac{\sqrt{g}}{3}\int dt+C_2,\quad \ln\left|S-9+\sqrt{(S-9)^2-1}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{g}}{3}t+C_2$$

$t=0$, $S(0)=10$ olduğundan $C_2=0$ alınq. Onda yazmaq olar:

$$t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln\left(S-9+\sqrt{(S-9)^2-1}\right).$$

$S=18\,\text{m}$ olduqda zəncir qarmaqdan sürüşmüş olur. Onda axırıncı bərabərlikdən alarıq:

$$T=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln\left(9+\sqrt{80}\right)\approx 2{,}9\,\text{san}.$$

11. $v_0=5\,\text{m/san}$ sür'ətlə hərəkət edən motorlu qayığın motoru söndürülür. Hərəkət zamanı qayığa onun sür'ətinin kvadratı ilə mütənasib olan müqavimət qüvvəsi tə'sir edir (mütənasiblik əmsalı $k=\frac{m}{50}$-dir. Burada m qayığın kütləsidir). Hansı vaxtdan sonra qayığın sür'əti iki dəfə azalır və bu müddət ərzində qayıq nə qədər yol gedər?

HƏLLİ. Motor sönəndən sonrakı t anında qayığın getdiyi yolu $S(t)$ ilə işarə edək. Onda Nyutonun ikinci qanununa görə yaza bilərik:

$$m\frac{d^2S}{dt^2}=-k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2,\quad \frac{d^2S}{dt^2}=-\frac{1}{50}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2.$$

Burada $\frac{dS}{dt}=v$ qəbul edib, tənliyi həll edək: $\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{50}v^2$, $\frac{dv}{v^2}=$

$$=-\frac{dt}{50},\quad \int\frac{dv}{v^2}=-\frac{1}{50}\int dt-C,\quad -\frac{1}{v}=-\frac{1}{50}t-C,\quad v=\frac{50}{t+C}.$$

Şərtə görə $v(0)=5$ olduğundan $C=10$, $v(t)=\frac{50}{t+10}$.

Qayığın sür'ətinin iki dəfə azalması üçün lazım olan vaxtı T ilə işarə etsək yaza bilərik. $v(T)=\frac{1}{2}v(0)$, $v(T)=2{,}5$, $2{,}5=\frac{50}{T+10}$, $T=10\,\text{san}$. Deməli, $T=10\,\text{san}$ müddətində qayığın sür'əti iki dəfə azalır. Bu müddət ərzində qayığın getdiyi yolu tapaq:

$$v=\frac{dS}{dt}=\frac{50}{t+10},\quad \int dS=50\int\frac{dt}{t+10},\quad S=50\ln(t+10)+C_2.$$

$S(0)=0$ başlanğıc şərtini nəzərə alsaq $C_2=-50\ln 10$,

$$S(t)=50\ln(t+10)-50\ln 10=50\ln\left(1+\frac{t}{10}\right),$$

$$S(10)=50\ln\left(1+\frac{10}{10}\right)=50\ln 2\approx 34{,}66\,\text{m}.$$

12. Paraşütlə birlikdə çəkisi P olan paraşütçü h hündürlükdən sərbəst düşür. Havanın müqavimət qüvvəsi $F_1=-v^2(t)$ olduğunu bilərək, paraşütçünün $v(t)$ sür'ətinin t zamanından asılılığını və yerə düşmə vaxtını tapın.

HƏLLİ. t anda düşmə məsafəsini $S(t)$ ilə işarə etsək, paraşütçünün paraşütlə birlikdə çəkisi $P = mg$ olduğundan Nyutonun ikinci qanununa əsasən yaza bilərik:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = mg - \left(\frac{dS}{dt}\right)^2, \quad \frac{dv}{dt} = g - kv^2, \quad k = \frac{1}{m}.$$

Tənliyi dəyişənlərinə ayırıb inteqrallasaq alarıq:

$$\int\frac{dv}{g-kv^2} = \int dt + \ln C, \quad \frac{1}{2\sqrt{kg}}\ln\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v} = t+\ln C,$$

$$\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v} = Ce^{2\sqrt{kg}t}, \quad v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{Ce^{2\sqrt{kgt}}-1}{Ce^{2\sqrt{kgt}}+1}.$$

$v(0)=0$ başlanğıc şərtini nəzərə alsaq yaza bilərik:

$$0=\sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{C-1}{C+1}, \quad C=1,\ v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{kgt}}-1}{e^{2\sqrt{kgt}}+1}=\sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{kgt}}-e^{-\sqrt{kgt}}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{kgt}}+e^{-\sqrt{kgt}}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{g}{k}}\,th\left(\sqrt{kgt}\right).$$

Axırıncı bərabərlikdən $v=\frac{dS}{dt}$ olduğundan yaza bilərik:

$$\frac{dS}{dt}=\sqrt{\frac{g}{k}}\,th\left(\sqrt{kgt}\right) \quad \int dS = \sqrt{\frac{g}{k}}\int th\left(\sqrt{kgt}\right)+C_2,$$

$$S(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{1}{\sqrt{kg}}\ln\left[ch\left(\sqrt{kgt}\right)\right]+C_2=\frac{1}{k}\ln\left[ch\left(\sqrt{kgt}\right)\right]+C_2$$

$S(0)=0$ şərtini burada nəzərə alsaq $C_2=0$, $S(t)=$

$=\dfrac{1}{k}\ln\left[ch\left(\sqrt{kgt}\right)\right]$. T düşmə vaxtını $S(T)=h$ şərtindən tapılır:

$$h=\frac{1}{k}\ln\left[ch\left(\sqrt{kgT}\right)\right], \quad ch\left(\sqrt{kgT}\right)=e^{hk}, \quad e^{\sqrt{kgT}}+e^{-\sqrt{kgT}}=2e^{hk},$$

$e^{\sqrt{kgT}}=\lambda$ işarə etsək alarıq:

$$\lambda+\frac{1}{\lambda}=2e^{hk}, \quad \lambda^2-2e^{hk}\lambda+1=0, \quad \lambda_{1,2}=e^{hk}\pm\sqrt{e^{2hk}-1}.$$

$$e^{\sqrt{kgT}}=e^{hk}+\sqrt{e^{2hk}-1}, \quad \sqrt{kg}T=\ln\left(e^{hk}+\sqrt{e^{2hk}-1}\right),$$

$$T=\frac{1}{\sqrt{kg}}\ln\left(e^{hk}+\sqrt{e^{2hk}-1}\right).$$

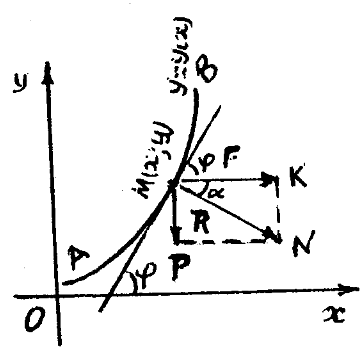
Beləliklə, $v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}\,th\left(\sqrt{kg}\,t\right)$ paraşütçünün düşmə sür'əti, $T=$ $=\dfrac{1}{\sqrt{kg}}\ln\left(e^{hk}+\sqrt{e^{2hk}-1}\right)$ düşmə vaxtı olur.

$t\to\infty$ şərtində $th\left(\sqrt{kgt}\right)\to 1$ olduğundan $t\to\infty$ şərtində $v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}=const$ alınq. Başqa sözlə, müəyyən bir müddətdən sonra paraşütçünün sür'ətini sabit qəbul etmək olar.

13. Kütləsi m olan maddi nöqtə şaquli ox ətrafında sabit ω bucaq sür'ətilə fırlanan AB əyrisi üzərindən yerləşmişdir. Maddi nöqtənin əyrinin ixtiyari nöqtəsində tarazlıqda olduğunu bilərək AB əyrisinin tənliyini tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, maddi nöqtə əyrinin $M(x,y)$ nöqtəsində yerləşir (şəkil 17). Reaksiya qüvvəsi AB əyrisinə $M(x,y)$ nöqtəsində çəkilmiş normal istiqamətdə yönəldiyindən mərkəzəqaçma qüvvəsinin və ağırlıq qüvvəsinin əvəzləyici qüvvəsi $\vec{R}$ də normal boyunca yönəlmişdir. Maddi nöqtəyə M nöqtəsində $\vec{P} = mg$ ağırlıq qüvvəsi və $\vec{F} = m\omega^2 x$ mərkəzəqaçma qüvvəsi tə'sir edir. Burada m-kütlə, g-sərbəstdüşmə tə'cilidir. Tutaq ki, AB əyrisinin tənliyi $y = y(x)$ şəklindədir. Onda $tg\varphi = y'$, $\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $tg\alpha = \frac{1}{tg\varphi} = \frac{1}{y'}$.

ΔMKN-dən $tg\alpha = \frac{P}{F} = \frac{mg}{m\omega^2 x}$,



Şəkil 17.

$tg\alpha = \frac{g}{\omega^2 x}$. Onda yaza bilərik.

$\frac{1}{y'} = \frac{g}{\omega^2 x}$, $gy' = \omega^2 x$. Axırıncı tənliyi inteqrallasaq $y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + C$ parabolalar ailesi alınar.

14. Maddi nöqtə sabit a tə'cili ilə düzxət boyunca hərəkət edir. Nöqtənin hərəkət qanununu tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında nöqtə $S = S(t)$ məsafəsini qət edir. Onda

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = a, \quad \frac{dS}{dt} = at + C_1, \qquad S = \frac{a^2 t}{2} + C_1 t + C_2 .$$

$S(0) = S_0$, $S'(0) = v_0$ qəbul etsək axırıncı bərabərlikdən $C_2 = S_0$, $C_1 = v_0$ alarıq. Onda hərəkət qanunu $S(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + S_0$ şəklinə düşər. Bu, maddi nöqtənin hərəkət qanunudur. Bu tənlikdə $S_0 = 0$, $v_0 = 0$, $a = g$, $S = h$ qəbul etsək boşluqda sərbəst düşən cismin hərəkət qanununu alarıq. $v = gt$, $h = \frac{1}{2}gt^2$

15. En kəsiyinin sahəsi F, uzunluğu L_0 olan polad məftil P qiymətinə qədər artan qüvvənin tə'siri altında dartılır. Dartılma vaxtı görülən işi tapın.

HƏLLİ. P(kq) qüvvəsinin tə'siri altında dartılan məftilin uzanması ΔL(m) Huk qanununa görə hesablanır: $\Delta L = k\frac{\Delta P}{F}L_0$. Burada k-uzanma əmsalı, L_0-məftilin əvvəlki uzunluğudur.

Dartılmanın elementar prosesini belə yaza bilərik. $dL = k\frac{L_0}{F}dP$.

Onda həmin qüvvənin bu uzanma vaxtı gördüyü iş $dA = PdL$ olduğundan $dA = \frac{kL_0}{F}PdP$ tənliyi alınar. Tənliyi inteqrallasaq alarıq: $A = \frac{kL_0}{2F}P^2 + C$. Burada $P = 0$ olduqda $A = 0$ olduğunu nəzərə alsaq $C = 0$, $A = \frac{kL_0}{2F}P^2$.

16. Uzunluğu L(m) olan polad məftil bir ucundan bərkidilmişdir və öz ağırlığının tə'siri altında müvazinətdədir. Məftilin nə qədər uzandığını tapın. Poladın xüsusi çəkisi $\gamma\left(T/m^3\right)$.

HƏLLİ. Dartılma T qüvvəsinin qiyməti məftilin hər bir kəsiyinin yerindən asılıdır. Bu dartılma qüvvəsi məftilin kəsikdən aşağıda qalan hissəsinin çəkisinə bərabərdir. Məftilin ucunun bərkidildiyi nöqtədən x məsafəsində olan nöqtədə

$$\frac{T}{P} = \frac{L - x}{L}$$

tənasübündən tapılan T dartılma qüvvəsi tə'sir edir. Burada P məftilin çəkisidir. Buradan alarıq.

$$T = \frac{P}{L}(L - x)$$

Məftilin Δl uzanması üçün yazmaq olar (Huk qanunu):

$$\Delta l = k\frac{T}{F}l.$$

Burada k-uzanma əmsalı, F-məftilin en kəsiyidir (sm²). dx elementinin dartılması üçün

$$dl = k\frac{T}{F}dx, \quad dl = \frac{kP}{LF}(L-x)dx.$$

Digər tərəfdən $P = \frac{\gamma LF}{1000}$ (kq), L (sm) qəbul etsək

$$dl = \frac{k\gamma}{1000}(L-x)dx$$

yazmaq olar. Bu tənliyi inteqrallasaq məftilin tam uzanmasını alarıq.

$$l = \frac{k\gamma}{1000}\int_0^L (L-x)dx, \quad l = \frac{k\gamma}{2000}L^2.$$

17. Həcmi $v_0 = 0{,}1\ \mathrm{m}^3$ olan silindrik qabda hava porşen vasitəsilə adiobatik (ətraf mühitə istilik ötürmür) olaraq $v_1 = 0{,}01\ \mathrm{m}^3$ həcmə qədər sıxılır. Sıxılma vaxtı görülən işi tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, S-porşenin sahəsi, v-qazın həcmi, P-porşen x yüksəklikdə olduğu vaxt qazın təzyiqidir. dx-sıxılma vaxtı porşenin elementar yerdəyişməsi, dA-elementar iş, dv-elementar həcm, P_0-qazın başlanğıc təzyiqi, v_0-qazın başlanğıc həcmidir. Porşen aşağı düşərkən görülən elementar iş $dA = -PSdx$ olar. Digər tərəfdən $Sdx = dv$. Onda $dA = -Pdv$.

Qaz öz halını adiobatik halda dəyişərsə, onun təzyiqi və həcmi Puasson tənliyi ilə ifadə olunur.

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^k$$

Burada k-hər bir qaz üçün sabit olan kəmiyyətdir. Hava üçün $k = 1{,}4$ -dür. $P_0 = 1030\ \mathrm{kq/m^2}$-atmosfer təzyiqidir. Puasson tənliyində əsasən

$$P = P_0\left(\frac{v_0}{v}\right)^k, \quad dA = -P_0\left(\frac{v_0}{v}\right)^k dv.$$

Axırıncı tənliyi inteqrallasaq alarıq: $A = \frac{P_0 v_0^k}{(k-1)v^{k-1}} + C$.

$v = v_0$ olduqda $A = 0$ başlanğıc şərtini nəzərə alsaq $C = -\frac{P_0 v_0}{k-1}$.

Beləliklə, qazın sıxılmasından görülən iş

$$A = \frac{P_0 v_0}{k-1}\left[\left(\frac{v_0}{v}\right)^{k-1} - 1\right].$$

Burada $P_0 = 1030\ \mathrm{kq/m^2}$, $k = 1{,}4$, $v_0 = 0{,}1\ \mathrm{m}^3$, $v = v_1 = 0{,}01\ \mathrm{m}^3$ yazsaq, $A \approx 3904{,}4$ kqm.

18. Peçdən çıxarılan çörəyin temperaturu 20 dəqiqə ərzində 100^0-dən 60^0-yə enir. Havanın temperaturu 25^0-dir. Soyumağa başlayan andan nə qədər vaxt keçməlidir ki, çörəyin temperaturu 30^0 olsun.

HƏLLİ. t anda çörəyin temperaturunu $T(t)$ ilə işarə edək. Nyutonun qanununa görə cismin soyumasının sür'əti cismin temperaturu ilə mühütün temperaturu fərqi ilə mütənasibdir. Çörəyin soyuması sür'əti $\frac{dT}{dt}$ olsa, onda soyumanın diferensial tənliyi $\frac{dT}{dt} = k[T(t) - 25]$ olar. Burada k-mütənasiblik əmsalıdır. Bu tənliyi həll etsək alarıq:

$$\frac{dT}{T-25} = kdt, \quad \int\frac{dT}{T-25} = k\int dt + \ln C,$$

$$\ln|T-25| = kt + \ln C, \quad T(t) = Ce^{kt} + 25.$$

$T(0) = 100$, $T(20) = 60$ olduğunu nəzərə alsaq: $C = 75$, $60 = 75e^{20k} + 25$, $75e^{20k} = 35$, $e^{20k} = \frac{7}{15}$, $e^k = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}$.

Deməli, $T(t) = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} + 25$. Tələb olunan vaxt $T(t_1) = 30$ şər-

...tindən tapılır:

$$30 = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t_1}{20}} + 25,\quad 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t_1}{20}} = 5,\quad \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t_1}{20}} = \frac{1}{15},$$

$$t_1 = \frac{20\ln 15}{\ln 15 - \ln 7} \approx 71 \text{ dəqiqə}.$$

Beləliklə, çörəyin temperaturunun 30^0-yə enməsi üçün $t_1 = 71$ dəqiqə keçməlidir.

18. İstilik magistralının borusu $(D = 20\,\text{sm})$ qalınlığı 10sm olan izolyasiya ilə örtülmüşdür. İstilikkeçirmə əmsalı $k \approx 0{,}00017$-dir. Borunun temperaturu 160^0, xarici mühütün temperaturu 30^0-dir. Temperaturun izolyasiyanın daxilində yayılması qanununu və borunun bir metrinin $(l = 100\,\text{sm})$ verdiyi istiliyin miqdarını tə'yin edin.

HƏLLİ. Cisim stasionar istilik vəziyyətindədirsə və onun hər bir nöqtəsinin T temperaturu yalnız bir x koordinatından asılıdırsa, onda Furyenin istilikkeçirmə qanununa əsasən bir saniyədə verilən istiliyin miqdarı

$$Q = -kF(x)\frac{dT}{dx} = const.$$

Burada $F(x)$ borunun x məsafəsindəki Ox kəsiyinin sahəsidir. k - istilikkeçirmə əmsalıdır. Boru üçün $F(x) = 2\pi x l$, l-borunun uzunluğudur. x-borunun radiusudur. Alınan tənliyi dəyişənləri ayırıb inteqrallasaq alarıq: $dT = -\frac{Q}{kF(x)}dx$, $\int_{160}^{T} dT = -\frac{Q}{k2\pi l}\int_{10}^{x}\frac{dx}{x}$, $T = 160 - \frac{Q}{2k\pi l}\ln\frac{x}{10}$.

Burada $x = 20$, $T = 30$ yazsaq, $130 = \frac{Q}{2k\pi l}\ln 2$, $\frac{Q}{2k\pi l} = \frac{130}{\ln 2}$,

$Q = \frac{130\cdot 2k\pi l}{\ln 2}$, $T = 160 - \frac{130}{\ln 2}\ln\frac{x}{10}$. Bu, istiliyin izolyasiya daxilində yayılması qanunudur. $Q = \frac{130\cdot 2k\pi l}{\ln 2}$ bərabərliyində $k = 0{,}00017$, $l = 100$ sm götürsək $Q = \frac{130\cdot 0{,}00017\cdot 2\pi\cdot 100}{\ln 2}$. Onda bir sutka $(24\cdot 60\cdot 60$ san) ərzində ayrılan istilik miqdarı $24\cdot 60\cdot 60\cdot Q = 1730600$ kalori.

20. Motorlu qayığın durğun sudakı sür'əti $v = 20$ km/saat olduqda motoru söndürülmüş və 40san sonra onun sür'əti $v_1 = 8$ km/saat olmuşdur. Suyun müqaviməti qayığın hərəkət sür'əti ilə mütənasib olduğunu bilərək motor söndükdən 2 dəqiqə sonra qayığın sür'tini tapın.

HƏLLİ. Qayığın t andakı sür'ətini $v(t)$ ilə işarə edək. Qayığa $F = -kv$ müqavimət qüvvəsi tə'sir edir. Burada k-mütənasiblik əmsalıdır. Nyutonun II qanununa əsasən

$$m\frac{dv}{dt} = -kv.$$

Bu tənliyi dəyişənlərinə ayırıb həll etsək

$$\int\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int dt + \ln C,\quad \ln|v| = -\frac{k}{m}t + \ln C,\quad v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

$t = 0$ olduqda $v = 20$ km/saat olduğundan: $C = 20$, $v(t) = 20e^{-\frac{k}{m}t}$.

Şərtə görə $t_1 = 40\text{san} = \frac{1}{90}$ saat olduqda qayığın sür'əti $v_1 = 8$ km/saat olur: $8 = 20e^{-\frac{k}{m}\frac{1}{90}}$, $\quad e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{90}$, $\quad v(t) = 20\left(\frac{2}{5}\right)^{90t}$.

$t = 2$ dəqiqə $= \frac{1}{30}$ saat keçdikdən sonra qayığın sür'əti $v(2) = 20\left(\frac{2}{5}\right)^3 = 1{,}28$ km/saat.

21. Su tutumu 12000 ton olan gəmi $v=18$ km/saat sür'ətlə düzxətli hərəkət edir. Suyun müqaviməti gəminin sür'ətinin kvadratı ilə mütənasibdir və 1m/san sür'ətdə 36 tona bərabərdir. Motor dayanandan sonra gəminin sür'ətinin 2,5m/san qədər azalması üçün gəmi nə qədər yol getməlidir və bu yolu nə qədər vaxta gedər?

HƏLLİ. Nyutonun ikinci qanununa əsasən motor dayandıqdan sonra gəminin hərəkətinin diferensial tənliyi $m\frac{d^2S}{dt^2}=-kv^2$ olur. Şərtə görə $k=36$, $mg=12000$. Bu tənliyi dəyişənlərinə ayırıb inteqrallayaq.

$$\int\frac{dv}{v^2}=-0{,}03\int dt+C_1,\quad -\frac{1}{v}=-0{,}03t+C_1,\quad v=\frac{1}{0{,}03t-C_1}.$$

$t=0$ olduqda $v=18$ km/saat=5m/san başlanbıc şərtini burada nəzərə alsaq $C_1=-\frac{1}{5}$, $v=\frac{5}{0{,}15t+1}=\frac{100}{3t+20}$. Sür'ətin 2,5 m/san-ə qədər azalması üçün tələb olunan vaxt: $2{,}5=\frac{100}{3t+20}$, $3t+20=40$, $t\approx 6{,}7\,\text{san}$.

İndi də $t=6{,}7\,\text{san}$ müddətində gəminin getdiyi yolu tapaq:

$$v=\frac{dS}{dt}=\frac{100}{3t+20},\quad \int dS=100\int\frac{dt}{3t+20}+C_1,$$

$$S(t)=\frac{100}{3}\ln(3t+20)+C_2.$$

Başlanğıc şərt: $t=0$ olduqda $S=0$. Onda axırıncı bərabərlikdən $C_1=-\frac{100}{3}\ln 20$, $S=\frac{100}{3}\ln\left(\frac{3}{20}t+1\right)$. Buradan $t=6{,}7$ san üçün alarıq: $S\approx\frac{100}{3}\ln 2\approx 23{,}1\,\text{m}$.

22. Külək meşədən keçərək ağacların müqavimətinə rast gəlir və sür'ətini azaldır. Küləyin sür'ətinin azalması sür'ətlə və getdiyi yolun

uzunluğu ilə mütənasibdir. Meşənin başlanğıcında küləyin sür'ətinin $v_0=12$m/san və $S=1$ m yol keçdikdən sonra isə $v_1=11{,}8$m/san olduğunu nəzərə alaraq meşədə 150m yol keçdikdən sonra onun sür'ətini tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, $v(S)$ meşənin başlanğıcından S məsafədə küləyin sür'əti, dS yolunda sür'ətin itkisi $-dv$-dir (mənfi işarə prosesin azalan olduğu üçün götürülür). Şərtə görə $-dv$-sür'ət itkisi v sür'əti və dS yolu ilə mütənasibdir: $-dv=kvdS$. Alınan tənliyi dəyişənlərə ayırsaq və inteqrallasaq alarıq:

$$\int\frac{dv}{v}=-k\int dS+\ln C,\quad \ln|v|=-kS+\ln C,\quad v=Ce^{-kS}.$$

$S=0$ olduqda $v=v_0$ olduğundan: $C=v_0$, $v=v_0e^{-kS}$.

$S=1$m olduqda $v=v_1=11{,}8$m/san olduğunu nəzərə alsaq:

$$v_1=v_0e^{-k},\quad e^{-k}=\frac{v_1}{v_0}=0{,}983,\quad v=v_0(0{,}983)^S.$$

Onda küləyin $S=150$m məsafədə sür'əti

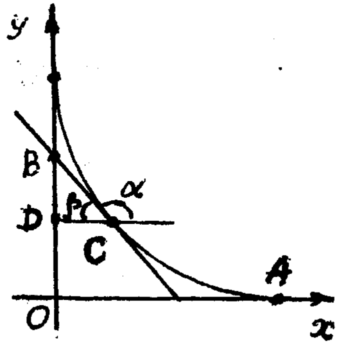
$$v=v_0(0{,}983)^{150}=12(0{,}983)^{150}=0{,}93\,\text{m/san}.$$

23. $t=0$ anında gəmi O nöqtəsindən çıxıb Oy düz xətti istiqamətində sabit v sür'ətilə hərəkət edir. $t=0$ anında gəmidən $OA=a$ məsafəsində olan kater, gəmiyə çatmaq üçün onun sür'ətindən iki dəfə böyük sür'ətlə A nöqtəsindən çıxır. Katerin hər bir nöqtədə istiqamətinin gəmiyə yönəldiyini bilərək, onun cızdığı əyrini və gəmiyə çatması üçün lazım olan vaxtı tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında kater $C(x,y)$ nöqtəsində, gəmi isə B nöqtəsindədir (şəkil 18). Bu vaxt ərzində gəmi $OB=vt$ qədər yol gedər. Hər bir nöqtədə katerin istinaməti gəmiyə yönəldiyindən $C(x,y)$ nöqtəsində katerin cızdığı əyriyə çəkilən toxunanın bucaq əmsalı $k=y'=tg\alpha=-tg\beta=-\frac{BD}{CD}=-\left(\frac{vt-y}{x}\right)=\frac{y-vt}{x}$, $y'x=$

$= y - vt$. Digər tərəfdən, katerin t müddətdə getdiyi yolun uzunluğu

$S = 2vt$ olduğundan $xy' = y - \frac{S}{2}$ olar.



Şəkil 18.

Burada S ilə AC qövsünün uzunluğu işarə olunmuşdur. Ona görə də yaza bilərik:

$$S(x) = -\int_a^x \sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad \frac{dS}{dx} = -\sqrt{1+y'^2}.$$

$xy' = y - \frac{S}{2}$ bərabərliyinin hər tərəfindən x-ə görə törəmə alaq:

$$\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dS}{dx}, \quad x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2}.$$

Bu, katerin hərəkətinin diferensial tənliyidir. $y' = z$ əvəzləməsi aparsaq:

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{1+z^2}, \quad \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + \ln C_1, \quad \ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right| = \frac{1}{2}\ln|x| + +\ln C_1$$

$$z + \sqrt{1+z^2} = C_1\sqrt{x}, \quad y' + \sqrt{1+y'^2} = C_1\sqrt{x}.$$

$y'(a) = 0$ olduğundan axırıncı bərabərlikdən: $C_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$,

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{\frac{x}{a}}, \quad y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}\right),$$

$$y = \frac{1}{2}\int\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}\right)dx + C_2, \quad y = \frac{x}{3}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + C_2.$$

$y(a) = 0$ olduğundan axırıncı bərabərlikdən $C_2 = \frac{2a}{3}$,

$$y = \frac{x}{3}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + \frac{2a}{3}.$$

Bu, katerin cızdığı əyridir. Kater gəmiyə $x = 0$ olduqda çatar. Onda axırıncı bərabərlikdən $y = \frac{2a}{3}$ gəminin getdiyi yolu tapanq. Gəmi bərabərsür'ətli hərəkət etdiyindən bu yola sərf olunan vaxt $t = \frac{y}{v} = \frac{2a}{3v}$.

24. Vaqonun yedəkçi ilə birlikdə çəkisi $Q = 40\,\text{ton}$, yedəkçinin dartma qüvvəsi $F = 200\,\text{kq}$, hərəkətə mane olan qüvvə $G = 10^{-3}(2{,}5 + 0{,}05v)Q\,(\text{kq})$, ($v$-vaqonun sür'ətidir) olduğunu bilərək, vaqonun sıfır başlanğıc sür'əti ilə hərəkətə başlayıb $12\frac{\text{km}}{\text{saat}}$ sür'ət alması üçün hansı yolu keçdiyini və bərabərsür'ətlə hərəkət zamanı yedəkçənin N dartma qüvvəsini tapın.

HƏLLİ. Nyutonun ikinci qanununa əsasən $m\frac{d^2S}{dt^2} = F - 10^{-3}\left(2{,}5 + 0{,}05\frac{dS}{dt}\right)Q$ vaqonun hərəkət tənliyi olur. Buradan

$Q = mg$, $\frac{dS}{dt} = v$, $\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ olduğunu nəzərə alsaq yaza bilərik:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{g}{1000}(2{,}5 + 0{,}05v) - \frac{Fg}{Q} = 0, \quad g = 9{,}81\,\text{m/san}^2.$$

Məsələdə verilənləri tənlikdə nəzərə alaq:

$$\frac{dv}{dt} + 0{,}49\cdot10^{-3}v - 24{,}5\cdot10^{-3} = 0.$$

Dəyişənləri ayırsaq və inteqrallasaq:

$$\int\frac{1000dv}{24,5-0,49v}=\int dt+\ln C,\quad -\frac{1000}{0,49}\ln C|24,5-0,49v|=t.$$

$t=0$ olduqda $v=0$ olduğundan buradan $C_1=\frac{1}{24,5}$, $t=$ $=-\frac{1000}{0,49}\ln(1-0,02v)$ tapırıq. Vaqonun 12 km/saat=3,33 m/san sür'ət aldığı vaxtı tapaq: $t=-\frac{1000}{0,49}\ln(1-0,02\cdot3,33)\approx140\,\text{san}$.

İndi isə vaqonun 12 km/saat sür'ətlə çatması üçün qət etdiyi yolu tapaq.

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dS}\frac{dS}{dt}=\frac{dv}{dS}v,\quad \frac{1000vdv}{24,5-0,49v}=dS.$$

Axırıncı tənliyi inteqrallayaq:

$$-\frac{1000}{0,49}\left[v+\frac{24,5}{0,49}\ln(24,5-0,49v)+C\right]=S.$$

$t=0$ olduqda $S=0$, $v=0$ olduğunu burada nəzərə alsaq:

$$C=\frac{24,5}{0,49}\ln24,5,\quad S=\frac{1000}{0,49}\left(50\ln\frac{24,5}{24,5-0,49v}-v\right),$$

$$S=\frac{1000}{0,49}\left(50\ln\frac{24,5}{24,5-0,49\cdot3,33}-3,33\right)\approx105\,\text{m}.$$

Vaqonun bərabərsür'ətli hərəkətə başlayandan sonra ($v=12$ km/saat=3,33 m/san) dartma qüvvəsi:

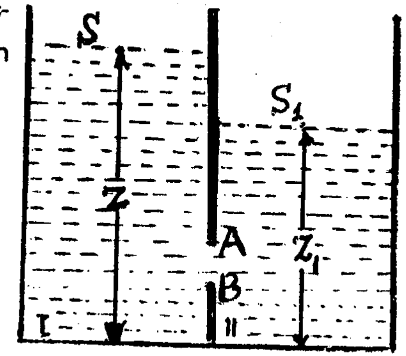
$$N=10^{-3}Q[2,5+0,5\cdot3,33]=106,6\,\text{kq}$$

25. Oturacaqlarının sahəsi S və $S=S_1=100\,\text{m}^2$ olan iki birləşmiş qab paralelepiped formasındadır. Qablardakı suyun səviyyə fərqinin $h=2,5$ m, qablar arasındakı deşiyin sahəsinin $\omega=0,5\,\text{m}^2$, hidravlik müqavimət əmsalının $\delta=0,6$ olduğunu bilərək, qablarda suyun səviyyəsinin eyni olması üçün lazım olan vaxtı tə'yin edin.

HƏLLİ. Qablarda olan suyun səviyyələrini uyğun olaraq z və z_1 $(z>z_1)$ ilə işarə edək. Tutaq ki, dt-zaman müddətində birinci qabda suyun səviyyəsi $dz<0$ qədər azalır, ikinci qabda isə $dz_1>0$ qədər artır. Bu zaman birinci qabın itirdiyi suyun miqdarı ikinci qabın qəbul etdiyi suyun miqdarına bərabərdir (şəkil 19):

$$-Sdz=S_1dz_1,\quad dz-dz_1=\frac{S+S_1}{S_1}dz.$$

Digər tərəfdən, Toriçelli qanununa əsasən dt vaxtında sahəsi ω olan AB deşiyindən keçən suyun həcmi $\delta\omega\sqrt{2g(z-z_1)}dt$ olduğundan alırıq:



Şəkil 19.

$$\delta\omega\sqrt{2g(z-z_1)}dt=-Sdz,$$

$$\frac{\delta\omega}{S}\sqrt{2g}dt=-\frac{dz}{\sqrt{z-z_1}}.$$

$z-z_1=u$ qəbul etsək,

$$dz-dz_1=du=\frac{S+S_1}{S_1}dz,$$

$$dz=\frac{S_1du}{S+S_1},\quad \frac{\delta\omega}{S}\sqrt{2g}dt=-\frac{S_1}{S+S_1}\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Buradan inteqrallamaqla alarıq:

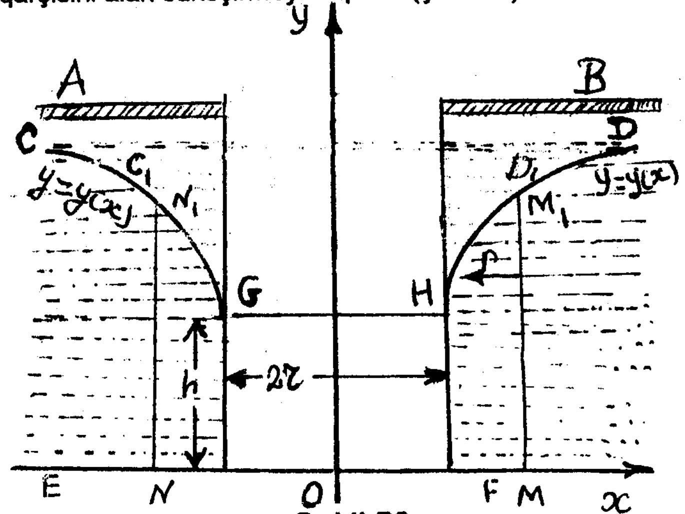
$$\frac{\delta\omega}{S}\sqrt{2g}\int_0^t dt=-\frac{S_1}{S+S_1}\int_h^u\frac{du}{\sqrt{u}},\quad \frac{\delta\omega}{S}\sqrt{2g}t=\frac{2S_1}{S+S_1}\left(\sqrt{h}-\sqrt{u}\right).$$

Buradan məsələnin mə'lumlarını yerinə yazıb, qablarda suyun səviyyələri eyni, yə'ni $z-z_1=u=0$ olan vaxtı tapırıq:

$$t=\frac{SS_1}{\omega\delta(S+S_1)}\sqrt{\frac{2h}{g}}\approx\frac{100\cdot100}{0,6\cdot0,5\cdot200}\sqrt{\frac{2\cdot2,5}{9,8}}=\frac{5000}{42}\approx119\,\text{san}.$$

26. Su keçirməyən qata qədər qazılmış quyunun ətrafında yığılmış qrunt sularının səviyyələrini müəyyən edən səthi tapın. Bu səthin quyunun oxu ətrafında fırlanma səthi olduğu mə'lumdur, səthin mailliyi bu səthdən axan suyun sür'ətilə mütənasibdir.

HƏLLİ. Quyunun OX kəsiyinə baxaq. Tutaq ki, AB yer səthi, CD-qrunt sularının quyu qazılmamışdan qabaqkı səviyyəsi, EF-aşa-ğıdan su axınının qarşısını alan sukeçirməyən qatdır (şəkil 20).



Şəkil 20.

Əgər quyuda yığılan qrunt suların müntəzəm çıxarılmaqla eyni GH səviyyəsində (h) saxlanılarsa, qrunt suları quyunun yaxın ətrafında hər hansı $y=y(x)$ qanunu ilə azalır. Bu əyri simmetrik iki qola ayrılan GC_1 və HD_1 əyrilərindən ibarətdir.

Qrunt sularının səviyyəsinin səthi $y=y(x)$ əyrisinin oy oxu ətrafında fırlanmasından alınır. $y=y(x)$ əyrisi təcrübi qayda ilə tə'yin olunur. Bu qaydaya əsasən su buraxan qruntun P nöqtəsində suyun axma v sür'əti P nöqtəsindən keçən şaquli düz xəttin əyrini kəsdiyi M_1 nöqtəsində əyrinin mailliyi ilə mütənasibdir. Əyrinin mailliyi onun toxunanının bucaq əmsalı kimi tə'yin olunur. Əgər mütənasiblik əmsalını k qəbul etsək alarıq: $v=k\dfrac{dy}{dx}$. v sür'ətlə N_1NMM_1 silindrinin

daxilinə radial axan suyun miqdarı $Q=2\pi xyv$ mə'lumdur. Odur ki,

$Q=2\pi xyk\dfrac{dy}{dx}$. Alınan tənliyi həll edək.

$$\int\frac{dx}{x}=\frac{2\pi k}{Q}\int y\,dy+C,\quad \ln|x|=\frac{2\pi k}{Q}\frac{y^2}{2}+C,\quad \ln|x|=\frac{\pi k}{Q}y^2+C.$$

C ixtiyari sabiti aşağıdakı şərtdən tapılır. Əgər quyunun diametri $2r$, quyuda suyun səviyyəsi h-olarsa, $x=r$ olduqda $y=h$ olar:

$$\ln r=\frac{\pi k}{Q}h^2+C,\quad C=\ln r-\frac{\pi k}{Q}h^2,\quad \ln|x|=\frac{\pi k}{Q}y^2+\ln r-\frac{\pi k}{Q}h^2=$$

$$=\frac{\pi k}{Q}\left(y^2-h^2\right)+\ln r,\quad \ln\frac{|x|}{r}=\frac{\pi k}{Q}\left(y^2-h^2\right),\quad y^2=\frac{Q}{\pi k}\ln\frac{|x|}{r}+h^2.$$

Buradan quyu ətrafında qrunt sularının səviyyə səthini tapırıq:

$$y^2=\frac{Q}{k\pi}\ln\frac{x^2+z^2}{r}+h^2.$$

27. Qabda tərkibində γ miqdarda duz olan a litr məhlul vardır. Fasiləsiz olaraq vahid zamanda qaba b litr təmiz su dolur və həmin miqdarda məhlul qabdan axıdılır. Qabdakı duzun miqdarının axma vaxtından asılı olaraq dəyişmə qanununu tapın.

HƏLLİ. t anında qabdakı duzun miqdarını $x(t)$ ilə işarə edək. Onda hər litr məhlulda $\dfrac{x}{a}$ qədər duz, b litr məhlulda isə $\dfrac{bx}{a}$ qədər duz olar. Odur ki, Δt zamanda qabdakı duzun dəyişməsi

$$x(t)-x(t+\Delta t)=\frac{b}{a}\left[x(t)+\alpha\right]\Delta t$$

bərabərliyi ilə xarakterizə olunur. Buradan hər tərəfi Δt-yə bölüb, $\Delta t\to 0$ şərtində limit alsaq: $-\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{bx}{a}$ tənliyi alınır. Tənliyi həll edək:

$$\int\frac{dx}{x}=-\frac{b}{a}\int dt+\ln C,\quad \ln|x|=-\frac{b}{a}t+\ln C,\quad x=Ce^{-\frac{b}{a}t}.$$

Burada $x(0)=\gamma$ şərtini nəzərə alsaq $C=\gamma$, $x=\gamma e^{-\frac{b}{a}t}$.

28. Elektrik şəbəkəsində gərginlik $E=300$ v, müqavimət $R=150$ Om, özünüinduksiya əmsalı $L=30$ henridir. Şəbəkənin qapandığı andan nə qədər vaxt keçməlidir ki, cərəyan i özünün maksimum qiymətinin 99%-ni alsın?.

HƏLLİ. Özünüinduksiyanın elektrik hərəkətetdirici qüvvəsi cərəyan şiddətinin artma sür'əti ilə mütənasibdir. Mütənasiblik əmsalı burada L-dir. Şəbəkə qapanarkən onda iki əks elektrik hərəkətetdirici qüvvə: E gərginliyi və özünüinduksiyanın hərəkətetdirici qüvvəsi $E_1=-L\frac{di}{dt}$ yaranır və Kirxhof qanununa əsasən onların cəbri cəmi şəbəkədə yaranan Ri gərginliyinə bərabərdir. Yə'ni

$$E-L\frac{di}{dt}=Ri,\quad L\frac{di}{dt}+Ri=E.$$

Alınan tənliyi dəyişənlərinə ayırıb inteqrallasaq alarıq:

$$\int\frac{Ldi}{E-Ri}=\int dt+\ln C,\quad \ln(E-Ri)=-\frac{R}{L}t+\ln C,$$

$$E-Ri=Ce^{-\frac{R}{L}t},\quad i=\frac{E}{R}+Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

$i(0)=0$ şərtini burada nəzərə alsaq taparıq: $C=-\frac{E}{R}$,

$$i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Buradan cərəyan şiddətinin maksimum qiyməti $i_{\max}=\frac{E}{R}$ olduğu alı-

nır. Məsələnin şərtinə görə yaza bilərik:

$$0{,}99\frac{E}{R}=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}T}\right),\quad e^{-\frac{R}{L}T}=0{,}01,\quad \frac{R}{L}T=\ln 100,$$

$$T=\frac{L}{R}\ln 100=\frac{30}{150}\ln 100\approx 0{,}92\ \text{san}.$$

29. Naqilə $Q_0=1000$ vahid yük verilmişdir. İzolyator pis olduğundan naqil öz yükünü tədricən itirir. Naqilin öz yükünü itirməsi sür'əti onda olan yükün miqdarı ilə mütənasibdir. Əgər birinci dəqiqədə naqil 100 vahid yük itiribsə, $t=10$ dəqiqədən sonra naqildə nə qədər yük qalar?

HƏLLİ. t anında naqildə olan yük Q olsun. Onda yükün itirilməsi sür'əti bu an üçün $\left(-\frac{dQ}{dt}\right)$ olar. Minus işarəsi prosesin azalmağa getdiyini göstərir. Bu sür'ət Q ilə mütənasib olduğundan

$$-\frac{dQ}{dt}=kQ$$

diferensial tənliyini alarıq. Burada k-mütənasiblik əmsalıdır. Bu tənliyi dəyişənlərinə ayırıb, inteqrallasaq alarıq.

$$\int\frac{dQ}{Q}=-k\int dt+\ln C,\quad \ln Q=-kt+\ln C,\quad Q=Ce^{-kt}.$$

$t=0$ olduqda $Q=Q_0=1000$ olduğundan axırıncı bərabərlikdən alarıq: $C=Q_0=1000$, $Q=1000e^{-kt}$.

Əlavə şərtlərdən istifadə edərək k əmsalını tapa bilərik. $t=1$ olduqda $Q=1000-100=900$ vahid olduğundan: $900=1000e^{-k}$, $e^{-k}=0{,}9$, $Q=1000(0{,}9)^t$.

$t=10$ olduqda buradan alarıq. $Q=1000(0{,}9)^{10}\approx 348{,}7$.

30. Tutumu C olan kondensator gərginliyi E, müqaviməti R olan şəbəkəyə qoşulur. Kondensatorun q yükünün t zamanından asılılığı-

nı tə'yin edin.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında kondensatorun yükü q, cərəyan şiddəti $i=\frac{dq}{dt}$-dir. Bu müddət ərzində şəbəkədə onun E gərginliyi ilə kondensatorun gərginliyi $\frac{q}{C}$ fərqinə bərabər olan v elektrikhərəkətedirici qüvvəsi yaranır: $v=E-\frac{q}{C}$. Om qanununa əsasən

$i=\frac{v}{R}$, $\frac{dq}{dt}=\frac{E-\frac{q}{C}}{R}$. Buradan $R\frac{dq}{dt}=E-\frac{q}{C}$, $\int\frac{dq}{EC-q}=$

$=\frac{1}{RC}\int dt-\ln A$, $\ln|EC-q|=-\frac{1}{RC}t+\ln A$, $EC-q=Ae^{-\frac{t}{RC}}$,

$q=EC-Ae^{-\frac{t}{RC}}$.

$t=0$ olduqda $q=0$ olduğunu burada nəzərə alaq: $A=EC$,

$$q=CE\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right).$$

31. Maye ilə dolu slindirik çənin dibində yarıq əmələ gəlmişdir. Mayenin axma sür'ətinin çəndəki mayenin səviyyəsi ilə mütənasib olduğunu və bir sutkada mayenin 10 faizinin axdığını bilərək, nə qədər vaxtdan sonra çəndəki mayenin yarısının axdığını tə'yin edin.

HƏLLİ. Çənin oturacağının radiusunu R, hündürlüyünü h ilə işarə edək. Tutaq ki, t anında çəndə qalan mayenin hündürlüyü x-ə bərabərdir. Onda t anında çəndə olan mayenin miqdarı πR^2x olar. Mayenin həcminin dəyişmə sür'əti isə $\pi R^2\frac{dx}{dt}$ olar. Məsələnin şərtinə görə bu sür'ət x-lə mütənasibdir: $-\pi R^2\frac{dx}{dt}=kx$. Burada k-mütənasiblik əmsalıdır. Bu tənlik verilmiş məsələnin diferensial tənliyidir. Onu dəyişənlərinə ayırıb inteqrallasaq alarıq.

$$\int\frac{dx}{x}=-\frac{k}{\pi R^2}\int dt+\ln C,\quad \ln x=-\frac{k}{\pi R^2}t+\ln C,\quad x=Ce^{-\frac{kt}{\pi R^2}}.$$

$t=0$ olduqda $x=h$ (çən doludur) başlanğıc şərtini nəzərə alsaq: $C=h$, $x(t)=he^{-\frac{k}{\pi R^2}t}$. Əlavə şərtə görə $t=1$ olduqda $x=h-\frac{h}{10}=\frac{9}{10}h$ olduğundan $\frac{9h}{10}=he^{-\frac{k}{\pi R^2}}$, $e^{-\frac{k}{\pi R^2}}=\frac{9}{10}$, $x(t)=h\left(\frac{9}{10}\right)^t$.

Çəndə mayenin yarısının qalması T vaxtı:

$$\frac{h}{2}=h\left(\frac{9}{10}\right)^t,\quad T=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln\frac{9}{10}}=\frac{\ln 2}{\ln 10-\ln 9}\approx 6{,}58.$$

32. Çən tərkibində 3 kq qənd həll olmuş 75 litr maye ilə doldurulmuşdur. Çənə bir dəqiqədə 4 litr su vurulur və 2 litr məhlul axıdılır (müntəzəm qarışdırılmaqla çəndə məhlulun qatılığı sabit saxlanılır) 25 dəqiqədən sonra məhlulda qalan qəndin miqdarını tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında çəndə olan məhlulda qəndin miqdarı $x(t)$-dir. dt müddətdə çəndən axan qəndin miqdarını $-dx$ (minus işarəsi prosesin azalan olduğunu göstərir) işarə edək. t anına qədər çənə $4t$ litr su daxil olub, $2t$ litr məhlul axıdılır. Beləliklə, t anında mayenin ümumi həcmi $75+2t$ litr və onda x kq qənd həll olunubdur. Məhlulun qatılığını sabit qəbul etsək bir litr məhlulda olan qəndin miqdarı $\frac{x}{75+2t}$ kq olduğundan dt müddətində axıdılan məhlulda $\frac{2xdt}{75+2t}$ kq qənd olar. Prosesin diferensial tənliyi aşağıdakı kimi olur:

$$-dx=\frac{2xdt}{75+2t},\quad \int\frac{dx}{x}=-2\int\frac{dt}{75+2t},\quad \ln|x|=-\ln|75+2t|+\ln C,$$

$$x(t)=\frac{C}{75+2t}.$$

$t=0$ olduqda $x=3$ kq olduğundan: $C=225$, $x(t)=\frac{225}{75+2t}$.

25 dəqiqədən sonra məhlulda qalan qəndin miqdarını tapmaq üçün axırıncı bərabərlikdə $t=25$ yazmaq lazımdır:

$$x=\frac{225}{75+50}=1{,}8, \quad x=1{,}8 \text{ kq}.$$

33. Çənin en kəsiyi tərəfi 6 m olan kvadratdır, hündürlüyü isə 4m-dir. Çən dəqiqədə 10 m^3 su ilə doldurulur. Çənin dibində tərəfi $\frac{1}{12}$ m olan kvadrat deşikdən suyun axdığını və dərinliyinin 4 m olduğunu nəzərə alaraq onun doldurulması vaxtını tə'yin edin.

HƏLLİ. Tutaq ki, t müddətində çəndəki suyun səviyyəsi h-dır və dt müddətində suyun səviyyəsi dh, suyun həcmi isə $6\cdot 6dh=36dh$ qədər artır. Şərtə görə çənə su 10 m^3/dəq sür'ətlə dolur. Ona görə də çəndə suyun səviyyəsinin artma sür'əti $\frac{10}{36}$ m/dəq$=\frac{1}{216}$ m/san olar. dt müddətində suyun həcmi $\frac{1}{216}\cdot 36dt=\frac{1}{6}dt$ olar. Bu müddət ərzində çəndən $\mu d^2\sqrt{2gh}dt$ qədər su axar. Burada su üçün $\mu=0{,}6$, $d^2=\frac{1}{12^2}=\frac{1}{144}$. Beləliklə, prosesin diferensial tənliyi

$$36dh=\left(\frac{1}{6}-\frac{0{,}6}{144}\sqrt{2gh}\right)dt$$

olar. Dəyişənlərə ayırıb inteqrallaşaq və başlanğıc şərtləri nəzərə alsaq yaza bilərik.

$$\int\frac{36dh}{\frac{1}{6}-\frac{0{,}6}{144}\sqrt{2gh}}=\int dt+C,$$

$$t=\frac{12}{\left(\frac{0{,}6}{144}\sqrt{2g}\right)^2}\ln\frac{1}{\frac{1}{6}-\frac{0{,}6}{144}\sqrt{2gh}}-\frac{72}{\frac{0{,}6}{144}\sqrt{2g}}\sqrt{h}+C.$$

$t=0$ olduqda $h=0$ olduğundan axırıncı bərabərlikdən:

$$C=\frac{12\ln 6}{\left(\frac{0{,}6}{144}\sqrt{2g}\right)^2},$$

$$t=\frac{12}{\left(\frac{0{,}6}{144}\sqrt{2g}\right)^2}\ln\frac{1}{1-\frac{1}{40}\sqrt{2gh}}-\frac{72}{\frac{1}{240}\sqrt{2g}}\sqrt{h}.$$

$h=4$ m olduqda axırıncı bərabərlikdən $t\approx 20$ dəq alarıq.

34. Tutumu 1 litr olan qab tərkibində 21 faiz oksigen olan hava ilə doldurulmuşdur. Qaba en kəsiyi eyni olan iki boru birləşdirilmişdir. Borulardan biri ilə fasiləsiz olaraq qaba təmiz oksigen vurulur, digərindən qarışıq çıxır. Qabdan nə qədər qarışıq hava çıxarmaq lazımdır ki, onda yalnız təmiz oksigen qalsın. 10 litr qarışıq hava çıxardandan sonra qabda olan havanın tərkibində neçə faiz oksigen olacaq?

HƏLLİ. Tutaq ki, qabdan x litr qaz keçdiyi vaxt onda olan oksigen $a(x)$ faiz təşkil edir, yə'ni qabda $\frac{a(x)}{100}$ litr oksigen var. Onda Δx litr qabda oksigen daxil olduqda, $\frac{a(x)}{100}\Delta x$ litr xaric olur. Qabda olan oksigenin miqdarı

$$\frac{a(x)}{100}+\left[\Delta x-\frac{a(x+\Delta x)}{100}\Delta x\right]=\frac{a(x)+[100-a(x+\Delta x)]\Delta x}{100}$$

Bu oksigenin həcmi qazın ümumi həcminin $a(x)+[100-a(x+\Delta x)]\Delta x$ faizini təşkil edir. $a(x+\Delta x)-a(x)=[100-a(x+\Delta x)]\Delta x$. Buradan Δx-ə bölüb $\Delta x\to 0$ şərtində limitə keçsək alarıq:

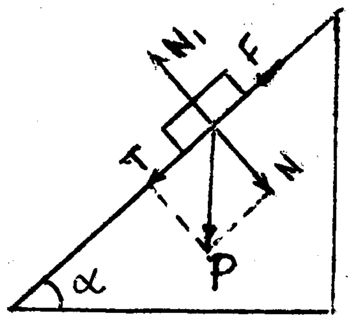
$$\frac{da}{dx}=100-a, \quad \int\frac{da}{100-a}=\int dx-\ln C, \quad -\ln|100-a|=x-\ln C,$$

$a=100-Ce^{-x}$. $x=0$ olduqda $a=21$ olduğunu axırıncı bərabərlikdə nəzərə alsaq: $C=79$, $a(x)=100-79e^{-x}$. $x=10$ olduqda buradan alarıq: $a=100-79e^{-10}\approx 99{,}9964\%$

Lakin qabda yalnız təmiz oksigen qalması, yə'ni $a=100\%$ olması üçün $100=100-79e^{-x}$, $e^{-x}=0$. Bu bərabərlik $x\to\infty$ şərtində yerinə yetir.

35. Uzunluğu $L=10$m olan mail müstəvi üzəri ilə A cismi sürüşür. Müstəvinin maillik bucağı $\alpha=45^0$-dir. Sürtünmə əmsalı $k=0{,}5$-dir. Cismin hərəkət qanununu və cismin bütün yolu keçmək üçün lazım olan vaxtı tə'yin edin. Cismin başlanğıc anda müstəvinin yuxarı hissəsində sakit dayanmışdır.

HƏLLİ. İstənilən t anında cismə üç qüvvə: şaquli aşağı yönəlmiş cismin ağırlıq qüvvəsi P, hərəkətin əksinə yönəlmiş sürtünmə qüvvəsi F və mail müstəviyə perpendikulyar olan reaksiya qüvvəsi N_1 tə'sir edir (şəkil 21). P qüvvəsinin normal və tangensial toplananlarını N və T ilə işarə etsək, $N=P\cos\alpha$, $T=P\sin\alpha$ yaza bilərik. N və N_1 qüvvələri qiymətcə bərabər, istiqamətcə əks yönəlmişdir. Sürtünmə qüvvəsi ədədi qiymətcə N qüvvəsilə mütənasibdir: $F=kN=kP\cos\alpha$. Cismə hərəkətinə səbəb olan qüvvə $R=T-F=P(\sin\alpha-k\cos\alpha)$ olur.



Şəkil 21.

Odur ki, Nyutonun ikinci qanununa əsasən çismin hərəkətinin diferensial tənliyi

$$\frac{d^2S}{dt^2}=g(\sin\alpha-k\cos\alpha), \quad S=\frac{g}{2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)t^2+C_1t+C_2.$$

$t=0$ olduqda $S=0$, $v=\dfrac{dS}{dt}=0$ başlanğıc şərtlərinə əsasən: $C_1=C_2=0$,

$$S=\frac{g}{2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)t^2=\frac{g}{2}\left(\sin 45^0-\frac{1}{2}\cos 45^0\right)t^2=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}gt^2, \quad S=\frac{\sqrt{2}}{8}gt^2$$

Cismin mail müstəvi üzərində yola sərf etdiyi vaxtı tapaq:

$$t^2=\frac{8S}{\sqrt{2}g}=\frac{4\sqrt{2}S}{g}, \quad t=2\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{g}}=2\sqrt{\frac{10\sqrt{2}}{10}}\approx 2{,}37\,\text{san}.$$

36. Elektrovoz üfüqi dəmir yolu ilə 72 km/saat sür'ətlə hərəkət edir. Sürücü elektrovozu tormozlayır. Tormozlanma başlanan andan hərəkətə elektrovozun çəkisinin $0{,}2$ hissəsi qədər müqavimət qüvvəsi tə'sir edir. Tormozlama başlanan andan elektrovoz dayanana qədər olan vaxt və bu vaxtda gedilən yolu tapın.

HƏLLİ. Elektrovozun çəkisini $P=mg$ ilə işarə edək. Məsələnin şərtinə görə müqavimət qüvvəsi $F_\mu=-0{,}2P=-0{,}2mg$. Onda Nyutonun ikinci qanununa görə

$$m\frac{d^2S}{dt^2}=-0{,}2P, \quad \frac{d^2S}{dt^2}=-0{,}2g.$$

Alınan tənliyi həll edib, onun $S(t)=-0{,}1gt^2+C_1t+C_2$ ümumi həllini taparıq. Burada $S(0)=0$, $S'(0)=72$ km/saat $=20$ m/san olduğundan $C_2=0$, $C_1=20$, $S(t)=-0{,}1gt^2+20t$.

Elektrovozun dayanma T vaxtı üçün $S'(T)=0$ olmalıdır: yə'ni $-0{,}2gT+20=0$, $T\approx 10{,}2$san. Elektrovozun bu müddətdə getdiyi yolun uzunluğu

$$S(10{,}2)=-0{,}1\cdot 9{,}8(10{,}2)^2+20\cdot 10{,}2\approx 102\,\text{m}.$$

37. Cisim başlanğıc v_0 sür'ətilə şaquli istiqamətdə yuxarı atılmışdır. Cismin yalnız ağırlıq qüvvəsinin tə'siri altında hərəkət etdiyini bilərək, onun hərəkət qanununu tə'yin edin.

HƏLLİ. Cismin hərəkət tənliyi Nyutonun II qanununa əsasən $\frac{d^2S}{dt^2} = -g$ olduğundan $\frac{dS}{dt} = -gt + C_1$, $S = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$.
$S(0) = 0$, $S'(0) = v_0$ olduğundan alırıq: $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$,

$$S = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

38. Kütləsi m_0, başlanğıc sür'əti v_0 olan cismi O nöqtəsindən a məsafədə yerləşən A nöqtəsindən OA istiqamətində hərəkət edir. Ona hər an O nöqtəsindən olan məsafənin kubu ilə tərs mütənasib olan qüvvə tə'sir edir. Nöqtənin hərəkət qanununu tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, $t = 0$ anında maddi nöqtə A nöqtəsində, t anında isə O nöqtəsindən $x(t)$ qədər məsafədə yerləşir. Onda Nyutonun ikinci qanununa görə $m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{x^3}$ hərəkətin diferensial tənliyi olur, burada k mütənasiblik əmsalıdır.

$v^2 = \frac{k}{m}$ götürsək və tənliyin hər tərəfini $2x'dt$-yə vurub inteqrallayaq:

$$d(\dot{x})^2 = \gamma^2 d\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad \dot{x}^2(t) = \gamma^2\left(C_1 - \frac{1}{x^2(t)}\right).$$

Burada, $x(0) = a$, $x'(0) = v_0$ olduğundan:

$$C_1 = \frac{(av_0)^2 + \gamma^2}{(a\gamma)^2} = \frac{1}{b^2}, \quad \dot{x} = \frac{\gamma}{bx}\sqrt{x^2 - b^2}.$$

Alınan tənliyi dəyişənlərinə ayırıb inteqrallayaq:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - b^2}} = \frac{\gamma}{b}\int dt + C_2, \quad \sqrt{x^2 - b^2} = \frac{\gamma}{b}t + C_2.$$

Buradan $x(0) = a$ şərtinə əsasən $C_2 = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\sqrt{x^2 - b^2} = \frac{\gamma}{b}t + \sqrt{a^2 - b^2}$, $x^2(t) = \left(\frac{\gamma}{b}t\right)^2 + \frac{2\gamma}{b}t\sqrt{a^2 - b^2} + a^2$.

39. Başlanğıc sür'əti sıfır, çəkisi $Q = 9216$ kq olan vaqon üfüqü yol boyunca mütləq sür'əti $\omega = 12$ **m/san** olan küləyin tə'siri altında hərəkətə gəlir. Küləyin təzyiq qüvvəsi $P = kSu^2$ kq və hərəkətə müqavimət qüvvəsinin vaqonun çəkisinin $\frac{1}{200}$-nə bərabər olduğunu bilərək aşağıdakıları tapın, burada $S = 6$ m^2 vaqonun küləyin istiqamətinə perpendikulyar kəsiyinin sahəsi, u-isə küləyin vaqona nəzərən sür'əti, $k = 0{,}12$.

1). Vaqonun ən böyük sür'ətini tapın.
2). Bu sür'əti almaq üçün lazım olan T vaxtını tapın.
3). 3 m/san sür'ət almaq üçün vaqonun keçdiyi x yolunu tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t zamanında vaqon $x(t)$ m yol gedir. Onda $\dot{x}$ vaqonun sür'əti, $u = \omega - \dot{x}$ isə küləyin vaqona nəzərən sür'əti olur. Odur ki,

$$m\ddot{x} = kS(\omega - \dot{x})^2 - \frac{Q}{200}$$

vaqonun hərəkət tənliüi olur. Tənlikdə $u(t) = \omega - \dot{x}(t)$ əvəzləməsini aparaq və dəyişənlərinə ayrıla bilən

$$\dot{u} = \frac{kS}{m}\left[\frac{Q}{200kS} - u^2\right]$$

tənliyinin $u(0) = \omega$ başlanğıc şərtini ödəyən həllini tapaq:

$$u = \frac{a\left[\omega - a + (a + \omega)e^{bt}\right]}{a - \omega + (a + \omega)e^{bt}}, \quad a = \sqrt{\frac{Q}{200kS}} = 8,$$

$$b=\sqrt{\frac{gkS}{50m}}=12{,}25\cdot10^{-3},\quad \dot{x}=\omega-\frac{a\left[\omega-a+(a+\omega)e^{bt}\right]}{a-\omega+(a+\omega)e^{bt}}.$$

Göstərmək olar ki, t artdıqca sür'ət artır. Axırıncı bərabərliyi aşağıdakı kimi yazaq:

$$\dot{x}(t)=\omega-a\frac{(a+\omega)e^{\frac{1}{2}bt}-(a-\omega)e^{-\frac{1}{2}bt}}{(a+\omega)e^{\frac{1}{2}bt}+(a-\omega)e^{-\frac{1}{2}bt}},$$

$$dx(t)=\omega-\frac{2a}{b}\frac{d\left[(a+\omega)e^{\frac{1}{2}bt}+(a-\omega)e^{-\frac{1}{2}bt}\right]}{(a+\omega)e^{\frac{1}{2}bt}+(a-\omega)e^{-\frac{1}{2}bt}},\quad x(0)=0.$$

Burada hər tərəfi $[0,t]$ parçasında inteqrallayaq. Onda

$$x(t)=\omega t-\frac{2a}{b}\ln\frac{(a+\omega)e^{\frac{1}{2}bt}+(a-\omega)e^{-\frac{1}{2}bt}}{2a}.$$

1). t artdıqca sür'ət artdığından sür'ət ən böyük qiymətini $t\to+\infty$ şərtində alır.

$$\lim_{t\to+\infty}\dot{x}(t)=\omega-a\lim_{t\to+\infty}\frac{\omega-a+(a+\omega)e^{bt}}{a-\omega+(a+\omega)e^{bt}}=\omega-a=12-8=4\frac{\text{m}}{\text{san}}.$$

2). Vaqonun ən böyük 4m/san sür'ətinə çatması üçün tələb olu-nan vaxt $T\to\infty$ şərtində mümkündür.

3). Sür'ətin 3m/san çatması üçün sərf olunan vaxtı tapaq. $\dot{x}(t)$ üçün alınmış ifadədə $\dot{x}(t)=3$, $\omega=12$, $a=8$, $b=12{,}25\cdot10^{-3}$ qiymətlərini yerinə yazıb, e^{bt} - tapaq. Onda $e^{12,25\cdot10^{-3}t}=3{,}4$,

$$12{,}25\cdot10^{-3}t=\ln3{,}4,\qquad 12{,}25\cdot10^{-3}t\approx1{,}2238,\qquad t\approx\frac{1{,}224\cdot10^{3}}{12{,}25}=$$

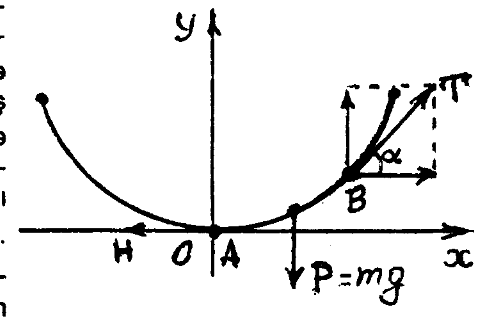
$=99{,}9\,\text{san}.$

Bu qiymətləri $x(t)$ üçün alınmış düsturda yazıb, hesablayaq: $x(99{,}9)\approx$

$$\approx12\cdot100-\frac{2\cdot8\cdot10^{3}}{12{,}25}\ln\frac{5e^{0{,}612}-e^{-0{,}612}}{4}\approx1200-1013=187\,\text{m}.$$

40. Sabit sıxlığa malik, en kesiyinin sahəsi gerilmə qüvvəsilə mütənasib olan, uclarından asılmış ağır ipin aldığı formanı tapın.

HƏLLİ. Şərtə görə ipin en kəsiyinin sahəsi gerilmə qüvvəsi ilə mütənasibdir. Tutaq ki, ρ -ipin sıxlığı, F -dəyişən en kəsiyin sahəsidir (şəkil 22). A ilə ipin ən aşağı nöqtəsini işarə edək. İpin $\breve{AB}=S$ hissəsi üç qüvvənin tə'siri nəticəsində tarazlıq vəziyyətində olur: 1). A nöqtəsində üfüqi istiqamətdə yönəlmiş H gerilmə, 2). B nöqtəsində toxunan istiqamətində yönəlmiş və Ox oxu ilə α bucağı əmələ gətirən T gerilmə, 3). İpin $\breve{AB}=S$ hissəsinə uyğun şaquli aşağı yönələn



Şəkil 22.

ağırlıq qüvvəsi $P=\int_0^x\rho F\,dS=$

$$=\int_0^x\rho F\sqrt{1+y'^2}\,dt.$$

Bu qüvvələrin oxlar üzrə proyeksiyaları cəmi sıfır olduğundan

$$\begin{cases}T\cos\alpha-H=0,\\ T\sin\alpha-\int_0^x\rho F\sqrt{1+y'^2}\,dt=0.\end{cases}$$

Buradan $H\,tg\alpha=\int_0^x\rho F\sqrt{1+y'^2}\,dt$, $y'=tg\alpha$, $Hy'=\int_0^x\rho F\sqrt{1+y'^2}\,dt$.

Bu bərabərlikdən diferensiallamaqla alırıq. $Hy''dx = \rho F dS$. Bütün en kəsikləri üçün sabit olan gərginliyi σ işarə edək. Onda şərtə görə yazmaq olar: $H = F_0\sigma$, $T = F\sigma$. Burada F_0 ilə A nöqtəsində ipin en kəsiyi işarə olunub. Koordinat başlanğıcını A nöqtəsində götürsək, $y'(0) = 0$ olmalıdır. Onda yaza bilərik.

$$T = F\sigma = \frac{H}{\cos\alpha} = \frac{HdS}{dx}, \quad \left(\frac{dx}{dS} = \cos\alpha\right), \quad F = \frac{HdS}{\sigma dx},$$

$$Hy''dx = \rho\frac{H}{\sigma}\cdot\frac{dS}{dx}dS, \quad y'' = \frac{\rho}{\sigma}\left(\frac{dS}{dx}\right)^2$$

Qövsün diferensialı $\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$ olduğundan $y'' = \frac{\rho}{\sigma}\left(1 + y'^2\right)$.

Tənliyi tərtibini aşağı salmaq yolu ilə həll etsək alarıq:

$$y = -\frac{\sigma}{\rho}\ln\cos\left(\frac{\rho}{\sigma}x + C_1\right) + C_2.$$

Burada $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ başlanğıc şərtlərindən istifadə etsək:

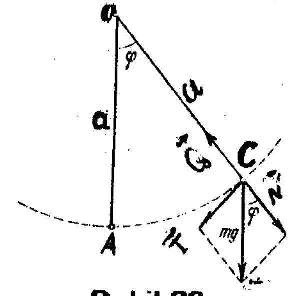
$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad y = -\frac{\sigma}{\rho}\ln\cos\frac{\rho}{\sigma}x, \quad e^{\frac{\rho y}{\sigma}}\cos\frac{\rho}{\sigma}x = 1.$$

İpin en kəsiyi və sıxlığı sabit olduqda $P = \rho FS$, $y'' = \frac{\rho F}{H}\sqrt{1 + y'^2}$ alınır. Tənliyin $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həlli $y = a\,ch\frac{x}{a} - a$ olur, $a = \frac{H}{\rho F}$.

41. Kütləsi m olan riyazi rəqqas ağırlıq qüvvəsinin tə'siri altında şaquli müstəvi üzərində radiusu a olan çevrə qövsü boyunca hərəkət edir. Başlanğıc anda meyil bucağı φ_0, sür'əti sıfır olduğunu bilərək və müqavimət qüvvəsini nəzərə almamaq şərtilə rəqqasın hərəkət tənliyini və tam dövrünü tapın.

HƏLLİ. Riyazi rəqqas ağırlıq qüvvəsinin tə'siri altında O nöqtəsi ətrafında rəqs edən bərk cismə deyilir (şəkil 23). Rəqqasın ağırlıq mərkəzinin fırlanma nöqtəsinə qədər olan məsafəsini a, çəki-sini $P = mg$ ilə işarə edək.

Tutaq ki, t zaman müddətində rəqqas A nöqtəsindən C nöqtəsinə gəlir, yə'ni $\overset{\smile}{AC} = S = a\varphi$ qədər yol gedir. Hər bir anda rəqqasın vəziyyəti $\angle AOC = \varphi$ bucağı ilə tə'yin olunur. C nöqtəsində rəqqasa tə'sir edən sapın $\vec{Q}$ gerilmə qüvvəsi $\vec{N} = mg\cos\varphi$ qüvvəsilə tarazlaşır. Odur ki, $T = mg\sin\varphi$ qüvvəsinin tə"siri nəticəsində rəqqas hərəkət edir. Onda Nyutonun ikinci qanununa əsasən rəqqasın diferensial tənliyi alınır:



Şəkil 23.

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = -mg\sin\varphi.$$

Kiçik rəqslər üçün $\sin\varphi \approx \varphi$ götürmək olar. Onda rəqqasın diferensial tənliyində $S = a\varphi$ və $\sin\varphi = \varphi$ götürsək alarıq:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0, \quad k = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Tənlik sabit əmsallı tənlikdir. Bu tənliyin $r^2 + k^2 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $r_{1,2} = \pm ik$ olduğundan onun ümumi həlli

$$\varphi(t) = C_1\cos kt + C_2\sin kt.$$

Buradan $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ başlanğıc şərtlərinə əsasən $C_1 = \varphi_0$, $C_2 = 0$, $\varphi(t) = \varphi_0\cos kt$. Rəqsin tam dövrü üçün alarıq: $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

42. Çubuğun sol ucu $(x = 0)$ fasiləsiz qızdırıldığından temperaturu τ_0 sabit qalır. Furye qanununa görə istilik çox olan yerdən az olan is-

tiqamətdə vahid zamanda $-k\dfrac{d\tau}{dx}F$ qədər axır. Burada k-istilikkeçirmə əmsalı, F-çubuğun en kesiyinin sahesi, $\dfrac{d\tau}{dx}$ istiliyin axma sür'etidir. Bunları bilerək, çubuqda istiliyin yayılma $\tau(x)$ qanununu tapın.

HƏLLİ. Çubuq öz istiliyini ətraf mühitə verdiyindən tədricən soyuyur. İstilik çubuğun daha isti nöqtələrindən soyuq nöqtələrinə keçir. İtirilən istiliyin əvəzini çıxmaq üçün çubuğun sol ucu daim qızdırılır.

Tutaq ki, çubuğun sol ucundan x məsafesində yerləşən nöqtədə temperaturu $\tau(x)$, $x+dx$ nöqtəsində isə $\tau(x+dx)$ olar. dt zamanda çubuğun dx elementi $\lambda\tau(x)dA$ qədər istilik itirir. Burada dA-çubuğun mühitlə temasda olan sahəsi, λ-mütənasiblik əmsalıdır. Çubuğun dt zaman müddətində x və $x+dx$ nöqtələrində itirdiyi istilik miqdarı $Q_1 = -kF\tau'(x)dt,\quad Q_1 = -kF\tau'(x+dx)dt$. Temperatur stasionar olduğundan (yə'ni zamandan asılı olaraq dəyişmir), axan istiliyin miqdarı itirilən istiliyin miqdarına bərabər olar:

$$-kF\tau'(x)dt = -kF\tau'(x+dx)dt + \lambda\tau(x)dA\,dt.$$

Burada dx sonsuz kiçik kəmiyyət olduğundan $\tau'(x+dx) \approx \tau'(x) + \tau''(x)dx$ götürmək olar. Digər tərəfdən $dA = cdx$, c-çubuğun en kesiyinin uzunluğudur. Bunları yuxarıdakı bərabərsizlikdə yazıb, sadələşdirsək

$$kF\tau''(x) = \lambda\tau(x)c$$

bərabərliyini alarıq. $\dfrac{\lambda c}{kF} = p^2$ götürüb alınan $\tau'' - p^2\tau = 0$ tənliyi həll edək: Buradan $r^2 - p^2 = 0$ xarakteristik tənliyin köklərinin $r_{1,2} = \pm p$ olduğunu nəzərə alsaq, tənliyin $\tau(x) = C_1e^{px} + C_2e^{-px}$ ümumi həlli alınar. İstiliyin yayılması azalan proses olduğundan və $x \to \infty$ şərtində (yə'ni çubuğun sol ucundan böyük məsafələrdə) $\tau \to 0$ olduğunu nəzərə alsaq $C_1 = 0$ götürülməlidir. Onda $\tau(x) = C_2e^{-px}$; $x=0$ olduqda $\tau = \tau_0$ olduğundan buradan alarıq. $C_2 = \tau_0$, $\tau(x) = \tau_0e^{-px}$.

43. $\tau = \tau_0 e^{-px}$ düsturundan istifadə edərək aşağıdakı məsələni həll edin. Çubuğun bir ucu 100^0C qədər qızdırılmışdır. Bu ucdan vahid uzunluqda olan məsafədə çubuğun temperaturu 95^0C-dir. Həmin ucdan 10 vahid uzunluqda olan məsafədə çubuğun temperaturunu tapın.

HƏLLİ. Baxılan halda $\tau_0 = 100C^0$ olduğundan $\tau = 100e^{-px}$. Burada $x=1$ olduqda $\tau = 95^0C$ olduğundan: $95 = 100e^{-p}$, $e^{-p} = 0,95$, $\tau = 100(0,95)^x$.

$x = 10$ olduqda buradan alarıq. $\tau(10) = 100(0,95)^{10} \approx 60^0C$.

44. Eyni qaz ilə doldurulmuş müxtəlif Q_1 və Q_2 təzyiqləri altında olan iki silindrik qab kranlı boru ilə birləşdirilmişdir. Silindrlərin həcmləri uygun olaraq V_1 və V_2-dir. Əgər kranı açsaq onda qaz böyük təzyiq altında olan qabdan kiçik təzyiq olan qaba axacaq. Qazın t anında axma sür'əti (hər bir t anı üçün) silindrlərdə olan qazın təzyiqlərinin kvadratları fərqi ilə mütənasibdir. Silindrlərdə təzyiqin dəyişmə qanununu tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında silindrlərdə olan qazın təzyiqləri uyğun olaraq P_1 və P_2-dir. $P_1 > P_2$ qəbul edək. dt zamanı ərzində birinci silindrdən ikinciyə kütləsi dM olan qaz axarsa, onun axma sür'əti $\dfrac{dM}{dt}$ olar. Məsələnin şərtinə görə yaza bilərik.

$$\frac{dM}{dt} = k\left(P_1^2 - P_2^2\right). \qquad (*)$$

Burada k-mütənasiblik əmsalıdır. Digər tərəfdən dM kütləsi təzyiqi P_1 olan silindrdən dt zamanında çıxan qazın M_1 kütləsinə və təzyiqi P_2 olan ikinci silindrə daxil olan qazın M_2 kütləsinə bərabərdir.

Qazın sıxlığını δ ilə işarə etsək və onun sabit temepraturda təzyiqə nəzərən mütənasib dəyişdiyini, yə'ni $\delta_1 = aP_1$, $\delta_2 = aP_2$ qəbul etsək (burada a-mütənasiblik əmsalıdır) yazmaq olar:

$$M_1 = \delta_1V_1 = aP_1V_1,\quad M_2 = \delta_2V_2 = aP_2V_2.$$

Buradan: $dM_1 = -aV_1dP_1$ (azalır), $dM_2 = aV_2dP_2$ (artır).
Bunları (*) ifadəsində yazsaq

$$\begin{cases} V_1dP_1 = -\dfrac{k\left(P_1^2-P_2^2\right)}{a}dt, \\ V_2dP_2 = \dfrac{k\left(P_1^2-P_2^2\right)}{a}dt \end{cases} \qquad (**)$$

sistemini alanq. Buradan $V_1dP_1+V_2dP_2=0$, $V_1P_1+V_2P_2=C_1$.

(**) sisteminin birinci tənliyini P_2V_2-yə, ikinci tənliyini P_1V_1-ə vurub tərəf-tərəfə çıxsaq alanq:

$$V_1V_2\left(P_2\frac{dP_1}{dt}-P_1\frac{dP_2}{dt}\right)=-\frac{k}{a}\left(P_1^2-P_2^2\right)\left(P_2V_2+P_1V_1\right).$$

Buradan $V_1V_2\left(P_2\dfrac{dP_1}{dt}-P_1\dfrac{dP_2}{dt}\right)=-\dfrac{k}{a}C_1\left(P_1^2-P_2^2\right)$ olduğunu və

$x=\dfrac{P_1}{P_2}$ qəbul etsək, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)=\dfrac{P_2\dfrac{dP_1}{dt}-P_1\dfrac{dP_2}{dt}}{P_2^2}$ olduğundan alırıq:

$$V_1V_2P_2^2\frac{dx}{dt}=-\frac{k}{a}C_1P_2^2\left(x^2-1\right), \quad V_1V_2\frac{dx}{dt}=-\frac{k}{a}C_1\left(x^2-1\right).$$

Dəyişənləri ayırıb inteqrallasaq alarıq:

$$V_1V_2\frac{dx}{x^2-1}=-\frac{kC_1}{a}dt, \quad \frac{V_1V_2}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}=\frac{kC_1}{a}t+C_2.$$

Baxılan məsələ üçün

$$\begin{cases} V_1P_1+V_2P_2=C_1, \\ \dfrac{V_1V_2}{2}\ln\dfrac{P_1+P_2}{P_1-P_2}=\dfrac{kC_1}{a}t+C_2 \end{cases}$$

ümumi inteqralı olur. Şərtə görə $t=0$ olduqda $P_1=Q_1$, $P_2=Q_2$ olduğundan

$$C_1=V_1Q_1+V_2Q_2, \quad C_2=\frac{V_1V_2}{2}\ln\frac{Q_1+Q_2}{Q_1-Q_2}.$$

Bunları ümumi inteqralda yazsaq alarıq:

$$\begin{cases} V_1P_1+V_2P_2=V_1Q_1+V_2Q_2, \\ \dfrac{V_1V_2}{2}\left(\ln\dfrac{P_1+P_2}{P_1-P_2}-\ln\dfrac{Q_1+Q_2}{Q_1-Q_2}\right)=\dfrac{k}{a}\left(V_1Q_1+V_2Q_2\right)t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{Q_1-P_1}{P_2-Q_2}=\dfrac{V_2}{V_1}, \\ \ln\dfrac{(P_1+P_2)(Q_1-Q_2)}{(Q_1+Q_2)(P_1-P_2)}=\dfrac{2k}{aV_1V_2}\left(Q_1V_1+Q_2V_2\right)t \end{cases}$$

Burada $Q_1V_1+Q_2V_2=\alpha$ və $\dfrac{Q_1-Q_2}{Q_1+Q_2}e^{\frac{2k\alpha}{aV_1V_2}t}=\beta$ işarə etsək:

$$\begin{cases} P_1V_1+P_2V_2=\alpha, \\ \dfrac{P_1-P_2}{P_1+P_2}=\beta, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1=\dfrac{\alpha(1+\beta)}{V_1+V_2+(V_1-V_2)\beta}, \\ P_2=\dfrac{\alpha(1-\beta)}{V_1+V_2+(V_1-V_2)\beta} \end{cases}$$

45. Kütləsi m olan maddi nöqtə üfüqü istiqamətdə düzxətli hərəkət edir. Bu nöqtəyə tə'sir edən qüvvə sür'ətin v_0 olduğu andan başlayaraq keçən zamanın kubu ilə mütənasibdir (mütənasiblik əmsalı k-dır). Bundan əlavə, nöqtəyə sür'ətlə zamanın hasili ilə mütənasib olan əks qüvvə tə'sir edir (mütənasiblik əmsalı k_1-dir). Sür'ətin zamandan asılılığını tapın.

HƏLLİ. $t=0$ anında maddi nöqtənin sür'ətinin v_0 olduğunu qəbul etsək şərtə görə maddi nöqtəyə $F_1=kt^3$ və $F_2=-k_1vt$ qüvvələri tə'sir edər. Onda Nyutonun ikiknci qanununa görə yazmaq olar:

$$m\frac{dv}{dt}=kt^3-k_1vt.$$

Bu xətti tənlikdir. Onu həll etsək alarıq:

$$v(t) = b\left(at^2 - 1\right) + C_1 e^{-at^2}.$$

burada $a = \frac{k_1}{2m}$, $b = \frac{2km}{k_1^2}$. $t = 0$ olduqda $v = v_0$ olduğundan

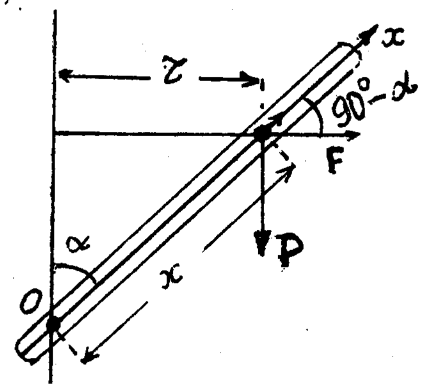
$$v_0 = -b + C_1, \quad C_1 = v_0 + b, \quad v(t) = b\left(at^2 - 1\right) + \left(v_0 + b\right)e^{-at^2}.$$

46. Borucuq şaquli oxla α bucağı əmələ gətirən ox ətrafında sabit ω bucaq sür'ətilə fırlanır. Borucuqda kürəcik sürtünməz hərəkət edir. Başlanğıc anda kürəciyin fırlanma oxu üzərində yerləşdiyi və borucuğun oxunun müsbət istiqamətinə yönəlmiş v_0 sür'ətinə malik olduğunu nəzərə alaraq kürəciyin borucuq boyunca hərəkət qanununu tapın. (Xüsusi hal olaraq $\alpha = \frac{\pi}{2}$ götürün)

HƏLLİ. Kürəciyə hər an ağırlıq qüvvəsi $P = mg$ və mərkəzəqaçma qüvvəsi $F = mr\omega^2$ tə'sir edir. Burada m-kürəciyin kütləsi, g-sərbəstdüşmə tə'cili, r-kürəciyin fırlanma oxuna qədər olan məsafədir (şəkil 24). Həmin qüvvələrin əvəzləyicisinin ox hərəkət oxuna proyeksiyası

$$R_x = -P\cos\alpha + F\cos\left(90^0 - \alpha\right) = -P\cos\alpha + F\sin\alpha,$$

$$R_x = m\left(r\omega^2 \sin\alpha - g\cos\alpha\right).$$



Şəkil 24

Burada $r = x\sin\alpha$ olduğunu nəzərə alsaq yaza bilərik.

$$R_x = m\left(x\omega^2 \sin^2\alpha - g\cos\alpha\right).$$

Onda Nyutonun ikinci qanununa görə yazmaq olar.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\left(x\omega^2\sin^2\alpha - g\cos\alpha\right). \quad k^2 = \omega^2\sin^2\alpha$$

qəbul etsək, bu tənlik

$\frac{d^2x}{dt^2} - k^2x = -g\cos\alpha$ şəklinə düşər. Bu sabit əmsallı ikitərtibli bircins olmayan diferensial tənlikdir. Onu həll etsək alarıq:

$$x = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt} + \frac{g\cos\alpha}{k^2}.$$

Burada $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$ şərtlərini nəzərə alsaq

$$C_1 = \frac{v_0k - g\cos\alpha}{2k^2}, \quad C_2 = -\frac{v_0k + g\cos\alpha}{2k^2},$$

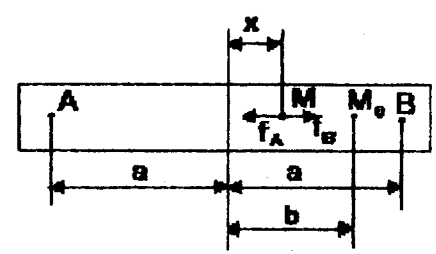
$$x = \frac{1}{2k^2}\left[\left(v_0k - g\cos\alpha\right)e^{kt} - \left(v_0k + g\cos\alpha\right)e^{-kt} + 2g\cos\alpha\right]$$

$(k = \omega\sin\alpha)$. Xüsusi halda, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ qəbul etsək buradan alarıq.

$$x = \frac{v_0}{2\omega}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right).$$

47. Kütləsi m olan M maddi nöqtə aralarındakı məsafə $2a$ olan eynigüclü A və B mənbəyiləri tərəfindən cəzb edilir. Cazibə qüvvəsi M nöqtəsinin mənbəyindən olan məsafəsilə mütənasibdir. Maddi nöqtə başlanğıc anda sakit vəziyyətdə mənbəyiləri birləşdirən xəttin ortasından b məsafədə yerləşmişdir. Nöqtənin hərəkət qanununu tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında maddi nöqtə mərkəzdən x məsafəsində yerləşmişdir. Maddi nöqtəyə hər an A və B mənbəyilərindən cazibə qüvvələri tə'sir edir (şəkil 25). Baxılan hal üçün yaza bilərik: $f_A = -k(a+x)$, $f_B = k(a-x)$. Burada k-mütənasiblik əmsalıdır. Bu qüvvələrin əvəzləyicisi $R = f_A + f_B = -2kx$ olar.



Şəkil 25.

Məsələnin şərtinə və Nyutonun ikinci qanununa görə yaza bilərik:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2kx,$$

buradan $r^2 = \frac{2k}{m}$ qəbul etsək alarıq.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + r^2x = 0, \quad x = C_1 \sin rt + C_2 \cos rt.$$

$t = 0$ olduqda $x = b$, $\frac{dx}{dt} = 0$ olduğunu nəzərə alsaq taparıq:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = b, \quad x = b\cos rt = b\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t.$$

48. Başlanğıc kütləsi M olan damcı sərbəst düşür və bərabər buxarlanaraq hər saniyə öz kütləsini m (q) itirir. Müqavimət qüvvəsi damcının hərəkət sür'əti ilə mütənasibdir. Başlanğıc anda damcının sür'ətinin sıfır olduğunu bilərək, düşmə anından başlayaraq onun hərəkət sür'ətinin zamandan asılılığını tapın. Mütənasiblik əmsalı $k \neq 2m$.

HƏLLİ. Damcı bərabər buxarlandığından, onun kütləsi t zamanından asılı olaraq $M - mt$ qanunu ilə azalır. t anında onun hərəkətinə $(M - mt)g$ ağırlıq qüvvəsi və $-kv(t)$ müqavimət qüvvəsi tə'sir edir. Kütlə zamandan asılı olduğundan damcının hərəkət qanunu

$$\frac{d}{dt}[(M - mt)v] = (M - mt)g - kv$$

tənliyi ilə verilir. Burada $v(t)$-damcının sür'ətidir. Buradan alınan

$$(M - mt)\frac{dv}{dt} + (k - m)v = (M - mt)g$$

xətti tənliyi həll edərək alırıq:

$$v(t) = C(M - mt)^{\frac{k}{m}-1} - \frac{g}{2m-k}(M - mt).$$

$v(0) = 0$ şərtinə əsasən

$$C = \frac{g}{2m-k}M^{2-\frac{k}{m}}, \quad v(t) = \frac{g}{2m-k}(M - mt)\left[\left(1 - \frac{m}{M}t\right)^{\frac{k}{m}-2} - 1\right].$$

49. Başlanğıc kütləsi m_0 (q) olan damcı bərabər m_1 (q/san) sür'ətilə buxarlanır və başlanğıc v_0 (sm/san) sür'ətilə ətalət qüvvəsinin tə'siri ilə hərəkət edir. Mühitin hərəkətə müqavimət qüvvəsi damcının hərəkət sür'əti və radiusu ilə mütənasib olub, başlanğıc anda $(t = 0)$ f_0(dina)-a bərabərdir. Damcının hərəkət sür'ətinin zamandan asılılığını tapın.

HƏLLİ. Damcının kütləsi t zamanından asılı olaraq $m = m_0 - m_1t$ qanunu ilə azalır. t anında damcının sür'əti $v(t)$ olarsa, mühütün müqavimət qüvvəsi $F(t) = -kv(t)R(t)$ olar, burada k-mütənasiblik əmsalı, $R(t)$ isə t anında damcının radiusudur. Damcı buxarlandığından onun radiusu zamandan asılı olaraq dəyişir. Damcının formasının kürə olduğunu qəbul etsək, damcının (kürənin) kütləsi üçün alarıq: ($\gamma = 1$ q/sm^3 xüsusi çəkisi).

$$m = \gamma v = 1\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3(m_0 - m_1t)}{4\pi}}.$$

Beləliklə, mühütün müqavimət qüvvəsi $F = kv\sqrt[3]{\frac{3(m_0 - m_1t)}{4\pi}}$ olduğundan hərəkətin diferensial tənliyi

$$\frac{d[(m_0 - m_1t)v]}{dt} = -kv\sqrt[3]{\frac{3(m_0 - m_1t)}{4\pi}}$$

şəklində verilməlidir. Buradan

$$-m_1v + (m_0 - m_1t)\frac{dv}{dt} = -kv\sqrt[3]{\frac{3(m_0 - m_1t)}{4\pi}}.$$

Bu xətti tənliyi həll edib, $t = 0$ olduqda $F = f_0$, $v = v_0$ olduğunu nəzərə alsaq yaza bilərik:

$$v=\left(1-\frac{m_1}{m_0}t\right)^{-1}Ce^{\frac{3k}{m_1}\sqrt[3]{\frac{3m_0}{4\pi}}\sqrt[3]{1-\frac{m_1}{m_0}t}},\quad C=v_0e^{-\frac{3k}{m_1}\sqrt[3]{\frac{3m_0}{4\pi}}},$$

$$f_0=kv_0\sqrt[3]{\frac{3m_0}{4\pi}},\quad k=\frac{f_0}{v_0}\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3m_0}},$$

$$v=v_0\left(1-\frac{m_1}{m_0}t\right)^{-1}e^{-\frac{3f_0}{m_1v_0}\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{m_1}{m_0}t}\right)}.$$

50. Mayedə fırlanan cismə tə'sir edən müqavimət qüvvəsi fırlanmanın bucaq sür'ətilə mütənasibdir. Cismin 200 dövr/dəq sür'ətlə fırlanmağa başlandığı andan bir dəqiqə sonra sür'əti 120 dövr/dəq olarsa, bucaq sür'ətinin zamandan asılılığını tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t-anında cismin fırlanma bucaq sür'əti $\omega(t)$ (dövr/dəq), $\frac{d\omega}{dt}$ isə bucaq sür'ətinin dəyişməsidir. Onda məsələnin şərtinə əsasən

$$\frac{d\omega}{dt}=-k\omega$$

tənliyi alınır. Burada k-mütənasiblik əmsalıdır. Bu tənliyi həll etsək alarıq: $\omega(t)=Ce^{-kt}$. $t=0$ olduqda $\omega_0=200$ dövr/dəq olduğundan

$$C=200,\quad \omega(t)=200e^{-kt}.$$

$t=1$ olduqda $\omega=120$ dövr/dəq olduğunu burada nəzərə alsaq yaza bilərik:

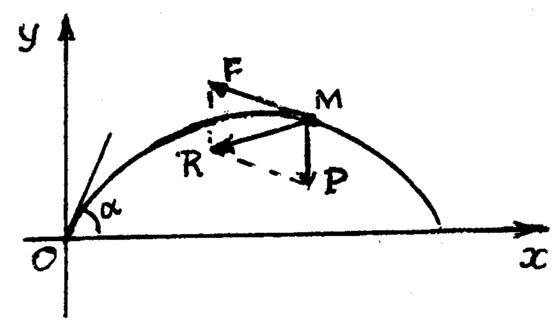
$$120=200e^{-k},\quad e^{-k}=\frac{3}{5},\quad \omega(t)=200\left(e^{-k}\right)^t=200\left(\frac{3}{5}\right)^t.$$

51. Kütləsi m olan güllə v_0 başlanğıc sür'ətilə üfüqə nəzərən α bucağı altında atılmışdır. Mühütün müqavimət qüvvəsi güllənin sür'ətilə mütənasibdir. Güllənin hərəkət trayektoriyasını tapın.

HƏLLİ. Güllənin atıldığı nöqtəni koordinat başlanğıcı, güllənin atılma istiqamətinə yönəlmiş üfüqi oxu absis oxu götürək. Güllənin hərəkət trayektoriyasının ixtiyari $M(x,y)$ nöqtəsində ona iki qüvvə: şaquli aşağı yönəlmiş $P=mg$ ağırlıq qüvvəsi və trayektoriyaya toxunan və hərəkətin əksinə yönəlmiş $F=kv$ müqavimət qüvvəsi tə'sir edir (şəkil 26). Hərəkətin diferensial tənliyi

$$m\frac{d^2S}{dt^2}=-kv-mg$$

şəklində yazılır. Burada $S(t)$-güllənin t anında getdiyi məsafə, $v=\frac{dS}{dt}$ sür'əti $a=\frac{d^2S}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$ isə tə'cili olur. Əyrinin ixtiyari $M(x,y)$ nöqtəsi üçün toxunanın absis oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaq φ olarsa, onda



Şəkil 26.

$$\begin{cases}dx=dS\cos\varphi,\\ dy=dS\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\frac{dS}{dt}\cos\varphi,\\ \frac{dy}{dt}=\frac{dS}{dt}\sin\varphi\end{cases}$$

Buradan $\frac{dS}{dt}$ sür'ətiin absis və ordinat oxları üzrə proyeksiyaları $v_x=\frac{dx}{dt}$, $v_y=\frac{dy}{dt}$ olduğundan alınır. Tənliyi sür'ətin koordinat oxlarına proyeksiyalarlı ilə ifadə edək.

$$\begin{cases}m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt},\\ m\frac{d^2y}{dt^2}=-k\frac{dy}{dt}-mg\end{cases}$$

Bu sistemi ayrı-ayrılıqda həll edib tapırıq:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t}, \\ y(t) = C_3 + C_4 e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t \end{cases}$$

Şertə əsasən $S(0) = 0$, $S'(0) = v_0$ olduğundan, bunları proyeksiyalarla yazsaq $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x'(0) = v_0\cos\alpha$, $y'(0) = v_0\sin\alpha$ alarıq. Bu şərtləri tapılan həlldə nəzərə alsaq taparıq:

$$C_1 = \frac{mv_0}{k}\cos\alpha,\quad C_2 = -\frac{mv_0}{k}\cos\alpha,\quad C_3 = \frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mv_0}{k}\sin\alpha,$$

$$C_4 = -\frac{m^2 g}{k^2} - \frac{mv_0}{k}\sin\alpha,$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{mv_0\cos\alpha}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right), \\ y(t) = \frac{m}{k^2}(mg + kv_0\sin\alpha)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mg}{k}t \end{cases}$$

Bu, güllənin hərəkətinin parametrik şəkildə tənliyidir. $\frac{m}{k}v_0\cos\alpha = a$, $\frac{m}{k^2}(mg + kv_0\sin\alpha) = b$ işarə etsək alarıq:

$$1 - e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{x}{a},\quad -\frac{k}{m}t = \ln\left(1 - \frac{x}{a}\right),\quad t = -\frac{m}{k}\ln\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

$$y = b\frac{x}{a} + \frac{gm^2}{k^2}\ln\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

52. Kütləsi m olan maddi nöqtə uzunluğu L və kütləsi M olan bircins çubuğun sol ucundan a məsafəsində onun oxunun davamında

yerləşmişdir. Çubuğun və maddi nöqtənin cazibə qüvvəsini hesablayın.

HƏLLİ. Ümumdünya cazibə qanuna əsasən kütlələri m_1 və m_2, aralarındakı məsafə r olan cisimlər bir-birini $F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$ qüvvəsi ilə cəzb edir. Burada k-cəzbetmə əmsalıdır. Çubuğun dx elementar parçasının maddi nöqtəni cəzb etməsi elementar dF qüvvəsini hesablayaq. Çubuq bircins olduğundan dx elementinin dm_1 kütləsi

$$\frac{dm_1}{M} = \frac{dx}{L},\quad dm_1 = \frac{M}{L}dx$$

mütənasibdən tapılır. Maddi nöqtə ilə dx arasındakı məsafəni $r = a + x$ götürsək Nyutonun qanununa əsasən yaza bilərik:

$$dF = k\frac{mM}{L(a+x)^2}dx.$$

Bu tənlik, axtarılan cazibə qüvvəsinin diferensial tənliyidir. Onu inteqrallasaq alarıq:

$F = -k\frac{mM}{L}\frac{1}{a+x} + C$. $x = 0$ olduqda $F = k\frac{mM}{a^2}$ olduğundan

$$C = k\frac{mM}{a^2}\frac{a+L}{L},\quad F = k\frac{mM}{L}\left(\frac{a+L}{a^2} - \frac{1}{a+x}\right).$$

Xüsusi halda $x = L$ götürsək çubuğun və maddi nöqtənin arasında tə'sir edən cazibə qüvvəsini alarıq:

$$F = kmM\frac{2a+L}{a^2(a+L)}.$$

3. Elmin və texnikanın müxtəlif sahələrinə aid məsələlər

Materiallar müqavimətindən mə'lumdur ki, tirin elastiqiyyət xəttinin əyilmə radiusu $R = \frac{EJ}{M(x)}$ düsturu ilə tə'yin olunur, burada E-

elastiqiyyət modulu, J - en kəsiyin neytral oxa nəzərən ətalət momenti, $M(x)$-isə x nöqtəsinə uyğun kəsiyə bir tərəfdən tə"sir edən xarici qüvvələrin neytral oxa nəzərən əyilmə momentlərin cəbri cəmidir. $y = y(x)$ əyrisinin əyilmə radiusu $R = \frac{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$ düsturu ilə verildiyindən $\frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{M(x)}{EJ}$ əyilmənin diferensial tənliyi olur.

Əyilmə çox kiçik olduqda $(y')^2$ kiçik olduğundan nəzərə alınmır. Odur ki, $y'' = \pm\frac{M(x)}{EJ}$ əyilmənin diferensial tənliyi olur.

1. Əhalinin artım sür'əti əhalinin miqdarı ilə mütənasibdir. Əgər başlanğıc an kimi qəbul edilmiş anda əhalinin miqdarı A_0, bir ildən sonra $a\%$ artmışsa, əhalinin A miqdarı ilə t zamanı arasındakı asılılığı tapın.

Azərbaycan əhalisinin 1985-ci il yanvarın 1-nə 7 milyon nəfər olduğunu və 1984-cü ilə nəzərən $3{,}2\%$ artdığını bilərək, yuxarıdakı şərtlər daxilində, əhalinin 2000-ci il yanvarın 1-nə nə qədər olacağını tapın. (Bakı şəhəri $1{,}6$ milyon, əhalinin artımı 3%).

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında əhalinin sayı $A(t)$ qədərdir. Onda əhalinin miqdarının dəyişmə sür'əti $\frac{dA}{dt}$ olar. Məsələnin şərtinə görə

$$\frac{dA}{dt} = kA.$$

Burada k-mütənasiblik əmsalıdır. Buradan $A = Ce^{kt}$. $t = 0$ olduqda, $A = A_0$ olduğundan $C = A_0$, $A = A_0e^{kt}$.

Əhalinin bir ildə $a\%$ artdığını qəbul etsək $\left(\frac{aA_0}{100}\right)$ onun bir ildən sonrakı miqdarı $A_0 + \frac{aA_0}{100} = \frac{A_0(100+a)}{100}$ olduğunu nəzərə alsaq yaza bilərik:

$$\frac{A_0(100+a)}{100} = A_0e^k, \quad e^k = \frac{100+a}{100}, \quad A = A_0\left(\frac{100+a}{100}\right)^t.$$

Alınan düstura əsasən Azərbaycan və Bakının əhalisinin 2000-ci ildə nə qədər olacağını hesablaya bilərik.

a). $A = 7$, $t = 15$, $(2000-1985)$, $a = 3{,}2\%$,

$$A_{2000} = 7\left(\frac{100+3{,}2}{100}\right)^{15} \approx 11{,}2 \text{ milyon}.$$

b). $A = 1{,}6$, $t = 15$, $a = 3\%$,

$$A_{2000} = 1{,}6\left(\frac{100+3}{100}\right)^{15} \approx 2{,}49 \text{ milyon}.$$

2. A maddəsi kimyəvi reaksiya nəticəsində B maddəsinə çevrilir. Sabit temperaturda və müəyyən şərtlər daxilində reaksiyanın sür'əti qalan A maddəsinin miqdarı ilə mütənasibdir. Reaksiya başlayandan bir saat sonra A maddəsindən $44{,}8$ q, 3 saatdan sonra isə $11{,}2$ q qalmışdır. A maddəsinin reaksiyadan əvvəlki miqdarını və nə qədərdən sonra həmin maddənin $\frac{1}{64}$ hissəsinin qaldığını tə'yin edin.

HƏLLİ. A maddəsinin başlanğıc anda miqdarını a ilə işarə edək. Reaksiya başlayandan keçən t müddət ərzində alınan B maddəsinin miqdarını $x(t)$ ilə işarə edək. Reaksiyanın sür'əti $\frac{dx}{dt}$ olar. t müddəti ərzində A-da qalan maddə $a-x$ olar. Onda reaksiyanın diferensial tənliyini

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)$$

şəklində yaza bilərik. Burada k-mütənasiblik əmsalıdır və kimyəvi prosesin növündən, şərtindən asılıdır. Alınan tənliyin həlli

$$x = a - Ce^{-kt}$$

olduğundan $x(0)=0$ şərtinə əsasən $C=a$, $x=a\left(1-e^{-kt}\right)$.

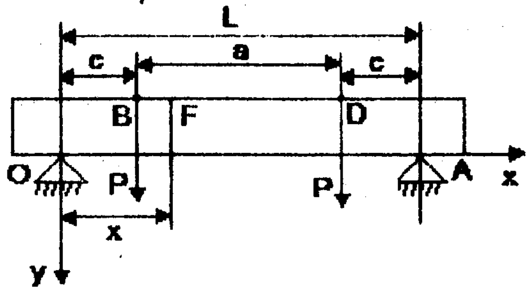
$t=1$ saat olduqda $a-x=44{,}8$, $x=a-44{,}8$, $t=3$ saat olduqda $x=a-11{,}2$ olduğundan yaza bilərik:

$$\begin{cases} a-44{,}8=a\left(1-e^{-k}\right), \\ a-11{,}2=a\left(1-e^{-3k}\right) \end{cases}$$

Buradan $e^{k}=2$, $a=89{,}6$, $x=89{,}6\left(1-2^{-t}\right)$. Maddənin qalan $\frac{1}{64}$ hissəsinin miqdarı $a-x=\frac{89{,}6}{64}$ olduğundan $\frac{89{,}6}{64}=89{,}6\cdot 2^{-t}$, $2^{t}=64$, $t=6$.

3. Dəmiryolu relsləri arasındakı məsafə $a=1{,}6$ m-dir. Elektrovozun hər relsə göstərdiyi yük $P=9$ ton-dur. Dəmiryolu körpüsünün eninə qoyulmuş tirləri aralarındakı məsafə L olan fermalar üzərində qoyulmuşdur. Tirin en kəsiyi sahəsinin neytral oxa nəzərən ətalət momenti $J=45000\,\text{sm}^4$, elastiqiyyət modulu $E=10^5\ \text{kq/sm}^2$-dır. Eninə qoyulmuş tirlərin ortasının mümkün olan əyilməsinin maksimum $0{,}2$ sm olduğunu nəzərə alaraq fermalar arasındakı L məsafəsini tapın.

HƏLLİ. Məsələyə eninə qoyulmuş O və A dayaqları üstündə yerləşən B və D nöqtələrində P qüvvəsi tə'sir edən tir kimi baxaq (şəkil 27). Koordinat başlanğıcı olaraq O nöqtəsi, ox olaraq OA düz xətti, oy şaquli aşağı yönəlmiş düz xətti götürək. Tirin əyilməsi çox kiçik olduğundan əyilmənin diferensial tənliyini $y''=\pm\frac{M(x)}{EJ}$ şəklində



Şəkil 27.

götürmək olar. O və A nöqtələrində dayaqların reaksiyaları $R_O=$

$=R_A=P$ olur. Koordinat başlanğıcından x $(c<x<c+a)$ məsafədə yerləşən BD sahəsindəki F kəsiyi üçün tərpənməz oxa nəzərən əyilmə momentləri cəmi $M(x)=P(L-c-x)-P(L-x)=-Pc$ olur. Baxılan halda $y''<0$ olduğundan tirin əyilməsinin diferensial tənliyi

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{Pc}{EJ}$$

şəklinə düşər. Bu tənliyi iki dəfə ardıcıl inteqrallasaq alarıq:

$$y'=-\frac{Pc}{EJ}x+C_1,\quad y=-\frac{Pc}{EJ}\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2.$$

$x=0$ olduqda $y=0$, $x=L$ olduqda $y=0$ sərhəd şərtlərini burada nəzərə alsaq taparıq: $C_2=0$, $C_1=\frac{Pc}{EJ}\frac{L}{2}$, $y=\frac{Pc}{2EJ}x(L-x)$.

$x=\frac{L}{2}$ olduqda (tirin ortasında) maksimum əyilməni taparıq: $h=\frac{PcL^2}{8EJ}$. $L=a+2c$ olduğundan buradan alarıq:

$$h=\frac{P}{8EJ}c(a+2c)^2,\quad 4c^3+4ac^2+a^2c-\frac{8EJh}{P}=0.$$

Məsələdə verilənlərin ədədi qiymətlərini burada nəzərə alsaq

$$c^3+160c^2+6400c-200000=0$$

tənliyinin alarıq. $z=\frac{c}{10}$, yə'ni $c=10z$ qəbul etsək və tənliyin hər iki tərəfini 1000-ə ixtisar etsək alarıq. $z^3+16z^2+64z-200=0$, $(z-2)\left(z^2+18z+100\right)=0$, $z_1=2$, $z_{2,3}=-9\pm i\sqrt{19}$.

$z_1=2$ kökünə uyğun $c=20$. Odur ki,

$$L=2c+a=2\cdot 20+160=200\ \text{sm}=2\text{m}.$$

4. Düz yoldan dairəvi yola keçən dəmiryolu hissəsinin tənliyini tapın. Keçid əyrilərinin uzunluğu L, dairəvi yolun radiusu r-dir.

HƏLLİ. Keçid əyrisinin $\frac{1}{R}$ əyriliyi müntəzəm olaraq sıfırdan dairəvi hissənin əyriliyinə $\left(\frac{1}{r}\right)$ qədər dəyişir. Ona görə də yaza bilərik: $\frac{1}{R} = kS$. Burada k-mütənasiblik əmsalı, S-keçid əyrisinin başlanğıcından əyrinin ixtiyari $M(x,y)$ nöqtəsinə qədər olan qövsün uzunluğudur. k əmsalı $S = L$ olduqda $\frac{1}{R} = \frac{1}{r}$ şərtindən tapılır: $\frac{1}{r} = kL$, $k = \frac{1}{rL}$. Onda yaza bilərik: $\frac{1}{R} = \frac{S}{rL}$. Keçid əyrisi bütün L boyunca absis oxundan az fərqləndiyindən Ox oxunu L boyunca Oy oxunu şaquli yuxarı yönəldək. Onda S qövsünün uzunluğunu M nöqtəsinin x absisi ilə əvəz etmək olar. Bu məsələ üçün də bucaq əmsalı $k = y'$ çox kiçik olduğundan əyrinin əyriliyi $\frac{1}{R} = |y''|$ kimi götürmək olar. Onda

$$y'' = \frac{x}{rL} \quad (y'' > 0)$$

keçid əyrisinin diferensial tənliyi olur. Tənliyi inteqrallasaq

$$y' = \frac{1}{rL}\cdot\frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = \frac{1}{6rL}x^3 + C_1x + C_2.$$

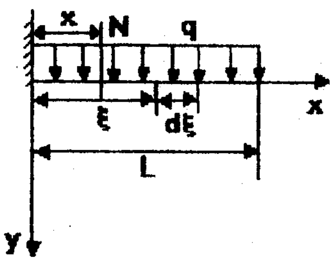
$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ şərtlərinə əsasən $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $y = \frac{x^3}{6rL}$.

5. Su axıdılmaq üçün nəzərdə tutulmuş polad boru L uzunluğunda divardan kənara çıxır. Borunun qalınlığı δ sm, daxili diametri d-dir. L uzunluğu nə qədər olmalıdır ki, borunun ucunun əyilməsi h sm olsun.

HƏLLİ. Borunu bərabər paylanmış q (vahid uzunluğa düşən yük) yükü ilə yüklənmiş konsol tir kimi qəbul etmək olar. Borunun divardan ξ məsafədə yerləşən elementar $d\xi$ uzunluğuna $qd\xi$ yükü tə'sir

edir. Həmin qüvvənin divardan x məsafədə olan N nöqtəsinə nəzərən momenti $q(\xi - x)d\xi$, əyilmə momenti isə (şəkil 28).

$$M = \int_x^L q(\xi - x)d\xi = q\frac{(L-x)^2}{2}.$$



Şəkil 28.

Tirin əyilmə xəttinin diferensial tənliyi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \quad (y'' > 0)$$

olduğundan, M-in qiymətini burada yazsaq alarıq:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{2EJ}(L-x)^2$$

Bu tənliyi inteqrallasaq alarıq:

$$y' = -\frac{q}{2EJ}\frac{(L-x)^3}{3} + C_1, \quad y = \frac{q}{24EJ}(L-x)^4 + C_1x + C_2.$$

$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ şərtlərini nəzərə alsaq

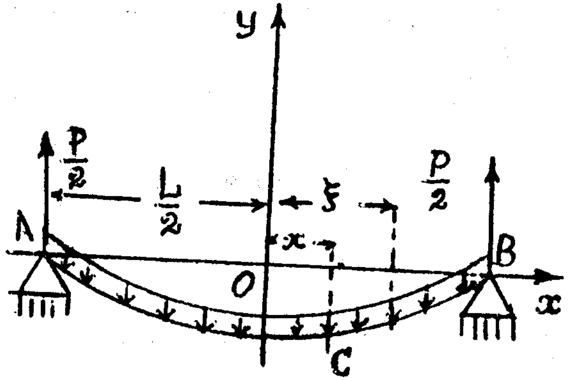
$$C_1 = \frac{qL^3}{6EJ}, \quad C_2 = -\frac{qL^4}{24EJ}, \quad y = \frac{q}{24EJ}(L-x)^4 + \frac{qL^3}{6EJ}x - \frac{qL^4}{24EJ}.$$

Borunun $x = L$ ucunda əyilmə $h = \frac{qL^4}{8EJ}$ olduğundan alarıq:

$$L = \sqrt[4]{\frac{8EJh}{q}}.$$

6. Uzunluğu L olan tir A və B dayaqlarına söykənir. Tirə ümumi çəkisi P olan bərabər paylanmış yük tə'sir edir. Tirin əyilmə tənliyini və maksimum (h) əyilməsini tapın.

HƏLLİ. Dayaqların reaksiyaları $\frac{P}{2}$ olar. Hər vahid uzunluğa düşən yük $q = \frac{P}{L}$ olar. Koordinat oxları olaraq, AB-dən keçən düz xətt absis, AB-nin orta nöqtəsindən keçən perpendikulyarı ordinat oxu qəbul edək (şəkil 29). Koordinat başlanğıcından sağda x məsafədə yerləşən C kəsiyinə baxaq. Onda C kəsikdən sağda $\frac{P}{2}$



Şəkil 29.

yükünün momenti $M_1 = \left(\frac{L}{2} - x\right)\frac{P}{2}$.

Koordinat başlanğıcından $\xi > x$ məsafədə yerləşən $d\xi$ uzunluğunda tirə tə'sir edən yük $\frac{P}{L}d\xi$, həmin yükün C kəsiyə nəzərən momenti $-(\xi - x)\frac{P}{L}d\xi$ olar. Onda tirin CB hissəsi üçün bütün yükün momenti

$$M(x) = -\int_x^{\frac{L}{2}}(\xi - x)\frac{P}{L}d\xi + \left(\frac{L}{2} - x\right)\frac{P}{2} = \frac{P}{2}\left(\frac{L}{4} - \frac{x^2}{L}\right).$$

Tirin əyilməsinin diferensial tənliyi

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ} \quad (y'' > 0)$$

olduğundan (E-elastiqiyyət modulu, J-ətalət momentidir)

$$y'' = \frac{P}{2EJ}\left(\frac{L}{4} - \frac{x^2}{L}\right).$$

Tənliyi inteqrallasaq alarıq: $y' = \frac{P}{2EJ}\left(\frac{L}{4}x - \frac{1}{L}\cdot\frac{x^3}{3}\right) + C_1$, $y = \frac{P}{2EJ}\left(\frac{L}{8}x^2 - \frac{x^4}{12L}\right) + C_1 x + C_2$.

Buradan $y'(0) = 0$, $y\left(\pm\frac{L}{2}\right) = 0$ olduğunu nəzərə alsaq taparıq:

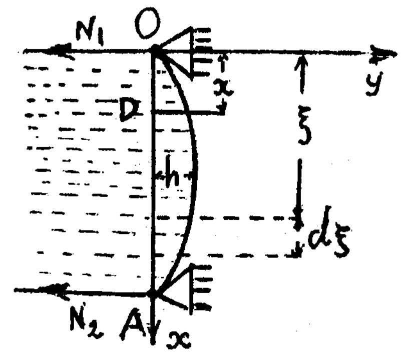
$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{5PL^3}{384EJ}, \quad y = \frac{P}{2EJ}\left(\frac{L}{8}x^2 - \frac{x^4}{12L}\right) - \frac{5PL^3}{384EJ}.$$

Tirin maksimum əyilməsini tapmaq üçün $x = 0$ (tirin ortası) götürmək lazımdır:

$$h = -\frac{5PL^3}{384EJ}.$$

7. Uzunluğu L, eni b olan tir O və A dayaqlarına söykənir. Tirə səviyyəsi yuxarı dayaq səviyyəsində olan su təbəqəsi tə'sir edir. Tirin əyilmə tənliyini və maksimum əyilməsini tapın.

HƏLLİ. Tirin ξ dərinliyində olan $bd\xi$ sahəsini götürək. Onda ξ dərinliyində həmin sahəyə $dQ = b\xi d\xi$ hidrostatik təzyiq tə'sir edəcək. dQ elementar təzyiqi dayaqlarda elementar $dN_1 = \frac{L-\xi}{L}dQ$, $dN_2 = \frac{\xi dQ}{L}$, $dN_1 = \frac{(L-\xi)b\xi}{L}d\xi$, $dN_2 = \frac{b\xi^2}{L}d\xi$ reaksiyaları yaradacaq (şəkil 30). Buradan $[0, L]$ parçasında inteqrallamaqla alırıq:



Şəkil 30.

$$N_1 = \frac{bL^2}{6}, \quad N_2 = \frac{bL^2}{3}.$$

Elementar $b\xi d\xi$ yükünün koordinat başlanğıcından x məsafəsində olan D nöqtəsinə nəzərən momenti $b\xi(\xi-x)d\xi$ olar. Onda D kəsiyi üçün bütün qüvvələrin əyilmə momenti

$$M = b\int_x^L (\xi-x)\xi d\xi - N_2(L-x) = \frac{b}{6}\left(x^3+2L^3-3L^2x\right) - \frac{bL^2}{3}(L-x) = \frac{b}{6}\left(x^3-L^2x\right).$$

Tirin əyilməsinin diferensial tənliyini $y''=\pm\frac{M(x)}{EJ}$ şəkildə verildiyindən baxılan halda $(y''<0)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{6EJ}\left(x^3-L^2x\right).$$

Tənliyi inteqrallasaq alarıq:

$$y'=\frac{b}{6EJ}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{L^2x^2}{2}\right)+C_1,\quad y=\frac{b}{6EJ}\left(\frac{x^5}{20}-\frac{L^2x^3}{6}\right)+C_1x+C_2.$$

$x=0$ olduqda $y=0$, $x=L$ olduqda $y=0$ sərhəd şərtlərindən istifadə etsək taparıq:

$$C_2=0,\quad C_1=\frac{7bL^4}{360EJ},\quad y=\frac{b}{360EJ}\left(3x^5-10L^2x^3+7L^4x\right).$$

Bu tirin əyilmə tənliyidir. Tirin maksimum əyilməsini tapmaq üçün bu funksiyanın maksimumunu tapmaq kifayətdir. $x=Lt$ əvəzləməsini aparaq. (burada $0\le x\le L$, $0\le t\le 1$). Onda $z(t)=y(Lt)= \frac{bL^5}{360EJ}\left(3t^5-10t^3+7t\right)$. Buradan $z'(t)=\frac{bL^5}{360EJ}\left(15t^4-30t^2+7\right)=0$, $15t^4-30t^2+7=0$, $15u^2-30u+7=0$, $\left(u=t^2\right)$.

$$u_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{225-105}}{15}=1\pm\frac{\sqrt{120}}{15}.$$

$0\le t\le 1$ olduğundan $u_1=1-\frac{\sqrt{120}}{15}$, $t_1=\sqrt{1-\frac{\sqrt{120}}{15}}\approx 0{,}519$ götürülür. $x=Lt$ olduğundan $x\approx 0{,}519L$ olur. $z''(0{,}519)<0$ olduğundan tirin əyilməsi $t\approx 0{,}519$ qiymətində maksimum olur:

$$y_{max}=h\approx 0{,}0065\frac{bL^5}{EJ}.$$

9. Tutaq ki, a miqdarda A maddəsi P və Q maddələrinə parçalanır. Bu maddələrin alınması sür'əti parçalanmış maddənin həmin andakı miqdarı ilə mütənasibdir. t anına qədər alınmış P və Q maddəçrinin miqdarı uyğun olaraq $x(t)$, $y(t)$ və $x(0)=0$, $y(0)=0$, $x(1)=\frac{3a}{8}$, $y(1)=\frac{a}{8}$ olduğunu bilərək, onların dəyişmə qanununu tapın.

HƏLLİ. t anı üçün A maddəsinin miqdarı $(a-x-y)$ olar. Onda t anında P və Q maddələrinin alınması sür'əti

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=k_1(a-x-y),\\ \frac{dy}{dt}=k_2(a-x-y),\end{cases}$$

burada k_1 və k_2-mütənasiblik əmsallarıdır. Alınan sistemi həll etmək üçün sistemin birinci tənliyini t-yə görə diferensialllayaq və çevirmələr aparaq:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k_1\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)=-k_1\left[\frac{dx}{dt}+k_2(a-x-y)\right],$$

$$y=-\frac{1}{k_1}\cdot\frac{dx}{dt}+a-x,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-k_1\left[\frac{dx}{dt}+k_2a-k_2x+\frac{k_2}{k_1}\frac{dx}{dt}+k_2x-k_2a\right],\quad \frac{d^2x}{dt^2}+(k_1+k_2)\frac{dx}{dt}=0.$$

$x = C_1 + C_2 e^{-(k_1+k_2)t}$ alınan tənliyin ümumi həlli olduğundan $y =$

$$= -\frac{1}{k_1}\frac{dx}{dt} + a - x \quad \text{əsasən} \quad y = a + \frac{k_2}{k_1} C_2 e^{-(k_1+k_2)t} - C_1.$$

C_1 və C_2 sabitlərini $x(0) = 0, \quad y(0) = 0$ başlanğıc şərtlərindən tapırıq.

$$C_1 = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2}, \quad C_2 = -\frac{k_1 a}{k_1 + k_2},$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{k_1 a}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right], \\ y = \dfrac{k_2 a}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right] \end{cases}$$

Burada $x(1) = \frac{3a}{8}, \quad y(1) = \frac{a}{8}$ olduğunu nəzərə alsaq taparıq:

$$k_1 = \frac{3}{4}\ln 2, \quad k_2 = \frac{1}{4}\ln 2, \quad k_1 + k_2 = \ln 2, \quad e^{k_1+k_2} = 2,$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3a}{4}\left(1 - 2^{-t}\right) = \dfrac{3a}{4}\left(1 - \dfrac{1}{2^t}\right), \\ y = \dfrac{a}{4}\left(1 - 2^{-t}\right) = \dfrac{a}{4}\left(1 - \dfrac{1}{2^t}\right) \end{cases}$$

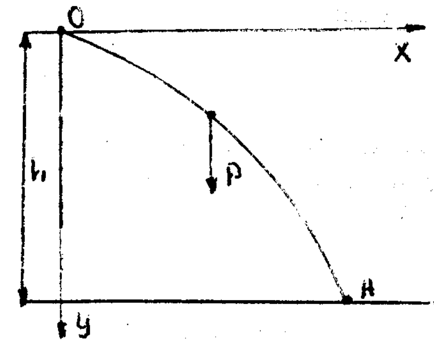
10. Təyyarə yerdən h m hündürlükdə üfüqi istiqamətdə v km/saat sür'ətlə uçur. Təyyarədən yükü verilmiş A nöqtəsindən üfüqi olaraq hansı məsafədə atmaq lazımdır ki, yük A nöqtəsinə düşsün. Yükün başlanğıc nisbi sür'əti sıfırdır və havanın müqavimət qüvvəsi nəzərə alınmır.

HƏLLİ. Koordinat başlanğıcını yükün atıldığı nöqtədə götürək. Yükə yalnız $P = mg$ ağırlıq qüvvəsi tə'sir edir. Nyutonun ikinci qanununu tətbiq etsək, yükün koordinat oxlarına görə hərəkətinin diferensial tənliyini alarıq: (şəkil 31)

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = mg \end{cases}$$

Sistemi inteqrallasaq alarıq:

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2, \\ y = \dfrac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4 \end{cases}$$



Şəkil 31

$t = 0$ olduqda $x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v,$

$y = 0, \quad y' = 0$ olduğundan taparıq: $C_1 = v, \quad C_2 = C_3 = C_4 = 0,$

$$x = vt, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

Bu sistemdən t-ni yox etsək alarıq: $y = \frac{g}{2}\frac{x^2}{v^2}, \quad x = v\sqrt{\frac{2y}{g}}.$

Burada $y = h$ götürsək alarıq: $x = v\sqrt{\frac{2h}{g}}.$

11. Gedən prosesdə bir maddə başqasına çevrilir və məhsulun əmələ gəlməsi sür'əti çevrilən maddənin mövcud miqdarı ilə mütənasib olur (belə hadisəyə birtərtibli proses deyilir). İlk miqdarı m_0 olan bir maddə başqa maddəyə çevrilir və alınan məhsuldan dərhal ikinci məhsul hasil olmağa başlayır. Hər iki çevirmə birtərtibli proses kimi baş verir. Mütənasiblik əmsalları birinci prosesdə k_1, ikinci prosesdə k_2-dir $(k_1 \neq k_2)$. Proses başlayandan t zaman vahidi keçəndən sonra ikinci maddədən nə qədər alınar?

HƏLLİ. Reaksiya başlayandan keçən t müddət ərzində birinci maddədən reaksiya nəticəsində alınan məhsulun miqdarını x ilə işarə edək. Onda t müddəti ərzində birinci maddədən $m_0 - x$ qədər qalar. Reaksiyanın sür'əti $\frac{dx}{dt}$ olduğundan, məsələnin şərtinə görə birinci maddə üçün

$$\frac{dx}{dt} = k_1(m_0 - x)$$

yazmaq olar. Bu tənliyi həll etməklə birinci maddənin $x(t)$ miqdarını tapınq. İkinci proses də birtərtibli proses olduğundan onun diferensial tənliyi

$$\frac{dy}{dt} = k_2[x(t) - y]$$

olar. Burada t -zaman, y -ikinci məhsulun miqdarıdır.

$$x(t) = m_0 - Ce^{-k_1 t}$$

birinci tənliyin ümumi həlli olur. $t = 0$ olduqda $x = 0$ olduğundan

$$C = m_0, \quad x(t) = m_0\left(1 - e^{-k_1 t}\right).$$

$x(t)$ -nin bu qiymətini ikinci tənlikdə yerinə yazsaq

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = m_0 k_2\left(1 - e^{-k_1 t}\right)$$

xətti diferensial tənliyini alarıq. Onu həll etsək alarıq:

$$y = m_0 - \frac{m_0 k_2}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + Ce^{-k_2 t}.$$

$t = 0$ olduqda $y = 0$ olduğundan

$$C = \frac{m_0 k_1}{k_2 - k_1}, \quad y(t) = m_0 - \frac{m_0}{k_2 - k_1}\left(k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}\right).$$

12. Dairəvi yarpağının sahəsinin böyümə sür'əti yarpağın radiusu və ona düşən işığın miqdarı ilə mütənasibdir. Günəş işığınını miqdarı yarpağın sahəsi və şüanın yarpağa nəzərən şaquli yönəlmiş oxla əmələ gətirdiyi bucağın kosinusu ilə mütənasibdir. Əgər səhər saat 6-da yarpağın sahəsi 1600sm^2, həmin gün saat 18-də 2500sm^2 olarsa, yarpağın S sahəsinin t zamandan asılılığını tapın. Günəş şüasının şaquli oxla əmələ gətirdiyi bucaq saat 8-də və 18-də 90^0, günorta isə, saat 12-də 0^0-yə bərabərdir.

HƏLLİ. t anında yarpağın sahəsini $S(t)$ ilə işarə edək. Onda məsələnin şərtinə əsasən

$$\frac{dS}{dt} = krQ,$$

burada r -yarpağın radiusu, k -mütənasiblik əmsalı, Q -günəş işığının miqdarıdır. Digər tərəfdən $Q = \gamma S\cos\alpha$, burada γ -mütənasiblik əmsalı, α -günəş şüaları ilə yarpağa perpendikulyar olan düz xətt arasında qalan bucaqdır. Məsələnin verilənlərinə əsasən başlanğıc an olaraq saat 6 qəbul edək. Onda $S(0) = 1600$ sm^2, $S(12) = 2500$ sm^2 ($t = 12$ saat 18-ə uyğun vaxtdır). $\alpha = \alpha(t)$ xətti, artan funksiyadır və

$\alpha(0) = -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha(6) = 0, \quad \alpha(12) = \frac{\pi}{2}$. Odur ki, yaza bilərik:

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}(t - 6), \quad Q = \gamma S\cos\frac{\pi}{12}(t - 6).$$

t anında dairəvi yarpağın sahəsi $S(t)$, radiusu r olduğundan

$$r(t) = \sqrt{\frac{S(t)}{\pi}}, \quad \frac{dS}{dt} = \frac{k\gamma}{\sqrt{\pi}} S\sqrt{S}\cos\frac{\pi}{12}(t - 6).$$

Dəyişənləri ayırıb, tənliyi həll etsək alarıq:

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{12k\gamma}{\pi\sqrt{\pi}}\sin\frac{\pi}{12}(t - 6) + C.$$

Burada $S(0) = 1600, \quad S(12) = 2500$ şərtlərini nəzər alsaq taparıq:

$$C = -\frac{9}{200}, \quad k\gamma = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2400}, \quad -\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{1}{200}\sin\left[\frac{\pi}{12}(t - 6)\right] - \frac{9}{200},$$

$$S = \frac{160000}{\left[9 - \sin\frac{\pi}{12}(t - 6)\right]^2}.$$

MÜSTƏQİL HƏLL ETMƏK ÜÇÜN MƏSƏLƏLƏR

1. Əyrinin ixtiyari nöqtəsində çəkilən normalın ox oxuna qədər olan

parçasının orta nöqtəsinin $y^2 = ax$ parabolası üzərində olduğunu bilərək, əyrinin tapın. Əyri koordinat başlanğıcından keçir.

CAVAB: $\left[y^2 = 4ax + 4a^2\left(1 - e^{\frac{x}{a}}\right)\right]$.

2. Əyrinin ixtiyari $M(x,y)$ nöqtəsinin OM -radius-vektoru həmin nöqtədə əyriyə çəkilən MP toxunanının və ox oxunun əmələ gətirdiyi üçbucağın sahəsi 2-yə bərabərdir. Əyrinin $A(2;-2)$ nöqtəsindən keçdiyini bilərək onu tapın.

$[3y^2 + 2xy - 4 = 0]$.

3. İxtiyari nöqtəsində normalaltının uzunluğu 4-ə bərabər olub, $A(-1;4)$ nöqtəsindən keçən əyrini tapın.

$[y^2 = 8x + 24]$.

4. Əyriyə çəkilən toxunanın koordinat oxları arasında qalan parçası toxunma nöqtəsində yarıya bölünür. Əyri $(2;3)$ nöqtəsindən keçir. Bu əyrini tapın.

$[xy = 6]$.

5. Cismin hərəkət sür'əti hər anda gedilən yol ilə mütənasibdir. Cismin ilk 10san. ərzində 100m, 15san. ərzində 200m qol getmişdir. Cismin t müddətdə nə qədər yol gedər?

$\left[S = 25 \cdot 2^{\frac{t}{5}} \right]$.

6. Düzxətli hərəkətin tə'cili zamanla mütənasibdir. Gedilən yolun zamandan asılılığını tapın. $t = 0$ olduqda $v = 0$, $S = 0$ və $t = 1$ olduqda $S = \frac{1}{3}$ -dir.

$\left[S = \frac{1}{3}t^3 \right]$.

7. Su ilə dolu silindrik çənin diametri 3m, hündürlüyü 6m-dir. Şaquli yerləşdirildmiş çənin dibində diametri $\frac{1}{24}$ m olan dairəvi deşik açılmışdır. Suyun çəndən tam boşalma vaxtını tapın.

[T=3 saat 5 dəq.].

8. Cismin soyuması sür'əti cismin temperaturu ilə ətraf mühitin temperaturu fərqi ilə mütənasibdir. Havanın temperaturu $20^0 C$ -dir. Mə'lumdur ki, cism 10 dəqiqədə $100^0 C$ -dən $70^0 C$ -ə qədər soyuyur. Cismin temperaturunun dəyişmə qanununun zamandan asılılığını tapın.

$\left[\theta = 20 + 80\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{t}{10}} \right]$.

9. Çəndə tərkibində 10kq duz olan 100 litr məhlul var. Çənə dəqiqədə 3 litr su vurulur və çəndən 1 litr məhlul axıdılır. Məhlul müntəzəm olaraq qarışdırıldığından məhlulun qatılığı hər yerdə bərabər olur. 1 saat 40 dəqiqədən sonra çəndə nə qədər duz qalar?

[2,5 kq].

10. Sür'əti v, gedilən yol S və zaman t arasındakı asılılıq $v\cos t + S\sin t = 2$ tənliyi ilə verilmişdir. Əgər $t = 0$ olduqda $S = 0$ olarsa, gödilən yolun zamandan asılılığını tapın.

$S = 2\sin t + \cos t$.

IV FƏSİL

NÜMUNƏVİ MİSALLAR HƏLLİ

Bu fəsildə yoxlama işlərini və sərbəst çalışmaları yerinə yetirməyə kömək məqsədilə diferensial tənliklər bəhsinə aid nümunəvi misallar həlli verilmişdir.

1. Həllin varlığı, yeganəliyi və təqribi həll

1. $y' = \sqrt{y-x}+1$ tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyi oblastını tapın.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x,y)=\sqrt{y-x}+1$ funksiyası $y \ge x$ yarım müstəvisində tə'yin olunmuş kəsilməz funksiyadır. Odur ki, bu yarım müstəvisinin ixtiyari nöqtəsindən inteqral əyrisi keçir, yə'ni həll var. $f'_y(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y-x}}$ törəməsi ancaq $y>x$ oblastında kəsilməz olur. Deməli, $y>x$ oblastında həll var və yeganədir. Aydındır ki, $y=x$ düz xətt boyunca $f'_y(x,y)$ törəməsi sonsuzluğa çevirilir. Odur ki, $y=x$ düz xətti üzərində həllin yeganəliyi pozula bilər. $y=x$ funksiyası tənliyin həlli olur. Bu həllin məxsusi həll olduğunu göstərək. Bilavasitə, yoxlamaqla göstərmək olar ki, $y=x+\dfrac{(x+C)^2}{4}$ funksiyası tənliyin həllidir. $y=x$ həlli üzərində ixtiyari (x_0,x_0) nöqtəsi götürsək, onda bu nöqtədən $y=x$ və $y=x+\dfrac{(x-x_0)^2}{4}$ həlləri keçir. Deməli, $y=x$ məxsusi həlldir.

2. $y'=x+y^{\frac{5}{3}}$ tənliyinin koordinat başlanğıcı ətrafında həllinin ən çoxu neçə tərtib törəməsi ola bilər.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x,y)=x+y^{\frac{5}{3}}$ funksiyası xOy müstəvisində tə'yin olunub,kəsilməzdir, x və y dəyişənlərinə nəzərən kəsilməz $f'_x(x,y)=1$, $f'_y(x,y)=\dfrac{5}{3}y^{\frac{2}{3}}$ törəmələri var. Lakin $f''_{yy}(x,y)=\dfrac{10}{9}y^{-\frac{1}{3}}$ törəməsi $y=x$ düz xətti boyunca sonsuzluğa çevrildiyindən $f(x,y)$ funksiyasının (0,0) nöqtəsi ətrafında ancaq birinci tərtibdən kəsilməz törəmələri olur. Onda həllin hamarlığı haqqındakı teoremə əsasən verilən tənliyin həllinin (0,0) nöqtəsi ətrafında ikinci tərtibə qədər kəsilməz törəmələri var.

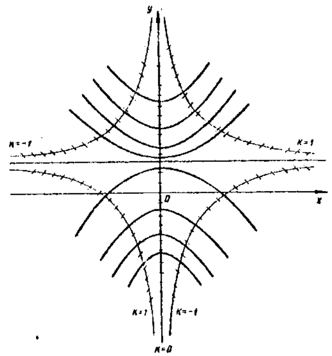
3. İzoklin üsulu ilə $y'=(y-1)x$ tənliyinin həllinin təqribi qrafikini qurun .

HƏLLİ. $f(x,y)=(y-1)x$ funksiyası xOy müstəvisində tə'yin olunub, kəsilməzdir və kəsilməz $f'_y(x,y)=x$ törəməsi var. Deməli, xOy müstəvisi üzərində həll var və yeganədir. Bu həllərin təqribi qrafikini izoklin üsulu ilə quraq. $y'=k$ əvəz etsək $(y-1)x=k$ izoklin ailəsinin tənliyi alınar. $k=0$ uyğun $y=1$ və $x=0$ ekstremal izoklinlər alınır. Bu izoklinlər üzərində meydanın istiqaməti Ox oxuna paralel olur. $k=1$ uyğun $(y-1)x=1$ və $k=-1$ uyğun $(y-1)x=-1$ izoklinlər üzərində meydanın istiqamətləri 45° və 135° olur. $f(x,y)=(y-1)x>0$ oblastda, yə'ni $x>0$, $y>1$ və $x<0$, $y<1$ oblastlarda inteqral əyriləri artan, $(y-1)x<0$ olan oblastda, yə'ni $x>0$, $y<1$ və $x<0$, $y>1$ oblastlarda inteqral əyriləri azalan olur. Odur ki, inteqral əyriləri $x=0$ düz xəttini $y>1$ üçün kəsdikdə minumum, $y<1$ üçün kəsdikdə isə maksimum qiymətini alır. $y=1$ düz xətti tənliyin həlli olur. Həll yeganə olduğundan inteqral əyriləri kəsişmirlər. İnteqral əyrilərin qabarıq və çöküklüyünü tapmaq üçün tənlikdən y'' tapaq:

$$y''=y-1+xy'=y-1+x(y-1)x=(y-1)(1+x^2).$$

Buradan $y>1$ olarsa, $y''>0$, $y<1$ olduqda isə $y''<0$ alınar. Deməli, $y>1$ oblastının da inteqral əyriləri çökük, $y<1$ oblastında isə qabarıq olur. $y=1$ tənliyin həlli olduğundan inteqral əyrilərinin əyilmə nöqtəsi yoxdur (şəkil 32).

4. Eyler sınıq xəttlər üsulu ilə $y'=0{,}5xy$ tənliyinin $y(0)=1$ şərtini ödəyən həllinin $[0,1]$ parçasında $h=0{,}1$ addımına uyğun təqribi qiymətlərini tapın.



Şəkil 32.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x,y)=$ $=0{,}5xy$ funksiyası bütün müstəvidə kəsilməzdir və kəsilməz $f_y'(x,y)=0{,}5x$ törəməsi var. Həllin varlığı və yeganəlik teoreminə əsasən baxılan məsələnin yeganə həlli var. Bu həllin təqribi ədədi qiymətlərini tapmaq üçün $[0,1]$ parçasının $h=0{,}1$ bölgüsünə uyğun $x_0=0$; $x_1=0{,}1$; $x_2=0{,}2$; $x_3=0{,}3$; $x_4=0{,}4$; $x_5=0{,}5$; $x_6=0{,}6$; $x_7=0{,}7$; $x_8=0{,}8$; $x_9=0{,}9$; $x_{10}=1$ nöqtələrinə baxaq. Axtarılan həllin bu nöqtələrə uyğun təqribi ədədi qiymətləri

$$y_k=y_{k-1}+f(x_{k-1},y_{k-1})(x_k-x_{k-1}),\quad k=1,2,\ldots$$

düsturları ilə hesablanır. Baxılan misal üçün $x_k-x_{k-1}=h=0{,}1$ olduğundan

$$y_k=y_{k-1}(1+0{,}05x_{k-1}),\quad y_0=1,\quad k=1,2,\ldots$$

Buradan ardıcıl $k=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ yazmaqla taparıq:

$$y_1=y_0(1+0{,}05x_0)=y_0=1,$$

$$y_2=y_1(1+0{,}05x_1)=1(1+0{,}05\cdot 0{,}1)=1{,}005,$$

$$y_3=y_2(1+0{,}05x_2)=1{,}005(1+0{,}05\cdot 0{,}2)\approx 1{,}015,$$

$$y_4=y_3(1+0{,}05x_3)\approx 1{,}015(1+0{,}05\cdot 0{,}3)\approx 1{,}0302,$$

$$y_5=y_4(1+0{,}05x_4)\approx 1{,}0302(1+0{,}05\cdot 0{,}4)\approx 1{,}0508,$$

$$y_6=y_5(1+0{,}05x_5)\approx 1{,}0508(1+0{,}05\cdot 0{,}5)\approx 1{,}0771,$$

$$y_7=y_6(1+0{,}05x_6)\approx 1{,}0771(1+0{,}05\cdot 0{,}6)\approx 1{,}1094,$$

$$y_8=y_7(1+0{,}05x_7)\approx 1{,}1094(1+0{,}05\cdot 0{,}7)\approx 1{,}1482,$$

$$y_9=y_8(1+0{,}05x_8)\approx 1{,}1482(1+0{,}05\cdot 0{,}8)\approx 1{,}1941,$$

$$y_{10}=y_9(1+0{,}05x_9)\approx 1{,}1941(1+0{,}05\cdot 0{,}9)\approx 1{,}2478.$$

5. $y'=\sqrt[3]{x}-y^2$, $y(0)=0$ məsələsi üçün $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ ardıcıl yaxınlaşmaları tapın.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x,y)=\sqrt[3]{x}-y^2$ funksiyası xOy müstəvisində kəsilməzdir və kəsilməz $f_y'(x,y)=-2y$ törəməsi var. Onda Pikar teoreminə əsasən baxılan məsələnin yeganə həlli var. $f(x,y)=\sqrt[3]{x}-y^2$ funksiyasına $D=\{-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\}$ düzbucaqlıda baxaq. Onda $M=\max\limits_D|f(x,y)|=\max\limits_D\left|\sqrt[3]{x}-y^2\right|=2$, $K=\max\limits_D|f_y'(x,y)|=\max\limits_D|-2y|=2$. Deməli, $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le$ $\le K|y_2-y_1|$, $K=2$, yə'ni $f(x,y)$ funksiyası y arqumentinə nəzərən Lipşis şərtini ödəyir. Onda $\alpha=\min\left\{1,\dfrac{1}{M}\right\}=\min\left\{1,\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{1}{2}$ olduğundan baxılan məsələnin $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ parçasında tə'yin olunmuş yeganə həlli var və bu həlli

$$y_n(x)=y_0+\int_0^x\left(\sqrt[3]{s}-y_{n-1}^2(s)\right)ds,\quad n=1,2,\ldots$$

ardıcıl yaxınlaşmaların müntəzəm limiti kimi göstərmək olur. $y_0(x)=0$ qəbul edib, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ ardıcıl yaxınlaşmaları tapaq:

$$y_1(x)=0+\int_0^x\left(\sqrt[3]{s}-0^2\right)ds=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}},$$

$$y_2(x)=\int_0^x\left(\sqrt[3]{s}-\left(\frac{3}{4}s^{\frac{4}{3}}\right)^2\right)ds=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{27}{176}x^{\frac{11}{3}},$$

$$y_3(x)=\int_0^x\left(\sqrt[3]{s}-\left(\frac{3}{4}s^{\frac{4}{3}}-\frac{27}{176}s^{\frac{11}{3}}\right)^2\right)ds=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{27}{176}x^{\frac{11}{3}}+$$

$$+\frac{27}{704}x^6-\frac{2187}{433664}x^{\frac{25}{3}}.$$

2. Tənliklərin tipini müəyyənləşdirin və həll edin

1. $y'=xy^2+2xy$.

HƏLLİ. Tənlik dəyişənlərinə ayrılandır. Dəyişənlərinə ayırıb inteqrallayaq:

$$\frac{dy}{y(y+2)}=xdx,\quad \int\frac{dy}{y(y+2)}=\int xdx+\ln C,$$

$$\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}\right]dy=\int xdx+\ln C,\quad \frac{1}{2}\left[\ln|y|-\ln|y+2|\right]=\frac{x^2}{2}+\ln C,$$

$$\ln\frac{|y|}{|y+2|}=x^2+\ln C_1,\quad \frac{y}{y+2}=\frac{e^{x^2}}{C},\quad y=\frac{2e^{x^2}}{C-e^{x^2}}.$$

2. $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik bircins olduğundan həll etmək üçün $y=xt$

əvəzləməsini aparaq. Onda yaza bilərik: $dy=tdx+xdt$ y və dy-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yazaq.

$$(x-xt\cos t)dx+x\cos t(xdt+tdx)=0,$$

$$dx+x\cos tdt=0,\quad \frac{dx}{x}=-\cos tdt,\quad \int\frac{dx}{x}=-\int\cos tdt+C,$$

$$\ln|x|+\sin t=C,\quad \ln|x|+\sin\frac{y}{x}=C.$$

3. $y'=2\left(\dfrac{y+1}{x+y-2}\right)^2$.

HƏLLİ. Verilmiş tənlikdə $y+1=z,\ \ x-3=t$ əvəzləməsini aparsaq

$$\frac{dz}{dt}=2\frac{z^2}{(t+z)^2}$$

bircins tənliyini alarıq. $z=tu$ əvəzləməsi aparıb, alınan dəyişənlərinə ayrılan tənliyi inteqrallayaq:

$$t\frac{du}{dt}+u=\frac{2u^2}{(1+u)^2},\quad t\frac{du}{dt}+\frac{u+u^3}{(1+u)^2}=0,\quad \ln|u|+2arctgu+$$

$$+\ln|t|=\ln C,\quad ut=Ce^{-2arctgu}.$$

Apardığımız əvəzləmələri nəzərə alıb, x və y dəyişənlərinə keçsək alarıq: $y+1=Ce^{-2arctg\frac{y+1}{x-3}}$.

4. $x^3(y'-x)=y^2$.

HƏLLİ. Tənliyin ümumiləşmiş bircins olduğunu yoxlayaq. $x\to tx$, $y\to t^ky$, $y'\to t^{k-1}y'$ əvəzləməsi aparaq. Alınan bərabərlikdə t -

nin dərəcələrini bərabərləşdirsək: $3+k-1=4=2k$ alınar. Buradan $k=2$ alınır. Deməli, tənlik ümumiləşmiş bircins tənlikdir. Tənlikdə $y=x^2z$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır. $y'=2xz+x^2z'$ olduğundan $x^3\left(2xz+x^2z'-x\right)=\left(x^2z\right)^2$, $2z+xz'-1=z^2$, $xz'=(1-z)^2$, $\frac{dz}{(1-z)^2}=\frac{dx}{x}$, $z=1$. Bu tənliklərə uyğun $\frac{1}{1-z}=\ln xC$ və $y=x^2$ həlləri alınır. $y=x^2z$ əvəzləməsinə əsasən verilən tənliyin $x^2=\left(x^2-y\right)\ln xC$ ümumi və $y=x^2$ həlli alınır.

5. $xy'-2y=2x^4$.

HƏLLİ. Verilmiş xətti tənliyi həll etmək üçün $y=u(x)v(x)$ əvəzləməsini aparaq. Onda yaza bilərik. $y'=u'v+v'u$, $x(u'v+v'u)-2uv=2x^4$, $u(xv'-2v)+xvu'=2x^4$, $xv'-2v=0$, $v=x^2$, $u'=2x$, $u=x^2+C$, $y=x^2\left(x^2+C\right)$.

6. $\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$.

HƏLLİ. Verilmiş xətti tənliyi sabitin variasiyası üsulu ilə həll edək. $\frac{dy}{dx}+y\cos x=0$ bircins tənliyin ümumi həllini tapaq: $y=Ce^{-\sin x}$. $y=C(x)e^{-\sin x}$ əvəzləməsi aparaq. Onda $y'=C'(x)e^{-\sin x}-C(x)\cos x\, e^{-\sin x}$. y və y'-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazaq:

$$C'(x)e^{-\sin x}-C(x)\cos x\, e^{-\sin x}+C(x)\cos x\, e^{-\sin x}=e^{-\sin x},$$

$$C'(x)=1,\quad C(x)=x+C,\quad y=(x+C)e^{-\sin x}.$$

7. $x\frac{dy}{dx}+y=y^2\ln x$.

HƏLLİ. Verilmiş Bernulli tənliyinin həllini $y=u(x)v(x)$ şəklində axtaraq: $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u$, $xu\frac{dv}{dx}+xv\frac{du}{dx}+uv=u^2v^2\ln x$,

$$v\left(x\frac{du}{dx}+u\right)+xu\frac{dv}{dx}=u^2v^2\ln x,\quad x\frac{du}{dx}+u=0,\quad u=\frac{1}{x},$$

$$x\frac{1}{x}\frac{dv}{dx}=v^2\frac{1}{x^2}\ln x,\quad x^2\frac{dv}{dx}=v^2\ln x,\quad \int\frac{dv}{v^2}=\int\frac{\ln x}{x^2}dx-C,$$

$$-\frac{1}{v}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-C,\quad v(x)=\frac{x}{\ln x+Cx+1},\quad y=\frac{1}{\ln x+Cx+1}.$$

8. $y'+ay(y-x)=1$.

HƏLLİ. $y=x$ funksiyası verilmiş Rikkati tənliyinin həllidir. Ona görə də $y=x+z$ əvəzləməsi tənliyi

$$\frac{dz}{dx}+az(x+z)=0$$

Bernulli tənliyinə gətirir. Bu tənliyi həll etsək, alarıq:

$$z=\frac{e^{-\frac{ax^2}{2}}}{C+a\int e^{-\frac{ax^2}{2}}dx},\quad y=x+z,\quad y=x+\frac{e^{-\frac{ax^2}{2}}}{C+a\int e^{-\frac{ax^2}{2}}dx}.$$

9. $\left(2xy+3y^2\right)dx+\left(x^2+6xy-3y^2\right)dy=0$.

HƏLLİ. $M(x,y)=2xy+3y^2$, $N(x,y)=x^2+6xy-3y^2$, $\frac{\partial M}{\partial y}=2x+6y$, $\frac{\partial N}{\partial x}=2x+6y$, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan, verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlikdir. Odur ki, ümumi həllin düsturuna əsasən:

$$\int_0^x \left(2\xi y + 3y^2\right)d\xi + \int_0^y \left(0^2 + 6\cdot 0\cdot \eta - 3\eta^2\right)d\eta = C,$$

$$x^2y + 3xy^2 - y^3 = C.$$

10. $\left(1-\frac{x}{y}\right)dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0.$

HƏLLİ. $\frac{\partial}{\partial y}\left(1-\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) = 2y + \frac{1}{y} + \frac{2x}{y^2}$,

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Deməli, verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlik deyil. Onu tam diferensiallı tənliyə gətirmək üçün inteqrallayıcı vuruğu tapmaq lazımdır:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{x}{y^2} - 2y - \frac{1}{y} - \frac{2x}{y^2} = -\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right),$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)}{x\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)} = -\frac{1}{x}.$$

İnteqrallayıcı vuruq x dəyişənindən asılı olduğundan

$$\frac{d\ln\mu(x)}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\frac{1}{x}, \quad \mu(x) = \frac{1}{x}.$$

Tənliyin hər tərəfini $\frac{1}{x}$-ə vuraq və alınmış tam diferensiallı tənliyi inteqrallayaq:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0,$$

$$\frac{dx}{x} + \left(\frac{1}{y} + 2y\right)dy - \frac{xdy - ydx}{y^2} = 0, \quad d\left[\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y}\right] = 0,$$

$$\ln|xy| + y^2 - \frac{x}{y} = C.$$

11. $\left(3x + 2y + y^2\right)dx + \left(x + 4xy + 5y^2\right)dy = 0, \quad \mu = \varphi\left(x + y^2\right).$

HƏLLİ. $\frac{\partial M}{\partial y} = 2 + 2y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 4y$, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Deməli, verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlik deyil. Onu tam diferensiallı tənliyə gətirmək üçün inteqrallayıcı vuruğu $\mu = \varphi\left(x + y^2\right)$ şəklində axtaraq. $x + y^2 = z$ qəbul etsək $\mu = \varphi(z)$ funksiyasını tapmaq üçün aşağıdakı tənlik alınır:

$$N\frac{d\varphi}{dz} - M\frac{d\varphi}{dz}2y = \varphi(z)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right), \quad \frac{d\varphi}{\varphi dz} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM},$$

$$\frac{d\ln\varphi}{dz} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM}, \quad \frac{d\ln\varphi}{dz} = \frac{2 + 2y - 1 - 4y}{x + 4xy + 5y^2 - 6xy - 4y^2 - 2y^3} =$$

$$= \frac{1 - 2y}{x - 2xy + y^2 - 2y^3} = \frac{1 - 2y}{x(1 - 2y) + y^2(1 - 2y)} = \frac{1}{x + y^2} = \frac{1}{z},$$

$$\frac{d\ln\varphi}{dz} = \frac{d\ln\mu}{dz} = \frac{1}{z}, d\ln\mu = \frac{dz}{z}, \quad \ln\mu = \ln z, \quad \mu = z = x + y^2.$$

Verilmiş tənliyin hər tərəfini $\mu(x,y) = x + y^2$ inteqrallaycı vuruğuna vursaq tam diferensiallı tənlik alınır.

$$\left(3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4\right)dx + \left(x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + \right.$$

$$+4xy^3+5y^4\Big)dy=0,$$

$$\int_0^x \left(3\xi^2+2\xi y+4\xi y^2+2y^3+y^4\right)d\xi+\int_0^y 5\eta^4 d\eta=C,$$

$$x^3+x^2y+2x^2y^2+2xy^3+xy^4+y^5=C.$$

12. $(y')^2+(\sin x-2xy)y'-2xy\sin x=0$.

HƏLLİ. Tənlik törəmələrinə nəzərən həll olunmamış tənlikdir. Onu törəməyə nəzərən həll olmuş tənliyə gətirib həll edək:

$$(y')^2+y'\sin x-2xyy'-2xy\sin x=0,\quad y'(y'+\sin x)-$$

$$-2xy(y'+\sin x)=0,\quad (y'+\sin x)(y'-2xy)=0,\quad y'+\sin x=$$

$$=0,\quad y'-2xy=0,\quad y=\cos x+C,\quad y=Ce^{x^2}.$$

Verilmiş tənliyn ümumi həllini $(y-\cos x-C)\left(y-Ce^{x^2}\right)=0$ şəklində yazmaq olar.

13. $y=(y')^2e^{y'}$.

HƏLLİ. Törəməyə nəzərən həll olunmamış tənliyi $y'=p$, $y=p^2e^p$ parametrik şəkildə göstərək. Buradan $dy=y'dx$ münasibətinə əsasən alınq:

$$pdx=pe^p(2+p)dp,\quad p\left[dx-e^p(2+p)dp\right]=0,\quad p=0,\quad dx=$$

$$=e^p(2+p)dp,\quad p=0,\quad y=0,\quad x=\int e^p(2+p)dp=2e^p+$$

$$+e^pp-e^p+C=e^p(p+1)+C.$$

Beləliklə, $x=(p+1)e^p+C$, $y=p^2e^p$ verilmiş tənliyin parametrik şəkildə ümumi və $y=0$ həlli var.

14. $\sqrt{y'^2+1}+xy'-y=0$.

HƏLLİ. Verilmiş Klero tənliyini $y'=p$, $y=\sqrt{p^2+1}+px$ parametrik şəkildə yazaq. Buradan $dy=pdx$ münasibətinə əsasən yaza bilərik: $\left(\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}+x\right)dp=0$, $p=C$, $x=-\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}$.

$y=\sqrt{C^2+1}+Cx$ Klero tənliyinin ümumi, $x=-\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}$,

$y=\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ isə parametrik şəklində məxsusi həllidir.

15. $y'^2-2xy'+y=0$.

HƏLLİ. Verilmiş Laqranj tənliyini $y'=p$, $y=2xp-p^2$ parametrik şəklində yazıb, $dy=pdx$ münasibətinə əsasən $\dfrac{dx}{dp}+\dfrac{2}{p}x=2$ xətti tənlik alırıq. Onun $x=\dfrac{2}{3}p+\dfrac{C}{p^2}$ ümumi həlli və $p=0$ həlli vardır. $x=\dfrac{2}{3}p+\dfrac{C}{p^2}$, $y=\dfrac{1}{3}p^2+\dfrac{2C}{p}$ Laqranj tənliyinin parametrik şəklində ümumi və $y=0$ məxsusi həlli var.

3. Əyrilər ailəsinin və trayektoriyaların diferensial tənliyini tapın

1. $x^2+y^2=Cx$.

HƏLLİ. y dəyişəninə x dəyişəninin funksiyası kimi baxıb, verilən bərabərliyin hər tərəfindən x-ə nəzərən törəmə alaq: $2x+2yy'=C$. C-nin bu qiymətini əyrinin tənliyində yazsaq, ailənin diferensial tənliyi alınar: $x^2+y^2=(2x+2yy')x$, $2xyy'+x^2-y^2=0$.

2. $(x-a)^2+(y-b)^2=1$.

HƏLLİ. y dəyişəninə x dəyişəninin funksiyası kimi baxıb, x-ə nəzərən ardıcıl olaraq iki dəfə törəmə alaq: $2(x-a)+2(y-b)y'=0$, $2+2y'^2+2(y-b)y''=0$. Buradan $y-b=-\dfrac{1+y'^2}{y''}$, $x-a=-(y-b)y'=\dfrac{(1+y'^2)y'}{y''}$ tapıb, verilən tənlikdə yerinə yazaq:

$$\frac{[(1+y'^2)y']^2}{(y'')^2}+\frac{(1+y'^2)^2}{(y'')^2}=1,\quad y''^2=(1+y'^2)^3.$$

Alınan tənlik verilmiş iki papametrli ailənin diferensial tənliyi olur.

3. $x^2+2ay=a^2$, $\varphi=90^0$.

HƏLLİ. Əvvəlcə ailənin diferensial tənliyini tapaq:

$$2x+2ay'=0,\quad a=-\frac{x}{y'},\quad x^2-2\frac{x}{y'}y=\left(-\frac{x}{y'}\right)^2.$$

$$xy'^2-2yy'-x=0.$$

Ailənin ortoqonal trayektoriyasının diferensial tənliyini tapmaq üçün alınan tənlikdə $y'\to-\dfrac{1}{y'}$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$\frac{x}{y'^2}+\frac{2y}{y'}-x=0,\quad xy'^2-2yy'-x=0.$$

Tənliyi y'-ə nəzərən həll etsək, bircins $y'=\dfrac{y}{x}\pm\sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+1}$ tənliyi alınır. Bu tənliyi həll etsək, $x^2-2yC=C^2$ verilən ailə üçün ortoqonal əyrilər olar.

4. $y^2=2px$, $\varphi=60^0$.

HƏLLİ. Əvvəlcə ailənin diferensial tənliyini tapaq: $2yy'=2p$, $y^2=2xyy'$, $y=2xy'$, $k=tg\varphi=tg60^0=\sqrt{3}$ olduğundan izoqonal trayektoriyanın diferensial tənliyini tapmaq üçün $y'\to\dfrac{y'-k}{1+ky'}$ əvəzləməsini aparaq: $y=2x\dfrac{y'-\sqrt{3}}{1+y'\sqrt{3}}$.

Buradan izoqonal trayektoriyanın diferensial tənliyini $(2x-y\sqrt{3})y'=2x\sqrt{3}+y$ şəklində tapırıq. Alınan tənlik bircinslidir. Onu həll etsək $y^2\sqrt{3}-xy+2x^2\sqrt{3}=Ce^{\frac{6}{\sqrt{23}}arctg\frac{\sqrt{23}(2y\sqrt{3}-x)}{12x}}$ ailənin izoqonal trayektoriyalarını taparıq.

4. Yüksək tərtibli diferensial tənliklər

4.1. Verilən funksiyaların xətti asılılığını araşdırın. a). 1, x, x^2, x^3, $x\in(-\infty,+\infty)$.

HƏLLİ. Bu funksiyaların xətti asılı olub-olmamasını müəyyənləşdirmək üçün $\alpha_1\cdot1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+\alpha_4x^3=0$ bərabərliyinə baxaq.

$x=0$ götürsək $\alpha_1=0$ olar. Onda $\alpha_2 x+\alpha_3 x^2+\alpha_4 x^3=0$ alarıq. Bərabərliyin hər tərəfini $x\neq 0$ bölək. $\alpha_2+\alpha_3 x+\alpha_4 x^2=0$. Burada $x=0$ götürsək $\alpha_2=0$ alarıq. Bu qayda ilə $\alpha_3=\alpha_4=0$.
Beləliklə, alırıq ki, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$. Deməli, verilmiş funksiyalar xətti asılı deyil.

b). $4-x,\quad 2x+3,\quad 6x+8,\quad x\in(-\infty,\ +\infty)$.

HƏLLİ. $\alpha_1(4-x)+\alpha_2(2x+3)+\alpha_3(6x+8)=0$. Buradan

$$(4\alpha_1+3\alpha_2+8\alpha_3)1+(-\alpha_1+2\alpha_2+6\alpha_3)x=0.$$

1, x funksiyaları xətti asılı deyil. Onda $4\alpha_1+3\alpha_2+8\alpha_3=0$, $-\alpha_1+2\alpha_2+6\alpha_3=0$ şərti ödənməlidir. Xüsusi halda $\alpha_1=2$, $\alpha_2=-32$, $\alpha_3=11$ ədədləri üçün bu bərabərlikləri ödənir. Deməli, verilmiş funksiyalar xətti asılıdır.

c). $e^x,\quad xe^x,\quad x^2e^x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

HƏLLİ. Bu funksiyaların xətti asılı olub, olmamasını Vronski determinatının köməkliyi ilə araşdıraq:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3\\ y_1' & y_2' & y_3'\\ y_1'' & y_2'' & y_3''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x\\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x\\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x\end{vmatrix}=$$

$$=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2\\ 1 & x+1 & x^2+2x\\ 1 & x+2 & x^2+4x+2\end{vmatrix}=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 2 & 4x+2\end{vmatrix}=$$

$$=e^{3x}(4x+2-4x)=2e^{3x}\neq 0.$$

Deməli, verilmiş funksiyalar xətti asılı deyil.

yerləşdirildmiş çənin dibində diametri $\frac{1}{24}$ m olan dairəvi deşik açılmışdır. Suyun çəndən tam boşalma vaxtını tapın.

[T=3 saat 5 dəq.].

8. Cismin soyuması sür'əti cismin temperaturu ilə ətraf mühitin temperaturu fərqi ilə mütənasibdir. Havanın temperaturu 20^0C -dir. Mə'lumdur ki, cism 10 dəqiqədə 100^0C -dən 70^0C -ə qədər soyuyur. Cismin temperaturunun dəyişmə qanununun zamandan asılılığını tapın.

$$\left[\theta=20+80\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{t}{10}}\right].$$

9. Çəndə tərkibində 10kq duz olan 100 litr məhlul var. Çənə dəqiqədə 3 litr su vurulur və çəndən 1 litr məhlul axıdılır. Məhlul müntəzəm olaraq qarışdırıldığından məhlulun qatılığı hər yerdə bərabər olur. 1 saat 40 dəqiqədən sonra çəndə nə qədər duz qalar?

[2,5 kq].

10. Sür'əti v, gedilən yol S və zaman t arasındakı asılılıq $v\cos t+S\sin t=2$ tənliyi ilə verilmişdir. Əgər $t=0$ olduqda $S=0$ olarsa, gödilən yolun zamandan asılılığını tapın.

$S=2\sin t+\cos t$.

IV FƏSİL

NUMUNƏVİ MİSALLAR HƏLLİ

Bu fəsildə yoxlama işlərini və sərbəst çalışmaların yerinə yetirməyə kömək məqsədilə diferensial tənliklər bəhsinə aid nümunəvi misallar həlli verilmişdir.

1. Həllin varlığı, yeganəliyi və təqribi həll

1. $y' = \sqrt{y-x}+1$ tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyi oblastını tapın.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x,y)=\sqrt{y-x}+1$ funksiyası $y \ge x$ yarım müstəvisində tə'yin olunmuş kəsilməz funksiyadır. Odur ki, bu yarım müstəvisinin ixtiyari nöqtəsindən inteqral əyrisi keçir, yə'ni həll var. $f_y'(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{y-x}}$ törəməsi ancaq $y>x$ oblastında kəsilməz olur. Deməli, $y>x$ oblastında həll var və yeganədir. Aydındır ki, $y=x$ düz xətt boyunca $f_y'(x,y)$ törəməsi sonsuzluğa çevirilir. Odur ki, $y=x$ düz xətti üzərində həllin yeganəliyi pozula bilər. $y=x$ funksiyası tənliyin həlli olur. Bu həllin məxsusi həll olduğunu göstərək. Bilavasitə, yoxlamaqla göstərmək olar ki, $y=x+\frac{(x+C)^2}{4}$ funksiyası tənliyin həllidir. $y=x$ həlli üzərində ixtiyari (x_0,x_0) nöqtəsi götürsək, onda bu nöqtədən $y=x$ və $y=x+\frac{(x-x_0)^2}{4}$ həlləri keçir. Deməli, $y=x$ məxsusi həlldir.

2. $y'=x+y^{\frac{5}{3}}$ tənliyinin koordinat başlanğıcı ətrafında həllinin ən çoxu neçə tərtib törəməsi ola bilər.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x,y)=x+y^{\frac{5}{3}}$ funksiyası xOy müstəvisində tə'yin olunub,kəsilməzdir, x və y dəyişənlərinə nəzə-

d). Fundamental həlləri $y_1=x^2$, $y_2=x^5$ $x\in(0,+\infty)$ olan tənliyin $y(1)=1$, $y'(1)=-2$ başlanğıc şərtini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{vmatrix}=3x^6\neq 0$, $x\in(0,+\infty)$. Deməli, verilmiş funksiyalar xətti asılı deyil, Bu funksiyalar aşağıdakı tənliyin fundamental həlləri olur.

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^5 & y \\ 2x & 5x^4 & y' \\ 2 & 20x^3 & y'' \end{vmatrix}=0,\quad x^2y''-6xy'+10y=0.$$

Onun ümumi həlli $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1x^2+C_2x^5$ olduğundan başlanğıc şərtlərinə görə buradan $C_1+C_2=1$, $2C_1+5C_2=-2$, $C_1=\frac{7}{3}$, $C_2=-\frac{4}{3}$, $y=\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x^5$.

4.2. Yüksək tərtibli tənliklərin tipini tə'yin edib həll edin. a). $y'''=\sin x-\cos x$.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik $y^{(n)}=f(x)$ şəklində olduğundan onu ardıcıl üç dəfə inteqrallamaq lazımdır.

$$y''=-\cos x-\sin x+C_1,\quad y'=-\sin x+\cos x+C_1x+C_2,$$

$$y=\cos x+\sin x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

b). $xy^V-y^{IV}=0$.

HƏLLİ. Tənliyə axtarılan funksiya və onun üçüncü tərtibə qədər törəmələri daxil olmadığından $y^{IV}=p$ qəbul edək. Onda $y^V=p'=\frac{dp}{dx}$ olar və verilmiş tənlik $x\frac{dp}{dx}-p=0$ şəklinə düşər. Buradan

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x}+\ln C_1, \quad \ln|p|=\ln|x|+\ln C_1, \quad p=xC_1$$

Yə'ni $y^{IV}=C_1x$. Bu tənliyi ardıcıl dörd dəfə inteqrallasaq alarıq:

$$y'''=C_1\frac{x^2}{2}+C_2, \quad y''=\frac{C_1}{6}x^3+C_2x+C_3, \quad y'=\frac{C_1}{24}x^4+C_2\frac{x^2}{2}+$$

$$+C_3x+C_4, \quad y=\frac{C_1}{120}x^5+\frac{C_2}{6}x^3+C_3\frac{x^2}{2}+C_4x+C_5.$$

c). $yy''-y'^2=y^2\ln y, \quad y>0$.

HƏLLİ. Tənliyə x dəyişəni aşkar şəkildə daxil olmadığından $y'=p(y)$ əvəzləməsi aparılır. Onda $y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}[p(y)]=$ $=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dy}{dx}$. y' və y''-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazaq: $yp\frac{dp}{dy}-p^2=y^2\ln y$. Alınan Bernulli tənliyinin ümumi həlli $p=\pm y\sqrt{C_1+\ln^2 y}$ olduğundan $y'=\pm y\sqrt{C_1+\ln^2 y}$ tənliyi alınır.

Bu tənliyi dəyişənlərinə ayırıb, həll etsək, alarıq: $y=e^{\frac{C_2^2e^{\pm 2x}-C_1}{2C_2e^{\pm x}}}$.

d). $xy''-y'-x^2yy'=0, \quad y(1)=0, y'(1)=2$.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyi sol tərəfi tam diferensiallı tənliyə gətirməklə həll edək. Hər tərəfi x^2-na bölək və çevirmə aparaq:

$$\frac{xy''-y'}{x^2}-yy'=0, \quad \left(\frac{y'}{x}\right)'-\left(\frac{1}{2}y^2\right)'=0, \quad \left(\frac{y'}{x}-\frac{1}{2}y^2\right)'=0.$$

Axırıncı tənliyi inteqrallasaq alarıq: $\frac{y'}{x}-\frac{1}{2}y^2=C_1$. Başlanğıc şərtlərdən istifadə etsək buradan $C_1=2$, $\frac{y'}{x}-\frac{1}{2}y^2=2$, $2y'-xy^2=4x$ tənliyini alarıq. Bu tənliyi dəyişənlərinə ayırıb inteqrallasaq yaza bilərik: $arctg\frac{y}{2}=\frac{x^2}{2}+C_2$.

Burada başlanğıc $y(1)=0$ şərtindən istifadə etsək $C_2=-\frac{1}{2}$,

$$arctg\frac{y}{2}=\frac{x^2-1}{2}, \quad y=2tg\frac{x^2-1}{2}.$$

e). $y'''-8y=0$.

HƏLLİ. Tənlik sabit əmsallı bircins olduğundan xarakteristik tənliyin köməyilə həll etmək lazımdır. $k^3-8=0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1=2$, $k_2=-1+i\sqrt{3}$, $k_3=-1-i\sqrt{3}$ olduğundan, verilmiş tənliyin ümumi həlli $y=C_1e^{2x}+e^{-x}\left(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x\right)$ olur.

f). $y'''-3y''+3y'-y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2, \quad y''(0)=3$.

HƏLLİ. Tənlik sabit əmsallı olduğundan xarakteristik tənliyini yazıb, həll etmək lazımdır. $k^3-3k^2+3k-1=0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1=k_2=k_3=1$ olduğundan verilmiş tənliyin fundamental həlləri e^x, xe^x, x^2e^x olar. Onda verilmiş tənliyin ümumi həlli $y=C_1e^x+\;+C_2xe^x+C_3x^2e^x=e^x\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)$. Başlanğıc şərtləri nəzərə alsaq $C_1=1$, $C_2=1$, $C_3=0$, $y=e^x(1+x)$.

j). $y^V-2y^{IV}+2y'''-4y''+y'-2y=0$.

HƏLLİ. Sabit əmsallı tənliyin $k^5 - 2k^4 + 2k^3 - 4k^2 + k - 2 = 0$ xarakteristik tənliyin həll edək: $k^4(k-2) + 2k^2(k-2) + (k-2) = 0,$ $(k-2)\left(k^4 + 2k^2 + 1\right) = 0,\quad k - 2 = 0,\quad k_1 = 2,\ k^4 + 2k^2 + 1 = 0,$ $\left(k^2+1\right)^2 = 0,\quad k_2 = k_3 = i,\quad k_4 = k_5 = -i$. Bu köklərə uyğun fundamental həllər $e^{2x},\quad \cos x,\quad x\cos x,\quad \sin x,\quad x\sin x$ olduğundan $y = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x$.

h). $x^2 y'' + 2xy' + 6y = 0$.

HƏLLİ. Verilmiş Eyler tənliyini həll etmək üçün $x = e^t \quad (x > 0)$ əvəzləməsini aparaq. Onda

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt},\quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

$x,\quad y'$ və y''-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yazaq.

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 2e^t e^{-t}\frac{dy}{dt} + 6y = 0,\quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 6y = 0.$$

Alınan sabit əmsallı tənliyi həll edək. $k^2 + k + 6 = 0,\quad k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2}i$ olduğundan tənliyin ümumi həlli

$$y = e^{-\frac{t}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{23}}{2}t + C_2\sin\frac{\sqrt{23}}{2}t\right).$$

$x = e^t$ olduğundan $t = \ln x,\quad e^{-\frac{t}{2}} = \left(e^t\right)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$ olar. Odur ki,

$$y = x^{-\frac{1}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{23}}{2}\ln x + C_2\sin\frac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right).$$

4.3. Qeyri-müəyyən əmsallar və sabitlərin variasiyası üsulu ilə həll edin.

a). $y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x}$.

HƏLLİ. Əvvəlcə uyğun bircins tənliyin ümumi həllini tapaq. $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0,\quad (\lambda - 4)^2 = 0,\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Onda bircins tənliyin ümumi həlli $y_b = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$ şəklində olar. $\alpha = 4$ xarakteristik tənliyin iki dəfə təkrarlanan kökü olduğundan xüsusi həll $\tilde{y} = x^2 e^{4x}(Ax + B)$ şəklində axtarılmalıdır. Onda

$$\tilde{y}' = e^{4x}\left[4Ax^3 + (3A + 4B)x^2 + 2Bx\right],$$

$$\tilde{y}'' = e^{4x}\left[16Ax^3 + (24A + 16B)x^2 + (6A + 16B)x + 2B\right].$$

$\tilde{y},\quad \tilde{y}',\quad \tilde{y}''$-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazıb, sadələşdirək:

$$16Ax^3 + (24A + 16B)x^2 + (6A + 16B)x + 2B - 8\left[4Ax^3 + \right.$$

$$\left. + (3A + 4B)x^2 + 2Bx\right] + 16\left(Ax^3 + Bx^2\right) = 1 - x.$$

Na'məlum əmsallar üsuluna görə buradan tapa bilərik: $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{2}$. Onda xüsusi həll $\tilde{y} = -\frac{1}{6}e^{4x}\left(x^3 - 3x^2\right)$. Beləliklə, verilmiş tənliyin ümumi həlli $y = y_b + \tilde{y} = e^{4x}(C_1 + C_2 x) - \frac{1}{6}e^{4x}\left(x^3 - 3x^2\right)$.

b). $y'' + y = xe^x + 2e^{-x},\quad y(0) = y'(0) = 1$.

HƏLLİ. Əvvəlcə uyğun sabit əmsallı bircins tənliyin ümumi həllini tapaq: $y'' + y = 0,\quad \lambda^2 + 1 = 0,\quad \lambda_{1,2} = \pm i,\quad \lambda_1 = -i,\quad \lambda_2 = i$. Onda bircins tənliyin ümumi həlli $y_b = C_1\cos x + C_2\sin x$. Bircins olmayan tənliyin xüsusi həllini $\tilde{y} = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}$ şəklində axtarmalıyıq: $\tilde{y}' = Ae^x + (Ax+B)e^x - Ce^{-x} = e^x(Ax+A+B) - Ce^{-x}$,

$\tilde{y}'' = e^x(Ax+2A+B) + Ce^{-x}$.

$\tilde{y}$ və $\tilde{y}''$-in qiymətlərini verilən tənlikdə yazsaq, namə'lum əmsallar üsuluna əsasən taparıq. $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 1$. Onda yaza bilərik: $\tilde{y} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)e^x + e^{-x} = \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}$. $y = y_b + \tilde{y} = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}$ ümumi həldə $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ başlanğıc şərtlərini nəzərə alsaq: $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = 2$,

$$y = \frac{1}{2}\cos x + 2\sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}.$$

c). $y'' + 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

HƏLLİ. Verilən tənliyin həllinə qeyri-müəyyən əmsallar üsulu tətbiq etmək mümkün olmadığından sabitlərin variasiyası üsulunu tətbiq edək. Əvvəlcə uyğun sabit əmsallı bircins tənliyin ümumi həllini tapaq: $k^2 + 4k + 5 = 0$, $k_{1,2} = 2 \pm i$. Onda bircins tənliyin ümumi həllini $y_b = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$ şəklində yaza bilərik. Bircins olmayan tənliyin həllini $y = e^{2x}[C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x]$ şəklində axtaraq, burada $C_1(x)$ və $C_2(x)$ funksiyalarını elə seçmək lazımdır ki, bu funksiya bircins olmayan tənliyin həlli olsun.

$\tilde{y}' = e^{2x}[C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x] + C_1(x)(2\cos x - \sin x)e^{2x} + C_2(x)(2\sin x + \cos x)e^{2x}$. Burada $C_1'(x)\cos + C_2'(x)\sin x = 0$ götürək, onda $y' = C_1(x)(2\cos x - \sin x)e^{2x} + C_2(x)(2\sin x + \cos x)e^{2x}$.

Buradan y''-i tapıb, verilən tənlikdə yazaq. $C_1'(x)(2\cos x - \sin x)e^{2x} + C_2'(x)(2\sin x + \cos x)e^{2x} = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$ bərabərliyi alınır. Beləliklə, $C_1'(x)$ və $C_2'(x)$ tapmaq üçün

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(2\cos x - \sin x) + C_2'(x)(2\sin x + \cos x) = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

sistemi alınır. Kramer qaydasına əsasən

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ 2\cos x - \sin x & 2\sin x + \cos x \end{vmatrix} = 2\cos x\sin x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & 2\sin x + \cos x \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{\sin x}{\cos x} = -tgx, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ 2\cos x - \sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1,$$

olduğundan: $C_1'(x) = \dfrac{\Delta_1}{W(x)} = -tgx$, $C_2'(x) = \dfrac{\Delta_2}{W(x)} = 1$, $C_1(x) = \ln|\cos x| + C_1$, $C_2(x) = x + C_2$. Bunları y ifadəsində yerinə yazsaq: $y = e^{2x}[(C_1 + \ln|\cos x|)\cos x + (C_2 + x)\sin x]$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

5. Tənliklər sistemini həll edin

1. $\begin{cases} \dot{x} = y - ax, \\ \dot{y} = x - ay. \end{cases}$

HƏLLİ. Sistemi yüksək tərtibli tənliyə gətirmək yolu ilə həll edək. Sistemin birinci tənliyinin hər tərəfini t-yə görə diferensiallayaq və alınan ifadədə sistemi nəzərə alaq: $\ddot{x} = \dot{y} - a\dot{x}$, $\ddot{x} = (1+a^2)x - 2ay$. Sistemin birinci tənliyindən $y = \dot{x} + ax$ tapıb, axırıncı bərabərlikdə yazaq: $\ddot{x} = (1+a^2)x - 2a(\dot{x} + ax)$, $\ddot{x} + 2a\dot{x} + (a^2 - 1)x = 0$. Bu tənlik sabit əmsallı tənlikdir. Onu həll edək. $\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 - 1 = 0$ xarakteristik tənliyinin köklərinin $\lambda_1 = -a - 1$, $\lambda_2 = -a + 1$ olduğunu nəzərə alsaq $x(t) = C_1 e^{-(a+1)t} + C_2 e^{(1-a)t}$, $y = \dot{x} + ax = -C_1 e^{-(a+1)t} + C_2 e^{(1-a)t}$.

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t} - xy^2 \end{cases}$$

HƏLLİ. Sistemin birinci inteqralını tapmaqla həll edək. Sistemin birinci tənliyini y-ə, ikincini x-ə vurub, tərəf-tərəfə toplayaq. Onda $y\dfrac{dx}{dt} + x\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{xy}{t}$, $\dfrac{d}{dt}(xy) = \dfrac{xy}{t}$, $xy = C_1 t$. Sistemin birinci tənliyində $xy = C_1 t$ yazsaq alarıq: $\dfrac{dx}{dt} = xC_1 t$, $\dfrac{dx}{x} = C_1 t\,dt$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = C_1 \int t\,dt + \ln C_2$, $\ln|x| = C_1 \dfrac{t^2}{2} + \ln C_2$, $x = C_2 e^{C_1 \frac{t^2}{2}}$. Digər tərəfdən $xy = C_1 t$, olduğundan $y = \dfrac{C_1}{C_2} t e^{-C_1 \frac{t^2}{2}}$, $C_2 \neq 0$.

3. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$$

HƏLLİ. Sistemi xarakteristik tənliyin köməyi ilə həll edək. Həlli $x = \alpha e^{\lambda t}$, $y = \beta e^{\lambda t}$, $z = \gamma e^{\lambda t}$ şəklində axtaraq. Onda $\dfrac{dx}{dt} = \alpha\lambda e^{\lambda t}$, $\dfrac{dy}{dt} = \beta\lambda e^{\lambda t}$, $\dfrac{dz}{dt} = \gamma\lambda e^{\lambda t}$. Bu qiymətləri sistemdə nəzərə alaq.

$$\begin{cases} -\lambda\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + (-\lambda)\beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + (-\lambda)\gamma = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

α, β, γ-ya görə (*) xətti bircins cəbri tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həllinin varlığı üçün

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 3\lambda - 2) = 0, \quad (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0,$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. $\lambda_1 = 2$ kökü üçün (*) sisteminə

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

sistemin uyğun gəlir. $\alpha = 1$ qəbul etsək, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ alarıq və həllərdən birini $x_1 = e^{2t}$, $y_1 = e^{2t}$, $z_1 = e^{2t}$ şəklində alarıq. $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ kökləri üçün (*) sistemindən $\alpha + \beta + \gamma = 0$ alırıq (qalan tənliklər birinci tənliyin nəticəsi kimi alınır). Burada $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ və $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$ həllərinə baxaq. Onda alarıq: $x_2 = e^{-t}$, $y_2 = 0$, $z_2 = -e^{-t}$, $x_3 = 0$, $y_3 = -e^{-t}$, $z_3 = e^{-t}$. Bu həllərin xətti asılı olmadığını göstərək. Bunun üçün həmin funksiyaların Vronski determinantı sıfırdan fərqli olmalıdır.

$$W(x)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{2t} & e^{2t} & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & -e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} & e^{-t} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0.$$

Deməli, bu həllər fnudamental həllər sistemi təşkil edirlər. Onda sistemin ümumi həlli $x(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$, $y(t)=C_1e^{2t}-C_3e^{-t}$, $z(t)=C_1e^{2t}-C_2e^{-t}+C_3e^{-t}$.

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y \end{cases}$, $x(0)=1$, $y(0)=0$.

HƏLLİ. Həlli $x=\alpha e^{\lambda t}$, $y=\beta e^{\lambda t}$ şəklində axtaraq. Onda α, β, γ ədədlərini tapmaq üçün

$$\begin{cases} (3-\lambda)\alpha+\beta=0, \\ -\alpha+(1-\lambda)\beta=0 \end{cases}$$

sistemini alarıq.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0,\quad \lambda^2-4\lambda+4=0,\quad \lambda_1=\lambda_2=2.$$

$\lambda=2$ qiymətinə uyğun sistem $\alpha+\beta=0$ olur. Buradan $\beta=-1$ götürsək $\alpha=1$ alarıq. Onda $x_1=e^{2t}$, $y_1=-e^{2t}$ həlli alınır. Bu həll isə xətti asılı olmayan ikinci həlli tapmaq mümkün olmadığından həlli $x_2=(\alpha+\gamma t)e^{2t}$, $y_2=(\beta+\omega t)e^{2t}$ şəklində axtaraq. Bu funksiyaları sistemdə nəzərə alsaq, α, β, γ, ω-ədləri tapmaq üçün $\gamma+\omega=0$, $\alpha+\beta=\gamma$, $-\alpha-\beta=\omega$ tənlikləri alınır. Burada $\alpha=1$, $\beta=0$ götürsək, $\gamma=1$, $\omega=-1$ alarıq. Bunlara uyğun həll $x_2=(1+t)e^{2t}$, $y_2=-te^{2t}$ olduğundan

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{2t}+C_2(1+t)e^{2t}, \\ y(t)=-C_1e^{2t}-C_2te^{2t} \end{cases}$$

Başlanğıc şərtlərdən istifadə etsək $C_1=0$, $C_2=1$, $x(t)=(1+t)e^{2t}$, $y(t)=-te^{2t}$.

6. Həllin başlanğıc şərtlərindən və parametrlərdən asılılığı. Qüvvət sırasının köməyilə tənliyin inteqrallanması

1. $y'=x+\sin y$ tənliyinin $y(0)=0$ və $y(0)=0{,}01$ şərtlərini ödəyən həllərinin $[0,1]$ parçasında fərqini qiymətləndirin.

HƏLLİ. Tutaq ki, tənliyin $y(0)=0$ şərtini ödəyən həlli $\varphi(x)$, $y(0)=0{,}01$ şərtini ödəyən həlli isə $\psi(x)$-dir. Onda bu funksiyalar üçün $\psi(x)=0{,}01+\int_0^x(s+\sin\psi(s))ds$, $\varphi(x)=\int_0^x(s+\sin\varphi(s))ds$, $x\in[0,1]$ inteqral bərabərlikləri ödənir. Buradan $\psi(x)-\varphi(x)=0{,}01+$

$$+\int_0^x(\sin\psi(s)-\sin\varphi(s))ds,\quad \sin\psi(s)-\sin\varphi(s)=$$

$$=2\cos\frac{\psi(s)+\varphi(s)}{2}\sin\frac{\psi(s)-\varphi(s)}{2},\quad |\sin\psi(s)-\sin\varphi(s)|\leq$$

$$\leq 2\left|\cos\frac{\psi(s)+\varphi(s)}{2}\right|\left|\sin\frac{\psi(s)-\varphi(s)}{2}\right|\leq|\psi(s)-\varphi(s)|.$$

Onda $|\psi(x)-\varphi(x)|\leq 0{,}01+\int_0^x|\psi(s)-\varphi(s)|ds$, $x\in[0,1]$. Alınan inteqral bərabərsizliyə Qronuoll bərabərsizliyini tətbiq etsək alarıq:

$$|\psi(x)-\varphi(x)| \le 0{,}01e^x \le 0{,}01e \le 0{,}0272.$$

2. $y' = \dfrac{2}{y} - 5\mu x, \quad y(1) = 2$ məsələsinin həllinin μ parametrinə nəzərən qüvvət sırasına ayrılışın bir neçə həddini tapın.

HƏLLİ. Verilən tənliyi $yy' = 2 - 5\mu xy$ şəklində yazaq və həlli $y = v_0(x) + \mu v_1(x) + \mu^2 v_2(x) + \cdots$ şəkildə axtaraq. Bu ayrılışı və $y' = v_0'(x) + \mu v_1'(x) + \mu^2 v_2'(x) + \cdots$ törəməni çevrilmiş tənlikdə yazaq:

$$\left(v_0(x) + \mu v_1(x) + \mu^2 v_2(x) + \cdots\right)\left(v_0'(x) + \mu v_1'(x) + \mu^2 v_2'(x) + \cdots\right) =$$
$$= 2 - 5\mu x\left(v_0(x) + \mu v_1(x) + \mu^2 v_2(x) + \cdots\right).$$

Buradan μ parametrinin eyni dərəcələrinin əmsallarını bərabərləşdirməklə alırıq:

$$\begin{array}{c|l} \mu^0 & v_0 v_0' = 2, \quad v_0(1) = 2, \\ \mu & v_0 v_1' + v_0' v_1 = -5x v_0, \quad v_1(1) = 0, \\ \mu^2 & v_0 v_2' + v_0' v_2 + v_1 v_1' = -5x v_1, \quad v_2(1) = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Alınan tənlikləri ardıcıl olaraq həll edək:

$$v_0 v_0' = 2, \quad v_0(1) = 2, \quad \int v_0 dv_0 = \int 2dx + C,$$

$$v_0^2(x) = 4x + C, \quad v_0^2(1) = 4 + C, \quad C = 0; \quad v_0(x) = 2\sqrt{x},$$

$$v_0(x)v_1' + v_0'(x)v_1 = -5xv_0(x), \quad v_1(1) = 0,$$

$$2\sqrt{x}v_1' + \frac{v_1}{\sqrt{x}} = -10x^{\frac{3}{2}}, \quad v_1' + \frac{v_1}{2x} = -5x.$$

Alınan xətti tənliyin $v_1(1) = 0$ şərtini ödəyən həllini tapsaq: $v_1(x) = 2\left(x^{-\frac{1}{2}} - x^2\right)$. $v_0(x)$ və $v_1(x)$ funksiyalarını üçüncü tənlikdə yerinə yazıb sadələşdirək, onda $v_2' + \dfrac{v_2}{2x} = x^{\frac{5}{2}} - 2 + x^{-\frac{5}{2}}, \quad v_2(1) = 0$ xətti tənliyi alınır. Bu tənliyi həll edərək tapırıq:

$$v_2(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{3}x - x^{-\frac{3}{2}} + \frac{25}{12}x^{-\frac{1}{2}} \ldots$$

Alınan funksiyaları həllin ayrılışında yazsaq alarıq:

$$y = 2\sqrt{x} + 2\mu\left(x^{-\frac{1}{2}} - x^2\right) + \mu^2\left(\frac{1}{4}x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{3}x + \frac{25}{12}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}\right) + \cdots$$

3. $y'' - x^2 y = 0$ tənliyinin xətti asılı olmayan həllərini qüvvət sırası şəklində tapın.

HƏLLİ. Baxılan tənlik üçün əmsallar $p(x) = 0, \quad q(x) = -x^2$ analitik funksiyalardır, yə'ni $x = 0$ nöqtəsi adi nöqtədir. Bu halda tənliyin yığılan qüvvət sırası şəklində həlli var. Tənliyin həllini $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ qüvvət sırası şəklində axtaraq. Buradan $y' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}, \quad y'' = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$ tapıb, tənlikdə yazaq:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{k+2} = 0.$$

Bu bərabərlikdə x dəyişəninin eyni dərəcələrinin əmsallarını müqayisə etməklə alırıq:

$$
\begin{array}{l|l}
x^0 & 2\cdot 1c_2 = 0, \quad c_2 = 0, \\
x^1 & 3\cdot 2c_3 = 0, \quad c_3 = 0, \\
x^2 & 4\cdot 3c_4 - c_0 = 0, \quad c_4 = \dfrac{c_0}{4\cdot 3}, \\
x^3 & 5\cdot 4c_5 - c_1 = 0, \quad c_5 = \dfrac{c_1}{5\cdot 4}, \\
x^4 & 6\cdot 5c_6 - c_2 = 0, \quad c_6 = 0, \\
x^5 & 7\cdot 6c_7 - c_3 = 0, \quad c_7 = 0, \\
x^6 & 8\cdot 7c_8 - c_4 = 0, \quad c_8 = \dfrac{c_4}{7\cdot 8} = \dfrac{c_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}, \\
x^7 & 9\cdot 8c_9 - c_5 = 0, \quad c_9 = \dfrac{c_5}{8\cdot 9} = \dfrac{c_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}, \\
x^8 & 10\cdot 9c_{10} - c_6 = 0, \quad c_{10} = 0, \\
x^9 & 11\cdot 10c_{11} - c_7 = 0, \quad c_{11} = 0, \\
x^{10} & 12\cdot 11c_{12} - c_8 = 0, \quad c_{12} = \dfrac{c_8}{11\cdot 12} = \dfrac{c_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}, \\
x^{11} & 13\cdot 12c_{13} - c_9 = 0, \quad c_{13} = \dfrac{c_9}{12\cdot 13} = \dfrac{c_0}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13}, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Verilən tənliyin $y(0)=1$, $y'(0)=0$ və $y(0)=0$, $y'(0)=1$ şərtlərini ödəyən $y_1(x)$ və $y_2(x)$ həllərinə baxaq. Aydındır ki, bu həllər xətti asılı olmayandır. $y_1(x)$ həlli üçün $c_0=1$, $c_1=0$ olur. Odur ki,

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} + \frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \cdots$$

$y_2(x)$-həlli üçün $c_0=0$ $c_1=1$ olduğundan

$$y_2(x) = x + \frac{x^5}{4\cdot 5} + \frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} + \frac{x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots$$

4. $xy'' + 2y' + xy = 0$ tənliyinin həllini ümumiləşmiş qüvvət sırasına ayırmaqla tapın.

HƏLLİ. Verilən tənliyi $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$ şəklində yazsaq $p(x) = \dfrac{2}{x}$, $q(x)=1$ olar. Deməli, $x=0$ tənliyin məxsusi nöqtəsidir.

Odur ki, həlli $y = x^{\rho}\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ $(c_0 \neq 0)$ ümumiləşmiş qüvvət sırası şəklində tapmaq lazımdır, burada ρ ədədi $\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0=0$ tənliyinin həlli kimi tapılır:

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x) = 2, \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = 0,$$

$$\rho(\rho-1)+2\rho = 0; \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = -1.$$

Beləliklə, həlli

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ və } y_2(x) = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

sıraları şəklində tapmaq lazımdır. Birinci sıra üçün $y_1'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}$, $y_1''(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$ olduğundan

$$x\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} xc_k x^k = 0.$$

Bu bərabərliyi sadələşdirsək alarıq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0.$$

Buradan x dəyişəninin eyni dərəcəli əmsallarını müqayisə etməklə alırıq:

$$
\begin{array}{l|l}
x^0 & 1\cdot 2c_1 = 0, \quad c_1 = 0, \\
x^1 & 2\cdot 3c_2 + c_0 = 0, \quad c_2 = -\dfrac{c_0}{2\cdot 3} = -\dfrac{c_0}{3!}, \\
x^2 & 4\cdot 3c_3 + c_1 = 0, \quad c_3 = 0, \\
x^3 & 5\cdot 4c_4 + c_2 = 0, \quad c_4 = -\dfrac{c_2}{4\cdot 5} = \dfrac{c_0}{5!}, \\
x^4 & 5\cdot 6c_5 + c_3 = 0, \quad c_5 = 0, \\
x^5 & 6\cdot 7c_6 + c_4 = 0, \quad c_6 = -\dfrac{c_4}{6\cdot 7} = -\dfrac{c_0}{7!}, \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Burada $c_0 = 1$ qəbul etsək

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

İndi ikinci sıradan törəmələr alıb, tənlikdə yerinə yazaq.

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k-1}, \quad y_2'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)c_k x^{k-2},$$

$$y_2''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)(k-2)c_k x^{k-3},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k-1)(k-2)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} 2(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Alınan ifadəni sadələşdirək:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Buradan x dəyişəninin eyni dərəcələrinin əmsalları cəminin sıfıra bərabər olmasından alırıq:

$$
\begin{array}{l|l}
x^0 & 2\cdot 1c_2 + c_0 = 0, \quad c_2 = -\dfrac{c_0}{2!}, \\
x^1 & 3\cdot 2c_2 + c_1 = 0, \quad c_3 = -\dfrac{c_1}{2\cdot 3} = -\dfrac{c_1}{3!}, \\
x^2 & 4\cdot 3c_4 + c_2 = 0, \quad c_4 = -\dfrac{c_2}{3\cdot 4} = \dfrac{c_0}{4!}, \\
x^3 & 5\cdot 4c_5 + c_3 = 0, \quad c_5 = -\dfrac{c_3}{4\cdot 5} = \dfrac{c_1}{5!}, \\
x^4 & 6\cdot 5c_6 + c_4 = 0, \quad c_6 = -\dfrac{c_4}{6\cdot 5} = -\dfrac{c_0}{6!}, \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Burada $c_0 = 1, \quad c_1 = 0$ qəbul etsək alarıq:

$$y_2(x) = x^{-1}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) = \frac{\cos x}{x}$$

Tapılan $y_1(x)$ və $y_2(x)$ həlləri xətti asılı olmadığından $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ tənliyin ümumi həlli olar.

7. Həllin dayanıqlığı. Məxsusi nöqtə

1. Dayanıqlığın tə'rifindən istifadə edərək $\dot{x} = -x + t^2$ tənliyinin $x(1) = 1$ şərtini ödəyən həllinin dayanıqlığını araşdırın.

HƏLLİ. Əvvəlcə verilən xətti tənliyi həll edib, onun $x(t) = Ce^{-t} + t^2 - 2t + 2$ ümumi həllini tapaq. Ümumi həldən $x(1) = 1$ şərtini ödəyən həlli tapsaq $\varphi(t) = t^2 - 2t + 2$. Bu həllin dayanıqlığını araşdırmaq üçün ixtiyari $x(1) = \xi$ şərtini ödəyən $\varphi(t, \xi) = (\xi - 1)e^{1-t} + t^2 - 2t + 2$ həllini tapıb, $\varphi(t, \xi) - \varphi(t) = (\xi - 1)e^{1-t}$ fərqini hesablayaq. Alınan fərqin ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| = |\xi - 1|e^{1-t} < \varepsilon$ şərti bütün $t \geq 1$ ödənməsi üçün kifayətdir ki, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ götürək. Doğ-

rudan da, $|\xi - 1| < \delta = \varepsilon$ olduqda, $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| = |\xi - 1|e^{1-t} \le$
$\le |\xi - 1| < \delta = \varepsilon$ bərabərsizliyi bütün $t \ge 1$ üçün ödənir. Buradan dayanıqlığın tə'rifinə əsasən $\varphi(t) = t^2 - 2t + 2$ həllinin Lyapunov mə'nada dayanıqlı olması alınır.

$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| = \lim_{t \to +\infty} |\xi - 1|e^{1-t} = 0$$

olduğundan baxılan həll Lyapunov mə'nada asimptotik dayanıqlı olur.

2. α-ədədinin hansı qiymətlərində

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + \alpha y, \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

sisteminin (0,0) tarazlıq vəziyyəti dayanıqlıdır.

HƏLLİ. Baxılan halda (0,0) həllinin dayanıqlı olması üçün sistemin

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & \alpha \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 - 2\alpha = 0$$

xarakteristik tənliyinin $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4 + 2\alpha}$ köklərinin həqiqi hissəsi müsbət olmamalı və sıfıra bərabər olan kök təkrar olmamalıdır. Ona görə $4 + 2\alpha \le 1$ şərti ödənməlidir. Buradan $\alpha \le -\frac{3}{2}$. Aydındır ki, $\alpha < -\frac{3}{2}$ olarsa, hər iki kökün həqiqi hissəsi mənfi olur. Odur ki, (0,0) həlli asimptotik dayanıqlı olur.

3. $x^{IV} + 7\dddot{x} + 17\ddot{x} + 17\dot{x} + 6x = 0$ tənliyinin $x = 0$ həllinin dayanıqlığını araşdırın.

HƏLLİ. Raus-Qurviç əlamətindən istifadə edərək $x = 0$ həllin dayanıqlığını araşdıraq. Tənliyin $f(\lambda) = \lambda^4 + 7\lambda^3 + 17\lambda^2 + 17\lambda + 6$, xarakteristik çoxhədlisi üçün Qurviç matrisini yazaq:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 17 & 17 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 17 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisin baş diaqonal minorlarını hesablayaq: $\Delta_1 = 7$, $\Delta_2 =$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 17 & 17 \end{vmatrix} = 272, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 17 & 17 & 7 \\ 0 & 6 & 17 \end{vmatrix} = 1440, \quad \Delta_4 = 6\Delta_3 = 8640.$$

$\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$ olduğundan Raus-Qurviç əlamətinə əsasən $x = 0$ həlli asimptotik dayanıqlı olur.

4. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{3}{4}\sin x - 7y(1-y)^{\frac{1}{3}} + x^3, \\ \dot{y} = \frac{2}{3}x - 3y\cos y - 11y^5 \end{cases}$ sisteminin $x = 0$, $y = 0$ həllinin birinci yaxınlaşmalara nəzərən dayanıqlığını araşdırın.

HƏLLİ. Baxılan sistem üçün birinci yaxınlaşmalar sistemini tapaq. Sistemin sağ tərəfləri $f_1(x, y) = \frac{3}{4}\sin x - 7y(1-y)^{\frac{1}{3}} + x^3$, $f_2(x, y) = \frac{2}{3}x - 3y\cos y - 11y^5$ funksiyaları üçün

$$a_{11} = f'_{1x}(0, 0) = \frac{3}{4}, \quad a_{12} = f'_{2y}(0, 0) = -7, \quad a_{21} = f'_{2x}(0, 0) = \frac{2}{3},$$

$$a_{22} = f'_{2y}(0, 0) = -3.$$

Onda

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{3}{4}x - 7y, \\ \dot{y} = \frac{2}{3}x - 3y \end{cases}$$

verilən sistemin birinci yaxınlaşmalar sistemi olur. Bu sistemin xarakteristik tənliyini tapıb həll edək.

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} - \lambda & -7 \\ \frac{2}{3} & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{9}{4}\lambda + \frac{29}{12} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{9}{8} \pm i\sqrt{\frac{221}{192}}.$$

Köklərin həqiqi hissəsi mənfi olduğundan axırıncı sistemin $x = 0, \quad y = 0$ həlli asimptotik dayanıqlıdır. Onda Lyapunovun birinci yaxınlaşmalar ə'lamətinə əsasən verilən sistemin $x = 0, \quad y = 0$ həlli asimptotik dayanıqlı olur.

5. $\begin{cases} \dot{x} = -x^5 + y, \\ \dot{y} = -x - y^5 \end{cases}$ sisteminin $x = 0, \quad y = 0$ həllinin dayanıqlığını Lyapunov funksiyalar üsuluna nəzərən araşdırın.

HƏLLİ. Baxılan sistem üçün birinci yaxınlaşmalar sistemi $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ olduğundan, bu sistemin $\lambda^2 + 1 = 0$ xarakteristik tənliyinin $\lambda_{1,2} = \pm i$ köklərinin həqiqi hissəsi sıfır olur. Odur ki, birinci yaxınlaşmalara nəzərən sistemin $x = 0, \quad y = 0$ həllinin dayanıqlığı haqqında fikir söyləmək olmur. Lyapunov funksiyası olaraq $v(x, y) = x^2 + y^2$ götürək və bu funksiyanın verilən sistemə nəzərən törəməsini hesablayaq.

$$\frac{dv}{dt} = 2x\left(-x^5 + y\right) + 2y\left(-x - y^5\right) = -2\left(x^6 + y^6\right).$$

$v(x, y)$ funksiyası müsbət-müəyyən, $\frac{dv}{dt}$ törəməsi isə mənfi-müəyyən olduğundan Lyapunov funksiyalar əlamətinə əsasən sistemin

$x = 0, \quad y = 0$ həlli asimptotik dayanıqlıdır.

6. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8, \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2 \end{cases}$ sisteminin məxsusi nöqtələrini tapın və tipini tə'yin edin.

HƏLLİ. Məxsusi nöqtələri tapmaq üçün

$$\begin{cases} 2xy - 4y - 8 = 0, \\ 4y^2 - x^2 = 0 \end{cases}$$

sistemini həll etmək lazımdır. (4, 2) və (-2, -1) sistemin həlli olduğundan məxsusi nöqtələridir. Bu nöqtələrin tipini tə'yin etmək üçün $f_1(x, y) = 2xy - 4y - 8, \quad f_2(x, y) = 4y^2 - x^2$ funksiyalarını bu nöqtələrin ətrafında Teylor düsturuna ayırmaq lazımdır. (4, 2) nöqtəsi üçün $a_{11} = f'_{1x}(4, 2) = 4, \quad a_{12} = f'_{1y}(4, 2) = 4, \quad a_{21} = f'_{2x}(4, 2) = -8, \quad a_{22} = f'_{2y}(4, 2) = 16$ olduğundan bu nöqtənin ətrafında verilən sistemi

$$\begin{cases} \dot{x} = 4(x-4) + 4(y-2) + \varphi_1(x, y), \\ \dot{y} = -8(x-4) + 16(y-2) + \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

şəklində yazmaq olar. Burada $\varphi_k(x, y)$ ifadəsi $r = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$ nəzərən $r \to 0$ şərtində yüksək tərtibli sonsuz kiçik kəmiyyətdir. Mə'lumdur ki,

$$\begin{cases} \dot{x} = 4(x-4) + 4(y-2), \\ \dot{y} = -8(x-4) + 16(y-2) \end{cases}$$

sistemi üçün (4,2) nöqtəsinin tipi, həm də verilən sistem üçün eyni olur. Axırıncı sistemin xarakteristik tənliyin yazıb, həll edək.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -8 & 16-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 96 = 0, \quad \lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = 12.$$

Köklər həqiqi və eyni işarəli olduğundan (4, 2) düyün məxsusi nöqtə olur. (-2, -1) nöqtəsi üçün $a_{11} = f'_{1x}(-2,-1) = -2,\ a_{12} = f'_{1y}(-2,-1) = -8,\ a_{21} = f'_{2x}(-2,-1) = 4,\ a_{22} = f'_{2y}(-2,-1) = -8$,

$$\begin{cases} \dot{x} = -2(x+2) - 8(y+1), \\ \dot{y} = 4(x+2) - 8(y+1), \end{cases} \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & -8 \\ 4 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 10\lambda + 48 = 0,$$

$\lambda_{1,2} = -5 \pm i\sqrt{23}$.

Köklərin həqiq hissəsi mənfi ədəd olub, kompleks olduğundan (-2, -1) nöqtəsi verilən sistem üçün dayanıqlı fokus olur.

8. Sərhəd məsələsi

1. $y'' + y = 1$ tənliyinin $y(0) = 0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Əvvəlcə verilən tənliyin ümumi həllini tapaq. Bircins tənliyə uyğun $\lambda^2 + 1 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $\lambda_{1,2} = \pm i$ olduğundan $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. $\tilde{y} = 1$ bircins olmayan tənliyin bir xüsusi həlli olduğundan

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1$$

tənliyin ümumi həlli olur. C_1 və C_2 sabitləri $y(0) = 0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ sərhəd şərtlərinə əsasən tapılır.

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 1 = 0, \quad -C_1 \sin\frac{\pi}{2} + C_2 \cos\frac{\pi}{2} = 1.$$

Buradan $C_1 = -1,\quad C_2 = C$ ixtiyari götürsək $y = C\sin x - \cos x + 1$ funksiya verilən tənliyin verilən şərtiləri ödəyən həlli olar. C -ixtiyari ədəd olduğundan sərhəd məsələsinin sonsuz həlli var.

2. $x^2 y'' - 2y = 0$ tənliyinin $y(1) = 1$ və $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$ şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Verilən Eyler tənliyinin ümumi həllini tapaq. $x = e^t$ $(x > 0)$ əvəzləməsini aparaq.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} =$$

$$= e^{-t}\frac{d}{dt}\left[e^{-t}\frac{dy}{dt}\right] = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Bunları tənlikdə yazsaq alarıq:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 0, \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2.$$

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2.$$

Burada $y(1) = 1$ və $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$ şərtlərinə əsasən $C_1 + C_2 = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{C_1}{x} + 2C_2 x\right) = 0$. Deməli, $C_2 = 0,\quad C_1 = 1$ olmalıdır. Beləliklə, $y = \frac{1}{x}$ baxılan məsələnin həlli olur.

3. $y'' + y = f(x),\quad y(0) = 0,\quad y(1) = 0$ məsələsinin Qrin funksiyasını qurun.

HƏLLİ. $y'' + y = 0$ tənliyinin ümumi həlli $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ olduğundan Qrin funksiyası

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1 \cos x + C_2 \sin x, & 0 \le x \le s, \\ C_3 \cos x + C_4 \sin x, & s \le x \le 1 \end{cases}$$

şəkildə axtarılır. $G(x,s)$ funksiyası $x = s$ nöqtəsində kəsilməzdir və $G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = 1$ şərtini ödəyir. Odur ki,

$$\begin{cases}(C_3 - C_1)\cos s + (C_4 - C_2)\sin s = 0,\\ -(C_3 - C_1)\sin s + (C_4 - C_2)\cos s = 1.\end{cases}$$

Buradan $C_3 - C_1 = -\sin s, \quad C_4 - C_2 = \cos s$. Deməli,

$$G(x, s) = \begin{cases}C_1 \cos x + C_2 \sin x, & 0 \le x \le s,\\ (C_1 - \sin s)\cos x + (C_2 + \cos s)\sin x, & s \le x \le 1.\end{cases}$$

Qrin funksiyası sərhəd şərtlərini ödədiyindən alırıq:

$$\begin{cases}C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0, & \Rightarrow C_1 = 0;\\ (C_1 - \sin s)\cos 1 + (C_2 + \cos s)\sin 1 = 0,\end{cases}$$

$$C_2 = \frac{\cos 1}{\sin 1}\sin s - \cos s = \frac{\sin(s-1)}{\sin 1}.$$

Bunları Qrin funksiyasının axırıncı ifadəsində yerinə yazsaq

$$G(x, s) = \begin{cases}-\dfrac{\sin x \sin(1-s)}{\sin 1}, & 0 \le x \le s,\\ -\dfrac{\sin s \sin(1-x)}{\sin 1}, & s \le x \le 1\end{cases}$$

axtarılan sərhəd məsələsinin Qrin funksiyası olar.

4. λ-ədədinin hansı qiymətlərində

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi)$$

sərhəd məsələsinin sıfırdan fərqli həlli var.

HƏLLİ. $\lambda = 0$ olduqda tənliyin həlli $y = C_1 x + C_2$ olduğundan sərhəd şərtlərinə əsasən $C_1 = 0, \quad C_2 = 0$ olur, yə'ni $\lambda = 0$ məxsusi ədəd olmur. $\lambda < 0$ olduqda tənliyin ümumi həlli $y = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ olduğundan sərhəd şərtlərinə əsasən

$$\begin{cases}C_1 + C_2 = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi},\\ -C_1 + C_2 = -C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi}.\end{cases}$$

Buradan $C_1 = C_2 = 0$. Deməli, $\lambda < 0$ olduqda məsələnin sıfırdan fərqli həlli olmur. İndi $\lambda > 0$ üçün tənliyin ümumi həllini tapaq.

$$y = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Bu həlli sərhəd şərtlərində yazsaq:

$$\begin{cases}C_1 = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\pi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi,\\ C_2 = -C_1 \sin\sqrt{\lambda}\pi + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\pi\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}\pi\right)C_1 - C_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0,\\ C_1 \sin\sqrt{\lambda}\pi + \left(1 - \cos\sqrt{\lambda}\pi\right)C_2 = 0.\end{cases}$$

Alınan sistemin $C_1, \quad C_2$ məchullarına nəzərən sıfırdan fərqli həllinin olması üçün

$$\begin{vmatrix}1 - \cos\sqrt{\lambda}\pi & -\sin\sqrt{\lambda}\pi\\ \sin\sqrt{\lambda}\pi & 1 - \cos\sqrt{\lambda}\pi\end{vmatrix} = 2\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0.$$

Buradan $\cos\sqrt{\lambda}\pi = 1; \quad \sqrt{\lambda}\pi = 2k\pi; \quad \lambda_k = (2k)^2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$.

Bu ədədlər verilən məsələnin məxsusi ədədləri olur. Məxsusi funksiyaları tapmaq üçün bu qiymətləri ümumi həldə yazaq. Onda $y_k(x) = C_{1k} \cos 2kx + C_{2k} \sin 2kx, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$ (burada C_{1k}, C_{2k} -ixtiyari ədədlərdir və $C_{1k}^2 + C_{2k}^2 > 0$), məsələnin məxsusi funksiyaları olur.

Yoxlama işlərinin həll nümunələri

1. $xy' + y - 3 = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik xətti olduğundan onu həll etmək üçün $y = u(x)v(x)$ əvəzləməsini aparaq, yə'ni həlli x-dən asılı iki funksiyanın hasili şəklində axtaraq. Onda alarıq. $y' = u'v + v'u$. y və y'-

in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazaq:

$$x(u'v+v'u)+uv-3=0, \quad u(xv'+v)+xvu'-3=0.$$

$u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarını elə seçək ki,

$$xv'+v=0, \quad xvu'-3=0.$$

Birinci tənliyi dəyişənlərinə ayırıb həll edək:

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}, \quad \ln|v|=-\ln|x|, \quad v=\frac{1}{x}.$$

v-nin bu qiymətini ikinci tənlikdə nəzərə alaq:

$$x\frac{1}{x}u'=3, \quad u'=3, \quad du=3dx, \quad u=3x+C.$$

$u(x)$ və $v(x)$-in qiymətlərini $y=u(x)v(x)$ əvəzləməsində nəzərə alsaq yaza bilərik:

$$y=\frac{1}{x}(3x+C)=3+\frac{C}{x}, \quad y=3+\frac{C}{x}.$$

2 $y''+\frac{1}{x}y'=x^2$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik ikitərtibli xətti bircins olmayan diferensial tənlikdir. $y'=p(x)$ əvəzləməsi aparaq. Onda $y''=p'(x)$ olduğundan

$$p'+\frac{1}{x}p=x^2.$$

Bu tənlik birtərtibli xətti tənlikdir. Həll üçün sabitin variasiyası üsulunu tətbiq edək. Əvvəlcə $p'+\frac{1}{x}p=0$ bircins tənliyinin ümumi həllini tapaq.

$$\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{dx}{x}+\ln C, \quad \ln|p|=-\ln x+\ln C, \quad p=\frac{C}{x}.$$

Burada C sabitini $C(x)$ kimi qəbul edək və $C(x)$ elə seçək ki, $p(x)=\frac{C(x)}{x}$ ifadəsi bircins olmayan tənliyin həlli olsun:

$$p'(x)=\frac{C'(x)x-1\cdot C(x)}{x^2}=\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}.$$

p və p'-in qiymətlərini tənlikdə yerinə yazaq.

$$\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{C(x)}{x}=x^2, \quad \frac{C'(x)}{x}=x^2.$$

Buradan alarıq:

$$\frac{dC}{dx}=x^3, \quad C(x)=\frac{x^4}{4}+C_1.$$

Onda yaza bilərik:

$$p(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4}+C_1\right)=\frac{x^3}{4}+\frac{C_1}{x}.$$

Digər tərəfdən $y'=p$ olduğunu nəzərə alsaq yazmaq olar:

$$y'=\frac{x^3}{4}+\frac{C_1}{x}, \quad dy=\left(\frac{x^3}{4}+\frac{C_1}{x}\right)dx, \quad y=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}+C_1\ln|x|+C_2.$$

Beləliklə, verilmiş tənliyin ümumi həlli

$$y=\frac{x^4}{16}+C_1\ln|x|+C_2$$

şəklində tapılır.

3. $y''-2y'+5y=xe^{2x}$ tənliyinin $y(0)=1, \quad y'(0)=0$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik sabit əmsallı bircins olmayan ikitərtibli xətti diferensial tənlikdir. Belə tənliklərin ümumi həlli bircins tənliyin y_b ümumi həlli ilə bircins olmayan tənliyin $\tilde{y}$ xüsusi həllinin cəminə bərabərdir.

$$y=y_b+\tilde{y}$$

$y''-2y'+5y=0$ bircins tənliyin ümumi həllini tapaq. Uyğun xarakteristik $k^2-2k+5=0$ tənliyinin kökləri $k_{1,2}=1\pm 2i$ olduğundan $y_b=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ ümumi həlli olur.

$\alpha = 2$ ədədi xarakteristik tənliyin kökü olmadığından verilmiş tənliyin xüsusi həllini

$$\tilde{y} = (Ax + B)e^{2x}$$

şəklində axtarmalıyıq. Onda yaza bilərik:

$$\tilde{y}' = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x} = e^{2x}(2Ax + 2B + A),$$

$$\tilde{y}'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4(Ax + B)e^{2x} = 4e^{2x}(Ax + B + A).$$

$\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ və $\tilde{y}''$-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq alarıq:

$$5Ax + 2A + 5B = x.$$

Buradan namə'lum əmsallar üsuluna əsasən yaza bilərik:

$$\begin{cases} 5A = 1, \\ 2A + 5B = 0 \end{cases}, \quad A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{2}{25} \qquad \tilde{y} = \frac{1}{5}\left(x - \frac{2}{5}\right)e^{2x}.$$

Beləliklə, verilmiş tənliyin ümumi həlli

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{5}\left(x - \frac{2}{5}\right)e^{2x}$$

şəklində yazılır. $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ başlanğıc şərtlərini axırıncı ifadədə nəzərə alsaq taparıq:

$$C_1 = \frac{27}{25}, \quad C_2 = \frac{14}{25}, \quad y = \frac{1}{25}e^x(27\cos 2x + 14\sin 2x) +$$

$$+ \frac{1}{5}\left(x - \frac{2}{5}\right)e^{2x}.$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$$

1. Xarakteristik tənliyin köməkliyi ilə sistemin ümumi həllini tapın.
2. Sistemi və onun həllini matris şəklində göstərin.

HƏLLİ. 1. Sistemin həllini $x = k_1 e^{\lambda t}$, $y = k_2 e^{\lambda t}$ şəklində axtaraq. λ ədədi

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$$

xarakteristik tənliyin, k_1 və k_2 ədədləri isə

$$\begin{cases} (4-\lambda)k_1 + 6k_2 = 0, \\ 4k_1 + (2-\lambda)k_2 = 0 \end{cases}$$

sisteminin sıfırdan fərqli həlli kimi tapılır. Xarakteristik tənliyin $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$ köklərini tapırıq: $\lambda_1 = 8$ kökü üçün sistemi yazaq.

$$\begin{cases} -4k_1 + 6k_2 = 0, \\ 4k_1 - 6k_2 = 0, \quad k_1 = \dfrac{3}{2}k_2 \end{cases}$$ taparıq. $k_2 = 2$ qəbul etsək $k_1 = 3$

alarıq. Onda $\lambda_1 = 8$ kökünə uyğun xüsusi həll: $\begin{cases} x_1 = 3e^{8t}, \\ y_1 = 2e^{8t}, \end{cases}$

$\lambda_2 = -2$ kökü üçün sistem $\begin{cases} 6k_1 + 6k_2 = 0, \\ 4k_1 + 4k_2 = 0, \quad k_1 = -k_2 \end{cases}$ taparıq.

$k_2 = 1$ qəbul etsək, $k_1 = -1$ alarıq. Onda $\lambda_2 = -2$ kökünə uyğun xüsusi həll:

$$\begin{cases} x_2 = -e^{-2t}, \\ y_2 = e^{-2t}. \end{cases}$$

Onda sistemin ümumi həllini

$$\begin{cases} x = 3C_1e^{8t} - C_2e^{-2t}, \\ y = 2C_1e^{8t} + C_2e^{-2t} \end{cases}$$

şəklində yaza bilərik.

2. Verilmiş sistemi və həlli matris formasında yazaq:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C_1 & -C_2 \\ 2C_1 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{8t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

5. $y' = \frac{x}{y}e^{2x} + y$ tənliyini $y(0) = 1$ və $y(0) = 1{,}01$ şərtlərini ödəyən $y(x)$ və $\tilde{y}(x)$ həllərini tapıb $|\tilde{y}(x) - y(x)|$ fərqini $[0, 1]$ parçasında qiymətləndirin.

HƏLLİ. Verilən Bernulli tənliyinin ümumi həllini tapaq. $y^2 = z$ əvəzləməsini aparaq. Onda $z' = 2yy'$, $z' = 2y\left(\frac{x}{y}e^{2x} + y\right) = 2xe^{2x} + 2y^2$, $z' - 2z = 2xe^{2x}$. Bu xətti tənliyi həll etsək alarıq:

$$z = Ce^{2x} + x^2e^{2x} = e^{2x}\left(C + x^2\right).$$

$y^2 = z$ əvəzləməsini nəzərə alsaq verilən tənliyin ümumi həlli

$$y = e^x\sqrt{x^2 + C}.$$

Onda verilmiş başlanğıc şərtlərini ödəyən

$$y(x) = e^x\sqrt{x^2 + 1}, \quad \tilde{y}(x) = e^x\sqrt{x^2 + (1{,}01)^2}$$

həlləri alınar.

$$\tilde{y}(x) - y(x) = \left[\sqrt{x^2 + (1{,}01)^2} - \sqrt{x^2 + 1}\right]e^x =$$

$$= \frac{x^2 + (1{,}01)^2 - \left(x^2 + 1\right)}{\sqrt{x^2 + (1{,}01)^2} + \sqrt{x^2 + 1}}e^x = \frac{2{,}01 \cdot 0{,}01}{\sqrt{x^2 + (1{,}01)^2} + \sqrt{x^2 + 1}}e^x.$$

Buradan $[0, 1]$ parçası üçün $(0 \le x \le 1)$

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| \le \frac{2{,}01 \cdot 0{,}01}{2{,}01}e < 0{,}03.$$

6. $y' = y + \mu\left(x + y^2\right)$, $y(0) = 1$ məsələsi üçün $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ törəməsini tapın.

HƏLLİ. Əvvəlcə baxılan məsələnin $\mu = 0$ üçün həllini tapaq:

$$y' = y, \quad y'(0) = 1, \quad \int\frac{dy}{y} = \int dx + \ln C, \quad \ln|y| = x + \ln C,$$

$$y = Ce^x, \quad C = 1, \quad y = e^x.$$

Onda $u = \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ funksiyası $\frac{du}{dx} = f_y'[x, y(x), 0]u + f_\mu'[x, y(x), 0]$ tənliyinin $u(0) = 0$ şərtini ödəyən həlli olur. Baxılan halda: $\frac{du}{dx} = u + x + e^{2x}$, $u(0) = 0$. Bu xətti tənliyin $u(0) = 0$ şərtini ödəyən həlli $u(x) = e^{2x} - x - 1$ olduğundan $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = e^{2x} - x - 1$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y, \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$ sisteminin dayanıqlı olub-olmadığını araşdırın.

HƏLLİ. Sistemin $\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $\lambda_{1,2} = -2$ olduğundan baxılan sistem asimptotik dayanıqlı olur.

8. $\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(1-y), \\ \dot{y} = 2 - xy \end{cases}$ sisteminin tarazlıq vəziyyətlərini tapın və birinci yaxınlaşmalar üsulu ilə onların dayanıqlığını araşdırın.

HƏLLİ. Baxılan sistem üçün $f_1(x,y) = (x-1)(1-y)$, $f_2(x,y) = 2 - xy$. Sistemin tarazlıq vəziyyətləri $\begin{cases} (x-1)(1-y) = 0, \\ 2 - xy = 0 \end{cases}$ sisteminin həlli kimi tapılır. Bu sistemi həll etsək (1, 2) və (2, 1) tarazlıq hallarını tapanq.

(1, 2) tarazlıq halı üçün $a_{11} = \frac{\partial f_1(1,2)}{\partial x} = -1$, $a_{12} = \frac{\partial f_2(1,2)}{\partial y} = 0$,

$a_{21} = \frac{\partial f_2(1,2)}{\partial x} = -2$, $a_{22} = \frac{\partial f_2(1,2)}{\partial y} = -1$. Onda verilən sistem üçün $\begin{cases} \dot{x} = -(x-1), \\ \dot{y} = -2(x-1) - (y-2) \end{cases}$ birinci yaxınlaşmalar olur. Alınan sistem üçün

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

xarakteristik tənliyinin kökləri $\lambda_{1,2} = -1$ olduğundan (1, 2) tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur.

İndi (2, 1) nöqtəsi üçün birinci yaxınlaşmalar sistemini tapaq.

$$a_{11} = \frac{\partial f_1(2,1)}{\partial x} = 0, \quad a_{12} = \frac{\partial f_1(2,1)}{\partial y} = -1,$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2(2,1)}{\partial x} = -1, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2(2,1)}{\partial y} = -2.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y-1), \\ \dot{y} = -(x-2) - 2(y-1), \end{cases}$$

Buradan

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0, \quad \lambda_1 = -1 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

$\lambda_2 = -1 + \sqrt{2} > 0$ olduğundan (2, 1) tarazlıq halı dayanıqsız olur.

9. $\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + y, \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$ sisteminin $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığını Lyapunov funksiyalar üsulu ilə araşdırın.

HƏLLİ. Lyapunov funksiyası olaraq $v(x, y) = x^2 + y^2$ götürək və bu funksiyanın verilmiş sistemə nəzərən törəməsini tapaq:

$$\frac{dv}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x\left(-x^3 + y\right) + 2y\left(-x - y^3\right) = -2x^4 + 2xy -$$

$$-2xy - 2y^4 = -2\left(x^4 + y^4\right) < 0, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

$v(x, y) = x^2 + y^2$ funksiyası müsbət-müəyyən, $\frac{dv}{dt} = -2\left(x^4 + y^4\right)$ törəməsi isə mənfi-müəyyən olduğundan Lyapunov funksiyalar əlamətinə əsasən verilən sistemin $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur.

10. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y \end{cases}$ sistemi üçün $(0, 0)$ məxsusi nöqtənin tipini tə'yin edin və onun dayanıqlı olub-olmadığını araşdırın.

HƏLLİ. Sistemin $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ (köklər kompleks olub, həqiqi hissəsi sıfırdan fərqli) olduğundan $(0, 0)$ fokus nöqtəsi olur. Digər tərəfdən köklərin həqiqi hissəsi mənfi olduğundan $(0, 0)$ nöqtəsi dayanıqlı fokus olur.

11. $y'' + y = 2x - \pi$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y(\pi) = 0$ sərhəd məsələsinin həllini tapın.

HƏLLİ. Əvvəlcə verilmiş məsələnin ümumi həllini tapaq. $y'' + y = 0$ bircins tənliyin $k^2 + 1 = 0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1 = i$, $k_2 = -i$ olduğundan $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. Bircins olmayan tənliyin bir xüsusi həllini $\tilde{y} = Ax + B$ şəklində axtaraq. Onda yaza bilərik:

$$\tilde{y}'=A,\quad \tilde{y}''=0,\quad Ax+B=2x-\pi.$$

Buradan alarıq.

$$A=2,\quad B=-\pi,\quad \tilde{y}=2x-\pi.$$

Deməli, $y=C_1\cos x+C_2\sin x+2x-\pi$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur. Burada $y(0)=0,\quad y(\pi)=0$ sərhəd şərtlərini nəzər alsaq $C_1=\pi$ tapırıq. Onda $y=2x-\pi+\pi\cos x+C\sin x$ verilən məsələnin həlli olur. Burada C -ixtiyari sabitdir.

12. $y''=\lambda y,\quad y(0)=y'(e)=0$ məsələsi üçün məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları tapın.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyi $y''-\lambda y=0$ şəklində yazaq. Aşağıdakı hallara baxaq:

1). $\lambda=0$ olduqda $y''=0,\quad y'=C_1,\quad y=C_1x+C_2$. Buradan $y(0)=0$ və $y'(e)=0$ şərtlərinə əsasən: $C_2=0,\quad C_1=0$. Deməli, $\lambda=0$ olduqda məsələnin sıfırdan fərqli həlli yoxdur. $\lambda=0$ məxsusi ədəd ola bilməz.

2). $\lambda>0$ olduqda $y''-\lambda y=0$ bircins tənliyinə uyğun $k^2-\lambda=0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1=-\sqrt{\lambda},\quad k_2=\sqrt{\lambda}$. Onda $y=C_1e^{-\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{\sqrt{\lambda}x}$ tənliyin ümumi həlli olur. Buradan $y(0)=0,\quad y'(e)=0$ sərhəd şərtlərinə əsasən

$$\begin{cases} C_1+C_2=0,\\ -e^{-\sqrt{\lambda}e}C_1+e^{\sqrt{\lambda}e}C_2=0\end{cases}$$

sistemi alınar. Alınan xətti bircins cəbri tənliklər sisteminin determinantı

$$\begin{vmatrix} 1 & 1\\ -e^{-\sqrt{\lambda}e} & e^{\sqrt{\lambda}e}\end{vmatrix}=e^{\sqrt{\lambda}e}+e^{-\sqrt{\lambda}e}>0$$

olduğundan, $C_1=0,\quad C_2=0$ olmalıdır. Deməli, $\lambda>0$ baxılan məsələnin ancaq sıfır həlli var. Yə'ni $\lambda>0$ olduqda baxılan məsələnin həlli yoxdur.

3). $\lambda<0$ olan halda $k^2-\lambda=0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_{1,2}=\pm i\sqrt{-\lambda}$ olduğundan

$$y=C_1\cos\sqrt{-\lambda}x+C_2\sin\sqrt{-\lambda}x$$

tənliyin ümumi həlli olur. $y(0)=0,\quad y'(e)=0$ şərtlərinə əsasən

$$\begin{cases} 1\cdot C_1+0\cdot C_2=0,\\ -\sqrt{-\lambda}C_1\sin\sqrt{-\lambda}e+\sqrt{-\lambda}C_2\cos\sqrt{-\lambda}e=0\end{cases}$$

sistemini alarıq. Buradan $C_1=0,\quad C_2\cos\sqrt{-\lambda}e=0,\quad C_1=0$ olduğundan $C_2=0$ götürsək, baxılan məsələnin sıfır həlli alınır. Ona görə $C_2=1$ qəbul edib, $\cos\sqrt{-\lambda}e=0$ şərtindən λ ədədini tapmaq lazımdır. Buradan:

$$\sqrt{-\lambda}e=(2k-1)\frac{\pi}{2},\qquad k=1,2,3,\ldots$$

$$\sqrt{-\lambda}=\frac{\pi}{e}\left(k-\frac{1}{2}\right),\quad \lambda_k=-\frac{\pi^2}{e^2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2,\qquad k=1,2,3,\ldots$$

Onda λ_k ədədlərinə uyğun həll:

$$y_k=\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{e},\qquad k=1,2,3,\ldots$$

Beləliklə, $\lambda_k=-\frac{\pi^2}{e^2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2,\quad k=1,2,3,\ldots$ ədədləri baxılan məsələ üçün məxsusi ədədlər, $y_k(x)=\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{e},\quad k=1,2,3,\ldots$ isə məxsusi funksiyalardır.

MÜSTƏQİL HƏLL ETMƏK ÜÇÜN MİSALLAR

Varlıq və yeganəlik haqqında teoremi tətbiq edərək aşağıdakı misallar üçün həllin varlıq və yeganəlik oblastını tapın

a). $y'=-x+y^2$, CAVAB: [Bütün müstəvi].

b). $y' = 2 + \sqrt[3]{y-2x}$, $[y \neq 2x]$.

c). $(x-2y)y' = y\ln(x+1)$, $[x \neq 2y, \quad x+1>0]$.

d). $(x-2)y' = 2\sqrt{y} - x$, $[x \neq 2, \quad y>0]$.

e). $xy' = y + \sqrt{y^2 - 4x^2}$, $[\,|y| > 2|x|\,]$.

Eyler üsulu ilə həll edin

a). Eyler sınıq xətlər üsulu ilə $y' = x + y$ tənliyinin $M(1;\,2)$ nöqtəsindən keçən və $h = 0{,}2$ addımına uyğun $[1;\,3]$ parçasında təqribi həllini qurun və $y(3)$-ü hesablayın. $[y(3) \approx 20{,}77]$.

b). Eyler sınıq xətlər üsulu ilə $y' = 0{,}2xy$, $y(0) = 1$ məsələsinin $h = 0{,}1$ addımına uyğun $[0;\,0{,}9]$ parçasında təqribi həllinin $y(0{,}9)$ qiymətini hesablayın. $[y(0{,}9) \approx 1{,}0741]$.

Aşağıdakı məsələlər üçün $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ ardıcıl yaxınlaşmaları tapın

a). $y' = y^2 + 3x^2 - 1$, $y(1) = 1$, $\left[y_0 = 1, \quad y_1 = x^3,\right.$

$\left. y_2 = 1 + x^3 - x + \frac{1}{7}\left(x^7 - 1\right)\right]$.

b). $y' = y + e^{y-1}$, $y(0) = 1$, $[y_0 = 1, \quad y_1 = 1 + 2x,$

$y_2 = x + x^2 + 0{,}5\left(1 + e^{2x}\right)]$.

c). $y' = y^2 - 4x$, $y(1) = 2$, $\left[y_0 = 2, \quad y_1 = 2 - 2(x-1)^2,\right.$

$\left. y_2 = 2 - 2(x-1)^2 - \frac{8}{3}(x-3)^2 + \frac{4}{5}(x-1)^5\right]$.

Tənliklərin tipini müəyyənləşdirin və həll edin

1. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$, $[(1+y)(1-x) = C]$.
2. $\left(1+y^2\right)dx + \left(1+x^2\right)dy = 0$, $[x + y = C(1-xy)]$.
3. $\left(1+e^x\right)yy' = e^x$, $\left[\frac{y^2}{2} = \ln\left(1+e^x\right) + C\right]$.
4. $xy' = y^2 - y$, $\left[Cx = \frac{y-1}{y}\right]$.
5. $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, $\left[\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C,\right.$ $\left. x = \pm 1, \quad y = \pm 1\right]$.
6. $e^{-y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 1$, $\left[e^x = C\left(1 - e^{-y}\right)\right]$.
7. $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(y - x^2y\right)dy = 0$, $\left[1 + y^2 = C\left(1 - x^2\right)\right]$.
8. $(1+2y)xdx + \left(1+x^2\right)dy = 0$, $\left[y = \frac{C}{2\left(1+x^2\right)} - \frac{1}{2}\right]$.
9. $\sec^2 x\, tgy dx + \sec^2 y\, tgx dy = 0$, $[tgx tgy = C]$.
10. $\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dy + ydx = 0$, $\left[2\sqrt{y} - \ln y + 2\sqrt{x} = C\right]$.
11. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$, $\left[2Cy = C^2x^2 + 1, \quad y = \pm x\right]$.
12. $4x^2 + xy - 3y^2 + y'\left(-5x^2 + 2xy + y^2\right) = 0$, $\left[(y-x)^8(y-2x)^9 = C(y+2x)^5\right]$.

13. $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$, $\qquad [C(x^2 - y^2) = y^3]$.

14. $(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0$, $\qquad [x^2 = y^4 + Cy^6]$.

15. $(y - xy')^2 = x^2 + y^2$, $\qquad [C^2x^2 = 1 + 2Cy, \quad C^2 - x^2 = 2Cy]$.

16. $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0$, $\qquad [(x - 1)(3x + 2y - 1) = C]$.

17. $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$,

$[(x + y - 1)^5(x - y - 1)^2 = C]$.

18. $\left(y + y\sqrt{x^2y^4 + 1}\right)dx + 2xdy = 0$, $\qquad \left[\sqrt{x^2y^4 + 1} = Cy^2 + 1\right]$.

19. $(x + y^3)dx + (3y^5 - 3y^2x)dy = 0$, $\qquad \left[\arg tg\dfrac{y^3}{x} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^6) + \ln C\right]$.

20. $y\cos x dx + (2y - \sin x)dy = 0$, $\qquad [\sin x + 2y\ln|y| - Cy = 0]$.

21. $y' + y^2 = \dfrac{2}{x^2}$, $\qquad \left[y = \dfrac{2x^3 - C}{x(C + x^3)}\right]$.

22. $y' + 2y = x^2 + 2x$, $\qquad \left[y = Ce^{-2x} + \dfrac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1)\right]$.

23. $(x^2 + 2x - 1)y' - (x + 1)y = x - 1$, $\qquad \left[y = C\sqrt{x^2 + 2x - 1} + x\right]$.

24. $xy'\ln x - y = x^3(3\ln x - 1)$, $\qquad [y = C\ln x + x^3]$.

25. $(a^2 - x^2)y' + xy = a^2$, $\qquad \left[y = C\sqrt{|a^2 - x^2|} + x\right]$.

26. $y' + y\cos x = \sin x\cos x$, $\quad y(0) = 1$, $\qquad [y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1]$.

27. $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$, $\qquad [y^3 = Cx^2 + x^3]$.

28. $x(x^3 + 1)y' + (2x^3 - 1)y = \dfrac{x^3 - 2}{x}$, $\qquad \left[y = \dfrac{Cx}{x^3 + 1} + \dfrac{1}{x}\right]$.

29. $x^2y' + 2x^3y = y^2(1 + 2x^2)$, $\qquad \left[\dfrac{1}{y} = Ce^{x^2} + \dfrac{1}{x}\right]$.

30. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$, $\qquad [y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C]$.

31. $x(x - 1)y' + y = x^2(2x - 1)$, $\qquad \left[y = \dfrac{Cx}{x - 1} + x^2\right]$.

32. $(y^2 + x^2 - a)xdx + (y^2 + x^2 + a)ydy = 0$,

$[(x^2 + y^2)^2 - 2a(x^2 - y^2) = C]$.

33. $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0$,

$[3xy^2 + x^2y + x^2 + 3y = C]$.

34. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$, $\qquad [x^4 + x^2y^2 + y^4 = C]$.

35. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$, $\qquad [x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C]$.

36. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$, $\qquad \left[\dfrac{\sin^2 x}{y^2} + \dfrac{x^2 + y^2}{2} = C\right]$.

37. $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$, $\qquad [x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C]$.

38. $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0$, $\qquad \left[\sqrt{x^2 + y^2} + \dfrac{y}{x} = C\right]$.

39. $\frac{2xdx}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0,\quad y(1)=1,\qquad [y=x]$.

40. $(x^2+y^2+1)dx-2xydy=0,\quad \mu=\varphi(x)\qquad \left[1+y^2-\right.$

$\left.-x^2=Cx,\quad \mu=\frac{1}{x^2}\right]$.

41. $(xy^2+y)dx-xdy=0\quad \mu=\varphi(y),\qquad \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}=C,\quad \mu=\frac{1}{y^2}\right]$.

42. $(x+\sin x\sin y)dx+\cos ydy=0,\quad \mu=\varphi(x)$,

$\left[2e^x\sin y+2e^x(x-1)+e^x(\sin x-\cos x)=C,\quad \mu=e^x\right]$.

43. $(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0,\quad \mu=\varphi(y)$,

$\left[x^2-\frac{7}{y}-3xy=C,\quad \mu=\frac{1}{y^2}\right]$.

44. $y'^2-(2x+y)y'+(x^2+xy)=0,\qquad \left[y=\frac{x^2}{2}+C\right]$.

45. $4y'^2-9x=0,\qquad \left[(y-C)^2=x^3\right]$.

46. $y'^3-2xy'^2-y'+2x=0,\qquad \left[y=x^2+C,\quad y=\pm x+C\right]$.

47. $y'^2+(x+a)y'-y=0,\qquad \left[y=(x+a)C+C^2,\quad y=a-\frac{x^2}{4}\right]$.

48. $y'+y=xy'^2,\ \left[x=\frac{C}{(p-1)^2}+\frac{p-\ln p}{(p-1)^2},\quad y=p^2\left(\frac{C}{(p-1)^2}+\right.\right.$

$\left.\left.+\frac{p-\ln p}{(p-1)^2}\right)-p,\quad y=0,\quad y=x-1\right]$.

49. $y=x+2y'-y'^2,\qquad \left[y=2C-\left(C-\frac{x}{2}\right)^2,\quad y=x+1\right]$.

50. $y=xy'+\frac{a}{y'^2},\qquad \left[y=Cx+\frac{a^2}{C^2},\quad 4y^3=27ax^2\right]$.

51. $y=xy'+a\sqrt{1+y'^2},\qquad \left[y=Cx+a\sqrt{1+C^2},\quad x^2+y^2=a^2\right]$

Verilmiş funksiyalar xətti asılıdırmı?

1. $1,\quad x$, [yox].
2. $x^2+2x,\quad 3x^2-1,\quad x+4$, [hə].
3. $\sin x,\quad \cos x$, [yox].
4. $1,\quad \arcsin x,\quad \arccos x$, [hə].
5. $1,\quad \cos x$, [yox].
6. $e^x,\quad e^{2x},\quad e^{3x}$, [yox].
7. $x,\quad e^x,\quad xe^x$, [yox].

Fundamental həlləri verilmiş funksiyalar olan diferensial tənlik qurun

1. $1\quad \cos x$, $\left[y''-y'ctgx=0\right]$.
2. $x,\quad x^2,\quad e^x$, $\left[(x^2-2x+2)y'''-x^2y''+2xy'-2y=0\right]$.
3. $e^x,\quad e^{2x},\quad e^{3x}$, $\left[y'''-6y''+11y'-6y=0\right]$.
4. $1,\quad e^{-x}\sin x,\quad e^{-x}\cos x$, $\left[y'''+y''-2y=0\right]$.

Yüksək tərtibli tənlikləri həll edin

1. $y'''y'' = \sqrt{1+y''^2}$, $\left[y = \pm\left[\frac{1}{6}\sqrt{\left[(x+C_1)^2-1\right]^3} - \frac{1}{2}(x+C_1)\ln\left|x+C_1+\sqrt{(x+C_1)^2-1}\right| + \frac{1}{2}\sqrt{(x+C_1)^2-1}+C_2x+C_3\right]\right]$.

2. $2y''' - 3y'' + y' = 0$, $\left[y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{\frac{x}{2}}\right]$.

3. $y'' + 3y' = 3$, $\left[y = C_1 + C_2e^{-3x} + x\right]$.

4. $y'' + 4y = 8\sin 2x$, $\left[y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - 2x\cos 2x\right]$.

5. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$, $\left[y = e^{3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + \frac{1}{102}(5\sin x + 14\cos x)\right]$.

6. $2y'' + y' - y = 2e^x$, $\left[y = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{x}{2}} + 2e^x\right]$.

7. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$, $\left[y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \frac{1}{74}(5\sin x + 7\cos x)\right]$.

8. $x^2y'' + xy' + y = 0$, $\left[y = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)\right]$.

9. $x^3y''' - 3xy' + 3y = 0$, $\left[y = C_1x^3 + \frac{C_2}{x} + C_3x\right]$.

10. $(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$, $\left[y = C_1(x+2)^{-2} + C_2(x+2)\right]$.

11. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln^2 x + 12x$, $\left[y = \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x} + \ln^2 x - 3\ln x + 2x + \frac{7}{2}\right]$.

Ailənin diferensial tənliyini qurun

1. $y = \sin ax$, $\left[y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x}\arcsin y\right]$.

2. $y^2 + \frac{1}{x} = 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$, $\left[xyy'(xy^2+1) = 1\right]$.

3. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$, $\left[y'' - y' - 2y = 0\right]$.

4. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, $\left[3y'y''^2 - (1+y'^2)y''' = 0\right]$.

5. $\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{4} = 1$, $\left[-xyy' + y^2 = 4\right]$.

6. $\ln\frac{x}{y} = 1 + ay$, $\left[y = xy'\ln\frac{x}{y}\right]$.

7. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)^2$, $\left[yy'^2 + y^2 = 1\right]$.

8. $y = ae^{\frac{x}{a}}$, $\left[xy' = y\ln y'\right]$.

9. $y = A\sin(x+a)$, $\left[y'' + y = 0\right]$.

10. $y = e^x(Ax+B)$, $\left[y'' - 2y' + y = 0\right]$.

Ailənin trayektoriyalarını tapın

1. $x^2 + 4y^2 = a^2$, $\alpha = 90^0$, $\left[y = Cx^4\right]$.

2. $y^2=4(x-a)$, $\alpha=90^0$, $\left[y=Ce^{-\frac{x}{2}}\right]$.

3. $xy=a$, $\alpha=90^0$, $\left[y^2-x^2=C\right]$.

4. $x^2+y^2=2ax$, $\alpha=90^0$, $\left[y=C\left(x^2+y^2\right)\right]$.

5. $(2a-x)y^2=x^2$, $\alpha=90^0$, $\left[\left(x^2+y^2\right)^2=C\left(y^2+2x^2\right)\right]$.

6. $x^2+y^2=2ax$, $\alpha=45^0$, $\left[x^2+y^2=C(y-x)\right]$.

7. $x=\dfrac{a}{y}$, $\alpha=45^0$, $\left[y^2+2xy-x^2=C\right]$.

8. $x-y=x^2+a^2$, $\alpha=45^0$, $\left[y=\ln x-x+C\right]$.

Qüvvət sırasına ayrılışın bir neçə həddini tapın

1. $y'=x^2-y^2$, $y(0)=0$, $\left[y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{7\cdot 9}x^7-\dfrac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11}+\dots\right]$.

2. $y'=x^2y^2-1$, $y(0)=1$, $\left[y=1-x+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{x^5}{5}+\dots\right]$.

3. $y'=\dfrac{1-x^2}{y}$, $y(0)=1$, $\left[y=1+2x-x^2+\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^4+\dots\right]$.

4. $y'=e^y+xy$, $y(0)=0$, $\left[y=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{11x^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots\right]$.

5. $y'=\dfrac{xy}{1+x+y}$, $y(0)=0$, $\left[y=0\right]$.

6. $y''-\left(1+x^2\right)y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=2$,

$$\left[y=-2+2x-x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{7x^5}{60}-\dots\right].$$

7. $y''+xy'-x^2y=0$, $\left[y=C_1\left(1+\dfrac{x^4}{12}+\dots\right)+\right.$

$$\left.+C_2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\dots\right)\right].$$

8. $y''=ye^x$, $\left[y=C_1\left(1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{12}+\dots\right)+\right.$

$$\left.+C_2\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\dots\right)\right].$$

9. $y''=xyy'$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $\left[y=1+x+\dfrac{x^3}{3!}+\right.$

$$\left.+\frac{2x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\dots\right].$$

10. $yy''+y'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$,

$$\left[y=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{4x^5}{5!}-\frac{16x^6}{6!}+\dots\right].$$

Həllin parametrə nəzərən qüvvət sırasına ayrılışının bir neçə həddini tapın

1. $y'=\mu x^2-y^2$, $y(1)=1$, $\left[y=x^{-1}+0{,}2\mu\left(x^3-x^{-2}\right)+\right.$

$$+\mu^2\left(\frac{1}{25}x^{-3}-\frac{1}{18}x^{-2}+\frac{x^2}{50}-\frac{x^7}{225}\right)+\cdots\Big].$$

2. $y'=-2y+y^2e^x,\quad y(0)=1+3\mu,\ \left[y=e^{-x}+3\mu+9\mu^2\left(e^x-1\right)+\cdots\right].$

Tənliklər sistemini həll edin

1. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3-2y\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-2t,\end{cases}\qquad \left[\begin{cases}x=t+C_1\cos 2t+C_2\sin 2t\\ y=1+C_1\sin 2t-C_2\cos 2t\end{cases}\right].$

2. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y\\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y,\end{cases}\qquad \left[\begin{cases}x=(C_1-C_2)e^{2t}\cos t-(C_1+C_2)e^{2t}\sin t\\ y=(C_1\sin t+C_2\cos t)e^{2t}\end{cases}\right].$

3. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y,\quad x(0)=y(0)=1,\end{cases}\qquad \left[\begin{cases}x=e^{-2t}(1-2t)\\ y=e^{-2t}(1+2t)\end{cases}\right].$

4. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-7x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=-5y-2x,\end{cases}\qquad \left[\begin{cases}x=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)\\ y=e^{-6t}\left[(C_1+C_2)\cos t-(C_1-C_2)\sin t\right]\end{cases}\right].$

5. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\cos t\\ \dfrac{dy}{dt}=xe^{-\sin t},\end{cases}\qquad \left[\begin{cases}x=C_1e^{\sin t}\\ y=C_1t+C_2\end{cases}\right].$

6. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y-z\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y+z\\ \dfrac{dz}{dt}=x-z\end{cases},\qquad \left[\begin{cases}x=C_1+3C_2e^{2t}\\ y=-2C_1e^{2t}+C_3e^{-t}\\ z=C_1+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}\end{cases}\right].$

$(\lambda_1=0,\quad \lambda_2=2,\quad \lambda_3=-1)$

Dayanıqlığın tə'rifindən istifadə edərək göstərilən həllin dayanıqlığını araşdırın

1. $\dot{x}=-x+t^2,\quad x(1)=1,$ [dayanıqlı].
2. $\dot{x}=2t(x+1),\quad x(0)=0,$ [dayanıqsız].
3. $\begin{cases}\dot{x}=x-13y\\ \dot{y}=\dfrac{1}{4}x-2y,\quad x(0)=0,\quad y(0)=0,\end{cases}$ [dayanıqlı].

Sıfır həllinin Raus-Qurviç əlamətinə əsasən dayanıqlı olub-olmadığını araşdırın

1. $y^{IV}+2y'''+6y''+5y'+6y=0,$ [dayanıqlı].
2. $y'''+y''+y'+2y=0,$ [dayanıqsız].
3. $y^{IV}+2y'''+3y''+7y'+2y=0,$ [dayanıqsız].
4. $y'''+2y''+\alpha y'+3y=0,$ α ədədinin hansı qiymətlərində $y=0$ həlli dayanıqlı olur? $\left[\alpha>\dfrac{3}{2}\right].$
5. $y'''+\alpha y''+\beta y'+2y=0,$ α və β ədədlərinin hansı qiymətlərində $y=0$ həlli dayanıqlı olur? $[\alpha>0,\quad \beta>0,\quad \alpha\beta>2].$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + y \\ \dot{y} = x - 7y, \end{cases}$ [asimptotik dayanıqlı].

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = x - 5y, \end{cases}$ [dayanıqsız].

8. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y, \end{cases}$ [dayanıqlı].

Birinci yaxınlaşmalar üsulu ilə sıfır həllin dayanıqlığını araşdırın

1. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 8\sin^2 y \\ \dot{y} = x - 3y + 4x^3, \end{cases}$ [dayanıqlı].

2. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin y^2 \\ \dot{y} = -x - 3y + x\left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right), \end{cases}$ [dayanıqsız].

3. $\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(4y + e^{-3x}\right) \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}, \end{cases}$ [dayanıqlı].

4. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + x^2 + y^2 \\ \dot{y} = -x + 3y + 3x^2, \end{cases}$ [dayanıqsız].

Sıfır həllin Lyapunov funksiyalar üsulu ilə dayanıqlığını araşdırın

1. $\begin{cases} \dot{x} = y - x^5 \\ \dot{y} = -x - y^5, \end{cases}$ $[v(x,y) = x^2 + y^2$, dayanıqlı].

2. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = 2x^3 - y^3, \end{cases}$ $[v(x,y) = x^4 + y^2$, dayanıqlı].

3. $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 \\ \dot{y} = -x^2 - y^3, \end{cases}$ $[v(x,y) = x^2 + y^2$, dayanıqlı].

Məxsusi nöqtənin tipini tə'yin edin

1. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x + y, \end{cases}$ [fokus].

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - 2x}{2y - 3x}$, [düyün].

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 2y}{3x - 4y}$, [yəhərvari].

4. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y, \end{cases}$ [mərkəz].

5. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = 3x - y, \end{cases}$ [fokus].

6. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = x + 3y, \end{cases}$ [yəhərvari].

7. $\begin{cases}\dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = -x + y,\end{cases}$ [mərkəz].

Sərhəd şərtlərini ödəyən həlli tapın

1. $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$ $[y = 1 - \sin x - \cos x]$.

2. $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0,$ [həlli yoxdur].

3. $y'' - y' - 2y = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y(+\infty) = 0,$ $[y = -2e^{-x}]$.

4. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = \cos 2x, \quad y(0) = \frac{1}{25}, \quad y(\pi) = \frac{1}{25},$

$y'(0) = \frac{2}{15}, \quad y'(\pi) = \frac{2}{25},$ $\left[y = \frac{2}{75}\sin x + \frac{4}{75}\sin 2x + \frac{1}{25}\cos 2x\right]$.

5. $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0,$ $[y = e^{-x}]$.

Sərhəd məsələləri üçün Qrin funksiyasını tapın

1. $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0,$ $\left[G(x,s) = \begin{cases} -x, & 0 \le x \le s, \\ -s, & s \le x \le l \end{cases}\right]$.

2. $y'' = f(x), \quad y(0) + y(l) = 0, \quad y'(0) + y'(l) = 0,$

$$\left[G(x,s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-s) - \frac{1}{4}, & 0 \le x \le s \\ -\frac{1}{2}(s-x) - \frac{1}{4}, & s \le x \le l \end{cases}\right].$$

3. $y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0,$

$$\left[G(x,s) = \begin{cases} -\frac{\sin x \sin(l-s)}{\sin l}, & 0 \le x \le s \\ \frac{\sin s \sin(l-x)}{\sin l}, & s \le x \le l. \end{cases}\right].$$

4. $x^2y'' - 2y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0,$

$$\left[G(x,s) = \begin{cases} \frac{1-x^3}{3s^3x}, & 1 \le x \le s \\ \frac{1-s^3}{3s^3x}, & s \le x \le 2 \end{cases}\right].$$

Sərhəd məsələləri üçün məxsusi ədəd və məxsusi funksiyaları tapın

1. $y'' = \lambda y, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0,$ $\left[\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\right.$

$\left. y_k = \cos\frac{k\pi x}{l}, \quad k = 0,1,2\ldots\right]$.

2. $x^2y'' + \frac{1}{4}y = \lambda y, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0,$ $\left[\lambda_k = -(k\pi)^2,\right.$

$\left. y_k = \sqrt{x}\sin(k\pi \ln x), \quad k = 1,2,3,\ldots\right]$.

3. $x^2y'' = \lambda y, \quad y(1) = 0, \quad y(a) = 0, \quad (a > 1),$ $\left[\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2 - \frac{1}{4},\right.$

$\left. y_k = \sqrt{x}\sin\frac{k\pi \ln x}{\ln a}, \quad k = 1,2,3,\ldots\right]$.

BİRTƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

Sərbəst dəyişənlər $x_1,\dots,x_n$, axtarılan funksiya $z=z(x_1,\dots,x_n)$ və onun $\frac{\partial z}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial z}{\partial x_n}$ xüsusi törəmələri arasında verilmiş

$$F\left(x_1,\dots,x_n,\, z,\, \frac{\partial z}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0$$

münasibətinə *birtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənlik* deyilir.

n-ölçülü D oblastında tə'yin olunmuş $z=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ funksiyası üçün

$$F\left(x_1,\dots,x_n,\, \varphi(x_1,\dots,x_n),\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)=0$$

bərabərliyi D oblastında $x_1,\dots,x_n$ dəyişənlərinə nəzərən eynilik kimi ödəndikdə, $z=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ *funksiyasına D oblastında xüsusi törəməli diferensial tənliyin həlli* deyilir.

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} f_i(t,x_1,\dots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_i}=0 \qquad (1)$$

tənliyinə birtərtibli xüsusi törəməli *xətti bircins tənlik* deyilir.

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\dots,x_n),\quad i=1,2,\dots,n \qquad (2)$$

sisteminə (1) tənliyinin *xarakteristik sistemi* deyilir.

Diferensiallanan və $\frac{\partial \psi}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial \psi}{\partial x_n}$ törəmələrindən heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan $\psi(t,x_1,\dots,x_n)$ funksiyası üçün

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{\partial \psi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} f_i(t,x_1,\dots,x_n)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}=0 \qquad (3)$$

eyniliyi ödəndikdə, $\psi(t,x_1,\dots,x_n)$ funksiyasına (2) sisteminin *diferensiallanan inteqralı*, $\psi(t,x_1,\dots,x_n)=C$ münasibətinə isə *birinci inteqralı* deyilir.

Sistemin n sayda $\psi_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,\psi_n(t,x_1,\dots,x_n)$ diferensiallanan inteqralı üçün

$$\frac{D(\psi_1,\dots,\psi_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & ,\dots, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & ,\dots, & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}\neq 0$$

olduqda, bu funksiyalar (2) sisteminin *ümumi inteqralları* və (1) xüsusi törəməli tənliyin *fundamental inteqralları* olur.

$\psi_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,\psi_n(t,x_1,\dots,x_n)$ funksiyaları (2) sistemi üçün ümumi inteqral olduqda, istənilən kəsilməz diferensiallanan $\Phi(u_1,\dots,u_n)$ funksiyası üçün

$$z=\Phi(\psi_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,\psi_n(t,x_1,\dots,x_n)) \qquad (4)$$

(1) xüsusi törəməli diferensial tənliyin *ümumi həlli* olur. Yə'ni (1) xüsusi törəməli tənliyin istənilən həllini $\Phi(u_1,\dots,u_n)$ funksiyasını seçməklə almaq olur.

Xüsusi törəməli (1) tənliyinin

$$z(t_0,x_1,\dots,x_n)=g(x_1,\dots,x_n) \qquad (5)$$

şərtini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə *Koşi məsələsi* deyilir.

Tutaq ki, ümumi inteqrallar üçün $\psi_i(t_0,x_1,\dots,x_n)=x_i,\ i=1,2,\dots,n$ şərtləri ödənir. Onda $z=g(\psi_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,\psi_n(t,x_1,\dots,x_n))$ funksiyası Koşi məsələsinin həlli olur.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\dots,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_i}=b(x_1,\dots,x_n,z) \qquad (6)$$

tənliyinə *birtərtibli kvazixətti xüsusi törəməli biferensial tənlik* deyilir.

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,\dots,x_n,z)}=\dots=\frac{dx_n}{a_n(x_1,\dots,x_n,z)}=\frac{dz}{b(x_1,\dots,x_n,z)} \qquad (7)$$

simmetrik sisteminə (6) tənliyinin *xarakteristik sistemi* deyilir. Simmetrik sistemin $\psi_1(x_1,\dots,x_n,z),\dots,\psi_n(x_1,\dots,x_n,z)$ ümumi intaqralla-

n üçün

$$F\left(\psi_1(x_1,\ldots,x_n,\ z),\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_n,\ z)\right)=0 \qquad (8)$$

(6) xüsusi törəməli diferensial tənliyin *ümumi həlli* olur, burada $F(u_1,\ldots,u_n)$ ixtiyari diferensiallanan funksiyadır.

1. 1). $z=x^2+y^2$, 2). $z=\sin\left(x^2+y^2\right)$, 3). $z=xy$ funksiyalarının

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

tənliyinin həlli olub-olmamasını araşdırın.

HƏLLİ. 1). $z=x^2+y^2$ funksiyasının $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2y$ xüsusi törəmələrini tapıb tənlikdə yazaq: $y2x-x2y=0$. Deməli, $z=x^2+y^2$ funksiyası tənliyin həllidir.

2). $z=\sin\left(x^2+y^2\right)$ funksiyasının $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos\left(x^2+y^2\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2y\cos\left(x^2+y^2\right)$ törəmələrini tənlikdə yazaq:

$$y2x\cos\left(x^2+y^2\right)-x2y\cos\left(x^2+y^2\right)=0.$$

Deməli, $z=\sin\left(x^2+y^2\right)$ funksiyası həll olur.

3). $z=xy$ funksiyası üçün $\frac{\partial z}{\partial y}=x$, $\frac{\partial z}{\partial x}=y$, $y\cdot y-x\cdot x\neq 0$. Deməli, $z=xy$ funksiyası tənliyin həlli olmur.

2. $(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Verilən bircins tənliyin xarakteristik tənliyini yazıb, həll edək:

$$\frac{dx}{x+2y}=\frac{dy}{-y},\quad \frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}=-2,\quad x=\frac{C}{y}-y,\quad xy+y^2=C.$$

$\psi(x,y)=xy+y^2$ xarakteristik tənliyin inteqralı olduğundan verilən tənlik üçün $z=\Phi\left(xy+y^2\right)$ ümumi həll olur. Burada $\Phi(u)$-ixtiyari diferensiallanan funksiyadır.

3. $xy\frac{\partial z}{\partial x}+(x-2z)\frac{\partial z}{\partial y}=yz$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Tənlik kvazixətti olduğundan onun xarakteristik sistemi

$$\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{x-2z}=\frac{dz}{yz}$$

şəklində olur. Bu sistemin ümumi inteqralını tapaq. Birinci və üçüncü bərabərlikdən alınq:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z},\quad \ln|z|=\ln|x|+\ln C_1,\quad \frac{z}{x}=C_1.$$

İkinci və üçüncü bərabərliyin surət və məxrəclərini uyğun olaraq $-y$ və 2 vurub, aşağıdakı kimi çevirmə aparaq:

$$\frac{dx-ydy}{xy-xy+2yz}=\frac{2dz}{2yz},\quad dx-ydy-2dz=0,\quad d\left(x-\frac{y^2}{2}-2z\right)=0,$$

$$x-\frac{y^2}{2}-2z=C_2,\quad 2x-y^2-4z=C_2.$$

Beləliklə, $\psi_1(x,y,z)=\frac{z}{x}$, $\psi_2(x,y,z)=2x-y^2-4z$ funksiyaları xarakteristik sistem üçün ümumi inteqral olur. Odur ki, $F\left(\frac{z}{x},\ 2x-y^2-4z\right)=0$ verilən tənliyin ümumi həlli olur. Burada $F(u_1,u_2)$ ixtiyari diferensiallanan funksiyadır.

4. $\frac{\partial z}{\partial t}+\left(2e^t-x\right)\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $z(0,x)=x$. Koşi məsələsinin həllini ta-

pın.

HƏLLİ. Verilmiş bircins xüsusi törəməli tənliyin xarakteristik tənliyi yazıb, həll edək:

$$\frac{dx}{dt}=2e^t-x,\quad \frac{dx}{dt}+x=2e^t.$$

Alınan xətti tənliyin $x(0)=0$ şərtini ödəyən həllini tapaq: $x=e^t-e^{-t}$. Buradan alınan $\psi(t,x)=\left(x-e^t\right)e^t+1$ inteqral üçün $\psi(0,x)=x$ şərti ödənir. Odur ki, $z=\Phi\left(\left(x-e^t\right)e^t+1\right)$ funksiyası tənliyin ümumi həlli, $z=g(\psi(t,x))=\psi(t,x)=\left(x-e^t\right)e^t+1$ isə Koşi məsələsinin həlli olur.

5. $\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z(0,x,y)=xy$. Koşi məsələsinin həllini tapın.

HƏLLİ. Verilən bircins tənlik üçün xarakteristik sistemi

$$\begin{cases}\dot{x}=1,\\ \dot{y}=2\end{cases}$$

şəklində yazıb, inteqrallayaq: $x-t=C_1,\quad y-2t=C_2$.

Onda $\psi_1(t,x,y)=x-t,\quad \psi_2(t,x,y)=y-2t$ intaqralları üçün $\psi_1(0,x,y)=x,\quad \psi_2(0,x,y)=y$ şərtləri ödənilir. Odur ki, Koşi məsələsinin həlli $z=g(\psi_1(t,x,y),\quad \psi_2(t,x,y))=\psi_1(t,x,y)\psi_2(t,x,y)=(x-t)(y-2t)$ olur.

6. $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y,\quad z=y=-x$ məsələsinin həllini tapın.

HƏLLİ. Verilən kvazixətti tənliyin xarakteristik sistemini yazaq:

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}.$$

Birinci və ikinci bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq:

$$\frac{dx+dy}{y-x}=\frac{dz}{x-y},\quad dx+dy+dz=0,\quad x+y+z=C_1.$$

Bərabərliklərin surət və məxrəcini uyğun olaraq x, y və z vurub aşağıdakı kimi çevirmələr aparaq:

$$\frac{xdx+ydy}{xy-xz+yz-yx}=\frac{zdz}{zx-zy},\quad \frac{xdx+ydx}{yz-xz}=\frac{zdz}{zx-zy},$$

$$xdx+ydy+zdz=0,\quad d\left(x^2+y^2+z^2\right)=0,\quad x^2+y^2+z^2=C_2.$$

Xarakteristik sistemin $x+y+z=C_1,\quad x^2+y^2+z^2=C_2$ birinci inteqrallarında $z=y=-x$ yazaq: $x-x-x=C_1,\quad x^2+(-x)^2+(-x)^2=C_2$. $x=-C_1,\quad 3x^2=C_2$. Buradan x yox etməklə $3C_1^2=C_2$ alınır. Burada C_1 və C_2 əvəzinə onların ifadələrini yerinə yazsaq:

$$3(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2.$$

Bu bərabərlik verilən məsələnin həlli olur.

Müstəqil həll etmək üçün misallar

1. a). $z=x^2-y^2$, b). $z=\cos\left(x^2-y^2\right)+\left(x^2-y^2\right)^2$,

c). $z=(x-y)^2$ funksiyaların hansı $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ tənliyinin həlli olur? [a), b)].

Ümumi həllini tapın

1. $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$, $\left[z=\Phi\left(x^2-y^2\right)\right]$.

2. $t\frac{\partial z}{\partial t}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, $\left[z=\Phi\left(\frac{x}{t},\ \frac{y}{t}\right)\right]$.

3. $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$, $\qquad \left[F\left(x^2-y^2,\quad x-y+z\right)=0\right]$.

4. $\frac{\partial z}{\partial t}+2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=txy$, $\qquad \left[z=\frac{t^4}{6}-\frac{t^3}{3}(2y+x)+\frac{t^2xy}{2}+\right.$

$\left.+f(x-2t,\quad y-t)\right]$.

Verilmiş şərtləri ödəyən həlli tapın

1. $t\frac{\partial z}{\partial t}-x\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad z(1,x)=2x$, $\qquad [z=2tx]$.

2. $2\sqrt{t}\frac{\partial z}{\partial t}-x\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad z(1,x)=x^2$, $\qquad \left[z=x^2e^{2\sqrt{t}-2}\right]$.

3. $x^2\frac{\partial z}{\partial t}+tx\frac{\partial z}{\partial x}=t,\quad z(0,x)=x^2$, $\qquad \left[x^2-t^2-\ln\sqrt{x^2-t^2}=\right.$

$\left.=z-\ln|x|\right]$.

4. $z\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz,\quad x+y=2,\quad yz=1$, $\qquad \left[\left(\left(y^2z-2\right)^2-\right.\right.$

$\left.\left.-x^2+z\right)\ y^2z=1\right]$.

ƏDƏBİYYAT

1. Баврин И.И., "Высшая математика", М, "Просвещение", 1980г.
2. Berman G.N. "Riyazi analizdən məsələlər", Bakı, "Maarif", 1966-cı il.
3. Виленкин Н.Я., Бохан К.А. и др. "Задачник по курсу математического анализа", часть 2, М, "Просвещение", 1971г.
4. Гутер Р.С., Янпольский А.Р., "Дифференциальные уравнения", М, "Физматгиз", 1962г.
5. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. "Сборник задач по математическому анализу", М, "Просвещение", 1964г.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., "Высшая математика в упражнениях и задачах", часть 2, М, "Высшая школа", 1967г.
7. Киселев М.А., Краснов Г.И., Макаренко Г.И. "Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям", М, "Высшая школа", 1965г.
8. Матвеев Н.П., "Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям", Минск, "Вышэйшая школа", 1974г.
9. Минорский В.П., "Сборник задач по высщей математике" М, "Наука", 1967г.
10. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. "Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи" М., "Высшая школа" 1989г.
11. Филиппов А.Ф. "Сборник задач по дифференциальным уравнениям" М, "Наука", 1985г.
12. Əhmədov Q.T., Həsənov K.Q., Üaqubov M.H., "Adi diferensial tənliklər", Bakı, "Maarif", 1979-cu il.

MÜNDƏRİCAT

ГУЛИЕВ Х. М., ГАСАНОВ К.К.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Учебное пособие для ВУЗ-ов, 2001г.

Учебное пособие посвящено обыкновенным дифференциальным уравнениям и решениям задач и примеров и предназначено для студентов университетов, институтов, научных сотрудников, инженеров, а также для преподавателей, ведущих практические занятия.

В книге даны краткие теоретические сведения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, решены многочисленные примеры и задачи, уделено много мест составлению дифференциальных уравнений, касающихся различных областей науки и техники.

Наличие многочисленных задач и примеров для самостоятельных занятий и контрольных вопросов, позволяют пользоваться книгой на практических занятиях и коллоквиумах.

1. **ЯГУБОВ М.Г.** Профессор БГУ, доктор физико-математических наук
2. **СУЛЕЙМАНОВ Дж.Н.** Доцент АГПУ, кандидат физико-математических наук

GOULIYEV Kh.M., HASANOV K.G.

DIFFERENTIAL EQUATIONS, PROBLEMS AND EXAMPLES WITH ANSWERS

Training aid for Universities and Colleges, 2001

The book is dedicated to common differential equations and problems solutions and intended to university and college students, scientists engineers and university tutors.

There given a brief theoretical information on common differential equations, answers to many problems and examples and composed a large number of differential equations touching different areas of science and technics.

Critics:

1. **YAQUBOV M.H.** BDU-nun professoru, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru
2. **SÜLEYMANOV C.N.** ADPU-nun dosenti, fizika-riyaziyyat elmləri namizədi

XƏLİL QULİYEV
KAZIM HƏSƏNOV

DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR.

Məsələ və misallar həlləri ilə.

Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti

Nəşriyyatın direktoru	E.A.Əliyev
Mətbəənin direktoru	S.O.Mustafayev
Texniki redaktoru	F.Z.Kərimov

Yığılmağa verilib 05.01.2001. Çapa imzalanıb 25.04.2001.
Formatı 60x90 $^1/_{16}$. Ş.ç.v. 20. Ofset kağızı.
Sifariş № 68. Sayı 500 nüsxə. Qiyməti müqavilə ilə.

«Çaşıoğlu» mətbəəsi
Bakı, M.Müşfiq küç. 2a. Tel. 31-28-02