

# **MÖVZU 1. EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN PREDMETİ.ELEMENTAR HADİSƏLƏR FƏZASI.TƏSADÜFÜ HADİSƏLƏR VƏ ONLAR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏİLƏR**

## **PLAN.**

- 1.Ehtimal nəzəriyyəsinin predmeti.
- 2.Təsadüfə sınaqlar.
- 3.Elementar hadisələr fəzası.
- 4.Təsadüfə hadisələr üzərində əməllər.
- 4.1.Hadisələr arasında daxilolma və eynigüclülük münasibətləri.
- 4.2.Hadisələrin hasili.
- 4.3.Hadisələrin birləşməsi.
- 4.4.Hadisələrin fərqi və tamamlama əməli.
- 5.Hadisələrin tam sistemi.
- 6.Hadisələr ardıcılığının limiti.
- 7.Hadisələr cəbri və  $\sigma$  cəbri.

## **Ə D Ə B İ Y Y T S İ Y A H İ S İ .**

- 1.Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, "Maarif nəşriyyatı", 1973.
2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasimov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çarşıoğlu, 2006.

### **1.Ehtimal nəzəriyyəsinin predmeti.**

Bu gün ehtimal nəzəriyyəsi bütün təbiət elmlərinin təməl daşı, statistika isə insan fəaliyyətinin bütün sahələrinin ayrılmaz hissəsidir".Məşhur Amerika alimi Kasın bu kəlamı ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın müasir dövrdə oynadığı rolu çox gözəl ifadə edir.Buna görə də bu elmlərin əsasları ilə tanış olmağı riyazi mədəniyyətin zəruri komponenti hesab etmək olar.

Ehtimal nəzəriyyəsi – nəzəri və tətbiqi əhəmiyyət kəsb edən riyazi elmdir.İndi elm və texnikanın elə bir sahəsi yoxdur ki, orada ehtimal-statistika üsullarından bu və ya başqa dərəcədə istifadə edilməsin.Bu cəhət həm ehtimal nəzəriyyəsinin, həm də onun tətbiq edildiyi müxtəlif elm sahələrinin (məsələn, riyaziyyat, fizika, kimya, biologiya, iqtisadiyyat, ekonometrika, tibbi elm, hərbi iş, texnika və s.) inkişafına geniş imkan vermişdir.

Son bir neçə onilliklər ərzində riyaziyyatda yeni elmi istiqamətlər meydana gəlmişdir.Bunlardan etibarlılıq, kütləvi xidmət, stoxostik proqramlaşdırma, atəş,dəniz dalğaları, meteorologiya, müşahidənin xətalı, informasiya, radiotexnika, rabitə və s. nəzəriyyələri qeyd etmək olar. Ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiq sahələri daim genişlənir və bu proses bu gün də davam edir.Konkret həyati məsələləri həll etməyə imkan verən bu elmi istiqamətlər ehtimal nəzəriyyəsinin inkişafına əsaslanır.İndi ehtimal nəzəriyyəsinə nəinki riyaziyyatçı, habelə

mühəndis, iqtisadçı, geoloq, həkim, fizik, kimyaçı, bioloq və s. kimi müxtəlif peşə sahibləri müraciət edir.

Təbiət və cəmiyyət qanunları səbəb əlaqələrinin təzahürü formalarına görə determinik və statistik qanunlara bölünür

Məlumdur ki, riyaziyyat, başqa elm sahələrində olduğu kimi, gerçək aləmdə baş verən hadisə və proseslərin qanunlarını öyrənir. Buna klassik nümunə kimi Nyuton mexanikasını göstərmək olar. Göy cisimlərinin çoxəsrlik müşahidəsi nəticəsində onların hərəkət qanunları riyazi düsturlar şəklində verilmişdir. Mexikanın qanunlarına əsasən Günəş sisteminin planetlərinin mövcud vəziyyətinə görə onların gələcək zamanın istənilən anına vəziyyəti praktiki olaraq birqiymətli təyin edilə bilər. Eyni zamanda günəş və ay tutulmalarının tarixini əvvəlcədən söyləmək olar. Bütün bunlar determinik qanunlardır.

Bununla yanaşı makroaləmin əksər hadisələri haqqında bizim günbəgün dərinləşən və dəqiqləşən kifayət qədər biliklərimiz olmasına baxmayaraq onların keçmişi və gələcəyi haqqında dəqiq fikir söyləmək mümkün deyildir. Məsələn, iqlimin uzunmüddətli, havanın isə qısa müddətli dəyişməsi proqnozlaşdırmanın obyektini sayıla bilməz. Mikroaləmin əksər qanun və qanunauyğunluqları determinik çərçivəyə daxil edilə bilməz. Məsələn, nəzəri fizikaya görə konkret anda elektronun vəziyyəti haqqında heç nə demək mümkün olmadığı halda, onun fəzada paylanma vəziyyəti haqqında danışmaq olar. Bu cür qanunlara statistik qanunlar deyilir. Statistik qanunlara görə sistemin gələcək vəziyyəti birqiymətli olaraq deyil, müəyyən ehtimalla müəyyən edilir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin mühüm tətbiq sahələrindən biri də iqtisadiyyatdır. Bu gün iqtisadi proseslərin tədqiqi və proqnozlaşdırılmasını ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan ekonometrik proqnozlaşdırma, reqressiya analizi, trend və hamarlaşdırma modelləri və bir sıra digər üsullardan istifadə etmədən təsəvvür etmək mümkün deyildir.

İqtisadiyyatın sığorta ehtiyatı, ehtiyat gücləri, Dövlət ehtiyatı və bu kimi anlayışları statistik qanunauyğunluqların mövcudluğunu təsdiq edir. Bu isə ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqini zəruri edir. Eyni zamanda qeyd etmək lazımdır ki, təsadüfsüz inkişaf mümkün deyildir. Həyatın yaranmasını, bioloji növlərin təkamülünü, bəşəriyyət tarixini, insanların yaradıcılıq fəaliyyətini, sosial-iqtisadi sistemlərin inkişafını təsadüfsüz təsəvvür etmək olmaz. Beləliklə, təsadüfün təzahürünə hadisənin artıq formalaşmış istiqamətdən müsbət (yeni elmi kəşflərin və texnologiyaların tətbiqi, istesalın təşkili və idarə edilməsinin yeni formaları və s.) və mənfi (kərtəbii fəlakətlər, avadanlığın sıradan çıxması, işçilərin xəstələməsi, onların fiziki və psixi vəziyyəti və s.) kənarlaşma kimi baxmaq lazımdır. Bütün bunlar bilavasitə hadisənin axarının əhəmiyyətli surətdə dəyişməsinə gətirib çıxarır. Bəzət iqtisadiyyatı şəraitində xalq təsərrüfatı sahələrinin əlaqələri daha da mürəkkəbləşir. Beləliklə, dinamik sistemin inkişaf qanunauyğunluqlarına görə sosial-iqtisadi hadisələri təsvir edən qanunların statistik xarakteri güclənməlidir.

Bütün bunlar iqtisadi hadisə və proseslərin statistik analizinin bir vasitəsi kimi ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın metodlarının mənimsənilməsinə zəruru edir.

İnsan fəaliyyətinin bütün sahələrində nəticəsi təsadüfdən asılı olan, yəni nəticəsini əvvəlcədən söyləmək mümkün olmayan hadisələrə tez-tez rast gəlinir. Məsələn, sığorta edilmiş əmlakın təbii fəlakət nəticəsində sıradan çıxması təsadüfün nəticəsidir. Belə olan halda təsadüf hadisələr haqqında əvvəlcədən nə isə söyləmək olarmı və yaxud sığorta şirkətləri öz işlərində nəyi əsas tuturlar? Məlum olur ki, sığorta edilmiş ayrıca bir obyektin gələcək taleyi haqqında heç nə söyləmək mümkün olmasa da, onların əksəriyyətinin vəziyyəti haqqında yəqinliklə çox şey demək olar.

Real gerçəklikdə baş verən hər bir hadisəni öyrənmək üçün insanlar müəyyən müşahidələr, təcrübələr, ölçmə işləri – sınaqlar aparırlar. Mümkün qədər çox aparıla bilən, praktiki olaraq qeyri- məhdud sayda təkrar edilə bilən sınaqların nəticəsinə əsasən həmin hadisənin xassələri və qanuna uyğunluğu aşkar edilir. İnsanlar bu qanunauyğunluğu öyrənməklə müəyyən dərəcədə təsadüf hadisələri idarə etməyi, onların təsirinin nəticələrini əvvəlcədən söyləməyə və aradan qaldırmağa, hətta onlardan öz praktiki fəaliyyət sahələrində məsədyönlü şəkildə istifadə etmək imkanı əldə edirlər.

Tutaq ki, eyni şərtlər kompleksi daxilində aparılan sınaq nəticəsində hadisə baş verə və verməyə bilər. Onda təsadüf hadisəni, hadisənin başvermə sayının aparılan sınaqların sayına nisbəti olan hadisənin tezliyi ilə xarakterizə etmək olar. Tezliyə misal olaraq müəyyən yaşayış məntəqəsində il ərzində doğulan oğlanların hissəsini, məhsul istehsalında keyfiyyətsiz məhsulun xüsusi çəkisini və s. göstərmək olar.

Coxlu sayda sınaqlardan ibarət müxtəlif seriyalarda hadisənin tezliyi müəyyən sabit ədəd ətrafında ehtizas etdikdə deyirlər ki, bu hadisənin tezliyi dayanıqlıq xassəsinə malikdir. Məsələn, oğlan doğulma hadisəsinin tezliyi bu xassəyə malikdir.

Tezlikləri dayanıqlıq xassəsinə malik olan təsadüf hadisələrə müxtəlif bilik sahələrində o cümlədən, fizikada, biologiyada, kimyada, maşınqayırma sənayesində, atəş nəzəriyyəsində, iqtisadiyyatda və s. tez-tez təsadüf edilir.

Hadisənin təsadüf lüyü onun səbəbsiz olması anlamına gətirmir. Təbiət hadisələri bir-biri ilə qarşılıqlı əlaqədədirlər və bir-birilərini şərtləndirirlər. Onların birinin dəyişilməsi digərinin dəyişilməsinə səbəb olur. Gerçək aləmdə ayrıca götürülmüş heç bir hadisəni anlamaq mümkün deyildir. Əksinə istənilən hadisə onu əhatə edən hadisələrlə qarşılıqlı əlaqədə götürüldükdə onu anlamaq və əsaslandırmaq olur. Məsələn, atəş zamanı mərminin hədəfi vurmaı təsadüf hadisədir və onun səbəbini əsaslandırmaq olar. Belə ki, mərminin üçüş traektoriyasına çoxlu sayda faktorlar təsir edir. Onların hər biri müxtəlif anlarda kəmiyyətə müxtəlif təsirlərə malikdirlər. Ona görə də müəyyən zaman kəsiyində onların hər birinin mərminin traektoriyasına ayrılıqda və birgə təsirini qiymətləndirmək mümkün olmur və nəticədə mərminin hədəfi vurmaı təsadüfün nəticəsi olur. Deməli, mərminin hədəfi vurmaına bir hadisə kimi baxdıqda, aparılan təcrübə zamanı o, baş verə də bilər, verməyə də bilər. Belə hadisənin konkret bir təcrübə zamanı baş verməsi haqqında qabaqcadan heç nə demək mümkün olmasa da, çoxlu sayda ardıcıl aparılan təcrübələr nəticəsində onun baş verib-verməməsi haqqında bəzən müəyyən qanunauyğunluq almaq olar.

Beləliklə, ehtimal nəzəriyyəsi tezlikləri dayanıqlı olan təsadüfi hadisələri öyrənir və bu hadisələrin kütləvi təkrarında onların qanunauyğunluqlarını aşkar edir.

Qanunauyğun hadisə dedikdə münasib şəraitdə hökmən baş verən hadisə başa düşülür. Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, elə hadisələr də vardır ki, onların baş verib-verməməsi təsadüfi xarakter daşıyır. Məsələn, bir atəş zamanı atılan güllə hədəfə dəyədə bilər, dəyməyədə bilər; sığorta edilmiş əmlak təbii fəlakət nəticəsində sıradan çıxada bilər çıxmayada bilər. Belə hadisələrin qanunauyğunluğunu qabaqcadan söyləməkdə seçilən riyazi model böyük rol oynayır, yəni ehtimal nəzəriyyəsi əslində təsadüfi proseslərin riyazi modelini öyrənən riyazi elmdir. Başqa sözlə, ehtimal nəzəriyyəsi riyazi modellərdə təsadüfi hadisələrin ehtimalları arasında elə əlaqə təyin edir ki, bu əlaqələr mürəkkəb hadisələrin ehtimallarını daha sadə hadisələrin ehtimalları vasitəsilə hesablamaq imkanı verir.

Eyni şəraitdə hər hansı hadisəni öyrənmək üçün ardıcıl olaraq aparılan müşahidə və təcrübələrin nəticəsi çox zaman eyni olmur. Dəyişməyən şəraitdə eyni bir cihazla aparılan ölçmələrin nəticəsi, ümumiyyətlə müxtəlif olur. Buna görə də aparılan hər bir təcrübənin və ya müşahidənin nəticəsini əvvəlcədən söyləmək çox zaman mümkün olmur.

Təsadüfi hadisənin qanunauyğunluğunu ancaq onu eyni bir şəraitdə təkrarən çoxlu sayda müşahidə etdikdə görmək olar. Buradan belə bir nəticəyə gəlirik ki, ancaq praktiki olaraq qeyri-məhdud sayda müşahidə edilə bilən hadisələri öyrənmək olar. Belə hadisələrə kütləvi hadisələr deyilir. Buna görə də ehtimal nəzəriyyəsində əsasən kütləvi hadisələr, yəni praktiki olaraq eyni şəraitdə istənilən sayda təkrar oluna bilən hadisələr öyrənilir.

Burada qeyd etmək lazımdır ki, təsadüfi hadisələri öyrənmək üçün heç də onların faktiki olaraq çoxlu sayda müşahidə etməyə lüzum yoxdur. Ən sadə hadisələrin qanunauyğunluqlarını öyrənərib və bunun əsasında müvafiq nəzəriyyəni quraraq daha mürəkkəb hadisələrin, hətta praktiki olaraq bilavasitə müşahidə edilə bilməyən, lakin prinsip etibarı ilə xəyalən çoxlu sayda müşahidə edilə bilən hadisələri nəzəri olaraq öyrənmək olar. Məsələn bir uçuş üçün nəzərdə tutulmuş kosmik gəminin layihələndirilməsi prosesində bütün vasitələrin saz işləməsinə və uçuşun müvəffəqıyyətlə həyata keçməsinə əmin olmaq üçün uçuşu təmin edən vasitələrin etibarlılığını tədqiq etmək olar. Elmin gücü ondadır ki, bilavasitə müşahidələrdən alınan sadə müddəalara əsaslanaraq bilavasitə müşahidə aparmadan nəzəri üsullarla yeni faktları aşkara çıxarmaq və onların axarlı əvvəlcədən söyləmək olar.

Hər bir hadisə kimi təsadüfi hadisələr də müəyyən səbəblər üzündən meydana çıxır. Hadisələrin ümumi əlaqələri qanununa görə ətraf aləmdə başverən bütün hadisələr qarşılıqlı əlaqədədirlər və biri digərinə təsir edir. Ona görə də müşahidə edilən hər bir hadisə qeyri -məhdud sayda digər hadisələrlə səbəb əlaqəsindədir və onların axarı qeyri - məhdud sayda amillərdən asılıdır. Qeyri-məhdud sayda olan bu əlaqələrinin hamısını öyrənmək və onların hər birinin təsirini qiymətləndirmək ümumiyyətlə mümkün deyildir. Ona görə də bu və ya digər hadisə öyrənildikdə hadisənin axarını müəyyənədən əsas amillərlərlə

kifayətlənirlər və kifayət qədər çoxlu sayda ikinci dərəcəli amilləri nəzərə alırlar. Bütün bunlar isə hadisənin mahiyyətini daha dərinləndirən anlamağa və onun qanunauyğunluğunu aşkar etməyə imkan verir. Başqa sözlə öyrənilən hadisə müvafiq sadə model ilə əvəz edilir. Bunun nəticəsində elmin istənilən qanunu öyrənilən hadisənin əsas mahiyyətini əks etdirir, lakin, o, hadisənin özündən daha bəsitdir. Heç bir qanun hadisəni hərtərəfli, onun bütün müxtəlifliyi və tamlığı ilə xarakterizə edə bilməz. Qeyri – məhdud sayda nəzərə alınmayan amillərin birgə təsiri hesabına real hadisənin qanunauyğunluqdan müşühidə edilən kənarlaşmaları təsadüfi hadisələrdir.

Hər hansı bir hadisənin qanunauyğunluğunu təcrübə olaraq müəyyən etmək üçün onu eyni bir şəraitdə təkrarən çox sayda müşahidə etmək lazımdır. Bu zaman eyni bir şərait dedikdə nəzarət edilən amillərin bütün kəmiyyət xarakteristikalarının eyni bir qiymət alması başa düşülür. Bununla belə nəzarət edilən bütün amillər müxtəlif olacaqdır. Nəticədə eyni bir hadisənin müxtəlif müşahidələrində nəzarət edilən amillərin təsiri praktiki olaraq eyni olacaqdır. Hadisənin qanunauyğunluğu elə burada aydınlaşır. Nəzarət edilə bilməyən amillərin təsiri hesabına qanunauyğunluqdan təsadüfi kənarlaşmalar isə müxtəlif müşühidələr də müxtəlif olacaqdır. Təsadüfi kənarlaşmaların konkret müşahidədə hansı qiymət alacağını prinsip etibarı ilə əvvəlcədən söyləmək mümkün deyildir.

Ehtimal nəzəriyyəsində riyaziyyat elminin bir çox sahələrində istifadə olunan üsullardan və alınan nəticələrdən (kombinator analizdə, riyazi analizdə, cəbrdə, məntiqdə və s.) geniş istifadə olunur. Ancaq ehtimal nəzəriyyəsinin sırf özünə məxsus öyrənmə üsulları vardır. Çünki onun öyrəndiyi məsələlərin əksəriyyətində dəqiq riyazi quruluş olmur və belə məsələlərin riyazi modelini qurmaqda nəzəri ehtimal intuisiyadan istifadə oluna bilər.

Ehtimal nəzəriyyəsinin analitik üsullarının işlənilib hazırlanmasında və ümumiləşdirilməsində Muavrın (1667-1754), Laplasın (1749-1827), Qausun (1821-1894), Puassonun (1781-1840), Çebışevin (1821-1894), Markovun (1856-1922), Lyapunovun (1857-1918) böyük xidmətləri olmuşdur.

Müasir ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlar sistemi əsasında qurmağa cəhd edən S.N. Bernşteyn (1880-1948), lakin tam quran A.N. Kolmoqorov (1903-1987) olmuşdur. Bu nəzəriyyəyə inkişaf tempi verən bir sıra alimlərin, o cümlədən, Xinqinin (1894-1959), Slutskinin (1880-1948), Levinin (1886-1971) v. s. alimlərin adlarını qeyd etmək olar.

## **2. TƏSADÜFÜ SINAQLAR**

Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biri təsadüfi (stoxastik) sınaq anlayışıdır. Nəticəsini əvvəlcədən söyləmək mümkün olmayan sınaqlara təsadüfi sınaqlar deyilir.

Praktiki və elmi fəaliyyətin müxtəlif sahələrində çoxlu sayda təkrar edilə bilən sınaqlara və müşahidələrə rast gəlinir. Bu cür hallarda sınağın nəticələrinin müəyyən xarakteristikaları hər hansı bir əlamət üzrə müşahidə edilir və yaxud ölçülür.

Əksər hallarda bu xarakteristikalar müəyyən kəmiyyətlə ifadə edilirlər. Müəyyən hallarda isə müşahidənin nəticəsi keyfiyyət xarakteristikasına malik olur.

Aydındır ki, əgər sınaq zamanı hər hansı bir obyektin rəngi müşahidə edilsə və yaxud sınaq ilə əlaqədar hadisənin baş verməsi və ya verməməsi, məhsulun keyfiyyəti müşahidə edilsə onda sınağın nəticəsi keyfiyyət xarakteristikasına malikdir. Axıncı halda şərti işarələr sistemindən istifadə etməklə sınağın nəticələrini, yəni xarakteristikaları həmişə kəmiyyətlə ifadə etmək olar.

1. Əgər sınaq zamanı zər atılırsa onda sınağın nəticəsi 1,2,...,6 rəqəmlərindən biri ilə ifadə edilir.

2. Əgər müəyyən heyvanlar qrupunun hər bir nümayəndəsinin çəkisi və uzunluğu ölçülürsə, onda müşahidənin nəticəsi 2 ədədlə ifadə edilir.

3. Əgər müəyyən zaman kəsiyində k sayda əmtənin qiyməti müşahidə edilsə, onda hər bir müşahidənin nəticəsi k sayda ədədlə ifadə edilir.

4. Əgər hər hansı rayonda doğulmuş uşağın cinsi müşahidə edilsə, onda hər bir müşahidənin nəticəsi bilavasitə kəmiyyətlə (müəyyən ədədlə) ifadə edilmir. Ancaq şərti olaraq oğlan doğulmasını “1”-lə, qız doğulması “0” ilə işarə etsək onda hər bir müşahidənin nəticəsi ədədlə ifadə ediləcəkdir.

5. Фабрикдя мямулат щяр бириндє н яяд мямулат олан партия иля бурахылыр. Мямулатын кейфийятинин йохланылмасы онун сырадан чыхмасы иля нятисялянир. Она эюря дя кейфийятя нязарят мягсядиля н мямулатдан тясадцфи сечмя йолу иля м сайдасы эютцрцлцр вя онларын кейфийяти йохланылыр. Сынаын нятисяси сечилмиш мямулатдан йарарсызларын сайы оласагдыр. Йарарсыз мямулатларын сайы бцтцн мямулатлар кейфийятли вя йахуд йарарсыз олдугда тйин едиля биляр. Тясвир едилян сынаг тясадцфи сынагдыр. Гейд едяк ки, мямулатын кейфийятинин йохланылмасынын бу цсулу истецсал просесиндя истифадя едилир вя сечмя цсулу адланыр.

6. Алынмыш лотерейа билетиня ойунда нязрдя тутулмуш удушлардан истянилян бири дцщя биляр. Ансаг ойунун сонуна гядяр билетин удушлу олуб – олмамасыны мцяййян етмяк олмаз. Беяликля, лотерейа ойуну тясадцфи сынаба мисал ола биляр.

7. Инфексион хястялийин епидемийасына нятисяси бу вя йа диэяр епидемийанын ахыны олан тясадцфи сынаг кими бахыла биляр.

Bir çox hallarda müşahidə edilən hadisə o dərəcədə yaxşı öyrənilmiş olur ki, hər bir müşahidənin nəticəsini əvvəlcədən qiymətləndirmək olur. Məsələn, əgər sınaq zamanı hər hansı rəsədxanada il ərzində günəşin tutulma sayı müşahidə edilsə, onda astroloji hesablamaların köməyi ilə yaxın illər üçün il ərzində günəş tutulmalarının sayını əvvəlcədən söyləmək olar.

Oxşar mənzərəni hadisəni idarə edən qanunlar məlum olduqda və təcrübi hesablamalarda onların istifadəsi kifayət qədər sadə olduqda da söyləmək olar.

Ancaq əksər hallarda ayrı-ayrı müşahidələrin nəticələrini əvvəlcədən söyləmək üçün bizim biliklərimiz kifayət etmir. Yuxarıda baxılan 1-7 məhz bu hallara aiddir. Bu cür sınaqlara təsadüfə sınaqlar deyilir.

Sınaq anlayışının çox geniş mənası vardır. Metal pulun döşəmə üzərinə atılması, müəyyən hədəfə atəş açılması, hər hansı fiziki kəmiyyətin ölçülməsi, nərd oyunu zərinin taxta üzərinə atılması və s. sınağa misaldır.

Hər bir sınaq müəyyən şərtlər və ya şərtlər kompleksi daxilində yerinə yetirilir. Sınağın aparılma şərtləri əvvəcdən məlum olur və yalnız bu şərtlər ödənildikdə sınaq aparılır. Təkrarən aparılan sınaq zamanı bu şərtlər dəyişilməz qalır.

Hər bir sınaq öz aparılma şərtləri və nəticələri ilə xarakterizə olunur. Sınağın aparılma şərtləri dəyişdikdə həmin sınaq dəyişir, başqa sınaq alınır. Tutaq ki,  $U$  təkrarən aparıla bilən (əlbəttə, eyni şərtlər daxilində) sınaqdır.  $U$  sınağının hər bir icrası zamanı alınan nəticəyə hadisə deyilir. Məsələn,  $U$  sınağı tam düzgün formada olan bir zəri çox hamar səthi olan taxta üzərinə atmaqdan ibarət olduqda hadisə olaraq

- a) "zərin 6 xalı olan üzünün yuxarı düşməsini", b) "zərin cüt sayda xalı olan üzünün yuxarı düşməsini", c) "zərin tək xalı olan üzünün yuxarı düşməsini" və s. götürmək olar.
- b) Atıcı 4 hissəyə bölünmüş hədəfə atəş açır. Bu zaman atəş sınaqdır, hədəfin müəyyən hissəsinə düşmək isə hadisədir.
- c) Qutuda rəngli şarlar vardır. Qutudan təsadüfə qaydada hər hansı şar çıxarılır. Şarın çıxarılması sınaq, şarın müəyyən rəngə malik olması isə hadisədir.

Aparılan sınaq zamanı nəzərdə tutulan hadisə baş verə də bilər, verməyə də bilər.

Sınağın hər bir icrasında hökmən baş verən hadisəyə yəqin hadisə deyilir. Sınağın heç bir icrasında baş verməyən (və ya hökmən baş verə bilməyən) hadisəyə mümkün olmayan hadisə deyilir.

Nəhayət, sınağın icrası zamanı nəzərdə tutulan hadisə baş verə də bilirsə, verməyə də bilirsə, yəni sınaq zamanı həmin hadisənin baş verib-verməməsi haqqında qabaqcadan heç nə demək mümkün deyildirsə, onda həmin hadisəyə təsadüfə hadisə deyilir.

Əlbəttə, hər bir hadisənin müəyyən bir sınağa nəzərən (yəni aparılan müəyyən bir sınaq nəticəsində) yəqin, mümkün olmayan, təsadüfə olmasından danışmaq olar. Bir sınağa nəzərən yəqin, mümkün olmayan və təsadüfə olan hadisə başqa bir sınağa nəzərən başqa xarakterli ola bilər.

**Misal 1.** Bir oyun zərini atmaqdan ibarət olan sınaq nəticəsində zərin yuxarı düşən üzərində 1,2,3,4,5,6 xallarının hər hansı birisinin olması - yəqin hadisə, yuxarı düşən üzərində xallar sayının 8 olması - mümkün olmayan hadisə, yuxarı düşən üzərində cüt sayda xalların olması isə təsadüfə hadisədir.

### **3.ELEMENTAR HADİSƏLƏR FƏZASI.**

Tutaq ki, təkrarən aparıla bilən hər hansı  $U$  sınağının icrasında cüt-cüt uyuşmayan  $\omega_i (i=1,2,...)$  nəticələrindən ancaq biri baş verir. Bu halda,  $\omega_i$  nəticələrinin hər biri  $U$  sınağının elementar hadisəsi (və ya elementar nəticəsi) adlanır. Bütün belə elementar hadisələr çoxluğuna  $U$  sınağının elementar hadisələr fəzası deyilir və  $\Omega$  ilə işarə olunur:  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$

Həyatda istənilən sayda təkrarən aparıla bilən müxtəlif sınaqlar və onların elementar nəticələri vardır. Bunların hər birini ayrılıqda öyrənməyin heç bir elmi əhəmiyyəti yoxdur. Buna görə də ehtimal nəzəriyyəsində konkret elementar hadisələr və elementar hadisələr fəzası deyil, ümumi ( abstrakt ) elementar hadisələr fəzası öyrənilir.

Ümumiyyətlə, ixtiyari təbiətli  $\omega$  elementlərinin  $\Omega$  çoxluğu elementar hadisələr fəzası, onu təşkil edən  $\omega$  elementləri isə elementar hadisələr adlanır. Hər bir real hadisə və prosesi öyrənmək üçün uyğun elementar hadisələr fəzası təyin edilir. Baxılan sınağın cüt-cüt uyuşmayan uyğun nəticələri isə elementar hadisələr hesab olunur.

Hadisə anlayışı ümumi halda da uyğun şəkildə təyin edilir. Elementar hadisələr fəzasının hər bir alt çoxluğuna təsadüfə hadisə və ya sadəcə olaraq hadisə deyilir. Aparılan sınaqda müəyyən hadisənin baş verməsi, onu təşkil edən elementar hadisələrin heç olmasa birinin baş verməsi deməkdir. Beləliklə, baxılan sınaq nəticəsində baş verə bilən bütün hadisələr çoxluğu  $\Omega$  fəzasının bütün altçoxluqları çoxluğundan ibarətdir.  $\Omega$  çoxluğundan ibarət olan hadisə, sınaq nəticəsində baş verən hər bir elementar hadisənin baş verməsi nəticəsində baş verir. Deməli,  $\Omega$  fəzası yəqin hadisədir. Boş çoxluq isə sınağın icrası zamanı heç bir elementar hadisənin baş verməsi nəticəsində baş verə bilməz, yəni  $\emptyset$  boş çoxluğu mümkün olmayan hadisədir.

Qeyd edək ki, hər bir elementar hadisəyə  $\Omega$  fəzasının bir elementli altçoxluğu kimi baxmaq olar. Buna görə də  $\Omega$  fəzasını təşkil edən elementar hadisələrin hər biri təsadüfə hadisədir.

$n$  sayda elementdən ibarət olan sonlu çoxluğun  $2^n$  asyda alt çoxluğu vardır. Doğrudan da, bu çoxluğun  $k$  elementli müxtəlif altçoxluqlarının sayı  $C_n^k$  olduğundan  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$  olar.

Buradan aydın olur ki, elementar hadisələr fəzası  $2^n$  sayda hadisə ilə bağlıdır. Bu hadisələrdən biri yəqin hadisə ( fəzanın özü ) , o biri isə mümkün olmayan hadisədir (boş çoxluq). Hər bir prosesə uyğun elementar hadisələr fəzası vardır.

1. Metal pulun bir dəfə atılışından ibarət olan sınaq aparılır. Bu sınağın elementar hadisələr fəzası  $\Omega = (Q, \bar{Q})$  çoxluğu olar. Burada  $Q$  metal pulun qərb üzünün  $\bar{Q}$  isə şəbəkə üzünün düşməsidir.

2. Metal pul iki dəfə atılır. Bu sınağın elementar hadisələr fəzası  $\Omega = (QQ, Q\bar{Q}, \bar{Q}Q, \bar{Q}\bar{Q})$  çoxluğudur.

3. Oyun zəri bir dəfə atılır və zərdə düşən xalın sayı müşahidə edilir. Bu sınağın elementar hadisələr fəzası  $\Omega = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$  çoxluğu olar.

4. Oyun zəri iki dəfə atıldıqda elementar hadisələr fəzası  $\Omega = ((i, k): i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$  çoxluğu olar.

5. Metal pul qərb üzünü düşənə kimi atılır. Bu sınağın elementar hadisələr fəzası  $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots, \omega_\infty)$  çoxluğu olar. Burada  $\omega_n = \bar{Q} \dots \bar{Q}Q$  qərb üzünün ilk dəfə  $n$ -ci atılışda düşdüyünü göstərir.

**Məsələ 1.** Oyun zəri bir dəfə atılır və zərin yuxarı düşən üzündəki xalalrın  $X$  sayı müşahidə edilir. Sınağın nəticələr çoxluğunu və aşağıdakı hadisələrə uyğun altçoxluqları təsvir edin.

$$A = \{X - \text{üçünmislidir}\}; B = \{X - \text{cütededdir}\}; C = \{X > 3\}; D = \{X < 7\}; \\ E = \{X - \text{kesrededdir}\} F = \{0.5 < X < 1.5\}.$$

Həlli. Sınağın icrası zamanı müşahidə edilən hadisələr üçün aşağıdakı işarələri daxil edək:  $\omega_k = \{X = k\}, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ;  $\omega^{(1)} = \{1, 3, 5\}$ ;  $\omega^{(2)} = \{2, 4, 6\}$

Sınağın nəticələri əsasında elementar hadisələrin iki çoxluğunu qurmaq olar:  $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \Omega_2 = \{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}\}$ .  $\Omega_1, \Omega_2$  -yə nisbətən baxılan sınağın formal modelinə daha uyğun gəlir. Belə ki,  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, A, B, D, E$  hadisələri  $\Omega_2$  çoxluğunun alt çoxluqları deyillər. Digər tərəfdən bu hadisələrin hər biri  $\Omega_1$  çoxluğunun alt çoxluğu kimi təsvir edilə bilər. Doğrudan da,  $A = \{\omega_3, \omega_6\}$ ;  $B = \omega^{(1)} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ ;  $C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ ;  $D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \Omega_1$ ;  $E = \emptyset$ ;  $F = \{\omega_1\}$

Bu bərabərliklərdən aydın olur ki,  $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$  sınağın nəticələri olan elementlərin ayrılışıdır. Deməli,  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$  nəticələri  $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$  nəticələrinə nisbətən daha “bəsitdir.”

Hadisələri cüt-cüt müqayisə edərək, onların ümumi elementlərini müəyyən etməklə uyuşan və uyuşmayan hadisələr cütlərini təyin edə bilərik:

$$AB = \{\omega_3\}; AC = \{\omega_6\}; AD = \{\omega_3, \omega_6\}; AE = \emptyset; AF = \emptyset; BC = \{\omega_5\}; BD = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}; \\ BE = \emptyset; BF = \{\omega_1\}; CE = \emptyset; DF = \{\omega_1\}; CD = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}; EF = \emptyset$$

Deməli,  $A \vee B, A \vee C, A \vee D, B \vee C, B \vee D, B \vee F, C \vee D, D \vee F$  hadisələri uyuşan,  $A \vee E, A \vee F, B \vee E, C \vee E, E \vee F$  hadisələri isə uyuşmayan hadisələrdir.

#### **4. TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏLLƏR**

##### **4.1. HADİSƏLƏR ARASINDA DAXİLƏLMƏ VƏ EYNİGÜCLÜLÜK MÜNASİBƏTLƏRİ.**

Tutaq ki,  $\Omega$  - müəyyən  $U$  sınağının elementar hadisələr fəzasıdır. Bu sınaq ilə əlaqədar bütün hadisələr çoxluğunu, yəni  $\Omega$  - nın altçoxluqları sinfini  $S(\Omega)$  ilə işarə edək.

Fərz edək ki,  $A$  hadisəsi baş verdikdə  $B$  hadisəsi hökmən baş verir. Bu halda  $A$  hadisəsi  $B$  hadisəsini doğurur deyirlər və bunu  $A \subset B$  kimi yazırlar.  $\subset$  - daxilolma münasibəti adlanır. Tərifə görə

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega: \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$$

Məsələn, bir dəfə atılan zərdə 2, 4, 6 xallarına uyğun üzldən hər hansı birinin düşməsi hadisəsi düşən üzdə cüt rəqəmin olması hadisəsini doğurur. Bir elementli  $A$  və  $B$  hadisəsi üçün  $A \subset B$  təklifi  $\omega \in B$  təklifi ilə eynigüclüdür. Daxilolma münasibəti aşağıdakı xassələrə malikdir.

$$A \in A, \emptyset \in A, A \in \Omega, A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

$A \subset B, B \subset A$  olduqda  $A$  və  $B$  hadisələri eynigüclü hadisələr adlanır və bu fakt  $A = B$  kimi yazılır. Tərifə görə

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Eynigüclülük münasibəti ekvivalentlik münasibətidir, yəni o, simmetriklik, refleksivlik və tranzitivlik xassələrinə malikdir:

$$A = A, A = B \Rightarrow B = A, A = B, B = C \Rightarrow A = C$$

Məhz bu mənada eynigüclü hadisələri birləşdirərək bir hadisə kimi baxmaq olar.

#### 4.2. HADİSƏLƏRİN HASİLİ.

$A$  və  $B$  hadisələrinin hasili elə hadisəyə deyilir ki, o ancaq və ancaq  $A$  və  $B$  birlikdə baş verdikdə yerinə yetir.  $A$  və  $B$  hadisələrinin hasili  $A \cap B$  və ya  $AB$  ilə işarə edilir. Buradan aydın olur ki,  $AB$  hasili həm  $A$  hadisəsinə həm də  $B$  hadisəsinə daxil olan elementar hadisələrdən ibarətdir, yəni

$$AB = (\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \in B)$$

$n$  sayda  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hadisələrinin hasili

$$\prod_1^n A_i = (\omega \in \Omega : \forall n : \omega \in A_n)$$

bərabərliyi ilə verilən hadisəyə deyilir.

Vurma əməli aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$1. AB = BA$$

$$2. (AB)C = A(BC) = ABC$$

$$3. AA = A$$

$$4. A\Omega = A, A\emptyset = \emptyset$$

$$5. \prod_1^n A_i \subset A_k$$

#### 4.3. HADİSƏLƏRİN BİRLƏŞMƏSİ.

$A$  və  $B$  hadisələrinin birləşməsi elə hadisəyə deyilir ki, o ancaq və ancaq  $A$  və  $B$ -dən heç olmasa biri yerinə yetdikdə baş verir.  $A$  və  $B$  hadisələrinin birləşməsi  $A \cup B$  ilə işarə edilir. Deməli  $A \cup B$  birləşməsi  $A$  və  $B$  hadisələrindən heç olmasa birinə daxil olan elementar hadisələrdən ibarətdir. Yəni,

$$A \cup B = (\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B)$$

Anoloji olaraq

$$\bigcup_1^n A_i = (\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \vee \omega \in A_2 \vee \dots \vee \omega \in A_n)$$

bərabərliyi ilə verilən hadisəyə  $A_1, \dots, A_n$  hadisələrinin birləşməsi deyilir. Birləşmə əməli aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$1. A \cup B = B \cup A$$

$$2. (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$3. A \cup A = A$$

$$4. A \cup \emptyset = A, A \cup \Omega = \Omega$$

**Məsələ 2.** Hadisələrin birləşməsi və hasili əməllərinin aşağıdakı xassələrini ödədiyini isbat edin.

- a)  $A \cup B = B \cup A, AB = BA$  (kommutativlik)  
 b)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), A(BC) = A(BC)$  (assosiativlik)  
 c)  $(A \cup B)C = AC \cup BC$  (distributivlik)

Həlli. Birinci iki xassə bilavasitə hadisələrin hasili və birləşməsinin tərifindən alınır. Belə ki, “ $A \vee B$  hadisələrindən heç olmasa biri baş verdikdə” və “ $A \vee B$  hadisələri eyni zamanda baş verdikdə” hadisələri bu hadisələrin ardıcılığından asılı deyildir.

$(A \cup B)C$  və  $AC \cup BC$  hadisələrinin eynigüclü olduqlarını isbat edək.

Tutaq ki,  $\omega \in (A \cup B)C$ . Hadisələrin hasilinin tərifinə əsasən  $\omega \in C, \omega \in A \cup B$ .  $\omega \in A \cup B$  o deməkdir ki,  $\omega \in A \vee \omega \in B$  hadisələrindən heç olmasa birinə daxildir. Yəni,  $\omega \in AC \cup BC$ . Deməli,  $\omega \in (A \cup B)C$  olduqda  $\omega \in AC \cup BC$  olar. Beləliklə,  $(A \cup B)C \subset AC \cup BC$

İndi isə fərz edək ki,  $\omega \in AC \cup BC$ . Deməli,  $\omega \in AC$  və ya  $\omega \in BC$ . Bu isə o deməkdir ki,  $\omega \in C$  və  $\omega \in A \vee \omega \in B$  hadisələrindən heç olmasa birinə daxildir. Hadisələrin hasilinin tərifinə əsasən  $\omega \in (A \cup B)C$

**Məsələ 3.**  $A - B = A\bar{B}$  eyniliyini isbat edin.

Həlli. Tutaq ki,  $\omega \in A - B$ .  $A \vee B$  hadisələrinin fərqi  $A$ -nın baş verməsi  $B$ -nin isə baş verməməsi hadisəsidir.  $B$  baş vermədikdə  $\bar{B}$  hadisəsi həkmən baş verir. Deməli,  $\omega \in A\bar{B}$ . Əksinə  $\omega \in A\bar{B}$  olduqda  $\omega \in A \wedge \omega \in \bar{B}$  olar. Deməli,  $\omega \in A \wedge \omega \notin B$ . Bu isə o deməkdir ki,  $\omega \in A - B$

**Məsələ 4.** Tutaq ki,  $A, B, C$  ixtiyari hadisələrdir. Aşağıdakı hadisələr üçün sadə ifadələr tapın.

- a)  $D = (A, B, C \text{ hadisələrindən heç biri baş vermir})$ ;  
 b)  $E = (A, B, C \text{ hadisələrindən heç olmasa ikisi baş verir})$ ;  
 c)  $F = (A, B, C \text{ hadisələrindən heç olmasa biri baş vermir})$ .

Həlli.  $A, B, C$  hadisələrinin baş verməməsi hadisələri müvafiq olaraq  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  hadisələridir. Deməli,  $D = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ . Hadisələrin hasilinin tərifinə əsasən  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  -  $A \vee B$  hadisələrinin baş verməsi  $C$ -nin baş verməməsi;  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  -  $A \vee C$ -nin baş verməsi  $B$ -nin isə baş verməməsi;  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  -  $A$ -nın baş verməməsi  $B \vee C$ -nin baş verməsi hadisəsidir. Hadisələrdən heç olmasa birinin baş verməməsi onlarda heç olmasa birinin, ikisinin və yaxud hər üçünün baş verməməsi deməkdir. Hadisələrin birləşməsinin tərifinə əsasən  $E = ABC \cup A\bar{B}C \cup A\bar{B}\bar{C}, F = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

**Məsələ 5.** Tutaq ki,  $A, B, C$  ixtiyari hadisələrdir. Aşağıdakı hadisələr üçün sadə ifadələr tapın.

- a)  $D = (A, B, C \text{ hadisələrindən ancaq biri baş verir})$ ;  
 b)  $E = (A, B, C \text{ hadisələrindən ancaq ikisi baş verir})$ .

Həlli.  $D = \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C}$

$E = ABC \cup A\bar{B}C \cup A\bar{B}\bar{C}$

**Məsələ 6.**  $A$  və  $B$  hadisələrinin birləşməsi onların hasili ilə üst üstə düşə bilərmi?

Həlli. Tutaq ki,  $A$  və  $B$  eynigüclü hadisələrdir. Bu halda  $A + B = AB$

Məsələn, tutaq ki, hədəfə atəş açılır. Hədəfi vurma onun məhv olması ilə nəticələnir və hədəf heç bir başqa üsulla məhv edilə bilməz.

$A$  ilə hədəfi vurma və  $B$  ilə hədəfin məhv olması hadisələrini işarə edək.  $A$  və  $B$  eynigüclü hadisələrdir və onalar üçün

$A + B = A$   $B$  münasibəti ödənilir.

#### 4.4. HADİSƏLƏRİN FƏRQİ VƏ TAMAMLAMA ƏMƏLİ.

$A$  və  $B$  hadisələrinin fərqi

$$A - B = (\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B)$$

bərabərliyi ilə verilən hadisəyə deyilir. Deməli,  $A - B$  fərqi  $A$ -nın baş verməsi,  $B$ -nin isə baş verməməsi hadisəsidir.  $A$  hadisəsinin baş verməməsi hadisəsi  $A$ -nın tamamlayanı (əksi) adlanır və  $\bar{A}$  kimi işarə olunur.

Aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$1. (A \cup B)C = AC \cup BC$$

$$2. (AB)C = (A \cup C)(B \cup C)$$

$$3. A \cup (AB) = A, A(A \cup B) = A$$

$$4. \bigcup_i A_i$$

$$4. \bigcup_i A_i = \prod_i A_i$$

$$5. A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$$

$$6. C \subset A, C \subset B \Leftrightarrow C \subset AB$$

$$7. A \subset C, B \subset C \Leftrightarrow (A \cup B) \subset C$$

#### 5. HADİSƏLƏRİN TAM SİSTEMİ.

$A_1, A_2, \dots, A_n$  hadisələr sistemi aşağıdakı üç şərti ödədikdə tam sistem adlanır:

$$1. A_i \neq \emptyset, i \geq 1$$

$$2. A_i A_j = \emptyset, i \neq j$$

$$3. \bigcup_1^\infty A_i = \Omega$$

2-ci və 3-cü şərtləri ödəyən hadisələr uyğun olaraq uyuşmayan və yeganə mümkün adlanır.

**Misal 1.** Yeşikdən bir məmulat götürülür. Məmulatın keyfiyyətli olması onun keyfiyyətsiz olmasını istisna edir. “məmulat keyfiyyətlidir” və “məmulat keyfiyyətsizdir” hadisələri uyuşmayandır.

**Misal 2.** Metal pul bir dəfə atılır. “pulun gerb üzünün yuxarı düşməsi” ( $\omega_g$  hadisəsi) və “pulun şəbəkə üzünün yuxarı düşməsi” hadisələri uyuşmayandır.

Uyuşmayan hadisələrin birləşməsinə bu hadisələrin cəmi deyilir və bunu

$$\sum_i A_i = A_1 + A_2 + \dots$$

kimi işarə edirlər.

Əgər A hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hadisələrinin cəmidirsə, yəni

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

münasibəti ödənilirsə, onda deyirlər ki, A hadisəsi  $A_1, A_2, \dots, A_n$  xüsusi hallarına ayrılır.

**Misal 3.** Bir zəri bir dəfə atmaqdan ibarət olan sınaqda zərin yuxarı düşən üzündə cüt sayda xalın olmasından ibarət olan A hadisəsi  $\omega_2, \omega_4, \omega_6$  kimi xüsusi hallara ayrılır:

$$A = \omega_2 + \omega_4 + \omega_6$$

Zərin yuxarı düşən üzündə tək sayda xalın olmasından ibarət olan B hadisəsi  $\omega_1, \omega_3, \omega_5$  kimi xüsusi hallara ayrılır:

$$B = \omega_1 + \omega_3 + \omega_5$$

Burada  $\omega_i, i = 2, 4, 6$  zərin yuxarı düşən üzündə uyğun olaraq 2, 4, 6 xalının olması hadisəsidir.

**Misal 4.** Tutaq ki,  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$  natural ədədlər çoxluğudur və  $S_1 = \{x : x = 3n; n = 1, 2, 3, \dots\}; S_2 = \{x : x = 3n + 1; n = 1, 2, 3, \dots\}; S_3 = \{x : x = 3n + 2; n = 1, 2, 3, \dots\}$ . Onda  $\{S_1, S_2, S_3\}$  çoxluğu hadisələrin tam sistemini təşkil edir.

Doğrudan da  $S_1$  - üçə tam bölünən,  $S_2$  - üçə bölündükdə qalıqda bir,  $S_3$  - isə qalıqda iki alınan natural ədədlərdir. Aydınır ki,  $S_1, S_2$  və  $S_3$  uyuşmayan, yeganə mümkün hadisələrdir. Deməli,  $\{S_1, S_2, S_3\}$  çoxluğu hadisələrin tam sistemini təşkil edir.

Hadisələrin tam sisteminə aid başqa bir misal göstərək.

**Misal 5.** Tutaq ki,  $A_1, \dots, A_n$  hadisələrdir. Bu hadisələrdən düz  $i$  saydasının baş verməsi hadisəsini  $H_i$  ilə işarə edək. Bu halda  $H_1, \dots, H_n$  hadisələri tam sistem təşkil edəcəkdir. Xüsusi halda  $n=2$  olarsa

$$H_0 = \bar{A}_1 \bar{A}_2, H_1 = A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2, H_2 = A_1 A_2$$

Şahmat oyununda növbəti partiyayı udmaq, uduzmaq və heç-heçə qurtarmaq hadisələri də hadisələrin tam sistemində masadır. o

Aşağıdakı düstur hadisələrin birləşməsini onların cəmi ilə ifadə etməyə imkan verir:

$$\bigcup_{i \geq 1} A_i = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \dots$$

İsbatı. Aşağıdakı hadisələrə baxaq:

$$B_1 = A_1, B_i = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{i-1} A_i, i \geq 2$$

İxtiyari  $i$  və  $j$  indeksləri üçün goğru olan

$$i < j \Rightarrow B_i \subset A_j \wedge B_j \subset \bar{A}_i$$

münasibətindən  $B_i B_j = \emptyset, i < j$  alırıq. Burada  $i$  və  $j$  eynii hüquqlu olduğuna görə,

$B_i B_j = \emptyset, i < j$  olar. Deməli,  $B_1, B_2, \dots$  uyuşmayan hadisələrdir.  $B_i \subset A_i \Rightarrow \sum_{i \geq 1} B_i \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i$

İndi fərz edək ki,  $\omega \in \bigcup_{i=1} A_i$  -dir.  $A_i - A_n, n \geq 1$  ardıcılığında  $\omega$ -nı öz daxilinə alan berinci hadisədir. Onda  $\omega \in B_i \Rightarrow \omega \in \bigcup_{i>1} B_i \Leftrightarrow \bigcup_{i>1} A_i \subset \bigcup_{i>1} B_i$

## 6. HADİSƏLƏR ARDİCILLIĞI VƏ ONUN LİMİTİ

$A_n, n \geq 1$  hadisələr ardıcılığı :

- $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$  şərtini ödədikdə artan,
- $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  şərtini ödədikdə azalan,
- artan və ya azalan olduqda monoton
- $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  və  $\bigcap A_i = \emptyset$  şərtlərini ödədikdə isə yox olan ardıcılıq adlanır.

**Misal 1.** İstənilən  $A_n, n \geq 1$  hadisələri üçün  $\bigcup A_i$  artan,  $\bigcap A_i$  isə azalan ardıcılıqdır.

**Misal 2.** Fərz edək ki, elementar hadisələr fəzası müstəvidir.  $A_n, B_n$  ilə müvafiq olaraq təsadüfi seçilən  $(x, y)$  nöqtəsinin uyğun olaraq  $1-1/n$  və  $1+1/n$  radiuslu dairənin daxilində olması hadisələrini işarə edək. Başqa sözlə,

$$A_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1 - \frac{1}{n}\}, B_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1 + \frac{1}{n}\}$$

Asanlıqla göstərmək olar ki,  $A_n, n \geq 1$  artan,  $B_n, n \geq 1$  isə azalan ardıcılıqdır.

**Misal 3.**  $A_n, n \geq 1$  artan ardıcılıq olduqda  $\bigcup A_i = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_2 A_3 + \dots$   
 $A_n, n \geq 1$  artan ardıcılıq olduğuna görə,  $\bar{A}_n, n \geq 1$  azalan olar. Buradan isə  $\bar{A}_1 \dots \bar{A}_i = \bar{A}_i$  olar.

Tutaq ki,  $A_n, n \geq 1$  hadisələr ardıcılığıdır.  $A^*$  ilə  $A_n$ -lərin qeyri məhdud saydalarının başverməsi hadisəsini işarə edək. Asanlıqla görmək olar ki,

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Doğrudan da,  $\omega \in A^*$  olduqda yəni  $\omega$  qeyri məhdud sayda  $A_n$  -lərə daxil olduqda istənilən  $n$  üçün  $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$  olar. Beləliklə,  $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ . Bu isə o deməkdir ki,

$$A^* \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \text{ Əksinə } \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \text{ olduqda } \omega \in A^* \text{ olar.}$$

Tutaq ki,  $A_*$  müəyyən nömrədən sonra bütün  $A_n$ -lərin başverməsi, yəni yalnız sonlu sayda  $A_n$ -lərin başverməməsi hadisəsidir. Eyni qayda ilə göstərmək

olur ki,  $A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ . Aydındır ki,  $A_* \subset A^*$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$  və  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$  hadisələrinə uyğun olaraq  $A_n, n \geq 1$  hadisələr ardıcılığının yuxarı və aşağı limiti deyilir.

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A$  olduqda  $A_n, n \geq 1$  ardıcılığına yığılan ardıcılıq,  $A$  hadisəsinə isə onun limiti deyilir.

Tərifə görə  $A_n, n \geq 1$  ardıcılığı  $A$  hadisəsinə yalnız və yalnız o zaman yığılır ki, hər bir  $\omega \in A$  elementar hadisəsi sonlu sayda müstəsna olmaqla  $A_n, n \geq 1$  hamısına, hər bir  $\omega \notin A$  isə yalnız sonlu sayda  $A_n$ -lərə daxil olmasın.

Tutaq ki,  $A_n, n \geq 1$  monoton artan ardıcılıqdır, yəni  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$

Onda  $A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  Bu isə o deməkdir ki,  $A_n, n \geq 1$  ardıcılığı yığılandır və

$$A_n \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, n \rightarrow \infty$$

$A_n, n \geq 1$  monoton azalan ardıcılıq, yəni  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  olduqda

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \text{ Beləliklə, } A_n, n \geq 1 \text{ hadisələr ardıcılığı yığılandır və}$$

### 7. Cəbr və $\sigma$ -cəbr anlayışları

Tutaq ki,  $\Omega, U$  sınağı ilə bağlı elementar hadisələr fəzasıdır. Ehtimal nəzəriyyəsində ehtimala hadisələrin funksiyası kimi baxılır. Lakin  $\Omega$  fəzasının istənilən altçoxlğu üçün ehtimalı təyin etmək mümkün deyildir. Ehtimal anlayışı fəzanın müəyyən hadisələri (altçoxlqları) sisteminə daxil olan hadisələr (çoxlqlar) üçün təyin edilir. Buna görə də hadisələrin ehtimalını riyazi olaraq təyin etmək üçün belə hadisələr sistemi əvvəlcədən müəyyən edilməlidir.

Tutaq ki,  $\Omega$  fəzasının hər hansı hadisələr (altçoxlqları) sistemi  $F$  ilə işarə edilmişdir və bu sistem üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

$$1) \Omega \in F$$

$$2) A \in F, B \in F \Rightarrow AB \in F, A + B \in F, A - B \in F$$

olur. Onda  $F$  sisteminə hadisələr cəbri deyilir.

Hadisələr cəbrinin bir sıra xassələri vardır.  $\Omega$  fəzası  $F$  sisteminə daxil olduğundan 2-ci şərtə görə  $\emptyset = \Omega - \Omega$  boş çoxluğu da  $F$  sisteminə daxildir. Hadisələrin cəmi və fərqi üçün qruplaşdırma xassəsi doğru olduğundan  $F$  sisteminə daxil olan sonlu sayda  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hadisələrinin cəmi və hasilini də həmin sistemə daxildir:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k \in F, \bigcap_{k=1}^n A_k \in F$$

Bir çox məsələləri həll etmək üçün ehtimal nəzəriyyəsində hadisələr cəbri anlayışı ilə kifayətlənmək olar. Lakin bir sıra mürəkkəb məsələləri həll etmək üçün hadisələr cəbrinin əlavə bir xassəni də ödəməsi tələb edilir. Bu xassə, sistemin hesabi sayda hadisələrin cəmi və hasilinin yenə də həmin sistemə daxil olmasından ibarətdir:

$$3) \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in F, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in F$$

Bu halda, yəni  $F$  hadisələr cəbri 3) şərtini ödədikdə, ona  $\sigma$ -cəbr və yaxud Borel cəbri deyilir.

$F$  sisteminə daxil olduğundan 2-ci şərtə görə  $\emptyset = \Omega - \Omega$  boş çoxluğu da  $F$  sisteminə daxildir. Hadisələrin cəmi və fərqi üçün qruplaşdırma xassəsi doğru

olduğundan  $F$  sisteminə daxil olan sonlu sayda  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hadisələrinin cəmi və hasili də həmin sistemə daxildir:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k \in F, \bigcap_{k=1}^n A_k \in F$$

Tutaq ki,  $S$   $\Omega$ -nın müəyyən alt çoxluqları sistemidir:

$$1) S \subset \sigma(S)$$

2)  $S \subset F$  şərtini ödəyən istənilən  $F$   $\sigma$ -cəbri üçün  $\sigma(S) \subset F$  olarsa  $\sigma(S)$ -ə  $S$  sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik  $\sigma$ -cəbr deyilir.

**Teorem 1.** İstənilən  $S$  çoxluqlar sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik  $\sigma(S)$  cəbri vardır.

İsbatı. Əvvəlcə qeyd edək ki,  $S$  sinfini öz daxilində saxlayan heç olmasa bir  $\sigma$ -cəbr vardır. Məsələn, belə bir cəbr olaraq  $\Omega$ -nın bütün altçoxluqları sinfini götürmək olar.  $S$  sinfini öz daxilində saxlayan bütün  $\sigma$ -cəbrlərin kəsişməsini  $\sigma(S)$  ilə işarə edək. Onda  $\sigma(S)$ -də  $\sigma$ -cəbr olar.  $S$  sinfini öz daxilində saxlayan istənilən  $F$   $\sigma$ -cəbri üçün  $\sigma(S) \subset F$  olar. Beləliklə,  $\sigma(S)$ ,  $S$  sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik  $\sigma$ -cəbrdir.

**Misal 3.** Minimal cəbrə misal olaraq  $\emptyset$  və  $\Omega$  çoxluqlarından ibarət olan cəbri göstərmək olar. Doğrudan da,

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega, \Omega \cap \emptyset = \emptyset, \overline{\Omega} = \emptyset, \overline{\emptyset} = \Omega$$

olduğu üçün  $S_1 = \{\emptyset, \Omega\}$  cəbrdir.

**Misal 4.**

$$\emptyset \cup A = A, \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}, \emptyset \cup \Omega = \Omega, \emptyset \cup \overline{\Omega} = \overline{\Omega},$$

$$\emptyset \cap \Omega = \emptyset, A \cup \overline{A} = \Omega, A \cup \Omega = \Omega, A \cap \overline{A} = \emptyset, A \cap \Omega = A, \overline{\overline{A}} = A,$$

$$\overline{A} \cup \Omega = \Omega, \overline{A} \cap \Omega = \overline{A}, \overline{\overline{\Omega}} = \emptyset,$$

bərabərlikləri ödənilidiyi üçün  $S_2 = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$  sinfi də cəbrə misaldır.

**Misal 5.** Tutaq ki,  $\Omega = [0,1) \times [0,1)$ .  $S$  isə  $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$  düzbucaqlılar və kəsişməyən düzbucaqlıların sonlu cəmindən ibarət çoxluqdur. Onda  $S$  cəbrdir.

$M$  sinfi :

$$1) A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots, A_n \in M \text{ olduqda } \lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M$$

$$2) A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots, A_n \in M \text{ olduqda } \lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in M$$

şərtlərini ödədikdə ona monoton sinif deyilir.

İstənilən  $\sigma$ -cəbr monoton sinifdir.

**Teorem 2.**  $S$  cəbrinin  $\sigma$ -cəbr olması üçün onun monoton sinif olması zəruri və kafidir.

Zərurilik.  $S$  cəbri  $\sigma$ -cəbr olduqda o, eyni zamanda monoton sinifdir.

Kafilik. Tutaq ki,  $S$  cəbri monoton sinifdir. Göstərək ki,  $A_n \in S$  olduqda  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$  olar.  $B_m = \bigcup_{i=1}^m A_i$  işarə edək. Aydınır ki,  $B_m \subset B_{m+1}$ .  $S$  cəbr olduğu üçün  $B_m \subset S$ .  $S$  eyni zamanda monoton sinif olduğu üçün  $B_m \rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \in S$  olar.

$S$  sinfini öz daxilində saxlayan  $M(S)$  monoton sinfi:

- 1)  $S \subset M(S)$ ;
- 2)  $S$  sinfini öz daxilində saxlayan istənilən  $M$  monoton sinfi üçün  $M(S) \subset M$  şərtləri ödənildikdə  $M(S)$  monoton sinfi  $S$  sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik monoton sinif adlanır.

**Teorem 3.** İstənilən  $S$  sinfi üçün onu öz daxilində saxlayan ən kiçik monoton sinif vardır.

İsbatı.  $S$  sinfini öz daxilində saxlayan heç olmasa bir monoton sinif vardır. Məsələn, belə bir sinif olaraq  $\Omega$ -nın bütün altçoxluqları sinfini götürmək olar.  $S$  sinfini öz daxilində saxlayan bütün monoton siniflərin kəsişməsini  $M(S)$  ilə işarə edək. Monoton siniflərin kəsişməsi də monoton sinif olduğu üçün  $M(S)$  monoton sinifdir.  $S$  sinfini öz daxilində saxlayan istənilən  $M$  monoton sinfi üçün  $M(S) \subset M$  olar. Beləliklə,  $M(S)$   $S$  sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik monoton sinifdir.

**MÖVZU 2. EHTİMALIN XÜSUSİ VƏ AKSIOMATİK  
TƏRİFLƏRİ.  
P L A N**

- 1. Ehtimalın statistik tərifı.**
- 2. Diskret elementar hadisələr fəzasında ehtimalın təyini.**
  - 2.1. Klassik ehtimalın təyini. Klassik sxem.**
  - 2.2. Qutu sxemi.**
  - 2.3. Sonlu və hesabi sayda nəticələri olan sınağın ehtimal modeli. Diskret sxemlər.**
- 3. Sonlu və hesabi- additiv ehtimal ölçüləri.**
- 4. Qeyri-hesabi sayda nəticələri olan sınaqların ehtimal modelinin qurulması.**
  - 4.1. Qeyri-hesabi sayda nəticələri olan sınaqların ehtimal modelinin qurulması.**
  - 4.2. Həndəsi ehtimal**
- 5. Ehtimalın aksiomatik tərifı.**
  - 6. Şərti ehtimal.**
  - 6.1. Şərti ehtimal anlayışı.**
  - 6.2. Şərti ehtimalın xassələri**
- 7. Ehtimalın vurma düsturu. Tam ehtimal düsturu. Bayes düsturu.**
- 8. Asılı olmayan hadisələr.**

**Ə D Ə B İ Y Y T S İ Y A H İ S İ .**

1. Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, "Maarif nəşriyyatı", 1973.
2. Ə. Ə. Hüseynov, S. Y. Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çapaşoğlu, 2006.

**1. EHTİMALIN STATİSTİK TƏRİFİ**

Fərz edək ki,  $U$  təkrarən aparıla bilən sınaq,  $\Omega$  bu sınağın elementar hadisələr fəzası və  $A$  təsadüfı hadisədir.  $U$  sınağını  $n$  dəfə apardıqda  $A$  hadisəsinin baş verməsi sayını  $m$  ilə işarə edək. Başqa sözlə,  $m$  ədədi  $n$  sınaqda  $A$  hadisəsinin baş verdiyi sınaqların sayıdır. Onda

$$t_n(A) = \frac{m}{n}$$

nisbətində  $n$  sınaqdan ibarət seriyada  $A$  hadisəsinin baş vermə tezliyi deyilir.

Bir çox hallarda hadisənin tezliyini başqa bir hadisənin baş verməsi şərti daxilində hesablamaq lazım gəlir.  $A$  hadisəsinin tezliyini  $B$  hadisəsinin baş verməsi şərtində hesabladıqda bütün sınaqları deyil, ancaq  $B$  hadisəsi baş verən sınaqları nəzərə almaq lazımdır.

Tutaq ki, aparılan  $n$  sayda sınaqda  $B$  hadisəsi  $m$  dəfə baş vermişdir.  $m$  sayda sınaqda isə  $A$  hadisəsi  $k$  baş vermişdir. Onda  $A$  hadisəsinin  $B$  hadisəsinin baş verməsi şərtində tezliyi  $\frac{k}{m}$  nisbəti kimi hesablanır. Bu tezlik bir qayda olaraq  $A$  hadisəsinin tezliyindən fərqlənir. Bu tezliyə  $B$  hadisəsinin baş verməsi şərtində  $A$  hadisəsinin nisbi tezliyi deyilir.

$$t_n(A/B) = \frac{k}{m}$$

Müəyyən  $U$  sınağının təkrarı olan sınaqların müxtəlif seriyalarına baxaq. Fərz edək ki,  $i$ -ci seriya  $n_i$  sayda sınaqdan ibarətdir və bu seriyada  $A$  hadisəsi  $m_i$  dəfə baş vermişdir. Onda bu seriyada  $A$  hadisəsinin baş vermə tezliyi

$$t_{n_i}(A) = \frac{m_i}{n_i}, i \geq 1$$

olar.

Aparılan sınaqlar göstərir ki, hadisələrin tezliyi aşağıdakı dayanıqlıq xassəsinə malikdir:

Baxılan  $A$  hadisəsinin hər biri kifayət qədər çoxlu sayda sınaqdan ibarət olan müxtəlif seriyalardakı tezlikləri bir-birindən olduqca az fərqlənir və müəyyən bir sabit ədəd ətrafında ehtizaz edir.

Tezliyin dayanıqlıq xassəsindən belə nəticə alınır:  $U$  sınağı ilə əlaqədar hər bir  $A$  hadisəsi üçün elə bir  $P(A)$  ədədi vardır ki,  $U$  sınağını küllü miqdarda təkrarən apardıqda  $A$ -nın tezliyi təxminən  $P(A)$  ədədinə bərabər olur. Bu ədədə  $A$  hadisəsinin statistik ehtimalı deyilir.

Tərifə görə,  $A$  hadisəsinin statistik ehtimalı  $p$  ədədi olarsa, onda  $n$  dəfə təkrar olunan sınaqda bu hadisə demək olar ki,  $np$  dəfə baş verir.

**Tezliyin xassələri.** Fərz edək ki,  $U$  müəyyən sınaq,  $A$  və  $B$  isə bu sınaq ilə əlaqədar hadisələrdir. Hadisənin tezliyi aşağıdakı xassələrə malikdir:

- 1) İstənilən hadisənin tezliyi mənfi olmayan və vahidi aşmayan ədəddir. Mümkün olmayan hadisənin tezliyi sıfır, yəqin hadisənin tezliyi isə vahidə bərabərdir:

$$0 \leq t_n(A) \leq 1, t_n(\emptyset) = 0, t_n(\Omega) = 1$$

- 2) Uyuşmayan hadisələrin cəminin tezliyi onların tezlikləri cəminə bərabərdir.

$$t_n(A+B) = t_n(A) + t_n(B)$$

- 3) İki hadisənin hasilinin tezliyi onlardan birinin tezliyi ilə digərinin şərti tezliyi hasilinə bərabərdir.

$$t_n(AB) = t_n(B)t_n(A/B)$$

Doğrudan da, tutaq ki,  $n$  sınaqda  $A$  hadisəsi  $m$  dəfə,  $B$  hadisəsi  $k$  dəfə,  $A$  və  $B$  hadisələri birlikdə  $l$  dəfə baş vermişdir. Onda  $A$  və  $B$  hadisələrinin birgə baş vermə tezliyi  $\frac{l}{n}$ ,  $B$  hadisəsinin tezliyi  $\frac{k}{n}$ ,  $A$  hadisəsinin  $B$  hadisəsinin baş verməsi şərtində tezliyi  $\frac{l}{k}$  olar:

$$\frac{l}{n} = \frac{k}{n} \frac{l}{k}$$

Bu isə o deməkdir ki,  $t_n(AB) = t_n(B)t_n(A/B)$

$n$  kifayət qədər böyük olduqda tezliyin dayanıqlıq xassəsinə görə  $P(A)$  ehtimalından olduqca az fərqlənir. Buna görə də tezliyin yuxarıda göstərilən xassələrinin ehtimal üçün də ödənildiyini qəbul etmək təbiiidir.

Beləliklə, statistik ehtimal

$$P(A) \geq 0, P(\Omega) = 1, P(A + B) = P(A) + P(B)$$

xassələrinə malikdir.

## **2. Diskret elementar hadisələr fəzasında ehtimalın təyini.**

### **2.1. Klassik ehtimalın təyini. Klassik sxem.**

Aşağıdakı şərtlər ödəniləndə deyirlər ki, verilmiş sınağın  $(\Omega, P)$  ehtimal modeli qurulmuşdur:

a)  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$  elementar hadisələr fəzası təyin edilmişdir;

b) hər bir  $\omega_i$  elementar hadisəsinə  $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$  şərtlərini ödəyən  $p_i$

ehtimalı qarşı qoyulmuşdur.

Sonlu sayda  $\omega_1, \dots, \omega_n$  nəticələri olan sınağın ehtimal modelini quraq. Bu modellərdən ən sadəsi “Klassik ehtimal sxemi” adlanır. Bu sxemdə ehtimalın təyini sonlu sayda nəticələrdən hər birinin “eyniimkanlı” (eyni ehtimallı) olmasını nəzərdə tutulur.  $n(A)$  ilə  $A$  hadisəsinə təşkil edən elementar hadisələrin sayını işarə edək. Onda

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

nisbətində  $A$  hadisəsinin klassik ehtimalı deyilir.

Beləliklə, eyniehtimallı sonlu elementar hadisələr fəzasında ixtiyari hadisənin ehtimalı, bu hadisəyə daxil olan elementar hadisələrin sayının elementar hadisələrin ümumi sayına nisbətində bərabərdir.

$\omega_i \in \Omega$  elementar hadisələrini mümkün hallar,  $A$  hadisəsinə təşkil edən elementar hadisələri isə bu hadisə üçün əlverişli hallar adlandırırlar. Deməli,  $A$  hadisəsinin ehtimalı bu hadisə üçün əlverişli olan halların ehtimalları cəminə bərabərdir. Əgər elementar hadisələr eyniehtimallı olarsa, onda hadisənin ehtimalı surəti bu hadisə üçün əlverişli olan halların sayına, məxrəci isə bütün mümkün halların sayına bərabər olan kəsrdir.

Ehtimalın klassik tərifindən aydın olur ki, elementar hadisələrin hamısının daxil olduğu  $\Omega$  yəqin hadisəsinin ehtimalı vahidə bərabərdir:

$$P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$$

**Teorem 1.** Uyuşmayan  $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}, B = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$  hadisələrinin birləşməsinin ehtimalı onların ehtimalları cəminə bərabərdir.

İsbatı. Doğrudan da,  $A$  və  $B$  hadisələrinin ehmalları müvafiq olaraq  $\frac{m}{n}$  və  $\frac{k}{n}$  - ə bərabərdir:

$$P(A) = \frac{m}{n}, P(B) = \frac{k}{n}$$

$C = A \cup B = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}, \dots, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$  hadisəsi  $m + k$  sayda elementar hadisələrdən ibarətdir və  $\{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$  elementar hadisələrindən heç biri  $\{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$  çoxluğuna daxil deyildir. Ona görə də klassik ehtimalın tərinə əsasən

$$P(C) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B)$$

Bu teoremə klassik ehtimal üçün ehtimalların toplanması qanunu da deyilir.

**Nəticə 1.**  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Doğrudan da,  $A$  və  $\bar{A}$  hadisələri uyuşmayan hadisələr, onların birləşməsi isə yəqin hadisədir:

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

Ehtimalların toplanması qanununa görə

$$P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Buradan isə  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  olur.

Mümkün olmayan hadisə yəqin hadisənin tamamlayanı olduğu üçün buradan xüsusi halda mümkün olmayan hadisənin klassik ehtimalının sıfıra bərabər olduğu alınır.

## 2.2. Qutu sxemi.

Elementar hadisələrin eyniehtimallı və sonlu sayda olması tələbləri klassik ehtimalın tətbiqini məhdudlaşdırır. Bir çox hallarda elementar hadisələrin eyniehtimallı olmasını təyin etmək çox çətin olur. Bəzən də xarici görünüşcə oxşar olan müxtəlif elementar hadisələrə bir hal kimi baxılması səhvinə yol verilir. Göstərilən nöqsanlarla yanaşı klassik ehtimal özünün sadəliyi ilə fərqlənir və onu tətbiq etmək üçün kombinator analizin bəzi düsturlarını bilmək kifayətdir.

Klassik sxemin tətbiqinin məhdudluğuna baxmayaraq o, bir sıra vacib praktiki məsələlərin həllində geniş surətdə istifadə edilir.  $N$  sayda elementdən ibarət çoxluğa baxaq. Bu çoxluğun təbiəti bizi maraqlandırmır. O, müəyyən əlamətə malik və malik olmayan - məsələn, keyfiyyətli və keyfiyyətsiz məmularlar çoxluğu, hər biri nəmli və yaxud nəmişli olan toxumlar çoxluğu və s. ola bilər. Bu cür hallar qutu sxemi vasitəsilə təsvir edilir:

Qutuda  $M$  sayda ağ,  $N - M$  sayda isə qara şar vardır. Bəzi hallarda məmulatın keyfiyyətini yoxladıqda o, sıradan çıxır. Məsələn, məhsulun keyfiyyətinə nəzarəti həyata keçirərkən nəzarət əməliyyatı nəticəsində məhsul satış üçün yararsız hala düşür. Bu halda məmulatların hamısının deyil, onların müəyyən hissəsinin keyfiyyəti yoxlanılır. Tutaq ki, qutudan təsadüfi qaydada  $n$  şar çıxarılmışdır. Çıxarılan şarlardan  $m$  sarın ağ şar olması hadisəsinin ehtimalını hesablayaq.  $N$  şardan  $n$  şarı  $C_N^n$  üsulla seçmək olar. Deməli, mümkün halların sayı  $C_N^n$ -dir. Çıxarılan şarlardan  $m$  şarın ağ şar olması hadisəsi ( $A$ ) üçün əlverişli halların

sayını tapaq.  $M$  ağ şardan  $m$  şarı  $C_M^m$  üsulla,  $N - M$  qara şardan isə  $n - m$  şarı  $C_{N-M}^{n-m}$  üsulla seçmək olar. Onda əlverişli halların sayı  $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$  olar. Beləliklə, klassik ehtimalın tərifinə görə axtarılan ehtimal

$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

olar

### **2.3. Sonlu və yaxud hesabi sayda nəticələri olan sınağın ehtimal modeli. Diskret sxemlər.**

Sınağın nəticələri sonlu sayda olduqda ona sonlu, sonlu və yaxud hesabi sayda olduqda isə diskret sxem deyilir.

Nəticələri eyniimkanlı olmayan sonlu sxemin ehtimal modelini quraq. Bu halda sınağın nəticələri sonlu sayda elementar hadisələrindən ibarət  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  çoxluğudur. Bu model hər bir  $\omega_i \in \Omega$  elementar hadisəsinə  $p_i \geq 0$  və  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  şərtlərini ödəyən  $p_i = P(\omega_i)$  ehtimalının qarşı qoyulması ilə təyin edilir.

Tutaq ki,  $A$  - sınaq zamanı müşahidə edilən istənilən hadisədir. Bu hadisəsinin ehtimalı onu təşkil edən elementar hadisələrin ehtimalları cəmi kimi təyin edilir:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

Məsələn,  $A = (\omega_1, \omega_3, \omega_5)$  olduqda

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_3) + P(\omega_5)$$

Qurulmuş model sonlu sayda eyniimkanlı nəticələri olan klassik sxemin ehtimal modelinin ümumiləşməsidir. Belə ki, hər bir  $\omega_i$  elementar hadisəsinin ehtimalını  $\frac{1}{n}$  kimi təyin etsək ehtimalın klassik tərifini alarıq.

Sonlu sxemlər üçün də ehtimalların toplanması qanunu doğrudur.

**Teorem 2.**  $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$ ,  $B = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$  uyuşmayan hadisələr olduqda

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

İsbatı. Tərifə görə  $P(A) = \sum_{l=1}^m p_{i_l}$ ,  $P(B) = \sum_{s=1}^k p_{j_s}$ .  $A$  və  $B$  hadisələri uyuşmayan olduğu üçün onların ortaq elementar hadisələri yoxdur.

$$C = A \cup B = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}, \dots, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$$

olar.

Deməli,

$$P(C) = P(A \cup B) = \sum_{l=1}^m p_{i_l} + \sum_{s=1}^k p_{j_s} = P(A) + P(B)$$

**Məsələ 1.** Maqazində 40, 41, 42 və 42 və daha böyük ölçülü ayaqqabının satılma ehtimalları uyğun olaraq 0.15; 0.12 və 0.09-a bərabərdir. 40 ölçüdən kiçik olmayan ölçülü ayaqqabının satılma ehtimalını hesablayın.

Həlli. Axtarılan hadisəni  $D$  ilə işarə edək. Bu hadisə 40 ölçülü ( $A_1$ ), 41 ölçülü ( $A_2$ ), 42 və daha böyük ölçülü ( $A_3$ ) ayaqqabılar satıldıqda baş verir. Deməli,

$D = A_1 + A_2 + A_3$ .  $A_1, A_2$  və  $A_3$  hadisələri uyuşmayan hadisələr olduqları üçün  $P(D) = 0.15 + 0.12 + 0.09 = 0.36$  olar.

**Teorem 3.** İstənilən  $A$  və  $B$  hadisələri üçün

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

İsbatı.  $P(A + B)$  ehtimalı  $A$  və  $B$  hadisələrindən heç olmasa birinə daxil olan elementar hadisələrin ehtimalları cəmidir. Bu zaman elementar hadisə eyni zamanda  $A$  və  $B$ -yə daxil olduqda bir dəfə götürülür. Ona görə də

$$P(A + B) \leq P(A) + P(B)$$

Elementar hadisə eyni zamanda  $A$  və  $B$ -yə daxil olduqda o, axırını bərabərsizliyin sağ tərəfinə iki, sol tərəfinə isə bir dəfə daxil olur. Ona görə də sağ tərəf sol tərəfdən  $P(AB)$  qədər böyükdür. Beləliklə,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

İndi isə hesabi sayda  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$  nəticələri olan təsadüfi sınağa baxaq. Bu halda elementar hadisələr fəzası  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$  olar. Diskret sxemin ehtimal modelində hər bir  $\omega_i \in \Omega$  elementar hadisəsinə  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$  şərtlərini ödəyən  $p_i = P(\omega_i)$  qarşı qoyulur.

Hesabi sayda elementar hadisələrdən ibarət olan  $A$  hadisəsinin ehtimalı isə klassik sxemdə olduğu kimi onu təşkil edən elementar hadisələrin ehtimalları cəmi kimi təyin edilir.

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Bu qayda ilə təyin edilmiş ehtimal aşağıdakı xassələrə malikdir.

$$a) 0 \leq P(A) \leq 1,$$

$$b) P(\Omega) = 1.$$

$$c) A \subset \Omega, B \subset \Omega$$

uyuşmayan hadisələr olduqda

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Doğrudan da,

$$0 \leq P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

$$P(\Omega) = \sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Diskret sxem sonlu sxemin ehtimal modelinin ümumiləşməsidir.

Ehtimal nəzəriyyəsi  $\omega_i$  elementar hadisəsinin  $p_i$  ehtimalının hesablanmasını öyrənmir. Bu ehtimalların təyində elementar hadisənin müxtəlif seriyalardakı küllü miqdarda aparılmış sınaqlarda tezliyi əsas götürülür. Eyni zamanda ehtimal nəzəriyyəsi  $(\Omega, P)$  ehtimal modelinin adekvatlığını da öyrənmir. O, ancaq qurulmuş  $(\Omega, P)$  modeli ilə bağlı hadisələrin ehtimalının hesablanmasını öyrənir.

### 3. Sonlu və hesabi- additiv ehtimal ölçüləri.

Tutaq ki,  $S$   $\Omega$ -nın müəyyən alt çoxluqlarının cəbridir.  $\Omega$ -da təyin edilmiş  $P(.)$  çoxluq funksiyası

$$1) P(A) \geq 0, A \in S,$$

$$2) P(\Omega) = 1.$$

$$3) P(A \cup B) = P(A) + P(B), A, B \in S, AB = \emptyset$$

şərtlərini ödədikdə ona sonlu-additiv ehtimal ölçüsü deyilir.

3)-cü xassədən riyazi induksiya metodunun köməyi ilə istənilən  $A_i \in S, i = 1, 2, \dots, m$  hadisələri üçün  $A_i A_j = \emptyset, i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, m$  olduqda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m P(A_i)$$

olduğunu almaq olar.

$A \cup \bar{A} = \Omega$  olduğu üçün 2) və 3) –cü xassələrə əsasən

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

və yaxud

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

olduğunu yazı bilərik.

$S$  cəbrində təyin edilmiş  $P(.)$  çoxluq funksiyası

$$1) P(A) \geq 0, A \in S;$$

$$2) P(\Omega) = 1;$$

$$3) P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$A_i \in S, i = 1, 2, \dots; A_i A_j = \emptyset, i \neq j; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

şərtlərini ödədikdə ona hesabi-additiv ehtimal ölçüsü deyilir.

Hansı şərtlər daxilində sonlu-additiv ehtimal ölçüsünün hesabi-additiv olmasına aşağıdakı teorem cavab verir.

**Teorem 4.** Tutaq ki,  $P(.)$   $F$   $\sigma$ -cəbrində sonlu -additiv ehtimal ölçüsüdür. Onda aşağıdakı dörd şərt ekvivalentdir.

1)  $P(.)$  hesabi-additivdir, yəni  $A_i \in F, i = 1, 2, \dots, A_i A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$  olduqda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

2)  $A_i, i = 1, 2, \dots$ , azalmayan çoxluqlar ardıcılığı və  $\lim A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$  olduqda

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim P(A_n)$$

3)  $A_i, i = 1, 2, \dots$ , artmayan çoxluqlar ardıcılığı və  $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$  olduqda

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim P(A_n)$$

4)  $P(\cdot)$   $\Omega$ -da kəsilməyəndir, yəni  $A_i \supset A_{i+1}$  və  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$  olduqda

$$\lim P(A_n) = 0$$

**İsbatı.** Teoremin isbatını aşağıdakı ardıcılıqla verək:  $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$ . Buradan isə 1), 2), 3), 4) şərtlərinin ekvivalentliyi alınır.

$1) \Rightarrow 2)$ . Tutaq ki,  $A_i, i=1,2,\dots$ , azalmayan çoxluqlar ardıcılığıdır. 1)-dən

$$P(\lim A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim \sum_{i=1}^{n-1} P(B_i) = \lim P(A_n)$$

alınır.

Beləliklə, 1)-dən 2) alınır.

İsbat edək ki, 2)-dən 3) alınır. Tutaq ki,  $A_i, i=1,2,\dots$ , artmayan çoxluqlar ardıcılığıdır. Onda  $\bar{A}_i$  azalmayan çoxluqlar ardıcılığıdır. 2)-yə görə

$$\begin{aligned} P(\lim A_n) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i\right) = \\ &= 1 - \lim P(\bar{A}_n) = \lim (1 - P(\bar{A}_n)) = \lim P(A_n) \end{aligned}$$

İsbat edək ki, 3)-dən 4) alınır.  $P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0$  olduğu üçün istənilən

artmayan və  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$  şərtini ödəyən ardıcılıq üçün 3) –cü xassəyə görə

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0 = \lim P(A_n)$$

İsbat edək ki, 4)-dən 1) alınır. Tutaq ki,  $A_i, i=1,2,\dots$ , kəsilməyən çoxluqlar ardıcılığıdır və  $C_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$ . Onda  $C_{n+1} \subset C_n$   $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$

Sonlu-additivlik xassəsinə görə

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(C_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(C_n)$$

$$\lim P(C_n) = 0 \text{ olduğuna görə } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim \sum_{i=1}^n P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, 2) və 3) xassələrini aşağıdakı kimi də ifadə etmək olar:

$A_i, i=1,2,\dots$ , monoton çoxluqlar ardıcılığı üçün  $P(\lim A_n) = \lim P(A_n)$ .

Bu xassə hesabi-additiv ehtimal ölçüsünün kəsilməyənlilik xassəsi adlanır.

Fərz edək ki,  $\Omega$  - hər hansı elementar hadisələr fəzası,  $S$  isə onun altçoxluqlarından təşkil edilmiş cıxluqlar sistemidir.

**4.Qeyri-hesabi sayda nəticələri olan sınaqların ehtimal modelinin qurulması.**

**4.1. Qeyri-hesabi sayda nəticələri olan sınaqların ehtimal modelinin qurulması.**

Qeyri hesabi sayda nəticələri olan stoxastik sınaqlara baxaq. Bu cür sınaqların ehtimal modelinin qurulması ilə tanış olaq.

Nöqtənin  $[0,1)$  intervalına atılmasından ibarət təsadüf sınağına baxaq. Bütün mümkün nəticələrin “eyniimkanlı” olduğunu qəbul edək. Bu sınağın elementar hadisələr fəzası  $\Omega = [0,1)$  olar. Ancaq bu halda hər bir elementar hadisənin ehtimalını təyin etməklə sınağın ehtimal modelini qurmaq olmaz. Diskret sxemə uyğun olaraq hər  $\omega$  elementar hadisəsinə onun  $P(\omega)$  ehtimalı qarşı qoysaq bütün nəticələr eyniimkanlı” olduğu üçün hər  $\omega$  elementar hadisəsi üçün  $P(\omega) = 0$  olar. Bu halda çıxış yolu bütün elementar hadisələrin deyil, onların müəyyən çoxluğunun ehtimalını təyin etməkdən ibarətdir. Eyni zamanda ehtimallar təyin edilərkən müəyyən prinsiplər gözlənilməlidir:  $\left[0, \frac{1}{2}\right)$   $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$  intervallarına düşmə ehtimallarının eyni olduğunu qəbul etmək lazımdır.  $\left[0, \frac{1}{2}\right)$  intervalına düşmə

ehtimalı  $\left[0, \frac{1}{3}\right)$  intervalına düşmə ehtimalından böyük olmalıdır. Bundan başqa ehtimalları təyin edilən çoxluqlar sinfinin birləşmə, kəsişmə və tamamlama əməllərinə görə qapalı olmaları arzu ediləndir.  $A, B, A \cup B, A \cap B, \bar{A}, \bar{B}$  çoxluqlarının da ehtimalları təyin edilməlidir. Nöqtənin  $[a, b] \subset [0,1)$  intervalına düşmə ehtimalını  $b - a$  fərqi kimi təyin edək. Sonlu sayda kəsişməyən intervalların cəminin  $\bigcup_{i=1}^m [a_i, b_i] \subset [0,1)$  ehtimalını isə  $\sum_{i=1}^m (b_i - a_i)$  kimi təyin edək.  $K$  ilə  $[a, b]$  şəklində bütün intervalları və onların kəsişməyən sonlu sayda cəmini işarə edək.  $S$  ilə  $K$ -nı öz daxilində saxlayan minimal  $\sigma$ -cəbri işarə edək. Ehtimalın davamı haqqında teoremə görə yeganə  $P(\cdot)$  ehtimal ölçüsü vardır ki,  $P([a, b]) = b - a$  şərti ödənilir. Təsadüf hadisə olaraq  $[0,1)$  çoxluğunun borel çoxluqlarını götürək,  $A \subset F$  hadisəsinin ehtimalını isə  $P(A)$  qəbul edək.

Beləliklə, biz sınağın ehtimal modelini qurduq.

### **Görüş haqqında məsələ.**

Tutaq ki, iki nəfər  $[0, T]$  zaman kəsiyində görüşməyi qərqlə alıblar. Görüş yerinə birinci gələn digərini  $\tau$  müddəti ərzində gözləyir, sonra isə gedir.  $x, y$  ilə müvafiq olaraq birinci və ikinci şəxsin görüş yerinə gəlmə müddətini işarə edək. Onda sınağın elementar hadisələr fəzası  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T\}$  olar. İntuitiv olaraq sınağın bütün nəticələrinin eynimkanlı olduğunu qəbul edək və görüşün baş tutması ehtimalını hesablayaq.

Bu məsələdə hər bir elementar hadisənin ehtimalını təyin etməklə ehtimal modelini qurmaq olmaz. Əvvəlcə  $\Omega = [0, T] \times [0, T]$  düzbucaqlısına daxil olan çoxbucaqlıları təsadüf hadisə olaraq qəbul edək. Hər bir çoxbucaqlıya isə  $P(K) = \frac{\text{mes}(K)}{T^2}$  ehtimalını qarşı qoyaq.  $F$  ilə  $K$  çoxbucaqlılar sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik  $\sigma$ -cəbri işarə edək.  $\sigma$ -cəbrindən olan hər bir  $C$  çoxluğuna isə  $P(C) = \frac{\text{mes}(C)}{T^2}$  ehtimalını qarşı qoyaq. Beləliklə, biz sınağın  $\{\Omega, F, P\}$  ehtimal

modelini qurduq. Bizi maraqlandıran  $A = \{(x, y) : |x - y| \leq r\}$  hadisəsinin ehtimalı

$$P(A) = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2$$

olar. Xüsusi halda  $T = 1\text{saat}, \tau = \frac{1}{3}\text{saat}$  olduqda axtarılan ehtimal

$$P(A) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

olar.

**4.2. Həndəsi ehtimal.** Nəzəriyyə və təcrübədə nəticələri sonlu sayda və ya eyniehtimallı olmayan sınaqların öyrənilməsi ehtiyacları klassik ehtimalın məhdudluğunu göstərdi. Klassik ehtimalın tətbiq edilə bilmədiyi bir sinif ehtimal məsələləri üçün həndəsi ehtimal anlayışı verilmişdir.

Kəsilməz elementar hadisələr fəzasında ehtimalın təyininə həndəsi ehtimalın misalında baxaq. Tutaq ki, elementar hadisələr fəzası müstəvidə sahəsi olan hər hansı  $G$  oblastıdır. Bu oblastın sahəsi olan altcoxluqlarını hadisə olaraq götürək. Göstərmək ilar ki, belə altcoxluqlar sinfi cəbrdir. Bu halda hər bir  $A$  hadisəsinin ehtimalını  $P(A) = \frac{\text{mes}(A)}{\text{mes}(G)}$  kimi təyin etmək olar.

Beləliklə, biz sınağın  $(\Omega, S, P)$  ehtimal modelini qurduq. Bu düstur ilə hesablanan ehtimal həndəsi ehtimal adlanır. Bu düsturda  $A$  oblastı mümkün olan eyniehtimallı halların,  $G$  isə əlverişli halların çoxluğu rolunu oynayır.

Sonlu sxemdə olduğu kimi asanlıqla göstərmək olar ki, təsvir edilən sxem ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarını ödəyir.

Həndəsi ehtimal üçün 1-3 xassələrinin doğruluğu bilavasitə onun tərifindən alınır. Lakin klassik ehtimalı sıfır olan hadisə mümkün olmayan hadisədir təklifi həndəsi ehtimal üçün doğru deyildir. Məsələn, müstəvinin müəyyən oblastından təsadüfi götürülən bir nöqtənin həmin oblastın daxilində yerləşən müəyyən bir parçanın nöqtəsi olması hadisəsinin ehtimalı sıfırdır.

### 5. Ehtimalın aksiomatik tərif.

Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarını ifadə edərkən tezliyin və ehtimalın xassələri əsas götürülür.

Tutaq ki,  $\Omega$  elementar hadisələr fəzasıdır,  $F$  isə onun müəyyən alt çoxluqlarının  $\sigma$ -cəbridir. Yəni,

$$1) \Omega \in F;$$

$$2) A \in F \Rightarrow \bar{A} = \Omega - A \in F;$$

$$3) A_i \in F, i = 1, 2, \dots, \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

$F$   $\sigma$ -cəbrinin hər bir çoxluğuna təsadüfi hadisə deyilir.  $F$   $\sigma$ -cəbrində təyin edilmiş ədədi funksiya aşağıdakı şərtləri ödədikdə ona ehtimal deyilir:

**Aksiom 1.** Hər bir  $A \in F$  üçün  $P(A) \geq 0$ .

**Aksiom 2.** Yəqin hadisənin ehtimalı vahidə bərabərdir

$$P(\Omega) = 1$$

**Aksiom 3.** Cüt-cüt uyuşmayan  $A_i, i=1,2,\dots$ , hadisələrin cəminin ehtimalı onların ehtimalları cəminə bərabərdir:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Bu aksiomlar ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları adlanır. Onları ilk dəfə görkəmli rus riyaziyyatçısı **A.N. Kolmoqorov** vermişdir. Bu aksiomlar ehtimal nəzəriyyəsinin və onun bir sıra sahələrinin sürətli inkişafında müstəsna əhəmiyyətə malik olmuşdur.

**Aksiom 1 və Aksiom 3-ə** görə  $F$   $\sigma$ -cəbrində təyin edilmiş  $P(A)$  funksiyası  $P(\Omega)=1$  şərtini ödəyən ölçüdür. Bu ölçüyə ehtimal ölçüsü deyilir.  $(\Omega, F, P)$  üçlüyünə isə ehtimal fəzası deyilir.  $\Omega$  elementar hadisələr fəzası, təsadüfi hadisələrin  $F$   $\sigma$ -cəbri və  $F$ -də təyin edilmiş  $P(\cdot)$  ehtimal ölçüsü verildikdə, yəni  $(\Omega, F, P)$  ehtimal fəzası qurulduqda deyirlər ki, sınağın ehtimal modeli qurulmuşdur.

Göstərək ki, sonlu sxem ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarını ödəyir. Qeyd edək ki, sonlu sxem elementar hadisələrin sonlu  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  coxluğunda verilir və onların hər birinin ehtimalı  $0 \leq p_i \leq 1$  və  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  şərtlərini ödəyir.  $\Omega$ -nın altcoxluğu olan istənilən  $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$  hadisəsinin ehtimalı isə

$$P(A) = \sum_{i=1}^m p_{i_i} \text{ kimi təyin edilir.}$$

$\Omega$ -nın bütün altcoxluqlar sinfi cəbrdir. Doğrudan da,  $\emptyset$  və  $\Omega$ ,  $\Omega$ -nın altcoxluğu olduqları üçün  $S$ -ə daxildirlər. Aydınır ki,  $A \in S, B \in S$  olduqda onların birləşməsi və kəsişməsi də  $\Omega$ -ya daxildir.

Sonlu sxemin birinci aksiomu ödədiyini yoxlayaq. Bu məqsədlə  $\Omega$ -nın altcoxluğu olan istənilən  $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$  hadisəsinə götürək. Sonlu sxemə görə

$$P(A) = \sum_{i=1}^m p_{i_i}. \text{ Deməli, } P(A) \geq 0$$

$P(\Omega) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$  olduğu üçün ikinci aksiom da ödənilir. Ehtimalların toplanması teoreminə görə isə üçüncü aksiom ödənilir.

### **EHTİMALIN XASSƏLƏRİ.**

Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarından istifadə etməklə ehtimalın bir sıra mühüm xassələrini isbat etmək olar.

**Teorem 5.** İstənilən  $A$  hadisəsi üçün  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Doğrudan da,  $A \cup \bar{A} = \Omega, A \cap \bar{A} = \emptyset$  olduğu üçün 3-cü aksioma görə

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega)$$

Buradan isə,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  olar.

**Nəticə 1.** Mümkün olmayan hadisənin ehtimalı sıfıra bərabərdir, yəni

$$P(\emptyset) = 0.$$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  bərabərliyində  $A = \Omega$  götürsək,  $P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0$

Buradan isə

$$P(\emptyset) = 0$$

**Teorem 6.**  $B \subset A$  olduqda  $P(A - B) = P(A) - P(B)$

İsbatı.  $A$  hadisəsini uyuşmayan iki  $A - B, B$  hadisələrinin cəmi şəklində göstərək:  $A = (A - B) + B$ .

Onda

$$P(A) = P(A - B) + P(B)$$

Buradan isə  $P(A - B) = P(A) - P(B)$  olduğunu alırıq.

**Nəticə 1.**  $A \subset B$  olduqda  $P(A) \leq P(B)$

$A \subset B$  olduqda  $B$  hadisəsini iki uyuşmayan hadisənin cəmi şəklində göstərmək olar:

$$B = A + (B - A)$$

Onda

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

Ehtimal mənfi olmayan ədəd olduğu üçün  $P(A) \leq P(B)$  olar.

**Nəticə 2.** İstənilən  $A$  hadisəsi üçün  $0 \leq P(A) \leq 1$

Doğrudan da, İstənilən  $A$  hadisəsi üçün  $A \in \Omega$ . Ona görə də

$$P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

**Nəticə 3.**  $P(AB) \leq \min(P(A), P(B))$

$AB \subset A, AB \subset B$  olduğuna görə  $P(AB) \leq P(A)$  və  $P(AB) \leq P(B)$  olar. Buradan isə

$$P(AB) \leq \min(P(A), P(B))$$

olar.

Eyni qayda ilə  $A \subset A + B, B \subset A + B$  münasibətlərindən aşağıdakı nəticəyə gəlirik.

**Nəticə 4.**  $P(A + B) \geq \max(P(A), P(B))$

**Teorem 5.** İstənilən  $A$  və  $B$  hadisələri üçün

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

İsbatı.  $A \cup B$  hadisəsini uyuşmayan üç hadisənin cəmi şəklində göstərmək olar.

$$A \cup B = (A - AB) \cup (B - AB) \cup (AB)$$

olar. Onda aksiom 3-ə və teorem 2-yə görə görə

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A - AB) + P(B - AB) + P(AB) = \\ &= P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

olar.

Bu münasibətə ehtimalların toplama qanunu deyilir.

Bu düsturu üç hadisə üçün yazaq:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - \\ &- P((A_1 \cup A_2)A_3) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) + P(A_3) - \\ &- P(A_1A_2) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3)$$

**Nəticə 1.**  $A$  və  $B$  üyüşməyən hadisələr olduqda

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

$A$  və  $B$  hadisələri üyüşməyən olduğu üçün  $n$   $P(AB) = P(\emptyset) = 0$  və

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

**Nəticə 2.**  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Bu xassə əvvəlki teoremdə ehtimalın mənfi olmamasını nəzərə almaqla alınır.

Altıncı xassə istənilən  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hadisələri üçün də ümumiləşdirilir.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

**Teorem 6.**  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hadisələrindən heç olmasa birinin baş verməsi ehtimalı

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n)$$

Bu düstur riyazi induksiya üsulunun köməyi ilə asanlıqla isbat olunur. Doğrudan da,  $n = 2$  olduqda bu düstur

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

düsturuna çevrilir. Onun  $n - 1$  üçün doğru olduqda  $n$  üçün də doğru olduğunu göstərək.

Tutaq ki, bu düstur istənilən  $n - 1$  sayda hadisə üçün doğrudur:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=2}^n A_i\right) &= \sum_{i=2}^n P(A_i) + \sum_{2 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-2} P(A_2 \dots A_n); \\ P\left(\bigcup_{i=2}^n (A_1 A_i)\right) &= \sum_{i=2}^n P(A_1 A_{i_1}) - \sum_{2 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_1 A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{2 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_1 A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-2} P(A_1 A_2 \dots A_n) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

düsturuna görə

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= P(A_1) + P\left(\bigcup_{i=2}^n A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=2}^n (A_1 A_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \end{aligned}$$

olduğunu yazı bilərik.

**Nəticə 1.** Fərz edək ki,  $A_1, \dots, A_m$  hadisələrinin ixtiyari  $r$  dənəsinin birlikdə baş vermə ehtimalı yalnız bu hadisələrin sayından asılıdır və  $a_r$  ədədinə bərabərdir. Onda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = C_m^1 a_1 - C_m^2 a_2 + \dots + (-1)^{m-1} a_m$$

**Teorem 7.**  $A_n$  monoton artan hadisələr ardıcılığı, yəni

$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$  olduqda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

$A_n$  monoton azalan hadisələr ardıcılığı, yəni

$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$  olduqda

$$P\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Monoton hadisələr ardıcılığının limiti anlayışından istifadə edərək

$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$  olduğunu yaza bilərik. Ona görə də bu teoremi ehtimalın kəsilməyənlik xassəsi adlandırırlar.

**Teorem 8.** İstənilən sonlu və ya hesabi sayda  $A_n$  hadisələri üçün

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n P(A_n)$$

$$P\left(\bigcap_n A_n\right) \geq 1 - \sum_n P(\bar{A}_n)$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

İsbatı.  $B_1 = A_1, B_2 = \bar{A}_1 A_2, \dots, B_n = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-1} A_n, \dots$

işarə edək. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$$

$B_n$  hadisələri cüt-cüt uyuşmayan hadisələr və  $B_n \subset A_n$  olduğu üçün

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = P\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_n P(B_n) \leq \sum_n P(A_n)$$

$$P\left(\bigcup_n \bar{A}_n\right) \leq \sum_n P(\bar{A}_n) \text{ olduğunu nəzərə alsaq}$$

$$P\left(\bigcap_n A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_n \bar{A}_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_n \bar{A}_n\right) \geq 1 - \sum_n P(\bar{A}_n)$$

bərabərsizliyinin doğru olduğunu yaza bilərik.

**Teorem 8.** Tutaq ki,  $C$   $A$  və  $B$  hadisələrindən ancaq birinin baş verməsi hadisəsidir. Onda

$$P(C) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$$

İsbatı.  $C$  hadisəsini uyuşmayan iki  $A\bar{B}$  və  $B\bar{A}$  hadisələrinin cəmi şəklində göstərək.  $C = A\bar{B} + B\bar{A}$ . Digər tərəfdən  $A\bar{B} = A - B = A - AB$  və  $B\bar{A} = B - A = B - BA$  olduğu üçün  $C = A\bar{B} + B\bar{A} = (A - AB) + (B - AB)$ .

$A\bar{B}$ ,  $B\bar{A}$  hadisələrinin uyuşmayan və  $AB \subset A$  olduğunu nəzərə alsaq

$$P(A\bar{B} + B\bar{A}) = P(A\bar{B}) + P(B\bar{A}) = P(A - AB) + P(B - AB) =$$

$$= P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$$

olduğunu yaza bilərik.

Beləliklə,  $P(C) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$

**Kəsilməməyənlilik teoremi 9.** İstənilən  $A_n, n \geq 1$  hadisələr ardıcılılığı üçün

$$\lim P(A_n) = P(\lim A_n)$$

bərabərliyi doğrudur.

**Kəsilməməyənlilik aksiomu.** Əgər  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  hadisələr ardıcılılığında hər bir hadisə özündən əvvəlki hadisəni doğrursa və bu hadisələrin hasili mümkün olmayan hadisədirsə, onda

$$P(A_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \text{ olduqda}$$

Yuxarıda deyilənlərdən aydın olur ki, nəzəri-ehtimal sxemlər konkret elementar hadisələr fəzası, onun cəbr təşkil edən konkret altçoxluqları sinfi və bu cəbrin çoxluqlarının ehtimalı, yəni  $\{\Omega, S, P\}$  üçlüyü ilə verilir.  $\{\Omega, S, P\}$  üçlüyünə ehtimal fəzası,  $\{\Omega, S\}$ -də təyin edilmiş  $P$  ehtimalına isə  $\Omega$  elementar hadisələr fəzasında ehtimalların paylanması deyilir.

### **6.ŞƏRTİ EHTİMAL.**

#### **6.1.ŞƏRTİ EHTİMAL ANLAYIŞI.**

Aydındır ki,  $A$  hadisəsinin  $P(A)$  ehtimalı haqqında ancaq müəyyən şərtlər kompleksi yerinə yetirildikdə, yəni sınaq aparıldıqdan sonra danışmaq olar. Sınağın aparılma şərtləri dəyişildikdə həmin sınaq dəyişir, başqa sınaq alınır və nəticədə hadisənin ehtimalı da dəyişir. Məsələn,  $A$  hadisəsinin ehtimalının hesablanmasında aparılan sınağın şərtlərinə yeni bir şərti -  $B$  hadisəsinin baş verməsi şərtində əlavə etsək, onda başqa bir ehtimal -  $B$  hadisəsinin baş verməsi şərtində  $A$  hadisəsinin şərti ehtimalını alırıq. Beləliklə, təcrübədə bir çox hallarda  $A$  hadisəsinin ehtimalını başqa bir  $B$  hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində hesablamaq lazım gəlir. Bu cür ehtimala şərti ehtimal deyilir.  $B$  hadisəsinin baş verməsi şərtində  $A$  hadisəsinin şərti ehtimalı  $P(A/B)$  kimi işarə edilir.

Tutaq ki,  $n$  elementar hadisədən  $m$ -i  $A$  hadisəsi,  $k$  saydası isə  $B$  hadisəsi üçün əlverişlidir. Onda

$$P(A) = \frac{m}{n}, P(B) = \frac{k}{n}$$

Fərz edək ki,  $B$  hadisəsi baş verdikdə  $A$  hadisəsi üçün əlverişli halların sayı  $l$ -dir. Onda klassik ehtimalın tərifinə  $A$  hadisəsinin şərti ehtimalı

$$P(A/B) = \frac{l}{k}$$

olar. Axırncı bərabərlikdə kəsrin surət və məxrəcini  $n$ -ə bölsək, şərti ehtimal

$$\text{üçün} \quad P(A/B) = \frac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

düsturunu alırıq.

$AB$  hadisəsi üçün əlverişli halların sayı  $l$ - olduğu üçün  $\frac{l}{n}$  mütləq ehtimaldır.

Beləliklə,  $B$  hadisəsinin baş verməsi şərtində  $A$  hadisəsinin şərti ehtimalı

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

kimi hesablanılır.

### 7.2. Şərti ehtimalın xassələri.

Şərti ehtimalın aşağıdakı xassələri vardır:

1.  $P(A/B) \geq 0$
2.  $P(A/\Omega) = 1$
3.  $P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$
4.  $P(\emptyset/B) = 0$
5.  $A_1 \subset A_2$  olduqda  $P(A_1/B) \leq P(A_2/B)$
6.  $0 \leq P(A/B) \leq 1$
7.  $P(A_1 \cup A_2/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B) - P(A_1 A_2/B)$

Bu xassələr mütləq ehtimalın uyğun xassələrindən alınır

**Məsələ 2.** Qutuda 3 standart və 7 qeyri-standard detal vardır. Təsadüfi olaraq iki detal götürülmüşdür.  $A =$  (birinci götürülən detal standartdır);  $B =$  (ikinci götürülən detal standartdır);  $C =$  (götürülən detallardan heç olmasa biri standartdır).

$P(B/A)$ ,  $P(A/B)$  və  $P(A/C)$  ehtimallarını hesablayın.

Həlli. Standart detalları 1, 2, 3 və qeyri-standard detalları isə 4, 5, ..., 10 rəqəmləri ilə nömrələyək. Elementar hadisələr fəzası

$$\Omega = \{\omega_{i,j} = (i, j) : i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 10\};$$

$A$  və  $B$  hadisələrinə uyğun olan altçoxluqlar isə

$$A = \{(i, j) : i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 10\}$$

$$B = \{(i, j) : i = 1, 2, \dots, 10; j = 1, 2, 3\}$$

olar. Vurma prinsipinə əsasən  $|\Omega| = 30$ ;  $|A| = 30$  və  $|B| = 30$  elementar hadisədən ibarətdir. Deməli,

$$P(A) = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{3}{10}.$$

$$AB = \{(i, j) : i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3\}$$

və bu hadisə 9 elementar hadisədən ibarətdir.

Deməli,  $P(AB) = \frac{9}{100}$

Şərti ehtimalın düsturuna əsasən

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{10}; P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3}{10}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$$

$$AB \subset A \quad AC = A(A+B) = A+AB = A$$

$$P(AC) = P(A) = \frac{3}{10}$$

$$P(A/C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = 1$$

## **8.EHTİMALIN VURMA DÜSTURU. TAM EHTİMAL DÜSTURU.BEYES DÜSTURU.**

### **8.1.EHTİMALIN VURMA DÜSTURU.**

B hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsinin  $P(A/B)$  şərti ehtimalı

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

düsturu ilə hesablanır.Buradan,  $B$  hadisəsinin  $P(B) > 0$  şərtsiz ehtimalı məlum olduqda,  $A$  və  $B$  hadisələrinin eyni zamanda baş verməsinin ehtimalını təyin etmək olar:

Fərz edək ki,  $A_1, \dots, A_n$  hadisələri

$$P(A_1) > 0, P(A_1 A_2) > 0, \dots, P[A_1 \dots A_n] > 0$$

şərtlərini ödəyir.Onda aşağıdakı düstur doğrudur:

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 A_2) \dots P(A_n / A_1 \dots A_{n-1})$$

Doğrudanda

$$P(A_1)P(A_2 / A_1) \dots P(A_n / A_1 \dots A_{n-1}) = P(A_1) \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \dots \frac{P(A_1 A_2 \dots A_n)}{P(A_1 A_2 \dots A_{n-1})} = P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

olar.

### **8.2.TAM EHTİMAL DÜSTURU**

Fərz edək ki,  $A_1, \dots, A_n$  hadisələri tam sistem təşkil edir.Onda ixtiyari  $A$  hadisəsi üçün

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/B_i)P(B_i)$$

İsbatı.Doğrudanda ehtimalın toplama və vurma düsturlarına əsasən yazıla bilər:

$$P(A) = P(A\Omega) = P\left(\sum_{i=1}^n AB_i\right) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(A/B_i)P(B_i)$$

**Məsələ 3.**Fabrikdə birinci maşının buraxdığı 100 məmulatdan orta hesabla 90-ı, ikinci maşında 95-i və üçüncü maşında 85-i yararsız olur.rayonun mağazınlarına göndərilən məhsulun 50%-i birinci, 30%-i ikinci və 20%-i üçüncü maşında hazırlanır. Alınan məhsulun yararsız olma ehtimalını təyin edin.

Həlli. Alınan məhsulun yararsız olmasını  $A$  ilə, onun  $i$ -ci maşında hazırlanmasını isə  $B_i$  ilə işarə edək.Onda

$$P(B_1) = 0.5, P(A/B_1) = 0.9,$$

$$P(B_2) = 0.3, P(A/B_2) = 0.95,$$

$$P(B_3) = 0.2, P(A/B_3) = 0.85$$

$$P(A) = 0.5 \times 0.9 + 0.3 \times 0.95 + 0.2 \times 0.85 = 0.905$$

### **8.3.BEYES DÜSTURU.**

$B$  hadisəsi  $A_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) hadisələrindən biri başverdikdə başverir və sınaq nəticəsində  $B$  hadisəsi başvermişdir. Sınaqdan əvvəl  $A_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) hadisələrinin  $P(A_k)$  ehtimalları və  $B$  hadisəsinin  $A_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) hadisələrinin hər birinə görə

$P(B/A_k)$  şərti ehtimalları məlumdur.  $B$  hadisəsinin baş verməsi  $A_k$  hadisəsinin ehtimalına necə təsir edir?

Bu məsələni həll etmək üçün

$$P(BA_k) = P(B)P(A_k / B) = P(A_k)P(B / A_k)$$

bərabərliklərindən istifadə edək.

Buradan

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k)P(B / A_k)}{P(B)}$$

bərabərliyi və tam ehtimal düsturuna əsasən

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k)P(B / A_k)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B / A_k)}, k = 1, 2, \dots, n$$

münasibəti alınır.

Axıncı bərabərliyə Bayes düsturu deyilir. Sınaqdan əvvəl hesablanan  $P(A_k)$  ehtimalları apriori (mənası "əvvəlki", burada sınaqdan əvvəlki) olan apriori latın sözündən götürülmüşdür) ehtimallar, sınaqdan sonra hesablanan  $P(A_k / B, k = 1, 2, \dots, n)$  ehtimalları isə aposteriori (mənası sonrakı) olan aposteriori latın sözündən götürülmüşdür.) ehtimallar adlanır.

Burada baxılan  $A_k, k = 1, 2, \dots, n$  hadisələrinə bəzən fərziyyələr, Bayes düsturuna isə fərziyyələr teoremi deyilir.

Bayes dusturu  $B$  hadisəsi başverdikdən sonra  $A_k, k = 1, 2, \dots, n$  hadisələrinin baş verməsi haqında fərziyyələrin ehtimallarını yenidən qiymətləndirməyə imkan verir.

**Məsələ 4.** Müəssisədə məmulat üç xəttə istehsal edilir. Bütün məmulatın 20 %-i birinci, 30 % - ikinci və 50 % -i üçüncü xəttə istehsal edilir. Bu xətlərdə istehsal edilən məmulatların uyğun olaraq 95, 98 və 97 % -i keyfiyyətli olur. Təsadüfən götürülən hər hansı məmulatın birinci, ikinci və üçüncü xəttə istehsal edilməsi eynimalını yitəblayın.

Həlli.

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1)P(B / A_1)}{P(B)} = \frac{0.05 \times 0.2}{0.031} = \frac{10}{31}$$

$$P(A_2 / B) = \frac{P(A_2)P(B / A_2)}{P(B)} = \frac{0.02 \times 0.3}{0.031} = \frac{6}{31}$$

$$P(A_3 / B) = \frac{P(A_3)P(B / A_3)}{P(B)} = \frac{0.03 \times 0.5}{0.031} = \frac{15}{31}$$

## 8. ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR.

### *İki hadisənin asılı olmaması*

Əgər  $A$  hadisəsinin baş verməsi  $B$  hadisəsinin baş verməsi ehtimalına təsir etmirsə onda deyirlər ki,  $B$  hadisəsi  $A$  hadisəsindən asılı deyildir. Başqa sözlə

$$P(B / A) = P(B)$$

olduqda deyirlər ki,  $B$  hadisəsi  $A$  hadisəsindən asılı deyildir.

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

olduğu üçün asılı olmayan hadisələr üçün

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

olar.

Tutaq ki,  $P(B) > 0$ . Eyni qayda ilə  $P(A/B) = P(A)$  olduqda deyirlər ki,  $A$  hadisəsi  $B$  hadisəsindən asılı deyildir. Buradan yenə də

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

olduğunu alırıq. Bu münasibət  $A$  və  $B$ -yə görə simmetrikdir və onların ehtimalları sıfır olduqda da mənası vardır.

$P(AB) = P(A)P(B)$  olduqda deyirlər ki,  $A$  və  $B$  hadisələri asılı və yaxud statistik asılı deyillər.

Hadisələrin asılı olmaması haqqında aşağıdakı təklifləri söyləmək olar:

**Teorem 10.**  $A$  və  $B$  asılı olmayan hadisələr olarsa, onda  $(\bar{A}, B), (A, \bar{B}), (\bar{A}, \bar{B})$  cütlərindən hər birini təşkil edən hadisələr də asılı olmaz.

İsbatı.  $A, \bar{B}$  hadisələrinin asılı olmadıqlarını göstərmək kifayətdir. Qeyd edək ki,  $A\bar{B} = A - (AB)$

$$\text{Ona görə də } P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$$

$A$  və  $B$  hadisələri asılı olmadıqlarını nəzərə alsaq

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B})$$

olduğunu yaza bilərik. Deməli,  $A$  və  $B$  hadisələri asılı olmayan hadisələrdir.

Hadisələrin asılı olmaması haqqında aşağıdakı təklifləri söyləmək olar:

a)  $P(B) > 0$  olduqda  $P(A/B) = P(A)$  bərabərliyi  $A$  və  $B$  hadisələrinin asılı olmaması üçün zəruri və kafidir.

b) Tutaq ki,  $A$  və  $B$  asılı olmayan müsbət ehtimallı hadisələrdir. Bu halda  $A$  və  $B$  uyuşandır.

Doğrudanda,  $P(AB) = 0$  olarsa,  $P(AB) = P(A)P(B) = 0$  olar. Bu isə şərtə ziddir.

c)  $A$  və  $B$  hadisələrinin asılı olmaması

$$P(A/B) = P(A/\bar{B}) = P(A)$$

bərabərliyi ilə eynigüclüdür. Burada  $0 < P(B) < 1$

Qeyd edək ki,  $A$  və  $B$  uyuşmayan hadisələr və  $P(A) > 0, P(B) > 0$  olduqda onların asılı hadisələr olar.  $A$  və  $B$  hadisələri uyuşmayan olduğu üçün

$$AB = \emptyset \text{ və } P(AB) = P(\emptyset) = 0,$$

$$0 = P(AB) = P(A)P(B) > 0$$

Beləliklə,  $A$  və  $B$  asılı hadisələrdir.

**Teorem 11.**  $A$  və  $B_1$ ;  $A$  və  $B_2$  hadisələri asılı olmayan,  $B_1$  və  $B_2$  uyuşmayan hadisələr olduqda  $A$  və  $B_1 + B_2$  hadisələri asılı olmayan hadisələrdir.

İsbatı. Doğrudan da,

$$P(A(B_1 + B_2)) = P(AB_1 + AB_2)$$

$A$  və  $B_1$  və  $AB_2$  hadisələri uyuşmayan olduqları üçün

$$P(AB_1 + AB_2) = P(AB_1) + P(AB_2) = P(A)P(B_1) + P(A)P(B_2) = \\ = P(A)[P(B_1) + P(B_2)] = P(A)P(B_1 + B_2)$$

Beləliklə,

$$P(A(B_1 + B_2)) = P(A)P(B_1 + B_2)$$

**Məsələ 5.** Metal pul iki dəfə atılır.  $A$  ilə qerb üzünün birinci,  $B$  ilə ikinci dəfə düşməsi hadisəsini işarə edək.  $A$  və  $B$  hadisələrinin asılı olmadıqlarını göstərin.

Həlli. Metal pul iki dəfə atıldıqda elementar hadisələr fəzası  $\Omega = \{GG, GR, RG, RR\}$  olar. Onda

$$A = \{GG, GR\}; B = \{GG, RG\}; AB = \{GG\}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; P(AB) = \frac{1}{4}$$

Deməli,  $P(AB) = P(A)P(B)$ . Beləliklə,  $A$  və  $B$  asılı olmayan hadisələrdir.

**Məsələ 6.** Bir zər atılmışdır. Aşağıdakı hadisələrə baxaq: a)  $A$ -düşən xalın üçə bölünməsi; b) düşən xalın cüt ədəd olması.  $A$  və  $B$  hadisələrinin asılı olmadıqlarını göstərin.

Həlli. Məsələnin şərtinə əsasən  $A = \{\omega_3, \omega_6\} = \{3, 6\}; B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{2, 4, 6\};$

$$AB = \{\omega_6\} = \{6\}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; P(AB) = \frac{1}{6}$$

Şərti ehtimalın düsturuna görə

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ . Deməli,  $P(A/B) = P(A)$ . Bu isə  $A$  və  $B$  hadisələrinin asılı olmadıqlarını göstərir.

**Məsələ 7.** (S.H. Bernşteyn). Müstəviyə birinci üz qırmızı, ikinci üz yaşıl, üçüncü üz mavi və dördüncü üz hər üç rənglə rənglənmiş tetraedr atılır. Tetraedrin müstəviyə atılışında qırmızı üzünün düşməsi hadisəsini  $Q$  ilə, yaşıl üzünün düşməsini  $Y$  ilə və mavi üzünün düşməsini  $M$  ilə işarə edək.

Hər bir üz iki rənglə rəngləndiyi üçün

$$P(Q) = P(Y) = P(M) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

olar.

$$P(QY) = P(QM) = P(YM) = \frac{1}{4}$$

Beləliklə,  $Q, Y$  və  $M$  hadisələri cüt-cüt asılı olmayan hadisələrdir. Ancaq bu hadisələr qarşılıqlı asılı hadisələrdir. Belə ki,

$$P(QYM) = \frac{1}{4} \neq P(Q)P(Y)P(M) = \frac{1}{8}$$

### ***Bir neçə hadisənin asılı olmaması***

$A_1, A_2, \dots, A_n$  hadisələrindən istənilən ikisi asılı olmadıqda onlara cüt-cüt asılı olmayan hadisələr deyilir.

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$  hadisələri üçün  $1 \leq i < j < k < \dots \leq n$  indekslərinin bütün mümkün kombinasiyaları üçün  $2^n - n - 1$  sayda

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}), 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k, k = 2, 3, \dots, n,$$

yəni

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j),$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

.....

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

bərabərlikləri ödənildikdə qarşılıqlı ( birgə) asılı olmayan hadisələr adlanır.

Qeyd edək ki, cüt-cüt asılı olmayan hadisələr qarşılıqlı asılı ola bilər. Bu mənada hadisələrin qarşılıqlı asılı olmaması anlayışı cüt-cüt asılı olmamaq anlayışından daha güclüdür. Məsələn,  $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$  eyniehtimallı elementar hadisələr fəzasında

$$A = (\omega_1, \omega_2), B = (\omega_1, \omega_3), C = (\omega_1, \omega_4)$$

hadisələri buna misal ola bilər. Doğrudan da,

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

bərabərlikləri  $A, B$  və  $C$  hadisələrinin cüt-cüt asılı olmadığını,

$$P(ABC) = P(\omega_1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

bərabərliyi isə onların qarşılıqlı asılı olduğunu göstərir.

Hadisələrin asılı olmaması haqqında aşağıdakı təklifləri söyləmək olar:

- 1)  $n$  sayda hadisələrin asılı olmaması, bu hadisələrdən istənilən saydasını onların tamamlayıcı hadisələri ilə əvəz etdikdə dəyişmir.
- 2)  $A_1, \dots, A_n$  asılı olmayan hadisələr olarsa, onlardan götürülən ixtiyari  $r$  ( $r < n$ ) sayda  $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$  hadisələri də asılı olmayacaqdır.
- 3) Asılı olmayan  $A_1, \dots, A_n$  hadisələrindən heç olmasa birinin baş vermə ehtimalı

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - [1 - P(A_1)] \dots [1 - P(A_n)]$$

kimi hesablanır.

### **Klassik ehtimal.**

**Məsələ 1.** Qutuda 10 şar vardır. Onlardan 2-si ağ, 3-ü qara, 5-i isə yaşıldır. Qutudan təsadüfi çıxarılan şarın a) ağ, b) qara, c) yaşıl olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli.  $A_1$  ilə qutudan təsadüfi qaydada çıxarılan şarın ağ,  $A_2$  ilə qara,  $A_3$  ilə yaşıl olması hadisəsini işarə edək. Mümkün halların sayı 10,  $A_1$  hadisəsi üçün əlverişli halların sayı 2,  $A_2$  üçün 3 və  $A_3$  üçün 5-ə bərabərdir.

Onda ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}, P(A_2) = \frac{3}{10}, P(A_3) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

olduğunu alırıq.

**Məsələ 2.** Birinci qutuda  $m$  ağ,  $n$  qara; ikinci qutuda isə  $k$  ağ və  $l$  qara şar vardır. Hər qutudan təsadüfi olaraq bir şar götürülür. Hər iki şarın ağ olması ehtimalını hesablayın.

Həlli. Birinci qutudan bir şar  $m+n$ , ikinci qutudan isə  $k+l$  üsulla seçilə bilər. Onda vurma prinsipinə əsasən hər iki qutudan bir şar  $(m+n)(k+l)$  üsulla seçilə bilər. Deməli mümkün halların sayı  $(m+n)(k+l)$ -ə bərabərdir.

Birinci qutudan bir ağ şar  $m$ , ikinci qutudan isə  $k$  üsulla seçilə bilər. Onda vurma prinsipinə əsasən hər iki qutudan bir ağ şar  $mxk$  üsulla seçilə bilər. Deməli əlverişli halların sayı  $mxk$ -dir. Klassik ehtimalın tərifinə əsasən axtarılan ehtimal

$$p = \frac{mk}{(m+n)(k+l)}$$

olar.

**Məsələ 3.**  $N$  nəfər təsadüfi qaydada dəyirmi masa arxasında əyləşir. İki nəfərin yan-yanə əyləşməsi ehtimalını hesablayın.

Həlli. 1-ci üsul: Mümkün halların sayı  $N!$  olar. İki nəfər yan-yanə iki üsulla, qalan  $n-2$  nəfəri isə  $(N-2)!$  üsulla yeləşdirmək olar. Deməli, əlverişli halların sayı  $2(N-2)!$ -dir.

Klassik ehtimalın tərifinə əsasən axtarılan ehtimal

$$p = \frac{2(N-2)!}{N!} = \frac{2}{N-1}$$

2-ci üsul: Tutaq ki, birinci şəxs istədiyi yerdə oturur. Onda 2-ci üçün  $N-2$  sayda yer qalır ki, onlardan isə ikisi bu şəxslərin yan-yanə əyləşməsi üçün əlverişlidir. Deməli,  $p = \frac{2}{N-1}$

**Məsələ 4.** Qutuda  $m$  ağ,  $n$  qara şar vardır ( $m \geq 3, n \geq 4$ ). Qutudan təsadüfi olaraq yeddi şar çıxarılmışdır. Çıxarılmış şarlardan üçünün ağ və dördünün qara olması ehtimalını hesablayın.

Həlli. Mümkün halların sayı  $m+n$  şardan yeddi şarın çıxarılması üsullarının sayına bərabərdir, yəni  $C_{m+n}^7$ .

Əlverişli halların sayını tapaq:  $n$  ağ şardan üçünü  $C_n^3$  üsulla,  $m$  qara şardan dördünü isə  $C_m^4$  üsulla seçmək olar. Vurma prinsipinə əsasən əlverişli halların sayı  $C_n^3 C_m^4$  olacaqdır.

Axtarılan ehtimal hadisə üçün əlverişli halların sayının mümkün halların sayına nisbətində bərabərdir.

$$p = \frac{C_n^3 C_m^4}{C_{m+n}^7}$$

**Məsələ 5.** Qutuda  $m$  ağ,  $n$  qara şar vardır .Qutudan təsadüfi olaraq bir şar çıxarılır və kənara qoyulur. Çıxarılan şar ağ rənglidir.Bundan sonra qutudan təsadüfi olaraq bir şar da çıxarılır.Bu şarın ağ rəngli olması ehtimalını tapın.

Həlli. Çıxarılan ağ şar kənara qoyulduğu üçün qutuda qalan  $m+n-1$  şayda şardan  $m-1$  saydası ağ rəngli olar.Deməli, mümkün halların sayı  $m+n-1$ , əlverişli halların sayı isə  $m-1$ -ə bərabərdir.Tərifə əsasən axtarılan ehtimal

$$p = \frac{m}{n} = \frac{m-1}{m+n-1}$$

**Məsələ 6.** Qutuda  $m$  ağ,  $n$  qara şar vardır .Qutudan bir şar qalanadək bütün şarlar çıxarılır .Qutuda qalan şarın ağ rəngli olması ehtimalını tapın.

Həlli. $m+n$  şardan  $m+n-1$  şarı  $C_{m+n}^{m+n-1} = m+n$  üsulla çıxarmaq olar.Qutuda bir ağ şarın qalması üçün qutudan  $m-1$  ağ və  $n$  qara şar şıxarılmalıdır.Bunu isə  $C_m^{m-1}C_n^n = m$  üsulla etmək olar.Ehtimalın klassik tərifinə əsasən axtarılan ehtimal

$$p = \frac{m}{m+n}$$

**Məsələ 7.** Qutuda  $m$  ağ,  $n$  qara şar vardır ( $m \geq 2, n \geq 2$ )Qutudan təsadüfi olaraq iki şar çıxarılmışdır.

- a) A-şarların eyni rəngli olması;
- b) B- şarların müxtəlif rəngli olması.

Hadisələrinin ehtimallarını tapın.

$$\text{Həlli. } P(A) = \frac{C_m^2 + C_n^2}{C_{m+n}^2} = \frac{n(n-1) + m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)} \quad P(B) = \frac{C_n^1 C_m^1}{C_{m+n}^2} = \frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}$$

**Məsələ 8.**  $N$  sayda əşyadan  $N_i, i=1,2,...,r$  saydası  $i$ -ci növdür.Təsadüfi götürülən  $n$  əşyadan  $n_i, i=1,2,...,r$  saydasının  $i$ -ci növ əşya olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli.  $N$  sayda əşyadan  $n$  sayda əşya  $C_N^n$  üsulla seçilə bilər.Deməli, mümkün halların sayı  $C_N^n$ -dir.

Əlverişli halların halların sayı vurma prinsipinə əsasən

$$C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2} ... C_{N_r}^{n_r}$$

olar.Beləliklə, axtarılan ehtimal

$$p = \frac{C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2} ... C_{N_r}^{n_r}}{C_N^n}$$

olar.Xüsusi halda  $r=2$  olarsa,

$$p = \frac{C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2}}{C_N^n}$$

### Şərti ehtimal.

**Məsələ 1.**müəssisədə məmumat üç xəttə istehsal edilir.Bütün məmumatın 20 %-i birinci, 30 % - iknci və 50 % -i üçüncü xəttə istehsal edilir. Bu xətlərdə istehsal edilən məmumatların uyğun olaraq 95, 98 və 97 % -i keyfiyyətli olur.Təsadüfən götürülən hər hansı məmumatın yararsız olma ehtimalını tapın.

Həlli.  $A_1, A_2, A_3$  ilə təsadüfən götürülən hər hansı məmulatın uyğun olaraq birinci, ikinci və üçüncü xəttə istehsal istehsal edildiyini işarə edək. Məsələnin şərtinə əsasən,  $P(A_1) = 0.2; P(A_2) = 0.3; P(A_3) = 0.5$

$A_1, A_2, A_3$  hadisələri tam sistem təşkil edir. Bu hadisələr cüt-cüt asılı olmadıqları üçün  $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$ .  $B$  ilə təsadüfən götürülən hər hansı məmulatın yararsız olması hadisəsinə işarə edək. Məsələnin şərtinə əsasən

$$P(B/A_1) = 0.05; P(B/A_2) = 0.02; P(B/A_3) = 0.03$$

Tam ehtimal düsturuna görə

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3) = \\ = 0.05 \times 0.2 + 0.02 \times 0.3 + 0.03 \times 0.5 = 0.031$$

Deməli, təsadüfən götürülən hər hansı məmulatın yararsız olma ehtimalı 0.031-ə bərabərdir.

**Məsələ 2.** Qutuda 3 standart və 7 qeyri-standard detal vardır. Təsadüfi olaraq iki detal götürülmüşdür.  $A =$  (birinci götürülən detal standartdır);  $B =$  (ikinci götürülən detal standartdır);  $C =$  (götürülən detallardan heç olmasa biri standartdır).  $P(B/A)$ ,  $P(A/B)$  və  $P(A/C)$  ehtimallarını hesablayın.

Həlli. Standart detalları 1, 2, 3 və qeyri-standard detalları isə 4, 5, ..., 10 rəqəmləri ilə nömrələyək. Elementar hadisələr fəzası

$$\Omega = \{\omega_{i,j} = (i, j) : i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 10\};$$

$A$  və  $B$  hadisələrinə uyğun olan altçoxluqlar isə

$$A = \{(i, j) : i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 10\}$$

$$B = \{(i, j) : i = 1, 2, \dots, 10; j = 1, 2, 3\}$$

olar. Vurma prinsipinə əsasən  $\Omega$  -100;  $A$  və  $B$  isə 30 elementar hadisədən ibarətdir. Deməli,

$$P(A) = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{3}{10}.$$

$AB = \{(i, j) : i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3\}$  və bu hadisə 9 elementar hadisədən ibarətdir.

Deməli,  $P(AB) = \frac{9}{100}$

Şerti ehtimalın düsturuna əsasən

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{10}; P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3}{10}$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$$

$$AB \subset A \quad AC = A(A+B) = A+AB = A$$

$$P(AC = P(A)) = \frac{3}{10}$$

$$P(A/C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = 1$$

**Tam ehtimal düsturu.**

**Məsələ 2.** n sayda eyni cür qutu vardır.i-ci qutuda olan  $N_i$  sayda şardan  $n_i$  saydası ağ rənglidir.Təsadüfi seçilən qutudan götürülən şarın ağ rəngli olması hadisəsinin ehtimalını hesablayın.

Həlli. $H_i$  ilə i-ci qutunun seçilməsi, A ilə qutudan götürülmüş şarın ağ rəngli olması hadisəsini işarə edək.Onda

$$P(H_i) = \frac{1}{n} , \quad P(A/H_i) = \frac{n_i}{N_i}$$

olar.

Onda ehtimalın tam düsturuna əsasən

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i}$$

**Məsələ 3.**N sayda imtahan biletindən n saydası “ uğurludur”. Tələbələr növbə ilə bilet çəkirlər.Bilet çəkmiş iki tələbədən hansına “uğurlu” bilet düşməsi hadisəsinin ehtimalı böyükdür?

Həlli.Birinci tələbəyə “uğurlu” bilet düşməsi hadisəsinin ehtimalı  $\frac{n}{N}$ -dir.A ilə ikinci tələbənin “uğurlu” bilet çəkməsi hadisəsini işarə edək.  $H_1$  ilə birinci tələbənin“uğurlu” bilet çəkməsi ,  $H_2$  ilə “uğurlu” bilet çəkməməsi hadisəsini işarə edək. Tam ehtimal düsturuna əsasən

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{n}{N} \times \frac{n-1}{N-1} +$$

$$\frac{N-n}{N} \times \frac{n}{N-1} = \frac{n}{N}$$

Deməli, hər iki tələbənin “uğurlu” bilet çəkməsi hadisəsinin ehtimalı eynidir.

**Məsələ 4.**n sayda eyni cür qutu vardır.i-ci qutuda olan  $N_i$  sayda şardan  $n_i$  saydası ağ rənglidir.Təsadüfi seçilən qutudan götürülən şarın ağ rəngli olması hadisəsinin ehtimalını hesablayın.

Həlli. $H_i$  ilə i-ci qutunun seçilməsi, A ilə qutudan götürülmüş şarın ağ rəngli olması hadisəsini işarə edək.Onda

$$P(H_i) = \frac{1}{n} , \quad P(A/H_i) = \frac{n_i}{N_i}$$

olar.

Onda ehtimalın tam düsturuna əsasən

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i}$$

**Məsələ 5.** 818 nəfərdən 276-na vəbaya qarşı peyvənd edilmişdir.Cəmi 69 nəfər , o cümlədən üç nəfər peyvənd edilən vəba xəstəliyinə tutulmuşdur.Təsadüfi götürülən bir şəxsin peyvənd edildiyi məlum olur.Bu peyvənd edilmiş şəxsin xəstə olması ehtimalını tapın.

Həlli. Fərz edək ki, Q - təsadüfi götürülən bir şəxsin peyvənd edilməsi, A isə onun xəstə olması hadisəsidir.Məsələnin şərtinə görə yaza bilərik:

$$P(A) = \frac{69}{818}, P(Q) = \frac{275}{818}, P(AQ) = \frac{3}{818}$$

Axtarılan şərti ehtimal

$$p(A/Q) = \left( \frac{3}{818} : \frac{276}{818} \right) = \frac{3}{276} = \frac{1}{92}$$

olar.

### Beyes düsturu

**Məsələ 1.** müəssisədə məmulat üç xəttə istehsal edilir. Bütün məmulatın 20 %-i birinci, 30 % - ikinci və 50 % -i üçüncü xəttə istehsal edilir. Bu xətlərdə istehsal edilən məmulatların uyğun olaraq 95, 98 və 97 % -i keyfiyyətli olur. Təsadüfən götürülən hər hansı məmulatın birinci, ikinci və üçüncü xəttə istehsal edilməsi eynimalını ytsablayın.

$$\begin{aligned} \text{Həlli.} \quad P(A_1/B) &= \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \frac{0.05 \times 0.2}{0.031} = \frac{10}{31} \\ P(A_2/B) &= \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{0.02 \times 0.3}{0.031} = \frac{6}{31} \\ P(A_3/B) &= \frac{P(A_3)P(B/A_3)}{P(B)} = \frac{0.03 \times 0.5}{0.031} = \frac{15}{31} \end{aligned}$$

**Məsələ 1.** İki müxtəlif fabrik eyni məmulat istehsal edirlər. Birinci fabrikdə istehsalın həcmi ikinci fabriyə nisbətən  $n$  dəfə çoxdur. Birinci fabrikdə məmulatın  $p_1$  hissəsi, ikinci fabrikdə isə  $p_2$  hissəsi yararsız olur. Təsadüfi götürülən məmulatın yararsız olduğu məlum olur. Bu məmulatın birinci fabrikdə istehsal edilməsi hadisəsinin ehtimalını hesablayın.

Həlli.  $H_1$  ilə məmulatın birinci fabrikdə,  $H_2$  ilə məmulatın ikinci fabrikdə istehsal edilməsi hadisəsini işarə edək.

$$P(H_1) = \frac{n}{n+1} \quad P(H_2) = \frac{1}{n+1}$$

$B$  ilə təsadüfi götürülən məmulatın yararsız olması hadisəsini işarə edək. Məsələnin şərtinə əsasən

$$P(B/H_1) = p_1, P(B/H_2) = p_2$$

Onda Bayes düsturuna əsasən

$$p(H_1/B) = \frac{\frac{n}{n+1} \times p_1}{\frac{n}{n+1} \times p_1 + \frac{1}{n+1} \times p_2} = \frac{np_1}{np_1 + p_2}$$

tam ehtimal düsturu ilə hesablanır.

**Məsələ 2.** Cihazın etibarlılığı müntəzəm işləyən cihazların hissəsi ilə xarakterizə edilir. Cihazın etibarlılığı haqqında iki mülahizə yürütmək olar: cihazı hazırlayan zavod üçün etibarlılıq 0.95 və sınaq laboratoriyaya üçün 0.8-ə bərabərdir. İstehlakçı tərəfindən aparılmış sınağın nəticəsinə əsasən hansı xarakteristikaya üstünlük verilməlidir?

Həlli.  $H_1$  və  $H_2$  ilə zavod və laboratoriyanın verdiyi məlumatların doğru olduğu haqqında fərziyyələri işarə edək. Hər iki fərziyyənin eyni ehtimalı olduğunu qəbul edək.  $P(H_1) = P(H_2) = 0.5$ .

Cihazlardan hər hansı biri sınaqdan keçirilir. A ilə cihazın sınaqdan çıxması və  $\bar{A}$  ilə isə sınaqdan çıxmaması hadisəsini işarə edək. Məsələnin şərtinə görə

$$P(A/H_1) = 0.95; P(A/H_2) = 0.8; P(\bar{A}/H_1) = 0.05; P(\bar{A}/H_2) = 0.2$$

Beyes düsturuna əsasən

$$P(A/H_1) = \frac{0.95}{0.95 + 0.8} = 0.54; P(A/H_2) = \frac{0.8}{0.95 + 0.8} = 0.46;$$

$$P(\bar{A}/H_1) = \frac{0.05}{0.05 + 0.2} = 0.2; P(\bar{A}/H_2) = \frac{0.2}{0.05 + 0.2} = 0.8.$$

Beləliklə, 0.8 ehtimalı ilə  $H_2$  fərziyyəsinə üstünlük verilməlidir.

### ***MÖVZU 3. TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTİLƏR.***

#### **P L A N**

- 1.TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏT ANLAYIŞI.***
- 2.TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTİN PAYLANMA FUNKSİYASI***
- 3.PAYLANMA FUNKSİYASININ XASSƏLƏRİ.***
- 4. DİSKRET VƏ KƏSİLMƏZ PAYLANMALAR***
- 4.1. Diskret paylanmalar.Diskret təsadüfə kəmiyyətin payklanma qanunu.***
- 4.2.Kəsilməz paylanmalar.Sıxlıq funksiyası və onun xassələri.***
- 5. TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTDƏN ASILI FUNKSİYALAR.***

#### **Ə D Ə B İ Y Y T S İ Y A H I S I .**

- 1.Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, "Maarif nəşriyyatı", 1973.
2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasimov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çarşıoğlu, 2006.

#### ***1.TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏT ANLAYIŞI.***

Hadisə və onun ehtimalı kimi təsadüfə kəmiyyət anlayışı da ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir.Hər bir sınağın nəticəsinə təsadüfə kəmiyyət kimi baxa bilərik.Təsadüfə kəmiyyət, baxılan hadisəni keyfiyyət və kəmiyyətə xarakterizə edən və təsadüfə amillərin təsiri ilə bu və ya digər şəkildə müxtəlif qiymətlər ala bilən kəmiyyətlərdir.Təsadüfə kəmiyyətin hansı qiymət alacağını qabaqcadan qəti demək mümkün deyildir.Onun hər bir sınaqda aldığı qiymətlər müxtəlif səbəb və təsadüflərdən asılı olaraq dəyişir.

Sınağın nəticəsini keyfiyyətə xarakterizə etmək o deməkdir ki, sınaq zamanı konkret əlamət

fakt qeyd olunur və onun nəticəsinin əlamətə malik olub- olmadığı müəyyənləşdirilir.Qeydə alınan bu əlamət hadisə adlanır və deyirlər : “hadisə baş verdi”, ya da “hadisə baş vermədi”.

Sınağın nəticəsini kəmiyyətə xarakterizə etmək o deməkdir ki, sınaq zamanı hər hansı kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlər müəyyən olunur, belə ki, həmin qiymətləri sınağa qədər təyin etmək mümkün deyildir.Belə kəmiyyətlər təsadüfi adlanır.

Deməli, təsadüfəli kəmiyyət sınaq nəticəsində bu və ya digər qiymət ala biləcək dəyişən kəmiyyətdir.

**Misal 1.** Bir zəri bir dəfə atmaqdan ibarət olan sınaqda yuxarı düşən üzdəki xallar sayını  $X$  ilə işarə edək.  $X$  - təsadüfəli kəmiyyətdir. Bu kəmiyyət 1,2,3,4,5,6 qiymətlərinin birini ala bilər, lakin hansı qiyməti alacağını qabaqcadan demək mümkün deyildir.

**Misal 2.** Müəyyən zaman müddətində telefon stansiyasına gələn siqnalların sayı təsadüfəli kəmiyyətdir. Bu kəmiyyət 0,1,2,... qiymətlərinin hər birini ala bilər.

**Misal 3.** İstənilən bir tələbənin boyunun uzunluğu və ya çəkisi təsadüfəli kəmiyyətdir. Bu kəmiyyət hər hansı sonlu intervaldakı bütün qiymətləri ala bilər.

**Misal 4.** Doğulan uşaqlar içərisində oğlanların sayı təsadüfəli kəmiyyətdir. 0, 0,1,2,..., 100 qiymətlərini alır.

Misallardan aydındır ki, sınaqları kəmiyyətcə xarakterizə edən təsadüfəli  $X$  kəmiyyətin qabaqcadan hansı qiymətləri alacağını qəti demək mümkün deyildir. Təsadüfəli kəmiyyətin ancaq ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu göstərilir. Bu qiymətlər sonlu, hesabi və qeyri hesabi çoxluq təşkil edə bilər. Əgər təsadüfəli kəmiyyət sonlu və ya hesabi sayda izolə edilmiş  $x_1, x_2, \dots$  qiymətlərini ala bilirsə, ona diskret təsadüfəli kəmiyyət deyilir. Birinci iki misalda baxılan  $X$  kəmiyyəti diskret təsadüfəli kəmiyyətdir. Təsadüfəli kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlər hər hansı sonlu və ya sonsuz intervalı təşkil edərsə, ona kəsilməz təsadüfəli kəmiyyət deyilir. Üçüncü misalda baxılan təsadüfəli kəmiyyət kəsilməz təsadüfəli kəmiyyətdir.

Diskret və kəsilməz olmayan təsadüfəli kəmiyyətlər də vardır. Bundan başqa, bir intervalda kəsilməz olan təsadüfəli kəmiyyət başqa bir intervalda diskret ola bilər.

Tutaq ki, metal pul iki dəfə atılır. Bu sınağın riyazi modelini quraq. Sınağın nəticələri olan elementar hadisələr aşağıdakı kimi olar:  $\omega_1 = GG$  (hər iki metal pulda qərb üzünü düşmüşdür);  $\omega_2 = GP$ ,  $\omega_3 = (RG)$ ,  $\omega_4 = (RR)$ . Beləliklə, elementar hadisələr fəzası  $\Omega = \{GG, GP, RG, RR\}$  şəklində olar.

$X$  ilə metal pulu iki dəfə atdıqda qərb üzünün düşməsi sayını işarə edək.  $X = X(\omega)$  kəmiyyəti elementar hadisənin funksiyasıdır:

$$X(\omega_1) = X(GG) = 2, X(\omega_2) = X(GP) = 1, X(\omega_3) = X(RG) = 1, X(\omega_4) = X(RR) = 2$$

Sınağın nəticəsi təsadüfdən asılı olduğu üçün  $X = X(\omega)$ -nin qiymətləri təsadüfəli kəmiyyətdir.  $X = X(\omega)$  funksiyası  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$  elementar hadisələr fəzasında təyin edilmiş təsadüfəli kəmiyyətdir.

Metal pul simmetrik olduqda elementar hadisələr eyniimkanlı olduğu üçün sınağın riyazi modelində  $P(\omega_i), i=1,2,3,4$  ehtimallarının  $\frac{1}{4}$  olduğunu qəbul etmək təbii. Bu ehtimallar məlum olduqda  $X$  təsadüfəli kəmiyyətinin bu və ya digər qiymət alması hadisəsinin ehtimalını hesablamaq olar. Məsələn,  $A = \{\omega: X(\omega)=1\}$  hadisəsinin ehtimalını hesablayaq. Bu hadisə  $\omega_2 = GP$ ,  $\omega_3 = (RG)$  hadisələrindən biri baş verdikdə baş verir. Yəni,  $A = \{GP, RG\}$ . Onda  $P\{\omega: X(\omega)=1\} = P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

**Misal 5.** Oyun zəri bir dəfə atılır. Bu zaman elementar hadisələr fəzası  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$  olar. Zərin yuxarı düşən üzündəki xalların sayı-  $X$  təsadüfə kəmiyyəti elementar hadisənin funksiyasıdır və  $X(\omega_i) = i, \omega = \omega_i, i = 1, 2, \dots, 6$

**Misal 6.** Metal pul gerb üzü düşənə qədər atılır. Bu halda  $\Omega = \{G, PG, PPG, \dots, PPP \dots PQ, \dots\} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$

Tutaq ki,  $X$  -zərin atılma sayıdır. Onda  $X$  -n qiyməti elementar hadisənin funksiyasıdır və  $X(\omega) = n, \omega = \omega_n, (n = 1, 2, \dots)$

**Misal 7.** Texniki qurğunun saz işləmə müddətinin təyin edilməsindən ibarət olan sınağa baxaq. Tutaq ki,  $t = 0$  anında işə salınan qurğunun  $T$  anına qədər sıradan çıxması əvvəlcədən məlumdur və  $t + \Delta < T$  olduqda  $t$  anında saz vəziyyətdə olan qurğunun  $t + \Delta$  anına kimi sıradan çıxma ehtimalı  $t$ -dən asılı deyil və  $\Delta$  ilə mütənasibdir. Deməli,  $[0, T]$  zaman kəsiyinin istənilən anında texniki qurğunun sıradan çıxması eyniehtimallıdır. Bu sınağın riyazi modelini quraq.

$\omega_t$  ilə elementin  $t$  müddətinə qədər qurğunun saz işləməsi və  $t(0 \leq t \leq T)$  anında sıradan çıxması elementar hadisəsini işarə edək. Qurğunun sıradan çıxma təsadüfə anı -  $X$ ,  $\omega_t$  elementar hadisəsinin funksiyasıdır,  $X(\omega_t) = t$

$\Omega = \{\omega_t, 0 \leq t \leq T\}$  elementar hadisələr çoxluğu diskret çoxluq deyildir. Onun elementlərini nömrələmək olmaz. Bu cür çoxluqlara qeyri hesabi çoxluqlar deyilir.  $F$   $\sigma$ -cəbrini mümkün  $\{\omega_t : t \in \Delta\}$  hadisələr çoxluğu kimi təyin edək. Burada  $\Delta$  ilə  $[0, T]$  parçasına daxil olan hadisələrin sonlu və yaxud hesabi sayda cəmləri və hasilləri işarə edilmişdir.  $F$   $\sigma$ -cəbrində ehtimalı təyin edək.  $A = \{\omega_t : t \in \Delta \subset [0, T]\}$  olduqda  $P(A) = \frac{|\Delta|}{T}$  götürək. Burada  $|\Delta|$ ,  $\Delta$  intervalının uzunluğudur.

Baxılan misallar göstərir ki, təsadüfə kəmiyyətə stoxastik sınağın elementar hadisələr fəzasında təyin edilmiş funksiya kimi baxmaq olar. Elementar hadisələr fəzası sonlu və ya hesabi çoxluq olduqda burada təyin edilmiş istənilən funksiya təsadüfə kəmiyyətdir. Ancaq elementar hadisələr fəzası qeyri hesabi çoxluq olduqda  $\Omega$ -da təyin edilmiş istənilən funksiya təsadüfə kəmiyyət kimi baxmaq olmaz.

Bir çox məsələlərin həllində təsadüfə kəmiyyətə elementar hadisələrin funksiyası kimi baxmağa ehtiyac yoxdur. Bu halda təsadüfə kəmiyyətlə bağlı hadisələrin ehtimalını bilmək kifayətdir. Beləliklə, ədəd oxunun kifayət qədər geniş  $\{B\}$  çoxluqlar sinfi üçün  $\{\omega : X(\omega) \in B\}$  təsadüfə hadisələri  $F$   $\sigma$ -cəbrinə daxil olmalıdır. Bu halda  $P(\omega : X(\omega) \in B)$  ehtimalına baxmaq olar.  $\{\omega : X(\omega) \in B\}$  şərtinin ödənilməsi üçün isə  $\{\omega : X(\omega) \in (-\infty, x)\} = \{\omega : X(\omega) < x\}$  çoxluğunun  $F$   $\sigma$ -cəbrinə daxil olması kifayətdir.

Tutaq ki, hər hansı  $(\Omega, F, P)$  ehtimal fəzası verilmişdir. Bu o deməkdir ki,  $\Omega$  elementar hadisələr fəzası, onun  $\sigma$ -cəbr olan  $F$  hadisələr sistemi və bu sistem üzərində təyin edilmiş  $P(A)$  ehtimalı göstərilmişdir. Tutaq ki,  $X = X(\omega)$  elementar hadisələr fəzasında təyin edilmiş funksiya, x isə istənilən həqiqi ədəddir.  $\Omega$  çoxluğunun  $X(\omega) < x$  şərtini ödəyən bütün  $\omega$  elementləri çoxluğunu  $\{\omega : X(\omega) < x\}$  və ya qısaca olaraq  $\{X < x\}$  ilə işarə edək.

**Tərif 1.**  $\Omega$  elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş və istənilən həqiqi  $x$  ədədi üçün

$$\Omega_x = \{\omega / X(\omega) < x\} \subset F$$

şərtini ödəyən  $X = X(\omega)$  funksiyasına təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Təsadüfi kəmiyyətləri latın əlifbasının böyük hərfləri,  $X, Y, Z, \dots$  onların ala biləcəyi qiymətləri isə kiçik  $x, y, z, \dots$  ilə işarə edəcəyik.

Elementar hadisələr fəzası sonlu olduqda təsadüfi kəmiyyət elementar hadisələrdə aldığı qiymətlə təyin edilir. Aşağıdakı cədvəldə elementar hadisələr, onların ehtimalları və 1-ci misaldakı təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri verilmişdir.

| I             | 1             | 2             | 3             | 4             |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\omega_i$    | GG            | GP            | PG            | PP            |
| $P(\omega_i)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $X(\omega_i)$ | 2             | 1             | 1             | 0             |

Cədvəldən göründüyü kimi, təsadüfi kəmiyyət müxtəlif elementar hadisələrdə eyni qiymət ala bilər. Baxılan misalda  $X(\omega_2) = X(\omega_3) = 1$

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, bir çox hallarda təsadüfi kəmiyyətə elementar hadisələrin funksiyası kimi baxmaq əvəzinə bu təsadüfi kəmiyyətlə bağlı hadisələrin ehtimalını bilmək, yəni onun paylanma qanununu bilmək kifayətdir. Sonlu və ya hesabi sayda intervalların birləşməsi və yaxud kəsişməsindən ibarət olan həqiqi ədədlər çoxluğunun istənilən  $B$  çoxluğu üçün  $P\{\omega: X(\omega) \in B\}$  ehtimalı verildikdə deyirlər ki,  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu verilmişdir.

## 2. TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTİN PAYLANMA FUNKSIYASI

Təsadüfi kəmiyyətləri ancaq onların ala bildiyi qiymətlər çoxluğunu göstərməklə təyin etmək mümkün deyildir. Belə ki, qiymətlər çoxluğu eyni olan, lakin bu qiymətləri müxtəlif ehtimallarla alan müxtəlif təsadüfi kəmiyyətlər vardır. Buna görə də, təsadüfi kəmiyyətin verilməsi üçün onun ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu və həm də bu qiymətləri hansı ehtimalla aldığı göstərilməlidir.

Bu məqsədlə təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasına baxılır.

İstənilən həqiqi  $x$  üçün  $\Omega_x$  çoxluğu  $\sigma$ -cəbr olan  $F$  sisteminə daxil olduğundan, onun ehtimalı təyin olunmuşdur. Bu ehtimala  $F_x$  -  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin  $x$ -dən kiçik qiymət alması hadisəsinin ehtimalına həmin kəmiyyətin paylanma funksiyası deyilir və

$$F(x) = P(X < x)$$

kimi işarə edilir.

**Misal 8.** Tutaq ki, metal pul bir dəfə atılır. Bu halda  $\Omega = \{G, P\} = \{\omega_1, \omega_2\}$ ;  $F$  -  $\Omega$ -nin bütün alt çoxluqlar çoxluğudur,  $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2}$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \omega_1 \\ 0, & \omega = \omega_2 \end{cases} ; \quad \{\omega: X(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & x \leq -1; \\ \omega_2, & -1 < x < 1; \\ \Omega, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{1}{2}, & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

### 3. PAYLANMA FUNKSIYASININ XASSƏLƏRİ.

1. Paylanma funksiyasının qiymətlər oblastı  $[0,1]$  parçasıdır:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

Bu xassə paylanma funksiyasının  $\{X < x\}$  hadisəsinin ehtimalı, hadisənin ehtimalının isə mənfi olmayan və vahidi aşmayan ədəd olmasından alınır.

Verilmiş təsadüfi kəmiyyətlə bağlı olan bir çox hadisələrin ehtimalını həmin təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası vasitəsilə hesablamaq olar.

2.  $X = X(\omega)$  təsadüfi kəmiyyətinin  $[x_1, x_2]$  yarımintervalında qiymət alması hadisəsinin ehtimalı paylanma funksiyasının  $x_2$  və  $x_1$  nöqtələrindəki qiymətləri fərqinə bərabərdir:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$X = X(\omega)$  təsadüfi kəmiyyətinin  $x_2$ -dən kiçik qiymət alması hadisəsini iki uyuşmayan hadisənin cəmi şəklində göstərək:

$$\{X < x_2\} = \{X < x_1\} + \{x_1 \leq X < x_2\}$$

Onda ehtimalların toplanma qanununa görə

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2),$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

olar. Buradan isə 2-ci xassə alınır.

3. Paylanma funksiyası azalmayıdır.

Doğrudan da, hadisənin ehtimalı mənfi ədəd olmadığından, istənilən  $x_1 < x_2$  üçün  $F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq x < x_2) \geq F(x_1)$ .

Beliliklə,

$$F(x_2) - F(x_1) \geq 0, F(x_2) \geq F(x_1)$$

4.  $P(X \geq x) = 1 - F(x)$

$\{X \geq x\}$  hadisəsi  $\{X < x\}$  hadisəsinin tamamlayanı olduğu üçün

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x)$$

5.  $x \rightarrow \infty$  olduqda  $F(x) \rightarrow 1$

Tutaq ki,  $x_n, n \geq 1$  artan ardıcılıqdır və  $x_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$  olduqda.  $A_n, n \geq 1$  uyuşmayan hadisələr ardıcılığına baxaq:

$$A_1 = \{X < x_1\}, A_n = \{x_{n-1} \leq X < x_n\}, n = 2, 3, \dots$$

Aydındır ki,  $\{X < x_n\}$  hadisəsini  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hadisələrinin cəmi şəklində göstərmək olar:

$$\{X < x\} = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Onda ehtimalların toplanma qanununa görə

$$F(x_n) = P(X < x_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Aydındır ki,  $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Ehtimalın Kolmoqorov aksiymlarına görə

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$$

olduğunu alırıq.

6.  $x \rightarrow -\infty$  olduqda,  $F(x) \rightarrow 0$

Tutaq ki,  $x_n, n \geq 1$  monoton azalan ardıcılıqdır və  $x_n \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty$  olduqda.  $A_n = (X \prec x_n), n \geq 1$  hadisələr ardıcılığı kəsilməyənlik aksiomunun şərtlərini ödəyir:

$$A_1 \supset A_2 \dots \supset A_n \supset \dots \text{ və } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$$

$$\text{Onda } F(x_n) = P(A_n) \rightarrow P(\emptyset) = 0$$

7. Paylanma funksiyası istənilən nöqtədə soldan kəsilməyəndir, yəni istənilən  $x$  nöqtəsində

$$F(x - \Delta) \rightarrow F(x - 0) = F(x), x \rightarrow +\Delta$$

bərabərliyi ödənilir.

Monoton azalan  $0 \leq \Delta_n, n \geq 1$  ardıcılığına baxaq və  $A_n = \{x - \Delta_n \leq X \prec x\}, n \geq 1$  işarə edək. Aydındır ki,  $A_{n+1} \subset A_n$  və istənilən  $n$  üçün  $x - \Delta_n \leq X \prec x$  şərtini ödəyən  $\omega \in \Omega$  olmadığı üçün  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ . Kəsilməyənlik aksiomuna görə  $P(A_n) \rightarrow P(\emptyset) = 0$ .

2-ci xassəyə əsasən  $P(A_n) = F(x) - F(x - \Delta_n)$ . Beləliklə, axırıncı bərabərliyin hər iki tərəfində  $n \rightarrow \infty$  olmaqla limitə keçsək

$$F(x - \Delta_n) \rightarrow F(x), \Delta_n \rightarrow +0$$

olduğunu alırıq.

Bu xassələr paylanma funksiyasını tamamilə təyin edir. İsbat etmək olar ki, verilmiş  $F(x)$  funksiyasının müəyyən  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası olması üçün onun 1,3,5,6,7 xassələrini ödəməsi zəruri və kafidir. Bu təklifdən aşağıdakı nəticə alınır:

**Nəticə.** Həqiqi dəyişənli  $f(x)$  funksiyası

$$f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\text{şərtlərini ödədikdə } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

funksiyası paylanma funksiyasıdır.

Hər bir təsadüfi kəmiyyət öz paylanma funksiyasını birqiymətli təyin edir. Lakin paylanma funksiyasının verilməsilə təsadüfi kəmiyyət birqiymətli təyin edilmir. Hər təsadüfi kəmiyyətin ancaq bir paylanma funksiyası olduğu halda, bir funsiya müxtəlif təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyası ola bilər.

#### 4. DİSKRET VƏ KƏSİLMƏZ PAYLANMALAR.

Təsadüfi kəmiyyətin tamamilə təyin olunması üçün onun aldığı qiymətlər çoxluğu və bu qiymətləri hansı ehtimalla alması göstərilməlidir. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası bu mənada onu tamamilə xarakterizə edən ən universal vasitələrdən biridir. Təsadüfi kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlərlə, bu qiymətlərə uyğun ehtimallar arasında əlaqə başqa üsullarla da verilə bilər.

Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri ilə onlara uyğun ehtimallar arasında əlaqə yaradan hər bir münasibətə təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu deyilir. Təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunları müxtəlif formalarda olsa da, onların hamısından paylanma funksiyasını almaq həmişə mümkün olmalıdır. Təsadüfi kəmiyyətin ehtimalının paylanma qanunu bir sıra hallarda daha aydın və əlverişli şəkillərdə verilir. Bunların iki əsas növü ilə tanış olaq.

#### 4.1. Diskret paylanmalar. Diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu.

Tutaq ki, təsadüfi  $X$  kəmiyyətinin aldığı sonlu və ya hesabi sayda  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  qiymətləri və bu qiymətləri alma ehtimalları

$$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

verilmişdir. Cüt-cüt uyuşmayan

$$\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots, \{X = x_n\}, \dots$$

hadisələri tam sistem təşkil etdiyindən  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$  şərti ödənilir.

Diskret təsadüfi  $X$  kəmiyyətinin aldığı  $x_1, x_2, \dots$  qiymətlərinin və bu qiymətləri almasının  $P(X = x_i) = p_i$  ehtimallarının göstərilməsi onun paylanma qanununu təyin edir. Diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu cədvəl şəklində verilir:

|       |       |     |
|-------|-------|-----|
| $x_1$ | $x_2$ | ... |
| $p_1$ | $p_2$ | ... |

Bu cədvələ diskret təsadüfi kəmiyyətin ehtimallarının paylanma cədvəli deyilir.

Diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu cədvəl şəklində verildikdə onun paylanma funksiyası

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

kimi tapılır.  $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$  funksiyası  $x_i$  nöqtəsində kəsiləndir və bu nöqtədə sıçrayışı  $p_i$  ədədinə bərabərdir:

**Məsələ 9.**  $X$  diskret təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu aşağıdakı kimidir:

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | 2   | 3   | 6   | 7   |
| $p$ | 0.3 | 0.1 | 0.4 | 0.2 |

Bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasını tapın.

Həlli. Tərifə əsasən

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 0.3, & 2 < x \leq 3 \\ 0.4, & 3 < x \leq 6 \\ 0.8, & 6 < x \leq 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}$$

**Məsələ 10.**  $X$  kəmiyyəti  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  qiymətlərini uyğun olaraq  $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n, \dots$  ehtimalları ilə alır. Onda bu kəmiyyətin paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}, & x_{n-1} < x \leq x_n \\ 1, & x > x_n \end{cases}$$

bərabərliyi ilə verilir. Deməli, paylanma funksiyası  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  nöqtələrində kəsilən və  $n+1$  sayda  $(-\infty, x_1], (x_1, x_2], \dots, (x_{n-1}, x_n], \dots, (x_n, \infty]$  intervallarında sabit qalan pilləvari funksiyadır.

#### 4.2. Kəsilməz paylanmalar. Sıxlıq funksiyası və onun xassələri.

Əgər  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlər çoxluğu hesabi çoxluq deyilsə, onda belə kəmiyyətin paylanmasını onun ayrı-ayrı qiymətlərinin ehtimalları ilə vermək mümkün deyildir. Bu paylanmanı ehtimalın nisbi sıxlığı vasitəsi ilə vermək daha əlverişlidir.

**Tərif 2.**  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin ala biləcəyi qiymətin  $[x, x + \Delta x)$  intervalına düşməsi ehtimalının bu intervalın uzunluğuna olan nisbətinin, yəni,

$$P(x \leq X < x + \Delta x) / \Delta x$$

nisbətinə  $X$  kəmiyyətinin paylanmasının nisbi sıxlığı və ya ehtimalın nisbi sıxlığı deyilir. Nisbi sıxlığın  $\Delta x \rightarrow 0$  olduqda limitinə  $X$  kəmiyyətinin  $x$  nöqtəsində sıxlığı deyilir və  $f(x)$  ilə işarə olunur:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Axıncı bərabərliyi  $f(x) = \lim_{\Delta x} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$  şəklində yazmaq.

Məlumdur ki,  $F(x + \Delta x) - F(x)$  fərqi təsadüfi kəmiyyətin  $[x, x + \Delta x)$  intervalından qiymət alması hadisəsinin ehtimalıdır və təqribən  $F(x)$  funksiyasının diferensialına bərabərdir.

$$F(x + \Delta x) - F(x) \approx dF(x)$$

$$F'(x) = f(x), dx = \Delta x \text{ olduğu üçün}$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) \approx f(x) \Delta x$$

Axıncı təqribi bərabərliyin ehtimal mənası aşağıdakı kimidir: Təsadüfi kəmiyyətin  $[x, x + \Delta x)$  intervalından qiymət alması hadisəsinin ehtimalı kifayət qədər dəqiqliklə sıxlıq funksiyasının  $x$  nöqtəsindəki qiyməti ilə bu intervalın  $\Delta x$  uzunluğu hasilinə bərabərdir.

Bu nəticəni həndəsi olaraq təsadüfə kəmiyyətin  $[x, x + \Delta x)$  intervalından qiymət alması hadisəsinin ehtimalı oturacağı  $\Delta x$ , hündürlüyü isə  $f(x)$  olan düzbucaqlının sahəsinə bərabərdir kimi söyləmək olar.

Kəsilməz təsadüfə kəmiyyətin ehtimalının paylanması paylanma funksiyası vasitəsilə təyin edilir. Paylanma funksiyalarının quruluşu isə əsasən mürəkkəb və müxtəlifdir. Lakin elə kəsilməz təsadüfə kəmiyyətlər vardır ki, onların paylanma funksiyası, müəyyən xassəsi olan başqa bir  $p(t) \geq 0$  funksiyası vasitəsilə

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

kimi sadə şəkildə verilir. Ehtimalın paylanması ilə əlaqədar olan məsələləri belə təsadüfə kəmiyyətlər vasitəsilə öyrənmək daha əlverişlidir.

**Tərif 3.** Paylanma funksiyası  $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$  şəklində olan  $X$  təsadüfə kəmiyyətinə, mütləq kəsilməz təsadüfə kəmiyyət,  $p(t)$  funksiyasına isə onun ehtimalının paylanma sıxlığı və ya sadəcə olaraq sıxlıq funksiyası deyilir.

Praktikada təsadüf olunan kəsilməz paylanma funksiyaları bir qayda olaraq  $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$  şəklində göstərilə bilər, yəni mütləq kəsilməz funksiyalardır. Buna görə də mütləq kəsilməz təsadüfə kəmiyyətləri sadəcə olaraq kəsilməz təsadüfə kəmiyyətlər adlandırırlar. (lakin bunları qarışdırmaq olmaz)

**Məsələ 11.**  $X$  kəsilməz təsadüfə kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ x - \frac{1}{3}, & 2 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

şəklində olduqda onun paylanma funksiyasını tapın.

$$\text{Həlli. } F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

$$x \leq 2 \text{ olduqda } f(x) = 0, \text{ deməli } \int_{-\infty}^2 0 dx = 0$$

$$2 < x \leq 3 \text{ olduqda } F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \left(t - \frac{1}{3}\right) dt = 0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x$$

$$x > 3 \text{ olduqda} \quad \text{isə}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^2 0 dx + \int_2^3 \left(t - \frac{1}{3}\right) dt + \int_3^x 0 dx = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{3}t\right)_2^3 = \left(\frac{27}{2} - 1\right) - \left(\frac{4}{2} - \frac{2}{3}\right) = 12.5 - \frac{3}{4} = \frac{47}{4} = 11\frac{3}{4}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{3}{4}, & x > 3 \end{cases}$$

**Sıxlıq funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:**

$$1. p(t) \geq 0, -\infty < t < \infty$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1$$

$$3. \frac{dF(x)}{dx} = p(x)$$

$$4. P(X \in A) = \int_A p(x) dx.$$

Burada  $A$  istənilən Borel çoxluğuudur.

Üçüncü xassə  $p(t), t = x$  nöqtəsində kəsilməz olduqda doğrudur. Onun doğruluğu yuxarı sərhəddi dəyişən olan müəyyən inteqrallın törəməsi haqqındakı teoremdən alınır.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt \text{ bərabərliyindən istənilən } x_1 < x_2 \text{ üçün}$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(t) dt$$

münasibəti alınır.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt \text{ bərabərliyindən istənilən } x \text{ üçün}$$

$$P(X = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(x \leq X < x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{x+\frac{1}{n}} p(t) dt = 0$$

münasibəti alınır. Buradan aydın olur ki, ixtiyari  $X$  kəsilməz təsadüfi kəmiyyəti

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2)$$

münasibətlərini ödəyir.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyası verildikdə onun paylanma funksiyası  $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$  bərabərliyi ilə tapılır. Paylanma funksiyası isə təsadüfi

kəmiyyətin ehtimalının paylanma qanununu təyin edir. Buradan aydındır ki,  $X$  kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin ehtimalının paylanma qanunu onun sıxlıq funksiyasının verilməsi ilə tamamilə təyin edil

**Məsələ 12.**  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin 2x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

olduqda onun sıxlıq funksiyasını tapın.

Həlli. Sıxlıq funksiyası paylanma funksiyasının birinci tərtib törəməsidir:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2 \cos 2x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Qeyd edək ki,  $x=0$  olduqda  $F'(x)$  törəməsi yoxdur.

**Məsələ 13.**  $X$  diskret təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 0.3, & 3 \leq x < 4 \\ 0.5, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

olduqda  $P(X \geq 3.5)$ ,  $P(|X| < 2.5)$  ehtimallarını hesablayın.

Həlli.  $P(X \geq 3.5) = 1 - P(X < 3.5) = 1 - F(3.5) = 1 - 0.3 = 0.7$

$$P(X \geq 3.5) = 0.7$$

$$P(|X| < 2.5) = P(-2.5 < X < 2.5) = F(2.5) - F(-2.5) = 0.3 - 0 = 0.3$$

$$P(|X| < 2.5) = 0.3$$

**Məsələ 14.**  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$$

olduqda  $a$  sabitini və  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin  $(0,5)$  intervalında qiymət alması hadisəsin ehtimalını tapın.

Həlli.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{1+x^2} dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{1+x^2} dx = a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = a [\arctg(\infty) - \arctg(-\infty)] = a\pi$$

$$a\pi = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

## 5. TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTDƏN ASILI FUNKSİYALAR.

$X$  kəsilməz təsadüfi kəmiyyət olduqda  $Y = aX + b$  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma və sıxlıq funksiyalarını tapaq.

Əvvəlcə  $a > 0$  halına baxaq. Bu halda  $g(X) = aX + b$  funksiyası monoton artan funksiyadır. Deməli,

$$F_Y(x) = P(aX + b \leq x) = P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Buradan isə

$$f_Y(x) = F'_X\left(\frac{x-b}{a}\right) = f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{1}{a}$$

$a < 0$  olduqda  $g(X) = aX + b$  funksiyası monoton azalandır. Onda

$$F_Y(x) = P(aX + b \leq x) = P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Buradan isə

$$f_Y(x) = \left(1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)' = -f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{1}{a} = f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{1}{|a|}$$

Beləliklə,  $f_{aX+b}(x) = f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{1}{|a|}$  olar.

$X$  kəsilməz təsadüfi kəmiyyət və  $g(x) = x^2$  olduqda  $Y = g(X) = X^2$  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma və sıxlıq funksiyalarını tapın.

Həlli.  $x \leq 0$  olduqda  $F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$ ,  $f_Y(x) = F'_Y(x) = 0$

$x > 0$  olduqda  $F_Y(x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$

$$f_Y(x) = (F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}))' = f_X(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} + f_X(-\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

Buradan

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x}))$$

Yuxarıda deyilənləri ümumiləşdirərək aşağıdakı teoremin doğruluğunu isbat etmək olar.

**Teorem .**  $X$  kəsilməz təsadüfi kəmiyyət,  $y = g(x)$  kəsilməz və monoton funksiya olduqda  $Y = g(X)$  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma  $F_Y(x) = F(g^{-1}(x))$ , sıxlıq funksiyası isə  $f_Y(x) = f_X(g^{-1}(x)) |g^{-1}(x)|'$  şəklində olar.

İsbatı.  $y = g(x)$  kəsilməz və monoton funksiya olduqda onun  $x = g^{-1}(x)$  tərs funksiyası vardır. Onda  $Y = g(X)$  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F_Y(x) = P(g(X) \leq x) = P(X \leq g^{-1}(x)) = F_X(g^{-1}(x))$$

olar. Beləliklə,  $F_Y(x) = F(g^{-1}(x))$

$y = g(x)$  funksiyası diferensiallanan olduqda  $Y = g(X)$  təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası  $f_Y(x) = F(g^{-1}(x))$  funksiyasının birinci tərtib törəməsinə bərabərdir.

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = (F_X(g^{-1}(x)))' (g^{-1}(x))' = f_X(g^{-1}(x)) |g^{-1}(x)|'$$

Fərz edək ki,  $y = g(x)$  funksiyası kəsilməz və monoton azalan funksiyadır. Onda onun tərs funksiyasında monoton azalandır.  $Y = g(X)$  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

olar.  $y = g(x)$  funksiyası diferensiallanan olduqda

$$P(X = g^{-1}(x)) = 0 \quad \text{və} \quad (g^{-1}(x))' < 0$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= (1 - P(X \leq g^{-1}(x)))' = -F_X'(g^{-1}(x)) = \\ &= -f_X(g^{-1}(x))(g^{-1}(x))' = f_X(g^{-1}(x))|(g^{-1}(x))'| \end{aligned}$$

alırıq. Beləliklə,  $y = g(x)$  funksiyası monoton və diferensiallanan olduqda  $X$  kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f_Y(x) = f_X(g^{-1}(x))|(g^{-1}(x))'|$$

şəklində olar.

**Məsələ 15.**  $X$  diskret təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu aşağıdakı kimidir:

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | 2   | 3   | 6   | 7   |
| $p$ | 0.3 | 0.1 | 0.4 | 0.2 |

Bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasını tapın.

Həlli. Tərifə əsasən

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i \\ F(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 0.3, & 2 < x \leq 3 \\ 0.4, & 3 < x \leq 6 \\ 0.8, & 6 < x \leq 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases} \end{aligned}$$

**Məsələ 16.**  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin 2x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

olduqda onun sıxlıq funksiyasını tapın.

Həlli. Sıxlıq funksiyası paylanma funksiyasının birinci tərtib törəməsidir:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2 \cos 2x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Qeyd edək ki,  $x=0$  olduqda  $F'(x)$  törəməsi yoxdur.

**Məsələ 17.**  $X$  diskret təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 0.3, & 2 < x \leq 3 \\ 0.5, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

olduqda  $P(X \geq 3.5)$ ,  $P(|X| < 2.5)$  ehtimallarını hesablayın.

Həlli.  $P(X \geq 3.5) = 1 - P(X < 3.5) = 1 - F(3.5) = 1 - 0.5 = 0.5$

$$P(X \geq 3.5) = 0.5$$

$$P(|X| < 2.5) = P(-2.5 < X < 2.5) = F(2.5) - F(-2.5) = 0.3 - 0 = 0.3$$

$$P(|X| < 2.5) = 0.3$$

**Məsələ 18.**  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$$

olduqda  $a$  sabitini və  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin  $(0,5)$  intervalında qiymət alması hadisəsin ehtimalını tapın.

Həlli.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{1+x^2} dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{1+x^2} dx = a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = a [\arctg(\infty) - \arctg(-\infty)] = a\pi$$

$$a\pi = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$P(0 < x < 5) = \int_0^5 \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} (\arctg 5 - \arctg 0) = 0.435$$

**Məsələ 19.**  $X$  kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ x - \frac{1}{3}, & 2 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

şəklində olduqda onun paylanma funksiyasını tapın.

$$\text{Həlli. } F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

$x \leq 2$  olduqda  $f(x)=0$ , deməli  $\int_{-\infty}^2 0 dx = 0$

$$2 < x \leq 3 \text{ olduqda } F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \left(t - \frac{1}{3}\right) dt = 0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x$$

$x > 3$

olduqda

isə

$$F(x) = \int_{-\infty}^2 0 dx + \int_2^3 \left(t - \frac{1}{3}\right) dt + \int_3^x 0 dx = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{3}t\right)_2^3 = \left(\frac{27}{2} - 1\right) - \left(\frac{4}{2} - \frac{2}{3}\right) = 12.5 - \frac{3}{4} = \frac{47}{4} = 11\frac{3}{4}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x, & 2 < x \leq 3 \\ 11\frac{3}{4}, & x > 3 \end{cases}$$

## P L A N

---

- 1 .Riyazi statistikanın əsas məsələləri.
- 2.Statistik modellər.
- 3.Riyazi statistikanın əsas anlayışları.
  - 3.1. Statistik yığımlar.Baş və seçmə yığımlar.
  - 3.2.Tezlik anlayışı.Paylanma və variasiaya sırası.Qruplaşdırılmış seçimlər.
  - 3.3.Təsadüfə seçim üsulları.
4. Paylanma və sıxlıq funksiyalarının qiymətləndirilməsi.
  - 4.1.Empirik paylanma funksiyası və onun xassələri
  - 4.2. Sıxlıq funksiyasının qiymətləndirilməsi.
5. Paylanma ayrılıqları. Statistik paylanmaların əsas formaları

## Ə D Ə B İ Y Y A T

- 1.S.Ö.Ömərov, N.Ə.cavadov.Riyazi və tətbiqi statisika.Bakı, Azərnəşr, 2007.
2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çarşıoğlu, 2006.

- 
- 1.Riyazi statistikanın predmeti və əsas məsələləri.

İstənilən elmin son nəticədə əsas məsələsi real proseslərin tabe olduqları qanunauyğunluqların aşkar və tədqiq edilməsindən ibarətdir. Hər bir belə qanunauyğunluğu aşkar etmək üçün kifayət qədər sınaqlar (statistika müşahidəsi, ölçmələr, təcrübələrin qoyulması və s.) aparılır.Alınmış məlumatlar sistemləşdirilir, müəyyən əlamətlərə görə qruplaşdırılır, təhlil edilir və nəticədə öyrənilən hadisələr üçün səciyyəvi olan qanunauyğunluqlar aşkar edilir.

Sınaqların nəticələri və həm də başqa yolla əldə edilmiş statistik məlumatların təhlili üsulları və metodları riyazi statistikanın predmetini təşkil edir.

Riyazi statistika təsadüfi proseslərin qanunauyğunluqlarını öyrənən ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanır.Riyazi statistikanın metodları məlumatların statistika müşahidəsi və yaxud sınaqların aparılması nəticəsində əldə edildiyini fərz edir.Bu isə riyazi statistikanın ehtimal nəzəriyyəsi ilə əlaqəsini şərtləndirir. Əldə edilmiş

məlumatlar işlənilir, proses və hadisələrin xassələri haqqında müəyyən mənada təsadüfi xarakter daşıyan nəticələrə əsasən mülahizələr söylənilir. Riyazi statistikanın əsas məsələsi kütləvi hadisələr və proseslər üzərində aparılmış müşahidə və sınaqların nəticələrinə əsasən onların qanunauyğunluqlarını öyrənməkdən, yəni statistik qərarlar qəbul etməkdən ibarətdir. Statistik qərarlar ayrı-ayrı sınaqlara aid olmayıb, hadisənin ümumi xarakteristikaları haqqında təkliflərdir.

Riyazi statistikanın metodları axtarılan xarakteristikaların qiymətlərini müəyyən etməklə yanaşı onların dəqiqliyini də qiymətləndirməyə imkan verir.

Ümumiyyətlə statistikanın məzmununu aşağıdakı üç bölməyə ayırmaq olar:

1. Statistik müşahidə və yaxud sınaq nəticəsində alınmış statistik məlumatların toplanması və qruplaşdırılması üsullarını müəyyən etmək;
2. Toplanmış məlumatların statistik tədqiqi. Yəni, müşahidənin nəticələri əsasında müəyyən edilmiş qanunauyğunluqların aydınlaşdırılması;
3. Tədqiqatın məqsədindən asılı olaraq statistika müşahidəsi üsullarının və statistik məlumatların təhlili metodlarını işləyib hazırlamaq.

Məhz 3-cü bölmə riyazi statistikanın məzmununu təşkil edir. Bura aşağıdakılar aiddir:

a) hadisənin naməlum başvermə ehtimalının qiymətləndirilməsi; növü məlum olan paylanmanın naməlum parametrlərinin qiymətləndirilməsi; təsadüfi kəmiyyətin bir və ya bir neçə təsadüfi kəmiyyətdən asılılığının qiymətləndirilməsi və başqaları;

b) paylanma funksiyasının növü və növü məlum olan paylanma funksiyasının parametrləri haqqında hipotezlərin yoxlanılması.

Riyazi statistika tədqiqatın başlanğıcına qədər (sınaqların planlaşdırılması) və tədqiqat zamanı (ardıcıl təhlil) sınaqların zəruri sayının müəyyən edilməsi üçün üsullar işləyib hazırlamışdır. Müasir riyazi statistika qeyri-müəyyənlik şəraitində qərarların qəbul edilməsində mühüm rol oynayan bir elm sahəsidir.

## 2. Статистик моделляр.

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, riyazi statistika ehtimal nəzəriyyəsi ilə sıxı surətdə əlaqədə olan tətbiqi riyazi elmdir. O, ehtimal nəzəriyyəsinin anlayışları və metodlarına əsaslanaraq, öz spesifik məsələlərini həll edir. Истиянилян рийази нязяриййя онун юйряндиийи реал просесляри якс етдирян мцяййян моделляр чярчивясиндя қиғулур. Рийази модел эерчяклиийи рийази ифадяляр васитясиля – рийази дилдя тясвир едир. Riyazi statistikanın məsələlərinin spesifikliyini anlamaq və statistik modellərlə tanış olmaq üçün ehtimal nəzəriyyəsindən bəzi məsələlərini xatırlayaq.

Təsadüfi hadisələrin riyazi modelləri ehtimal nəzəriyyəsində öyrənilir. Bu modellər  $(\Omega, F, P)$  – ештимал фязасына ясасланыр. Бурада щяр бир  $A \in F$  щадисясинин  $p$  ештималынын мялум олдуьу фярз едилир. Ештимал нязяриййясинин ясас мясяляляри верилмиш модел цццн мцхтялиф мцряккяб щадисялярин ештималларынын тапымасы цсулларыны ишляйиб щазырламагдан ибарятдир.

Təcrübədə konkret сынагла bağlı olan hadisənin  $p$  ештималы чох надир щалларда там мялум олур. Яксяр щалларда  $p$  ештималынын мцяййян  $\Pi$

еңтималлар айласинин елементи олдуьуну являсядян суюлямяк олар. Fərz едяк ki, p намялумдур:  $p=\theta\in[0,1]$  işarə edək. Демяли, мцмкцн еңтималлар айласи  $\Pi=\{\Pi_\theta, \theta\in[0,1]\}$  шяклиндядир вя  $P_\theta(\omega)=\theta^{\sum \omega_i}(1-\theta)^{n-\sum \omega_i}$ .

P еңтималлар айласи верилдикдя  $(\Omega, F, P)$  цчлцуця статистик модел кими бахылыр.

Дейилянляри ашаьыдакы мисалын цзяриндя нязярдян кечиряк. Тутак ки, апарылан n Bernulli сынағинда мцсбят (''+''') нятисянин баш вермя еңтималы p, мянфи нятисянин (''-''') баш вермя еңтималы ися  $q=1-p$ -дир. Sınağın нятисясини n юлчцлц -  $\omega=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i=0,1$  вектору шяклиндя эюстярямяк олар. Мцсбят нятисянин башвермя еңтималы - p мялум олдугда бу сынағин еңтимал модели  $(\Omega, \Phi, \Pi)$  еңтимал фязасы олар. Бурада,  $\Omega = \{\omega: \omega=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i=0,1\}$   $2^n$  сайда элементар щадисялярдян ибарят элементар щадисяляр фязасы, F  $\Omega$  -nin müəyyən alt çoxluqlarının  $\sigma$ -сəbri, P isə həmin  $\sigma$ -сəbrdə təyin edilmiş ehtimaldır.  $\Phi$ -ин щяр бир елементинин еңтималы элементар щадисялярин  $P(\omega)=p^{\sum \omega_i} q^{n-\sum \omega_i}$  башвермя еңтималларына ясаян мцяййян едилир.

Беяликля, еңтимал моделиндя бу вя йа диэяр гейри – мцяййянлик олдугда статистик модел тятбиг едилир. Рийази статистиканын яsas мясяляси сынаьын мцщащидя едилян нятисяляри ясасында ялдя едилмиш мялуматлара ясаян гейри – мцяййянлийи арадан галдырмагдан вя йа ону кифайят гядяр азалтмагдан ибарятдир. Рийази статистика статистик гярарлар щаггында елмдир. Мцяййян мянада о, еңтимал нязярийясинин тярс мясялялярини щялл едир. Бея ки, о, статистик моделлярин структуруну мцщащидянин (ölçmələrin) нятисяләгиня ясаян ащкар едир, дягиглящдир.

### 3. Riyazi statistikanın əsas anlayışları

#### 3.1. Statistik yığımlar. Baş və seçmə yığımlar.

İstənilən fəaliyyət sahəsində sınaqların aparılması statistik yığım adlanan kütləvi hadisə və proseslərə xas olan qanunauyğunluqların öyrənilməsi ilə bağlıdır. Belə ki, sınaqların nəticələri ədədi verilənlər yığını şəklində təsvir edilir.

Sınaqların işlənilməsində yığım anlayışı ilk anlayışdır. Ona görə də əvvəlcə bu anlayışla tanış olaq.

Müəyyən mənada bircins olan hadisələr (obyektlər) çoxluğu yığım adlanır. İstənilən yığım özünə məxsus təbiətə və konkret məzmunu (keyfiyyətə) malikdir. Məsələn, taxıl zəmisindəki sünbüllər çoxluğu maddi obyektlər çoxluğudur. Hər hansı rayonda kəndli (fermer) təsərrüfatları yığını və sair haqqında danışmaq olar.

Yığımlar öz xassələrinin (əlamətlərinin) ümumiliyinə görə birləşdirilmiş ayrı-ayrı elementlərdən ibarətdir. Yığının bütün elementlərini baxılan əlamətin artma və ya azalma istiqamətinə görə bir sıraya düzməklə nizamlamaq olar. Bu zaman alınan ardıcılığa ranjirə edilmiş paylanma sırası və yaxud variasiya sırası deyilir.

Yığının elementləri sayına onun həcmi deyilir. Yığının elementləri sayı

sonlu olduqda ona sonlu yığım, əks halda isə sonsuz yığım deyilir.

Məsələn, Azərbaycan Respublikasında ailə kəndli təsərrüfatları yığımını sonlu yığımdır.

Statistikada sonsuz yığımlarda qanunauyğunluqların öyrənilməsinə tez-tez təsadüf edilir. Hətta sonlu yığımlara baxılarkən təcrübədə əksər hallarda tədqiqatçı yığının bütün elementləri haqqında məlumata malik olmur. Məsələn, müəyyən cinsə malik ətlik mal-qaranın diri çəkisinin onun döşünün dolamasından asılılığını öyrənərkən tədqiqatçının bu məlumatları bütün heyvanlar üzrə əldə etməyə imkan yoxdur. Bu cür hallarda yığımdan məhdud sayda elementlər seçilir və onlar tədqiq edilir. Bununla əlaqədar olaraq baş və seçmə yığım anlayışlarını bir-birindən fərqləndirirlər.

Müəyyən üsulla seçilmiş elementlər yığımına seçmə yığım deyilir. Seçmə yığımı sadəcə olaraq seçmə də deyilir.

Müşahidə edilən və ya ölçülən elementlərin (obyektlərin) xarakterik xüsusiyyətləri və onu digərlərindən fərqləndirən xassəsi əlamət adlanır.

Məsələn, kənd təsərrüfatı müəssisələrinin əlaməti əsas istehsal fondlarının dəyəri, ümumi məhsulun həcmi, işçilərin sayı, əkin sahəsi, məhsul vahidinin maya dəyəri və s. ola bilər.

Seçmənin aparıldığı yığımı isə baş yığım deyilir. Yığım müəyyən əlamətə görə bircins qruplara ayrıla bilər. Bircins qruplara statistik yığımlar deyilir.

Beləliklə, bir və ya bir neçə eyni əlamətə malik, lakin digər əlamətlərə görə bir birindən fərqlənən elementlər yığımına statistik yığım deyilir. Yığımı bircins qruplara ayıran əlamətə qruplaşdırma əlaməti deyilir.

Statistik yığımı misal olaraq rayonun 20 təsərrüfatının dənli bitkilərin məhsuldarlığına görə paylanması göstərmək olar (cədvəl 1.1.).

Cədvəl 1.

Təsərrüfatların dənli bitkilərinin məhsuldarlığına görə paylanması

| Dənli bitkilərin məhsuldarlığı, s/ha | Təsərrüfatların sayı |
|--------------------------------------|----------------------|
| 16-ya qədər                          | 2                    |
| 16-18                                | 5                    |
| 18-20                                | 4                    |
| 20-22                                | 6                    |
| 22-dən yuxarı                        | 3                    |

Əlamətlər keyfiyyət və kəmiyyət əlamətlərinə bölünür. Ayrı-ayrı qiymətləri mühüm xüsusiyyətlərinə, xassələrinə görə bir-birindən fərqlənən əlamətlər keyfiyyət əlamətləri adlanır. Keyfiyyət əlamətinə misal olaraq insanın cinsini - kişi, qadın; təhsil pillələri-bakalavr, magistr, doktorantura; məhsulun keyfiyyətini-keyfiyyətsiz, keyfiyyətli və s. göstərmək olar.

Keyfiyyət əlamətlərinə atributiv əlamətlər də deyilir. Atributiv əlamət bir-

birinin əksi olan iki mümkün qiymətdən ancaq birini ala bilirsə ona alternativ əlamət deyilir (savadlı, savadsız).

Ayrı-ayrı qiymətləri kəmiyyətə bir-birindən fərqlənən əlamətlərə kəmiyyət əlamətləri deyilir. İşçilərin əmək haqqı, yaşı, məhsul istehsalının həcmi və s. kəmiyyət əlamətləridir.

Kəmiyyət əlamətləri dəyişmə xarakterinə uyğun olaraq kəsilməz və diskret ola bilər. Kəmiyyət əlaməti müəyyən intervalda bütün qiymətləri alırsa ona kəsilməz əlamət, əks halda isə diskret əlamət adlanır.

Statistik yığım eyni zamanda bir və ya bir neçə əlamətə görə bircins qruplara ayrıla bilər. Bununla əlaqədar olaraq bir, iki və çoxölçülü statistik yığımları fərqləndirirlər. İkiölçülü statistik yığma misal olaraq cədvəl 1.2.-də verilmiş paylanmanı göstərmək olar.

Cədvəl 2

Təsərrüfatların dənli bitkilərin məhsuldarlığı və məhsul vahidinin maya dəyəri səviyyəsinə görə paylanması

| Kartofun məhsuldarlığı, s/ha | Bir sentnerin maya dəyəri, man |       |       |       |     |       |
|------------------------------|--------------------------------|-------|-------|-------|-----|-------|
|                              | ≤23                            | 23-24 | 24-25 | 25-26 | ≥26 | Yekun |
| ≤16                          | -                              | -     | 2     | 4     | 7   | 13    |
| 16-18                        | -                              | -     | 1     | 3     | 2   | 6     |
| 18-20                        | -                              | -     | 6     | 2     | 1   | 9     |
| 20-22                        | -                              | 1     | 3     | 1     | 1   | 6     |
| 22-24                        | 2                              | 3     | -     | 4     | 5   | 14    |
| ≥24                          | 3                              | 1     | 2     | -     | 6   | 12    |
| Yekun                        | 5                              | 5     | 14    | 14    | 22  | 60    |

Təcrübədə təsadüf edilən statistik məlumatlar yığımları içərisində elə siniflər vardır ki, onların nəzəri işlənməsi xüsusi metodlar vasitəsilə mümkündür. Bu siniflərdən bəziləri ilə tanış olaq.

$X$  təsadüfi kəmiyyəti ilə bağlı olan sınağa baxaq. müşahidə edilir. Sınağı aparılma şərtləri dəyişmədən  $n$  dəfə təkrar edərək  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin müşahidə edilmiş  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) qiymətlərini alırıq. Aydın ki,  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və onların hər biri  $X$  təsadüfi kəmiyyəti ilə eyni paylanma funksiyasına malikdir.

Sınağın  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) nəticələri statistik məlumatların mühüm bir sinfidir. Bu sinfə daxil olan statistik məlumatların öyrənilməsində xüsusi terminologiyadan istifadə edilir.

Belə bir sınağa baxaq: Tutaq ki, hər hansı bir sonlu  $A$  çoxluğu verilmişdir. Çoxluqdan təsadüfi olaraq bir element seçilir, onun müəyyən  $X$  xarakteristikası qeyd edilir və yenidən çoxluğa qaytarılır. Hər bir elementin

seçilmə ehtimalının eyni olduğu fərz edilir. Bu halda verilmiş  $A$  çoxluğu baş yığım və ondan təsadüfə şəkildə seçilən kiçik həcmli elementlər yığını isə seçmə yığım və yaxud sadəcə olaraq həcmi  $n$  olan təsadüfə seçim, təsvir edilən proses isə təsadüfə seçim adlanır.

Əksər hallarda tədqiqatçını elementlərin özü deyil, onların müəyyən xarakteristikaları və yığımnda paylanması maraqlandırır. Bu cür hallarda baş yığma elementlər çoxluğu kimi deyil,  $X$  təsadüfə kəmiyyətinin qiymətlər çoxluğu kimi baxmaq məqsəduyğundur. Bu halda müşahidə edilmiş  $X_i$  ( $i=1,2,...,n$ ) qiymətlərinə  $X$  təsadüfə kəmiyyətinin qiymətlər çoxluğundan ayrılmış həcmi  $n$  olan seçim kimi baxılır. Başqa sözlə təsadüfə seçim təsadüfə kəmiyyət üzərində ardıcıl aparılmış  $n$  asılı olmayan müşahidənin nəticəsidir.

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi riyazi statistika ehtimal nənzəriyyəsinə əsaslanır və onun əsas məsələsi seçmə məlumatlara əsasən baş yığımın xarakteristikalarını qiymətləndirməkdən ibarətdir.

Təcrübədə  $A$  sınağının  $n$  dəfə təkrarı zamanı alınan  $x_1, x_2, ..., x_n$  ədədlərinə komponentləri asılı olmayan və  $X$  baş yığını ilə eyni paylanma funksiyasına malik  $(X_1, X_2, ..., X_n)$  təsadüfə vektorunun çoxsaylı realizasiyalarından biri kimi baxılmalıdır. Ona görə də seçimi xarakterizə edən  $(X_1, X_2, ..., X_n)$  təsadüfə vektorunun paylanma funksiyası

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 \prec x_1, X_2 \prec x_2, ..., X_n \prec x_n) = F(x_1)F(x_2)...F(x_n) \text{ şəklindədir.}$$

### 3.2. Tezlik anlayışı. Paylanma və variasiya sırası. Qruplaşdırılmış seçimlər.

Tərif 1.  $x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq ... \leq x^{(n)}$  olduqda seçimin elementlərinin  $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$  ardıcılığı şəklində yazılışına onun variasiya sırası,  $R = x^{(n)} - x^{(1)}$  fərqi isə seçimin genişliyi deyilir.

Tutaq ki,  $x_1, x_2, ..., x_n$  seçməində  $k$  ( $k < n$ ) sayda müxtəlif  $z_1, z_2, ..., z_k$  elementləri vardır.  $n_i$  ilə  $z_i$  elementinin təkrarlanma sayını işarə edək. Elementin təkrarlanma sayına onun tezliyi deyilir.

Aydındır ki,

$$n = \sum_{i=1}^k n_i.$$

Tərif 2.  $(z_i, n_i)$ ,  $i=1,2,...,k$  cütləri ardıcılığına seçmənin statistik və yaxud paylanma sırası deyilir.

Adətən, statistik sıra iki sətirdən ibarət bir cədvəl şəklində verilir. Belə ki, cədvəlin birinci sətirində  $z_i$  elementləri, ikinci sətirində isə uyğun  $n_i$  tezlikləri yazılır:

|       |       |       |     |       |
|-------|-------|-------|-----|-------|
| $z_i$ | $z_1$ | $z_2$ | ... | $z_k$ |
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_k$ |

Seçimin həcmi böyük olduqda onun elementlərini müəyyən qruplarda birləşdirərək, seçməni qruplaşdırılmış statistik sıra şəklində göstərilər. Bundan ötrü seçmənin bütün elementlərini öz daxilində saxlayan intervalı kəsişməyən

intervallara ayırırlar. Qruplaşdırma intervalları (xüsusi intervallar) təyin edildikdən sonra hər intervala düşən elementlərin sayını (intervalın tezliyini) tapırlar. Xüsusi intervalın sağ uc nöqtəsi ilə üst-üstə düşən elementi növbəti xüsusi intervala aid edirlər. Statistik sıranın birinci sətrində xüsusi intervalların orta nöqtələri, ikinci sətrində isə həmin intervalların tezlikləri yazılır.

Qeyd edək ki, xüsusi intervallar eyni uzunluğa malik olduqda hesablama nəzərə çarpacaq dərəcədə sadələşir (k-intervalların sayıdır). Bərabər intervallı sıralarda intervalların sayını ingilis statistiki Sterdjesin təklif etdiyi  $k = 1 + [3,322 \lg n]$  düsturu ilə təyin etmək olar. Burada n seçmənin həcmidir. Onda intervalın uzunluğu  $b = \frac{R}{k}$  kimi təyin edilir və aşağıdakı xüsusi intervalları alırıq:  $[x^{(1)}, x^{(1)} + b)$ ,  $[x^{(1)} + b, x^{(1)} + 2b)$ , ...,  $[x^{(1)} + (k-1)b, x^{(1)} + kb)$ .

Qeyd etmək lazımdır ki, seçimin qruplaşdırılması sonrakı hesablamalara xəta verir və bu xəta qruplaşdırma intervallarının sayı azaldıqca artır.

Riyazi statistikada tezliklə bərabər  $\omega_i = \frac{n_i}{n}$  nisbi tezlik, yığılmış tezliklər

$\sum_{j=1}^{n_i} n_j$ , yığılmış nisbi tezliklər  $\sum_{j=1}^{n_i} \frac{n_j}{n}$   $i=1, 2, \dots, n$  anlayışlarından da istifadə edilir.

Aydındır ki,

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

### 3.3. Təsadüfə seçim üsulları

Öyrənilən hadisələrin mahiyyətindən, yığımın həcmindən, müşaidə edilən əlamətlərin variasiyasından və paylanmasından asılı olaraq müxtəlif seçim üsullarından istifadə edilir. Seçim üsulu vahidlərin baş yığımdan seçilməsinin konkret mexanizmini və ya prosedurasını müəyyən edir. Təsadüfə seçim tədqiqatlar təcrübəsində ən geniş yayılmış seçim üsulları aşağıdakılardır:

- 1) təsadüfə;
- 2) mexaniki;
- 3) tipik;
- 4) seriyalı;
- 5) kombinə edilmiş.

Təsadüfə seçim baş yığımdan vahidlərin təsadüfə olaraq seçilməsinə nəzərdə tutur. Təsadüfə seçimi apararkən hər şeydən əvvəl baş yığımın vahidlərinin seçmə düşməsi imkanlarının (şanslarının) bərabər olduğuna əmin olmaq lazımdır. Həmçinin baş yığımın sərhədlərini elə dəqiqləşdirmək lazımdır ki, ayrı-ayrı vahidlərin ona daxil edilməsi və ya edilməməsi şübhə doğurmasın. Məsələn, tələbələrin tədqiq edilməsi zamanı akademik məzuniyyətdə olan şəxslərin, qeyri-dövlət ali məktəb tələbələrinin nəzərə alınb-alınmamasını göstərmək lazımdır.

Təsadüfə seçmə texniki olaraq püşkatma metodu və ya təsadüfə ədədlər cədvəli əsasında həyata keçirilir.

Püşkatma üçün baş yığımın həcminə uyğun gələn sayda püşklər-fişkalər, şarlar və ya kartoçkalar hazırlanmalıdır. Hər bir püşk yığımın ayrıca vahidi haqqında informasiyaya (şəxsin sıra sayı, soyadı və ya ünvanı; hər hansı

fərqləndirici əlamət) malik olmalıdır. Seçmənin müəyyən edilmiş faizinə müvafiq olaraq baş yığımdan zəruri sayda püşk təsadüfə qaydada götürülür.

Təsadüfə ədədlər cədvəlinə görə baş yığının hər bir vahidi sıra nömrəsinə malik olmalıdır. Təsadüfi ədədlər cədvəli xüsusi proqramın köməyi ilə EHM-dan alınır və ixtiyari ədədlər sütunu kimi ifadə olunur. Seçmə yığıma sıra nömrəsi seçilmiş sütundakı ədədlərə uyğun gələn vahidlər daxil edilir.

Təsadüfə seçim təkrar və təkrar olmayan ola bilər. Təkrar olmayan seçim zamanı püşkatma prosesində düşən püşklər geriye, ilkin yığıma qaytarılır və sonrakı seçmədə iştirak etmirlər. Təsadüfə ədədlər cədvəlindən istifadə etdikdə seçimin təkrar olmamasına seçmədə iştirak etmiş ədədlərin buraxılması yolu ilə nail olunur.

Tipik seçim o halda tətbiq olunur ki, baş yığının bütün vahidlərini bir neçə tipik qruplara bölmək mümkün olur. Məsələn, əhalinin tədqiq olunması zamanı belə qruplar rayonlar, sosial, yaş və ya təhsil qrupları ola bilər. Tipik seçim hər bir tipik qrupdan vahidlərin təsadüfə və ya mexaniki üsulla seçilməsini nəzərdə tutur.

Tipik seçimdə vahidlərin seçilməsi ya tipik qrupların həcminə, ya da əlamətin qrupdaxili diferensiasiyasına mütənasib olaraq təşkil oluna bilər. Lakin təcrübədə onun tətbiqi seçmə müşahidəsinə qədər variasiya haqqında məlumatların alınmasının çətinliyi ucbatından həmişə mümkün olmur.

Baş yığım hər hansı qaydada nizamlanmış olduqda, yəni vahidlər müəyyən ardıcılıqla yerləşdikdə (işçilərin tabel nömrəsi, seçicilərin siyahısı, respondentlərin telefon nömrələri, evlərin telefon nömrələri, binaların və mənzillərin nömrələri və s.) mexaniki seçmə tətbiq edilir.

Mexaniki seçimi aparmaq üçün seçimin həcmnin baş yığının həcminə nisbəti ilə müəyyən olunan seçmə proporsiyası müəyyənləşdirilir. Məsələn, əgər 100000 vahiddən ibarət olan yığımdan 2% - li seçmə almaq nəzərdə tutulursa, yəni 2000 vahid götürülməlidirsə, onda seçmə proporsiyası  $\frac{1}{50}(\frac{1}{100000:2000})$  olar.

Vahidlərin seçilməsi müəyyən olunmuş proporsiyaya müvafiq olaraq bərabər fasilələr (intervallar) üzrə həyata keçirilir. Məsələn, 1:50 proporsiyasında (2 %-li seçmə) hər bir 50-ci vahid, 1:25 proporsiyasında isə (4 %-li seçmə)- hər bir 25-ci vahid götürülür.

Mexaniki seçimdə baş yığımı öyrənilən əlamətin kəmiyyətinə görə nizamlamaq və ya ranjirə etmək olar ki, bu da seçmənin reprezentativliyini yüksəltməyə imkan verir. Lakin bu halda öyrənilən əlamətin qiymətinin azalması (əgər hər bir intervalda başlanğıc qiymət qeyd olunarsa ) və ya onun artması ilə (əgər hər bir intervalda sonuncu qiymət qeyd olunarsa) bağlı olaraq sistemə xəta təhlükəsi artır. Ona görə də seçimi birinci intervalın ortasından başlamaq məqsədə uyğundur. Məsələn, 5 %-li seçimdə 10, 30, 50 və bu ardıcılıqla sonrakı vahidlər götürülməlidir.

Yığının vahidləri böyük olmayan qruplarda və ya seriyalarda birləşmiş olduqda seriyalı seçim üsulunun tətbiqi əlverişli olur. Belə seriyalar kimi əmtəə partiyası, tələbə qrupları, briqadalar və başqa birləşmələr götürülə bilər. Seriyalı seçimin mahiyyəti təsadüfi və ya mexaniki üsulla seriyaların seçilməsindən və onlar daxilində vahidlərin уѣдантизма tədqiqinin həyata keçirilməsindən ibarətdir.

Statistik tədqiqat təcrübəsində yuxarıda qeyd olunan üsullardan başqa onların kombinasiyası da tətbiq edilir. Məsələn, seriyalar müəyyən olunmuş qaydada bir neçə tipik qrupdan götürülərsə, onda tipik və seriyalı seçimləri kombinə etmək (birləşdirmək) olar. Ayrı-ayrı vahidlər seriyalar daxilindən təsadüfi qaydada götürüldükdə isə təsadüfi və seriyalı seçimlərin kombinasiyası mümkündür. Belə seçimin xətası seçimin pilləliyi ilə müəyyən olunur.

Baş yığımdan əvvəlcə iri qruplar, sonra bir qədər kiçik qruplar götürülməklə bu qaydada davam edərək tədqiq edilən vahidlər seçilərsə, bu cür seçim çoxpilləli adlanır.

Çoxpilləli seçimdən fərqli olaraq çoxfazlı seçim onun aparılmasının bütün mərhələlərində eyni vahidlərin saxlanmasını nəzərdə tutur. Bu halda hər bir mərhələdə seçilmiş vahid tədqiqata cəlb olunur (seçimin hər bir sonrakı mərhələsində tədqiqatın proqramı genişlənir).

#### 4. Paylanma və sıxlıq funksiyalarının qiymətləndirilməsi.

##### 4.1. Empirik paylanma funksiyası və onun xassələri

Tutaq ki,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  paylanma funksiyası  $F(x)$  olan baş yığımdan seçimdir.  $F(x)$  kəsilməz funksiya olduqda onun qiymətləndirməsini quraq.

Tərif 3.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qiymətlərini uyğun olaraq  $\frac{1}{n}$  ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasına seçimin empirik paylanma funksiyası deyilir və  $F_n(x)$  ilə işarə edilir.

$F_n(x)$  funksiyası yığılmış tezliklər vasitəsilə aşağıdakı kimi təyin

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{z_i < x} n_i$$

Burada cəmləmə seçmənin  $z_1 < x$  şərtini ödəyən elementlərinin tezlikləri üzrə aparılır.

Empirik paylanma funksiyasını aşağıdakı şəkildə də yazmaq olar:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x^{(1)} \\ \frac{k}{n}, & x^{(k)} \leq x < x^{(k+1)} \\ 1, & x \geq x^{(n)} \end{cases}$$

$F_n(x)$  funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$1. 0 \leq F_n(x) \leq 1$$

2.  $(x^{(1)}, x^{(n)}]$  intervalında  $F_n(x)$  azalmayan hissə - hissə sabit funksiyadır.

3.  $F_n(x)$  soldan kəsilməyən funksiyadır.  $x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq \dots \leq x^{(n)}$  nöqtələri funksiyanın kəsilmə nöqtələridir, bu nöqtələrdə funksiyanın sıçrayışı  $\frac{1}{n}$ -ə bərabərdir.  $x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq \dots \leq x^{(n)}$  nöqtələri içərisində  $k$  sayda bərabər olan nöqtələr olduqda isə funksiyanın sıçrayışı  $\frac{k}{n}$ -ə bərabərdir.

Эмпирик пайланма функцийасы рийази статистикада фундаментал рол ойнайыр. О, тәсадүфи сечіми (статистик мялуматлары) кифайят гядяр йахшы

тјасвир едир. ынагларын (мцшащидялярин) сайы qeygi-məhdud olarq артдыгса емпирик пайланма функсийасы баш йыбымын нязяри пайланма функсийасына йахынлашыр.

Теорем 1. Ихтийари гейд едилмиш  $-\infty < x < \infty$  цццн емпирик пайланма функсийасы баш йыбымын нязяри пайланма функсийасына ещтимала эюрә йыбылыр. Йяни, ихтийари  $\varepsilon > 0$  вя ихтийари  $-\infty < x < \infty$  цццн

$$P\{|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon\} \rightarrow 1$$

Исбаты. Istənilən  $x$ -dən kiçik olan  $x_i$ -lərin sayını  $\mu_n(x)$  ilə işarə edək. Aydındır ki,  $\mu_n(x) = \sum_{z_i < x} n_i$ . Tərifə əsasən, empirik paylanma funksiyası

$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1$  qiymətlərini alan təsadüfə kəmiyyətdir və

$$P\left(F_n(x) = \frac{k}{n}\right) = P(\mu_n(x) = k)$$

$\mu_n(x)$ -in tərifinə görə o,  $(n, p)$  parametrli binomial paylanmaya malikdir. Burada  $p = P(X < x) = F(x)$ . Ona görə də

$$P\left(F_n(x) = \frac{k}{n}\right) = C_n^k (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k}$$

olduğunu yaza bilərik. Deməli,  $F_n(x)$  - ''+''' нятисясинин başvermə ещтималы  $F(x)$  olan  $n$  Бернуллі сынабында  $\{X < x\}$  hadisəsinin нисби тезлийидир. Буюцк ядядялр ганунунун Бернуллі теореминя эюрә  $n$  Бернуллі сынабында мцшащидя едилян истянилян щадисянин нисби тезлийи  $n \rightarrow \infty$  олдугда бу щадисянпн ещтималына ещтимала эюрә йыбылыр. Она эюрә дя бу теорема ясаян  $F_n(x)$  емпирик пайланма функсийасынын  $F(x)$  нязяри пайланмиа функсийасына ещтимала эюрә йыбылдыбыны дейя билярик.

Беяляикля, сечимин щясми кифайят гядяр буюцк олдугда щяр бир  $x$  нюгтясиндя емпирик пайланма функсийасынын гиймяти щямин нюгтядя нязяри пайланма функсийасынын тягриби гиймяти олараг эютцрцля биляр. Бу мянада емпирик пайланма функсийасы нязяри пайланма функсийасынын статистик аналогу олараг гябул едилир

Empirik paylanma funksiyasının nəzəri paylanma funksiyasından meylini qiymətləndirmək üçün variasiya sırasının  $x^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n$  nöqtələrində  $F_n(x)$  -in  $F(x)$  -dən ən böyük meylini ölçü olaraq götürürlər.  $F(x)$  funksiyası kəsilməyən olduğu üçün  $\frac{k}{n} - F(x^{(k)}), F(x^{(k)}) - \frac{k-1}{n}$  meyllərini hesablamaq olar. Bu meyllərdən mütləq qiymətcə ən böyüyünü  $d_k$  ilə işarə edək.  $n$  sayda  $d_k$  kəmiyyətlərindən ən böyüyünü isə  $D_n$  ilə işarə edək:  $D_n = \max_{1 \leq k \leq n} d_k$

Teorem 3 (Kolmoqorov).  $F(x)$  paylanma funksiyası kəsilməz olduqda

$$P(\sqrt{n}D_n < t) \rightarrow K(t), n \rightarrow \infty$$

Burada,  $K(t) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-2n^2 t^2}$

Kolmoqorov teoreminə görə  $|F_n(x) - F(x)| \leq \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}$ . Burada  $t_\alpha$   $K(t) = 1 - \alpha$  tənliyini  $t$ -yə görə köküdür, yəni  $t_\alpha$   $\alpha$  əhəmiyyətlik səviyyəsinə uyğun böhran nöqtəsidir.

Cədvəl 3.

| $1 - \alpha$ etibarlılıq səviyyəsi | $\alpha$ əhəmiyyətlik səviyyəsi | Böhran sərhədləri |
|------------------------------------|---------------------------------|-------------------|
| 0.9                                | 0.1                             | 1.224             |
| 0.95                               | 0.05                            | 1.358             |
| 0.99                               | 0.01                            | 1.628             |

$|F_n(x) - F(x)| \leq \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}$  bərabərsizliyini 95%-li etibarlılıq səviyyəsi üçün

$F_n(x) - \frac{1.358}{\sqrt{n}} < F(x) < F_n(x) + \frac{1.358}{\sqrt{n}}$  şəklində yazmaq olar. Sınaqların sayı

kifayət qədər çox olduqda  $P(\sqrt{n}D_n < t) \approx K(t)$  olduğunu qəbul etmək olar. Beləliklə, Kolmoqorov teoreminə əsaslanan uzlaşma kriterisi aşağıdakı kimi ifadə edilə bilər:

Tutaq ki,  $D_n^{(0)}$   $|F_n(x) - F(x)|$  fərqlərinin tapılmış maksimal qiymətidir və  $\lambda_0 = \sqrt{n}D_n^{(0)}$ .

$1 - K(\lambda_0) \approx P(\sqrt{n}D_n \geq \lambda_0)$  fərqi kiçik olduqda, az ehtimallı hadisə baş vermişdir,  $F_n(x)$ -in  $F(x)$ -dən kənarlaşması əhəmiyyətlidir və təsadüfi seçim mexanizmi ilə izah edilə bilməz.  $1 - K(\lambda_0)$  fərqi böyük olduqda isə  $F_n(x)$ -in  $F(x)$ - kənarlaşması əhəmiyyətli deyildir və nəticənin sınaq ilə uzlaşdığını qəbul edirik.

#### 4.2. Sıxlıq funksiyasının qiymətləndirilməsi.

Seçimin həcmi kifayət qədər böyük olduqda paylanma funksiyasının qiymətləndirilməsinin qurulması çətinlik yaradır. Bu halda, paylanma və sıxlıq funksiyalarının qiymətləndirilmələrini qurmaq üçün qruplaşdırılmış seçmələrdən istifadə edilir.

Sıxlıq funksiyasının qiymətləndirilməsi olaraq tezliklərin histoqramı və poliqonu götürülür.

Tərif 4.  $i$ -ci  $(i = 1, 2, \dots, k)$  qruplaşdırma intervalında sabit  $\frac{n_i}{b}$  qiymətini alan hissə-hissə sabit funksiya qruplaşdırılmış seçmənin tezliklərinin histoqramı deyilir.

Histoqramın статистик мәlumatларын яһани тәсвир цсулларындан бһрһдир. Histoqramın qrafiki altında qalan pilləvari fiqurun sahəsi seçmənin həcminə bərabərdir.

Eyni qayda ilə nisbi tezliklərin histoqramı təyin edilir. Bu halda uyğun pilləvari fiqurun sahəsi 1-ə bərabərdir.

Qeyd edək ki, seçimin həcmi artdıqca və qruplaşdırma intervalının uzunluğu kiçildikcə, nisbi tezliklərin histoqramı baş yığımın sıxlıq funksiyasının statistik analoqu olar.

Щһстограмы гурмаг цццн Х тһсадцфү кямийһятһнин гиймһтляр

областы ейни узунлуглу интерваллара (группашдырма интервалларына) айрылып вя щяр бир интервала дцщян элементлярин сайы (интервалын тезлийи) тапылып. Группашдырма интервалларынын узунлугуну  $b$ , и-си группашдырма интервалынын тезлийини ися  $n_i$  иля ишаря едяк. Дцзбусаглы координат системиндя отурасаглары группашдырма интерваллары вя щцндцрлцкляри уйьун  $\frac{n_i}{b}$  олан дцзбусаглылары гураг. Алынган пиллявари фигура сечмянин щистограмы дейилир. Айдындыр ки, гурулмуш щяр бир дцзбусаглынын саяси  $\frac{n_i}{b}$  олар. Бернулли теореминя ясаян  $n \rightarrow \infty$  олдугда  $\frac{n_i}{b}$  нисби тезлийи ещтимала эюря  $X$  тясадцфү кямиййятинин и-си интервалдан гиймят алмасы ещтималына йыьыласагдыр. Группашдырма интервалларынын  $b$  узунлуглары кифайят гядяр кичик,  $X$  тясадцфү кямиййятинин  $\phi(x)$  сыхлыг функциясасы ися кясилмяз олдугда бу ещтимал тягрибян  $\phi(z_i) \cdot b$  олар. Бурада,  $z_i$  и-си группашдырма интервалынын орта нюгтясидир.

Дейилянлярдян айдын олур ки, сечмянин щясми кифайят гядяр бюйцк, группашдырма интервалларынын  $b$  узунлуглары ися кифайят гядяр кичик олдугда гурулмуш дцзбусаглыларын  $\frac{n_i}{b}$  щцндцрлцкляриня  $\phi(x)$  сыхлыг функциясасынын уйьун группашдырма интервалларынын  $z_i$  орта нюгтясиндяки гиймятляри кими бахмаг олар. Беяликля, щистограмын йухары сярьядляриня мщшащидя едилян  $X$  тясадцфү кямиййятинин сыхлыг функциясасынын аналогу кими бахмаг олар. Бунунла йанашы щистограмын бир сыра чатышмамазлыглары вардыр. Бу чатышмамазлыглара группашдырма интервалларынын гурулмасы цсулларынын гейри – мцяййянлийи, группашдырма заманы информасийянын итирилмясини (бу заман сечмя мялуматлар явзяиня онларын тезликляриндян истифадя едилир) эюстярмяк олар. Она эюря дя щistogramдан статистик мялуматларын илкин тящилилиндя истифадя етмяк мягсядяуйьундур.

Тәриф 5. Тәрә нөqtәləri uyğun olaraq  $\left(z_i, \frac{n_i}{b}\right)$ ,  $\forall \left(z_i, \frac{n_i}{nb}\right) \left(i=1, 2, \dots, k\right)$  olan sınıq xətlərə müvafiq olaraq tezliklərin poliçonu və nisbi tezliklərin poliçonu deyilir.

Тәрифдән görünür ki, nisbi tezliklərin poliçonu, tezliklərin poliçonunu ОУ oxu boyunca  $n$  dəfə sıxmaqla alınır.

Баş уığımın sıxlıқ funksiyası kifayət qədər hamar funksiya olduqda, nisbi tezliklərin poliçonu histoqramа nisbətən sıxlıқ funksiyasının daha yaxşı qiymətləndirilməsi olur.

Гейд етдийимиз кими, статистик мялуматларын щistogram васитясиля тясвириндя намялум сыхлыг функциясасы щисся – щисся сабит функцияйа йахынлашыр. Рийази анализдян мялумдур ки,  $\phi(x)$  кифайят гядяр щамар функция олдугда онун щисся – щисся хятти функцияларла кифайят гядяр

йахшы йахынлашмалары вардыр. Бурадан айдын олур ки, щамар сыхлыгларын гиймятляндирилмясиндә даща дягиг цсуллардан истифадя етмяк олар. Бу цсуллардан бири сечімин полигонунун гурулмасындан ибарятдир.

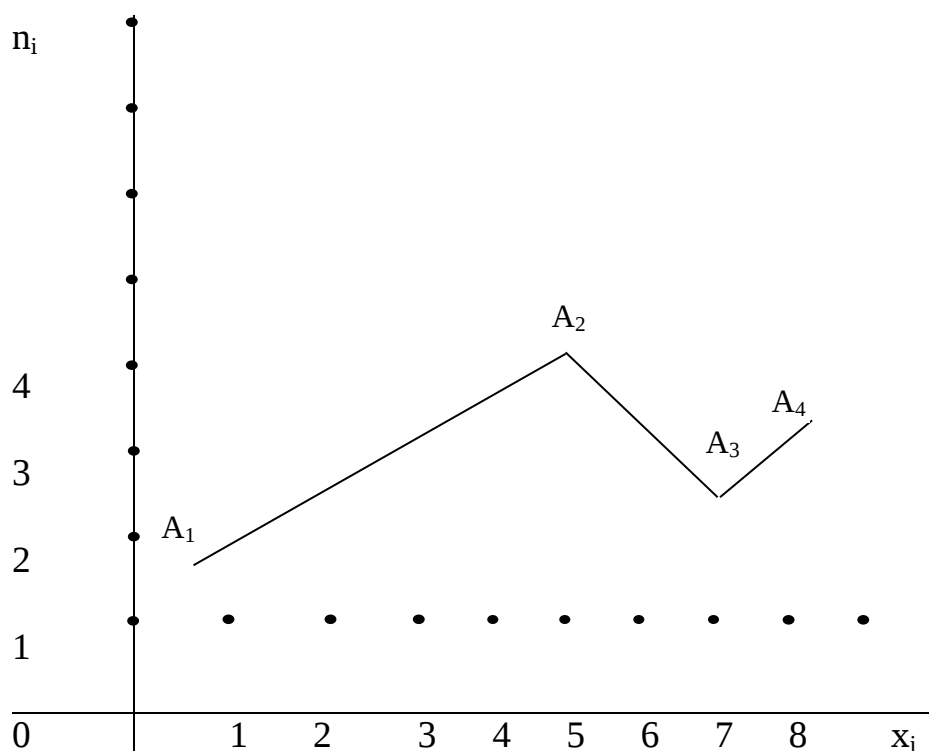
Гурулмуш щистограма ясаян группашдырма интервалларынын орта нюгтяляринин ординатларыны ардысыл олагаг дцз хятт парчасы васитясиля бирляшдирдикдя алынан сыныг хятт полигон оласагдыр.

Мәсәлә 1. Seçmənin paylanma sırasına görə poliçonu və empirik paylanma funksiyasını qurun.

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $x_1$ | 2 | 5 | 7 | 8 |
| $n_1$ | 1 | 3 | 2 | 4 |

Һәлли:  $x_i$  variantlarını absis oxu üzərində, uyğun  $n_i$  tezliklərini isə ordinat oxu üzərində ayıraq.

$A_i(x_i, n_i)$  nöqtələrini düz xətt parçaları ilə birləşdirdikdə axtarılan tezliklərin poliçonunu alarıq.



Шякил 1.3. Полигонун графика

Empirik paylanma funksiyasını qurmaq üçün, əvvəlcə seçmənin həcmi tərpaq:

$$n = \sum_{i=1}^4 n_i = 1 + 3 + 2 + 4 = 10$$

Ən kiçik variant 2- yə bərabərdir, deməli  $x \leq 2$  olduqda  $F_n(x) = 0$ .

$x < 5$  qiyməti,  $x_1 = 2$  dəfə müşahidə olunmuşdur. Deməli,  $2 < x \leq 5$  olduqda  $F_n(x) = \frac{1}{10} = 0,1$ .

$x < 7$  qiyməti, yəni  $x_1 = 2$  və  $x_2 = 5$  qiymətləri  $1 + 3 = 4$  dəfə müşahidə olunmuşdur. Ona görə  $5 < x \leq 7$  olduqda

$$F_n(x) = \frac{4}{10} = 0,4$$

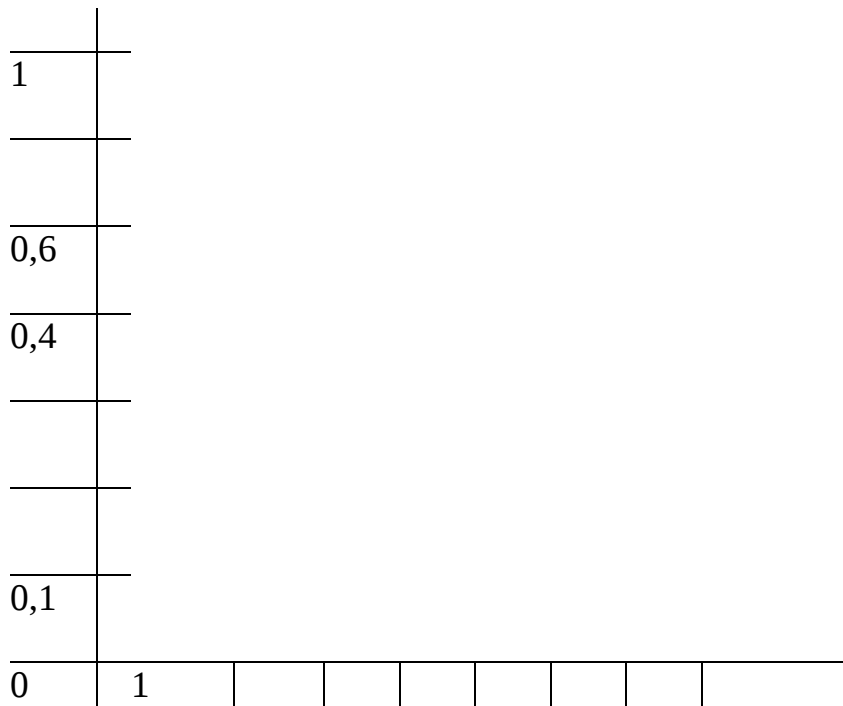
$x < 8$  qiyməti, yəni  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 5$  və  $x_3 = 7$  qiymətləri  $1 + 3 + 2 = 6$  dəfə müşahidə olunmuşdur. Ona görə  $7 < x \leq 8$  olduqda  $F_n(x) = \frac{6}{10} = 0,6$ .

$x = 8$  ən böyük variant olduğuna görə  $x > 8$  olduqda  $F_n(x) = 1$ . Yuxarıda deyilənlərə əsasən, empirik paylanma funksiyasını tapırıq.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ 0,1 & 2 < x \leq 5 \\ 0,4 & 5 < x \leq 7 \\ 0,6 & 7 < x < 8 \\ 1 & x > 8 \end{cases}$$

Bu funksiyanın qrafikini quraq.

$$F_n(x) \mid \text{_____}$$



Шякил 1. Емпирик пайланма функциясынын графика

#### 5. Paylanma əyriləri. Statistik paylanmaların əsas formaları

Empirik paylanma funksiyası vahid ehtimalla baş yığının paylanma funksiyasına yığılır. Buradan aydın olur ki, qruplaşdırma intervalları sonsuz olaraq kiçildikcə və hər bir belə intervalda elementlərin sayı kifayət qədər olarsa paylanmanın poliqon və histoqramı daha səlis olacaq, bu və ya digər formaya malik səlis əyriyə yaxınlaşacaqdır. Empirik paylanmanın yaxınlaşdığı limit əyrisinə paylanma əyrisi deyilir.

Adətən məhdud həcmli seçimlər üçün statistik material qrafik olaraq poliqon və histoqram vasitəsilə təsvir edilir. Onlar isə baş yığının paylanma əyrisinin yaxınlaşması kimi qəbul edilir. Seçmə məlumatlara əsasən baş yığının paylanma əyrisinin tapılması riyazi statistikanın əsas məsələlərindən biridir.

Əməli məsələlərin həllində paylanmaların müxtəlif formalarına təsadüf edilir. Paylanmanın limit qrafikinə, yəni paylanma əyrisinin formasına statistik paylanmanın forması deyilir.

Təcrübədə birtəpəli və çoxtəpəli (birmodalı və çox modalı) paylanmaları fərqləndirirlər.

Çoxtəpəli paylanmalar üçün növbələşən maksimum və minimumların mövcudluğu xarakterikdir. Paylanmanın çoxtəpəliliyi öyrənilən yığının qeyri bircinsliliyinə dəlalət edir.

Bir təpəli paylanma əyrilərini əsasən aşağıdakı qruplara bölürlər:

1) simmetrik; 2) orta asimmetrik; 3) müntəzəm; 4) kəsilməz; 5) kəskin asimmetrik (J – surətli); 6) U-surətli (çökük).

Simmetrik paylanmalarda elementlərin tezlikləri hər hansı səpələnmə mərkəzindən uzaqlaşdıqca azalır və paylanmanın mərkəzindən hər iki tərəfdə bərabər olurlar. Bu cür paylanmaların əyriləri orta qiymətin ordinatına nisbətən simmetrik olurlar. Məsələn, normal paylanma simmetrik paylanmadır.

Empirik paylanmalar adətən asimmetrik olurlar. Əgər səpələnmə mərkəzinin bir tərəfində digərinə nisbətən tezliklər əhəmiyyətli dərəcədə azalırsa belə paylanmalara orta asimmetrik paylanmalar deyilir. Bu cür paylanmalarda mərkəzdən eyni uzaqlıqda əlamətin qiymətlərinin ordinatları müxtəlif olurlar.

Əgər ən böyük tezlik paylanmanın uclarından birində olarsa bu cür paylanmaya kəskin asimmetrik paylanma deyilir.

Statistika təcrübəsində bəzi hallarda çökük formaya malik və U latın hərfini xatırladan paylanmalara təsadüf edilir. Bu cür paylanmalara U-surətli paylanmalar deyilir. Belə paylanmalarda minimal tezlik səpələnmə mərkəzinə yaxınlıqda yerləşir və ondan paylanmanın uclarına yaxınlaşdıqca tezliklər artır.

P L A N

1. Statistik paylanmaların tədqiqinin əsas məsələləri
2. Təsadüfə seçimin ədədi xarakteristikaları
  - 2.1. Yerləşmə xarakteristikaları
    - 2.1.1. Seçmə orta. Üstlü orta və onun xassələri.
    - 2.1.2. Təsadüfə seçimin modası. Modanın hesablanması üçün xətti interpolasiya düsturu.
    - 2.1.3. Təsadüfə seçimin medianı və kvartili. Median və kvartilin hesablanması üçün xətti interpolasiya düsturları.
    - 2.1.4. Seçmə ortanın xassələri. Orta qiymət haqqında teoremlər.
  3. Səpələnmə xarakteristikaları
    - 3.1. Səpələnmə xarakteristikaları
    - 3.2. Dispersiyanın xassələri.
    - 3.3. Alternativ əlamətin dispersiyası.
    - 3.4. Dispersiyaların toplanması qanunu.
5. Riyazi gözləmə və dispersiyanın hesablanması üçün şərti sıfır (moment) üsulları.
6. Təsadüfə seçimin momenti. Mərkəzi və başlanğıc momentlər.
7. Empirik paylanmanın tədqiqi. Asimmetriya və eksess əmsalları.
6. İkiölçülü təsadüfə kəmiyyətin təsviri və ədədi xarakteristikaları.

Ə D Ə B İ Y Y A T

1. S.Ö.Ömərov, N.Ə. Cavadov. Riyazi və tətbiqi statistika. Bakı, Azərneşr, 2007.
2. Ə.Ə. Hüseynov, S.Y. Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çapıoğlu, 2006.

**SEÇMƏNİN ƏDƏDİ XARAKTERİSTİKALARI**

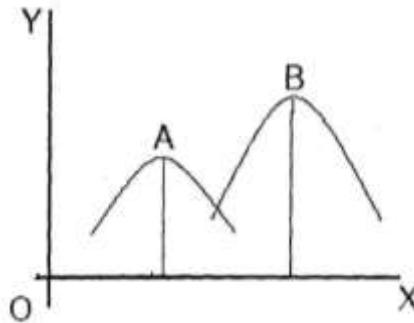
1. Statistik paylanmaların tədqiqinin əsas məsələləri

Bildiyimiz kimi, kimi təcrübə verilənlərin işlənilməsində birinci mərhələ paylanmanın variasiya sırasının qurulmasından ibarətdir. Variasiya sırasının cədvəl və yaxud qrafik şəklində təsviri paylanmanın daha ümumi və səciyyəvi xüsusiyyətləri haqqında ilkin təsəvvür yaratmağa imkan verir. Bu isə paylanmanın müşahidə nəticəsində formalaşan "gizli" qanunauyğunluqlarının aşkar edilməsində atılmış ilkin addımdır. Bununla yanaşı yığımların statistik təhlilində

əlamətin müşahidə edilən qiymətlərinin sadəcə olaraq nizamlanması ilə kifayətlənmək olmaz. Paylanma sıraları və onların müvafiq təsvirləri bütün ilkin məlumatları özündə əks etdirdiklərinə görə kifayət qədər mürəkkəb olurlar. Ona görə də paylanmanın statistik təsvirinin daha rəşional üsulu onun mühüm xüsusiyyətlərini özündə əks etdirən ədədi xarakteristikalarının hesablanmasıdır. Bu xarakteristikalar obyektiv bir göstərici kimi yığımın real xüsusiyyətlərini özündə əks etdirməli və verilmiş paylanma haqqında bütün mümkün məlumatların nəzərə alınmasına əsaslanmalıdır.

Statistik paylanmanın əsas xüsusiyyətlərinin ədədi xarakteristikalar vasitəsilə ifadə edilməsi, baxılan yığma xas olan qanunauyğunluqların daha dərindən və hərtərəfli öyrənilməsinə təminat yaradır.

Məntiqi cəhətdən hər şeydən əvvəl bu xarakteristikaların hansı xüsusiyyətləri əks etdirməsinin zəruriliyi ilə tanış olaq. Bunun üçün şəkil 1-də göstərilən A və B paylanmalarına baxaq:



Şəkil 1. Müxtəlif ortalara və dispersiyalara malik paylanmalar.

Bu paylanmaların ədədi xarakteristikalar vasitəsilə ifadə edilə bilən mühüm xüsusiyyətləri ilə tanış olaq:

1. Şəkildən göründüyü kimi hər iki paylanmada yığımın elementləri əlamətin müəyyən mərkəzi qiyməti ətrafında yerləşmişlər. Bu cür hal bütün statistik paylanmalara xasdır. Ona görə də statistik paylanmaların tədqiqində qarşıya çıxan birinci məsələ onların mərkəzi qiymətinin, yəni orta səviyyəsinin müəyyən edilməsindən ibarətdir. Bu məqsədlə paylanmanın yerləşmə xarakteristikaları (mərkəzi meyl xarakteristikaları) hesablanılır.

2. Paylanmalar mərkəzi qiymətlərlə yanaşı əlamətin qiymətlərinin onun ətrafında səpələnməsinə görə də fərqlənilirlər.

Beləliklə, paylanma sıralarının tədqiqində ikinci məsələ əlamətin səpələnme xarakteristikalarının axtarılmasından ibarətdir.

3. Müxtəlif formalı paylanma əyrilərinin tədqiqi göstərir ki, onlar simmetriklik cəhətdən fərqlənilirlər. Bununla əlaqədar olaraq üçüncü mühüm məsələ paylanmaların asimmetriya dərəcəsini müəyyən etməkdən ibarətdir.

4. Müxtəlif paylanma əyrilərinin normal əyri ilə müqayisəsi göstərir ki, bəzi paylanma əyriləri normal əyriyə nisbətən absis oxu boyunca "sıxılmış", digərləri isə "dartılmış" olurlar. Ona görə də paylanma əyrilərinin normal əyriyə nisbətən yerləşmə vəziyyətinin öyrənilməsi də mühüm əhəmiyyət kəşb edir.

2. Təsədüfə seçimin ədədi xarakteristikaları.

Ümumi şəkildə paylanma sıralarının statistik təsviri yerləşmə və səpələnme

xarakteristikalarının hesablanması, paylanmanın asimetriya dərəcəsini müəyyən etməkdən ibarətdir.

Yuxarıda deyilənləri nəzərə alaraq paylanma sıralarının statistik xarakteristikaları ilə tanış olaq.

Tutaq ki,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  paylanma funksiyası  $F(x)$  olan baş yığımdan həcmi  $n$  olan təsadüfi seçimdir.

Tərif 2.1. Təsadüfi seçimi təşkil edən  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qiymətlərini uyğun olaraq  $\frac{1}{n}$  ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikalarına seçmənin ədədi xarakteristikaları deyilir.

Ədədi xarakteristikaları üç qrupa – yerləşmə, səpələnmə və empirik paylanmanın normal paylanmaya nəzərən vəziyyətini müəyyən edən ədədi xarakteristikalara bölürlər.

## 2. Yerləşmə xarakteristikaları

### 2.1.1. Seçmə orta. Üstlü orta və onun xassələri.

Tərif 2.2. Seçimin yerləşmə xarakteristikası elə sabitə deyilir ki, seçmənin bütün elementləri bu sabit ətrafında qruplaşmış olsun.

Riyazi gözləmə, moda və median ən çox istifadə edilən yerləşmə xarakteristikalarıdır.

Tərif 2.1.-dən istifadə edərək seçmənin bu xarakteristikalarının hesablanması üçün uyğun düsturları verək.

Ehtimal nəzəriyyəsiindən məlumdur ki,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qiymətlərini uyğun olaraq  $p_i = P\{X = x_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$  ehtimalları ilə alan  $X$  diskret təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i P\{X = x_i\} = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

düsturu ilə hesablanır.

Burada, nəzərə alsaq ki, ixtiyari  $i = \overline{1, n}$  üçün  $p_i = P\{X = x_i\} = \frac{1}{n}$ ,

onda  $MX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  olduğunu alırıq.

Axıncı düsturun sağ tərəfindəki ifadə seçmə orta adlanır və  $\bar{x}$  ilə işarə edilir.

Beləliklə,  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Tutaq ki, təsadüfi seçimin  $x_1, x_2, \dots, x_n$  elementləri içərisində  $k$  ( $k < n$ ) sayda müxtəlif olan  $z_1, z_2, \dots, z_k$  elementləri vardır. Onda  $p_i = P\{X = z_i\} = \frac{n_i}{n}$ ,  $i = \overline{1, k}$  və

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i n_i$  olduğunu alırıq.

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  düsturuna seçmə ortanın sadə,  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i n_i$  düsturuna isə çəkili

düsturu deyilir.

Təcrübədə seçimin bütün elementləri müxtəlif və yaxud eyni tezliklərə malik olduqda sadə, əks halda isə çəkili düsturdan istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Qruplaşdırılmış seçmələr üçün riyazi gözləməni çəkili düstur ilə hesablamaq olar. Belə ki, burada  $z_i$  i –ci qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsi,  $n_i$  isə seçmənin intervalda yerləşən elementlərinin sayı, yəni intervalın tezliyidir.

Teorem 2.1. Seçimin elementlərinin seçmə ortadan kənarlaşmaları cəmi sıfıra bərabərdir. Yəni,  $\sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x})n_i = 0$

İsbatı. Doğrudan da

$$\sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x})n_i = \sum_{i=1}^k z_i \cdot n_i - \bar{x} \sum_{i=1}^k n_i$$

$\sum_{i=1}^k n_i = n$  olduğunu nəzərə alsaq,  $\sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x})n_i = 0$  olduğunu alırıq.

Ehtimal nəzəriyyəsiindən məlumdur ki,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qiymətlərini uyğun olaraq  $p_i = P\{X = x_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$  ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyətin həndəsi və harmonik ortaları uyğun olaraq

$$G(X) = e^{\sum_{i=1}^n p_i \ln x_i}; \quad H(X) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} p_i \right)^{-1}$$

düsturları ilə hesablanılır. İxtiyari  $i = \overline{1, n}$  üçün  $p_i = \frac{1}{n}$  olduğunu nəzərə alsaq

$$G(X) = e^{\sum_{i=1}^n p_i \ln x_i} = e^{\sum_{i=1}^n \ln x_i p_i} = \prod_{i=1}^n e^{\ln x_i p_i} = \prod_{i=1}^n x_i^{p_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

və

$$H(X) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} p_i \right)^{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

olduğunu alırıq. Deməli, təsadüfi seçimin həndəsi ortası

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}$$

harmonik ortası isə

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}}$$

düsturunun köməyi ilə hesablanır.

$$\text{Uyğun çəkili düsturlar } G(x) = \sqrt[n]{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_k^{n_k}} \quad \text{və} \quad H = \frac{n}{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{z_i}}$$

şəklində olar.

Üstlü ortanın ümumi şəklində aşağıdakı kimidir:

$$\bar{x} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n}}$$

k qüvvətinin dəyişilməsilə,  $\bar{x}$  seçmə ortasının müxtəlif növlərini almaq olar:  
 $k=-1$  olduqda harmonik orta alınır:

$$\bar{x}_{har} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

Aydınır ki,  $k=0$  olduqda həndəsi orta alınır:

$$\bar{x}_{hən} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{\prod x_i}$$

$k=1$  olduqda hesabı orta kəmiyyət alınır.

$$\bar{x}_{hes} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$k=2$  olduqda isə kvadratik orta kəmiyyət alınır.

$$\bar{x}_{kv} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Aydınır ki, eyni bir seçmə üçün hesablanmış müxtəlif orta kəmiyyətlər də müxtəlif olacaqdır.  $k$  qüvvəti artdıqca uyğun orta kəmiyyət artır:

$$\bar{x}_{har} < \bar{x}_{hən} < \bar{x}_{hes} < \bar{x}_{kv}$$

Üstlü ortaların bu xassəsi majorantlıq xassəsi adlanır. Bu münasibəti birinci dəfə A.Y. Boyarski isbat etmişdir.

Orta kəmiyyətin bu və ya digər növünün seçilməsi tədqiqatların məqsədindən, ilkin məlumatların xarakterindən və orta kəmiyyəti hesablanan göstəricinin iqtisadi mahiyyətindən asılıdır. Əlamətin dəyişən qiymətlər yığımını hər hansı bir ədədlə xarakterizə etmək zərurəti yarandıqda əlamətin paylanmada orta qiyməti göstəricisindən istifadə edilir. Bu zaman əlamətin dəyişən qiyməti onların seçmə ortası ilə əvəz edilir. Bu isə o zaman mümkün olar ki, aparılan əməliyyat öyrənilən əlamətə görə yığımın əsas xassəsini dəyişməsin.

2.1.2. Təsadüfi seçimin modası. Modanın hesablanması üçün xətti interpolasiya düsturu.

Tərif 2.3. Təsadüfi seçimin ən böyük tezliyə malik olan elementinə seçmənin modası deyilir.

Qruplaşdırılmamış seçmələr üçün modanı təyin etmək üçün heç bir hesablama aparmaq lazım gəlmir. Belə ki, tərifə əsasən paylanma sırasında ən böyük tezliyə uyğun olan element moda olacaqdır.

$$\text{Qruplaşdırılmış seçmələr üçün } d = X_0 + b \frac{n_2 - n_1}{2n_2 - n_1 - n_3}$$

xətti interpolasiya düsturunun köməyi ilə təyin edilir.

Burada  $X_0$  –modal intervalın başlanğıc nöqtəsi,  $b$ - onun uzunluğu,  $n_2$ - modal intervalın,  $n_1$ - modal intervaldan əvvəlki,  $n_3$ -isə modal intervaldan sonra gələn

intervalın tezliyidir.

2.1.3. Təsadüfi seçimin medianı və kvartili. Median və kvartilin hesablanması üçün xətti interpolasiya düsturları.

Tərif 2.4. Seçimin variasiya sırasını hər birində təxminən eyni sayda element olan iki bərabər hissəyə ayıran elementə seçimin medianı deyilir.

Qruplaşdırılmamış seçmələr üçün bilavasitə tərifə əsasən median seçimin həcmi  $n$  tək ədəd ( $n=2l+1$ ) olduqda  $h=x^{(l+1)}$ , cüt ədəd ( $n=2l$ ) olduqda isə  $h = \frac{1}{2}(x^{(l)} + x^{(l+1)})$  kimi hesablanır.

Qruplaşdırılmış seçmələr üçün medianı aşağıdakı iki təqribi üsulla hesablamaq olar.

1) Seçimin elementi olaraq qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsi götürülür və median seçimin həcmi  $n$ -in təkliyi və cütlüyündən asılı olaraq yuxarıda göstərilən müvafiq düsturlar vasitəsilə hesablanır.

$$2) h = X_0 + b \frac{\frac{n}{2} - S_{m-1}}{n_m}$$

Бу дцступр медианын щесаблинамасы цццн хятти интерполйасийа дцступрудур.

Burada  $X_0$  median intervalın başlanğıc nöqtəsi,  $n_m$ -onun tezliyi,  $S_{m-1}$  isə median intervaldan əvvəlki intervalların tezlikləri cəmidir.

Aydındır ki, birmodal simmetrik paylanmalar üçün hesabi orta, moda və median bir-birinə bərabərdir. Bunu asimmetrik paylanmalar üçün demək olmaz. K.Pirson paylanma əyrilərinin müxtəlif növlərinin hamarlaşdırılması əsasında yerləşmə xarakteristikaları arasında aşağıdakı təqribi bərabərliyin doğru olduğunu göstərmişdir:

$$h \approx \frac{1}{3}d + \frac{2}{3}\bar{x}_{hes.}$$

Hesabi orta və medianın təyini nisbətən asan olduğuna görə axırıncı bərabərlikdən modanın hesablanması üçün

$$d \approx \bar{x}_{hes.} - 3(\bar{x}_{hes.} - h)$$

və ya

$$d \approx \bar{x}_{hes.} + 3(h - \bar{x}_{hes.})$$

təqribi düsturlarını alırıq.

Riyazi statistikada əlamətin variasiyasını ölçmək üçün dispersiya və orta kvadratik kənarlaşma ilə yanaşı kvantil göstəricisindən də istifadə edilir. Bu göstərici median anlayışını bir qədər genişləndirməklə qurulur.

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, median variasiya sırasını iki bərabər hissəyə ayırır. Alınmış hissələri yenidən iki bərabər hissəyə ayırmaqla, əlamətin elə qiymətlərini tapmaq olar ki, onlar variasiya sırasını dörd bərabər hissəyə ayırsın və s. Əlamətin variasiya sırasını eyni sayda variantlardan ibarət olan hissələrə ayıran qiymətlərinə kvantil və yaxud qradiyent deyilir. Kvartil, desil, sentil kvantilin xüsusi hallarıdır.

Əlamətin variasiya sırasının dörd bərabər hissəyə ayıran qiymətlərinə kvartil deyilir. Desil və sentil uyğun olaraq əlamətin variasiya sırasını on və yüz

bərabər hissələrə ayıran qiymətlərinə deyilir.

Əlamətin variasiya sırasını dörd bərabər hissələrə ayıran qiymətlərini  $Q_1$ ,  $Q_2$  və  $Q_3$  ilə işarə edək.

Aydındır ki, əlamətin qiymətlərinin  $\frac{1}{4}$  hissəsi birinci  $Q_1$  kvartilindən solda,  $\frac{3}{4}$  hissəsi isə ondan sağ tərəfdə yerləşir. İkinci  $Q_2$  kvartili variasiya sırasını iki bərabər hissəyə ayırdığına görə o median ilə üst-üstə düşür.

Variantların  $\frac{1}{4}$  hissəsi  $Q_1$ -dən solda,  $\frac{1}{4}$  hissəsi  $Q_1$  və  $Q_2$  arasında,  $\frac{1}{4}$  hissəsi  $Q_2$  və  $Q_3$  arasında,  $\frac{1}{4}$  hissəsi isə  $Q_3$ -dən sağda yerləşir.

Qruplaşdırılmış seçmələr üçün əlamətin kvartil qiymətlərini müəyyən etdikdə

$$Q_1 = X_{Q_1} + \frac{h}{n_{Q_1}} \left( \frac{n}{4} - S_{Q_1-1} \right)$$

$$Q_3 = X_{Q_3} + \frac{h}{n_{Q_3}} \left( \frac{3}{4}n - S_{Q_3-1} \right)$$

interpolyasiya düsturlarından istifadə edilir.

Burada,  $X_{Q_1}$  və  $X_{Q_3}$  uyğun olaraq  $Q_1$  və  $Q_3$  kvartillərini öz daxilində saxlayan intervalların sol uclarıdır;  $n_{Q_1}$  və  $n_{Q_3}$  kvartil intervalların tezlikləridir;  $n$ - seçmənin həcmi,  $h$  isə qruplaşdırma intervallarının uzunluğudur;  $S_{Q_1-1}$  və  $S_{Q_3-1}$  kvartil intervaldan əvvəlki intervalların tezlikləri cəmidir (yığılmış tezlik).

2.1.4. Seçmə ortanın xassələri. Orta qiymət haqqında teorem.

Tutaq ki,  $X$  və  $Y$  baş yığımları arasında  $Y = aX + b$  xətti asılılığı vardır (burada  $a$  və  $b$  ixtiyari sabitlərdir).

Teorem 2.2.  $Y = aX + b$  olduqda  $\bar{y} = a\bar{x} + b$  olar.

İsbatı.  $X$  və  $Y$  baş yığımları arasında  $Y = aX + b$  xətti asılılığı olduğuna görə  $Y_j = aX_j + b$ ,  $j = \overline{1, k}$  olar.

Tərifə əsasən

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k Y_j \cdot n_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (aX_j + b)n_j = a \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k X_j n_j + b \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k X_j n_j \quad \text{və} \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j = 1 \quad \text{olduğunu nəzərə alsaq,}$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b \quad \text{olduğunu alarıq.}$$

Teorem 2.2-dən hesabi ortanın aşağıdakı xassələri alınır.

Xassə 2.1. Seçmənin elementlərini eyni bir  $b$  kəmiyyəti qədər artırısaq (azaltsaq), hesabi orta da  $b$  qədər artar (azalar).

Xassə 2.2. Seçmənin elementlərini  $a$  dəfə artırısaq (azaltsaq) hesabi orta da  $a$  dəfə artar (azalar).

2.1 və 2.2 xassələrinə hesabi ortanın monotonluq xassəsi deyilir.

$$x^{(1)} = \min(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad \text{və} \quad x^{(n)} = \max(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

işarə edək. Aydındır ki,

$$x^{(1)} \leq \bar{x} \leq x^{(n)}$$

olar. Yəni hesabi orta daxili ortadır.

Hesabi orta assosiativlik xassəsini də ödəyir.

Xassə 2.3. Seçmənin elementlərinin bir hissəsini onların xüsusi ortası ilə əvəz etsək hesabi ortası dəyişməz.

Xassə 2.4. Hesabi ortadan kiçik olan elementlərin hesabi ortadan kənarlaşmaları cəmi, hesabi ortanın ondan böyük elementlərdən kənarlaşmaları cəminə bərabərdir.

Xassə 2.5. Seçmənin elementlərinin tezliklərini  $d$  dəfə artırısaq (azaltsaq) hesabi orta dəyişməz.

Tutaq ki,  $l$  qrup elementlər çoxluğu vardır.  $i$ -ci ( $i = \overline{1, l}$ ) qrupun elementləri sayını  $n_i$ , seçmə ortasını isə  $\bar{x}_i$  ilə işarə edək. Bu qrupları birləşdirdikdə alınan yeni yığımın seçmə ortasını  $\bar{x}$  ilə işarə edək.  $\bar{x}_i$ -lərə ( $i = \overline{1, l}$ ) qrup ortaları,  $\bar{x}$ -ə isə ümumi orta deyilir.

Teorem 2.3 (orta qiymət haqqında). Ümumi orta qrup ortalarının hesabı çəkili ortasına bərabərdir. Yəni

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \bar{x}_i n_i$$

İsbatı. Tutaq ki, qruplar aşağıdakı şəkildədir.

1-ci qrup –  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$

2-ci qrup –  $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$

-----

$l$ -ci qrup –  $x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ln_l}$

onda  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ ,  $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ ,  $i = \overline{1, 2, \dots, l}$  olar.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \left( \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l n_i \left( \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \bar{x}_i n_i \text{ olar.}$$

Deməli,  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \bar{x}_i n_i$

### 3. Səpələnmə xarakteristikaları

#### 3.1. Səpələnmə xarakteristikaları

Tərif 2.5. Seçmənin elementlərinin onun hər hansı yerləşmə xarakteristikası ətrafında nə dərəcədə sıx səpələnməsinin ölçüsünü göstərən sabit ədədə onun səpələnmə xarakteristikası deyirlər.

Aşağıda baxacağımız variasiya genişliyi, orta xətti meyl, dispersiya, orta kvadratik meyl, variasiya əmsalı seçmənin səpələnmə xarakteristikalarıdır.

Tərif 2.6. Seçmənin ən böyük elementi ilə ən kiçik elementi arasındakı fərqi seçmənin variasiya genişliyi deyilir.

Variasiya genişliyini  $R$  ilə işarə etsək,

$$R = x^{(n)} - x^{(1)}$$

olduğunu yaza bilərik. Beləliklə, variasiya genişliyi seçmənin elementlərinin bir –

birindən tərəddüdlərinin ən yüksək həddini göstərir.

İndi isə seçmənin orta xətti meylinin və dispersiyasının hesablanması üçün uyğun düsturları verək. Ehtimal nəzəriyyəindən məlumdur ki,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qiymətlərini uyğun olaraq  $p_i = P(X=x_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$  ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyətin orta xətti meyli və dispersiyası uyğun olaraq.

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| p_i$$

və

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 p_i$$

düsturları ilə hesablanır. Seçmə üçün  $p_i = \frac{1}{n}$ ,  $i = \overline{1, n}$  olduğunu nəzərə alsaq, seçmənin orta xətti meyli və dispersiyası üçün uyğun olaraq

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

düsturlarını alırıq. Seçmənin elementləri müxtəlif tezliklərə malik olduqda orta xətti meylin çəkili düsturu

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k |z_i - \bar{x}| n_i$$

dispersiyasının çəkili düsturu isə

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x})^2 n_i$$

şəklində yazılar.

Tərif 2.7.  $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$

ədədinə seçmənin orta kvadratik meyli

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

ədədinə isə onun variasiya əmsalı deyilir.

Tərifə görə, variasiya əmsalı orta kvadratik meylin riyazi gözləməyə faizlə nisbətidir. Başqa sözlə,  $v$  kəmiyyəti  $\sigma$ -nın  $\bar{x}$ -in neçə faizi olduğunu göstərir.

Orta xətti və orta kvadratik meyl hadisələrin təbii xüsusiyyətlərinə uyğun ölçü vahidləri ilə ifadə olunduqlarına görə, onlar müxtəlif kəmiyyətlərin orta tərəddüd dərəcələrini bir-biri ilə müqayisə etməyə imkan vermir. Variasiya əmsalı müxtəlif ölçü vahidləri ilə ifadə olunan bir neçə kəmiyyətin orta tərəddüd dərəcələrini müqayisə etməyə imkan verir.

Hər hansı yığırda müxtəlif amillərin və yaxud bir amilin müxtəlif ortaya malik bir neçə yığımlarda tərəddüd dərəcələrini müqayisə etmək üçün nisbi variasiya göstəricilərindən istifadə edilir. Bu göstəricilər mütləq variasiya göstəricilərinin orta kəmiyyətə (və yaxud medianə) nisbəti kimi hesablanır. Mütləq göstərici olaraq, variasiya genişliyini, orta kvadratik kənarlaşmanı və kvartil kənarlaşmanı götürməklə nisbi variasiya göstəricilərini müəyyən etmək olar.

Osilyasiya əmsalı

$$K_R = \frac{R}{X} \cdot 100\%$$

Nisbi xətti kənarlaşma

$$K_E = \frac{E}{X} \cdot 100\%$$

Variasiya əmsalı

$$V = \frac{\sigma}{X} \cdot 100\%$$

Kvartil variasiyası

$$K_Q = \frac{Q}{h} \cdot 100\% \quad \text{və ya} \quad K_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2Q_2} \cdot 100\%$$

Praktikada ən çox istifadə edilən variasiya əmsalıdır. Bu göstəricidən müxtəlif əlamətlərin variasiyasını müqayisə etməklə yanaşı, yığımın bircinsliyini müəyyən etmək üçün də istifadə edilir. Belə ki, normal paylanmaya və yaxud ona yaxın olan paylanmaya malik yığımlarda variasiya genişliyi 33% -i aşmadıqda onlar bircinsli hesab edilir.

Qeyd etmək lazımdır ki, bəzi hallarda dispersiyanı

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i^2 n_i - \bar{x}^2$$

düsturunun köməyi ilə hesablamaq əlverişli olur.

Doğrudan da, tərifə əsasən

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i^2 n_i - 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i \cdot n_i + \\ &\quad + \bar{x}^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i \cdot n_i &= \bar{x} \quad \text{və} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i = n \end{aligned}$$

olduğunu nəzərə alsaq, düsturun doğruluğu alınar.

### 3.2. Dispersiyanın xassələri.

Teorem 2.4. Tutaq ki, X və y baş yığımları arasında  $y=aX+b$  xətti asılılığı vardır. Onda

$$\sigma_u^2 = a^2 \cdot \sigma_x^2$$

olar.

İsbatı:  $y=aX+b$  olduğuna görə

$$y_i = a z_i + b, \quad i = \overline{1, k} \quad \text{olar.}$$

Teorem (2.2) -yə əsasən  $\bar{y} = a\bar{x} + b$

Onda,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2 n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (a z_i + b - a\bar{x} - b)^2 n_i = \\ &= a^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x})^2 n_i = a^2 \sigma_x^2 \end{aligned}$$

$$\text{Beləliklə, } \sigma_y^2 = a^2 \sigma_x^2$$

Teorem 2.4-dən aşağıdakı nəticələrə gəlmək olar.

Nəticə 2.1. Seçmənin bütün elementlərini eyni kəmiyyət qədər artırısaq və yaxud azaltsaq dispersiya dəyişməz. Yəni  $\sigma_x^2 = \sigma_{x \pm A}^2$ .

Nəticə 2.2. Seçmənin bütün elementlərini k dəfə artırısaq (azaltsaq) dispersiya  $k^2$  dəfə artar (azalar). Yəni

$$\sigma_{kx}^2 = k^2 \sigma_x^2 \quad \text{və} \quad \sigma_{\frac{x}{k}}^2 = \frac{1}{k^2} \sigma_x^2$$

Nəticə 2.3. Elementlərin tezliklərini k dəfə artırısaq (azaltsaq) dispersiya dəyişməz.

Doğrudan da,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{d} n_i}{\sum \frac{n_i}{d}} = \\ &= \frac{\frac{1}{d} \sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\frac{1}{d} \sum n_i} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i} \end{aligned}$$

Nəticə 2.4 (Dispersiyanın minimallıq xassəsi):

$S = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$  cəmi özünün ən kiçik qiymətini  $a = \bar{x}$  olduqda alır.

Yəni,

$$\min_a S = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Doğrudan da,  $\frac{dS}{da} = -2 \sum (x_i - a) n_i = 0$ . Buradan  $\sum (x_i - a) n_i = 0$  olduğunu alırıq.

Axırıncı tənlikdən

$$a = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \bar{x} \text{ olduğunu tapırıq.}$$

### 3. 3. Alternativ əlamətin dispersiyası

Statistik təhlildə tez - tez alternativ əlamətin dispersiyasına təsadüf edilir. Statistika əlamətin variasiyasını öyrənməklə yanaşı əlamətə malik olan və ya olmayan vahidlərin hissəsini də öyrənir.

Tutaq ki, həcmi n olan seçmədə m sayda element əlamətə malikdir, qalan n-m sayda element isə əlamətə malik deyildir. Onda əlamətə malik olanların hissəsi  $p = \frac{m}{n}$ , malik olmayanlarınkı isə  $q = \frac{n-m}{n}$  olar. Aydındır ki,  $p+q=1$ .

Alternativ əlamətin variasiyasının kəmiyyət ölçüsünü müəyyən etmək üçün şərti olaraq əlamətin varlığını "1" ilə, yoxluğunu isə "0" ilə işarə edək. Onda alternativ əlamətin paylanma sırasını aşağıdakı kimi təsvir etmək olar.

|       |   |   |
|-------|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 |
| $n_i$ | q | p |

Alternativ əlamətin orta qiyməti

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot q + 1 \cdot p}{p + q} = p$$

olar. Dispersiya isə

$$\sigma^2 = \frac{(0-p)^2 \cdot q + (1-p)^2 \cdot p}{q+p} = \frac{p^2 q + q^2 p}{p+q} = pq(p+q) = pq$$

olar. Alternativ əlamətin orta kvadratik kənarlaşması isə

$$\sigma = \sqrt{pq}$$

olar. Eyni zamanda aydındır ki, pq hasili özünün maksimum qiymətini  $p=q=\frac{1}{2}$  olduqda alır. Ona görə də alternativ əlamətin dispersiyasının maksimal qiyməti 0,25 olar.

### 3.4.. Dispersiyaların toplanması qanunu

Bir çox hallarda təcrübədə bir neçə qrupun birləşməsindən alınan yığımlı və tərsinə baş yığımın ayrı-ayrı qruplara bölünməsindən alınan yığımları öyrənmək lazım gəlir. Eyni zamanda baş yığımın və onu təşkil edən qrupların xarakteristikaları arasındakı əlaqəni müəyyən etmək lazım gəlir. Biz riyazi gözləmələr arasındakı əlaqənin orta qiymət (teorem 2.3 ) haqqında teorem vasitəsilə verildiyini isbat etdik. İndi isə dispersiyalar arasındakı əlaqəni verək. Bu əlaqə dispersiyaların toplanması qanunu ilə verilir.

Tutaq ki, bəzi qrup elementlər çoxluğu verilmişdir:

$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}, \dots, x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ln_l}$ .  $i$ -ci qrupdakı elementlərin sayını  $n_i$ ,  $i$ -ci qrupun riyazi gözləməsini  $\bar{x}_i$  və dispersiyasını  $\sigma_i^2$  ilə işarə edək.  $i = 1, 2, \dots, l$  olduqda  $\bar{x}_i$ -lərə qrup ortaları,  $\sigma_i^2$ -lara isə qrupdaxili dispersiyalar deyilir. Bu qruplara bir baş yığım kimi baxsaq, onun həcmi  $n = \sum_{i=1}^l n_i$  olar.  $\bar{x}$  ilə baş yığımın riyazi gözləməsini,  $\sigma^2$  ilə isə dispersiyasını işarə edək

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$$

ifadəsinə qruplararası dispersiya deyilir.

$$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sigma_i^2 \cdot n_i$$

ifadəsi isə orta qrupdaxili dispersiya adlanır.

**Teorem 2.6.** Ümumi dispersiya orta qrupdaxili dispersiya ilə qruplararası dispersiyanın cəminə bərabərdir.

Yəni

$$\sigma^2 = \overline{\sigma^2} + \sigma_x^2$$

İsbatı: Doğrudan da

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i + \\ &+ \bar{x}_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}) + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

Teorem 2.1 –ə əsasən

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^l (\bar{x}_i - \bar{x}) \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i) = 0$$

Digər tərəfdən

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^l (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i = n \cdot \sigma_x^2$$

və

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l n_i \left( \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sigma_i^2 \cdot n_i \end{aligned}$$

Btləliklə,  $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2 + \sigma_x^2$  olduğunu alırıq.

5. Riyazi gözləmə və dispersiyanın hesablanması üçün şərti sıfır (moment) üsulu

Riyazi gözləmə və dispersiyanın düsturlarından aydın görünür ki, onları hesablamaq çox zəhmət tələb edir. Ona görə də bu xarakteristikaları hesablamaq üçün şərti sıfır üsulundan istifadə edilir. Bu üsul onların məlum xassələrinə əsaslanır.

Tutaq ki, X baş yığımından həcmi n olan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçməsi götürülmüşdür və bu seçmənin paylanma sırası

|       |       |       |     |       |
|-------|-------|-------|-----|-------|
| $z_i$ | $z_1$ | $z_2$ | ... | $z_k$ |
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_k$ |

şəklindədir.

$u_i = z_i - c$ ,  $i = \overline{1, k}$  əvəzləməsini aparaq. Burada c ixtiyari sabitdir. Əvəzləmə nəticəsində alınmış  $u_1, u_2, \dots, u_k$  ədədlərinə

$$U = X - C$$

baş yığımından seçmə kimi baxmaq olar. Onda teorem 2.2-yə əsasən

$$\bar{u} = \bar{x} - c \quad \text{və} \quad \bar{x} = \bar{u} + c,$$

teorem 2.4.-ə əsasən isə

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2 \quad \text{olar.}$$

Qruplaşdırılmış seçmələrdə uyğun düsturları almaq üçün  $u_i = \frac{1}{b}(z_i - c)$ ,  $i = \overline{1, k}$  əvəzləməsi aparmaq lazımdır. Burada, b- qruplaşdırma intervalının uzunluğu,  $z_i$ -isə qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsidir. Bu halda riyazi gözləmə

$$\bar{o} = b\bar{u} + c$$

dispersiya isə

$$\sigma_x^2 = b^2 \sigma_u^2$$

düsturu ilə hesablanır. Bu düsturları açıq şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^k \frac{z_i - c}{b} n_i \right) \cdot b + c$$

və

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left( \sum_{i=1}^k \left( \frac{z_i - a}{b} \right)^2 \cdot n_i \right) \cdot b^2 - (\bar{x} - a)^2$$

Qeyd etmək lazımdır ki, təcrübədə adətən C olaraq, ya seçmənin modası, ya da ki, riyazi gözləməyə yaxın ədəd götürülür. Belə ki, C-nin seçilməsi konkret məsələdən asılıdır.

6. Təsadüfi seçimin momenti. Mərkəzi və başlanğıc momentlər.

Tutaq ki, X baş yığımından həcmi n olan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçməsi alınmışdır və onun paylanma sırası

|       |       |       |     |       |
|-------|-------|-------|-----|-------|
| $z_i$ | $z_1$ | $z_2$ | ... | $z_k$ |
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_k$ |

şəklindədir.  $c > 0$  və s natural ədəddir.

Tərif 7.1.  $a_s(c) = \sum_{i=1}^n (x_i - c)^s$  ədədinə seçmənin c ədədinə görə s- tərtibli momenti deyilir.

Seçmənin elementləri müxtəlif tezliklərə malik olduqda s- tərtibli moment üçün çəkili düstur

$$a_s(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (z_i - c)^s n_i$$

şəklində olar.

Tərif 7.2:  $c=0$  olduqda  $a_s(c) = \sum_{i=1}^n (x_i - c)^s$  momentinə başlanğıc moment,  $c = \bar{x}$  olduqda isə mərkəzi moment deyilir.

$$b_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^s \quad (\text{sadə düstur})$$

$$b_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i^s \cdot n_i \quad (\text{çəkili düstur})$$

Mərkəzi moment üçün uyğun düsturlar aşağıdakı kimi olar.

$$m_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^s \quad (\text{sadə düstur})$$

$$\text{və } m_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x})^s \cdot n_i \quad (\text{çəkili düstur})$$

Başlanğıc və mərkəzi momentlər arasında əlaqə düsturları aşağıdakı teoremin köməyi ilə verilir.

Teorem 2.7.

$$m_s = \sum_{i=0}^s c_s^i (-b_1)^{s-i} b_i,$$

İsbatı. Doğrudan da istənilən  $\alpha$  və  $\beta$  ədədləri üçün yazı bilərik:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (z_i - \alpha)^s \cdot n_i &= \sum_{i=1}^k [(z_i - \beta) + (\beta - \alpha)]^s \cdot n_i = \\ &= \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=0}^s c_s^j (z_i - \beta)^j (\beta - \alpha)^{s-j} \right) \cdot n_i = \\ &= \sum_{j=0}^s c_s^j (\beta - \alpha)^{s-j} \left( \sum_{i=1}^k (z_i - \beta)^j n_i \right) \end{aligned}$$

Bu düstur,  $\alpha$  ədədinə görə  $s$ -tərtibli momenti,  $\beta$  ədədinə görə  $s$ -dən kiçik tərtibli momentlərlə ifadə etməyə imkan verir.

Axırıncı düsturda əvvəlcə  $\alpha = \bar{x}$ ,  $\beta = 0$  qəbul etsək

$$m_s = \sum_{i=0}^s c_s^i (-b_1)^{s-i} b_i, \text{ sonra isə } \alpha = 0, \beta = \bar{x} \text{ qəbul etsək düsturunu alarıq.}$$

Xüsusi halda aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$\begin{aligned} m_2 &= b_2 - b_1^2 & b_2 &= b_1^2 + m_2 \\ (m_3 &= 2b_1^2 - 3b_1 b_2 + b_3 & b_3 &= b_1^3 + 3b_1 m_2 + m_3 \\ m_4 &= 3b_1^4 + 6b_1^2 b_2 - 4b_1 b_3 + b_4 & b_4 &= b_1^4 + 6b_1^2 m_2 + 4b_1 m_3 + m_4 \end{aligned}$$

## 7. Empirik paylanmanın tədqiqi. Asimmetriya və əksə əmsalları.

Əgər baxılan empirik paylanmanın nəzəri forması məlumdursa, mərkəzi meyli və səpələnmə xarakteristikaları paylanmanın əsas xarakteristikalarıdır. Beləliklə, bu halda birtərtibli və ikitərtibli momentləri bilmək kifayətdir. Belə ki, əgər tədqiq edilən hadisə kifayət qədər yaxşı öyrənilibsə və onun normal paylanmaya malik olduğu məlumdursa, onda bu paylanma birinci iki mərkəzi momentlə bir qiymətli müəyyən edilir.

Əgər öyrənilən hadisə Puasson qanununa tabedirsə, onda paylanma bir momentlə (birtərtibli başlanğıc və ya ikitərtibli mərkəzi) tamamilə müəyyən edilir.

Ancaq əksər hallarda paylanmanın nəzəri forması məlum olmur. Ona görə də empirik paylanmaya əsasən nəzəri paylanmanın bəzi xassələrinin öyrənilməsi məsələsi yaranır.

Empirik paylanmanın qrafikini (poliqon və ya histqram) qurmaqla nəzəri paylanma qanunu haqqında təxmini təsəvvür yaratmaq olar. Empirik paylanma isə baş yığımdan götürülmüş seçməyə əsasən qurulur. Ona görə də empirik məlumatlar müəyyən dərəcədə qiyməti məlum olmayan təsadüfi xətalara bağlıdır. Bu təsadüflərin təsiri əlamətin dəyişməsinin əsas qanunauyğunluğunun dərk edilməsini çətinləşdirir. Seçmənin həcmi artdıqca poliqon hamarlaşır və səlis əyriyə çevrilir. Alınmış əyriyə paylanma əyrisi deyilir.

Paylanma əyrisi baş yığımın paylanmasını (nəzəri paylanma) xarakterizə edir. Paylanmanın formasının tədqiqi aşağıdakı üç məsələnin həllini nəzərdə tutur:

- 1) Paylanmanın ümumi xarakterinin aydınlaşdırılması;
- 2) Empirik paylanmanın hamarlandırılması, yəni verilmiş formaya malik

$f(x)$  əyrisinin qurulması;

3) Tapılmış nəzəri paylanmanın empirik paylanmaya uyğunluğunun yoxlanılması.

Statistik tədqiqatda müxtəlif növ paylanmalara təsadüf edilir. Bircins yığımlar bir qayda olaraq birtəpəli paylanmalara malik olurlar. Çoxtəpəlilik yığının bircins olmamasına dəlalət edir. Paylanmanın ümumi xarakterinin aydınlaşdırılması onun bircinslik dərəcəsinin qiymətləndirilməsini və asimmetriya və ekses əmsallarının hesablanması nəzərdə tutur. Simmetrik paylanmalarda mərkəzdən eyni uzaqlıqda yerləşən variantlar eyni tezliklərə malikdirlər. Bu paylanmalar üçün hesabi orta, moda və median bir-birinə bərabərdir. Ona görə də sadə asimmetriya göstəricisi olaraq bu göstəricilərin fərqi qəbul etmək olar.  $\bar{x} - d$  fərqi nə qədər böyük olsa, paylanmanın asimmetriyası bir o qədər böyük olacaqdır.

Bir neçə yığının asimmetriya dərəcəsinin müqayisəli təhlili üçün nisbi

$$A_s = \frac{\bar{x} - d}{\sigma}$$

göstəricisi hesablanır. Bu göstərici müsbət və mənfi qiymətlər ala bilər.

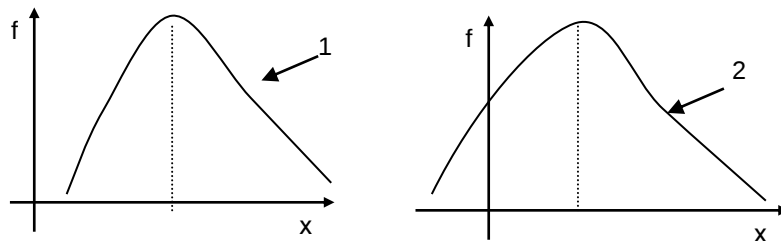
$A_s > 0$  olması sağ tərəfli asimmetriyanın olduğunu göstərir (sağ budaq maksimal ordinatına görə sol budağa nisbətən daha çox uzadılmışdır).

Sağ tərəfli asimmetriyada mərkəzi meyl xarakteristikaları arasında

$$d < h < \bar{x}$$

münasibəti doğrudur

$A_s < 0$  olması sol tərəfli asimmetriyanın olduğunu göstərir



Şəkil 2.2. Asimmetrik paylanma sırası.

1- sağ tərəfli asimmetriya, 2-sol tərəfli asimmetriya

Simmetrik paylanmalarda müsbət və mənfi kənarlaşmaların tək dərəcələri bir-birini yox edir.

Beləliklə, tək tərtibli mərkəzi momentlərin sıfıra bərabərliyi paylananın simmetriyalarını sübut edir. Bu momentlərin sıfırdan fərqli olması isə simmetriyadan kənarlaşmanı, yəni əyilməni göstərir. Ona görə də əyilməni xarakterizə etmək üçün üç tərtibli  $m_3$  mərkəzi momentindən istifadə edilir.

Momentlər qəbul edilmiş ölçü vahidlərindən asılı olduqlarına görə, əyilmənin ölçüsü olaraq  $\frac{m_3}{\sigma^3}$  standartlaşdırılmış nisbətindən istifadə edilir.

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma^3}$$

kəmiyyətinə asimmetriya (əyilmə) əmsalı deyilir.

Bu göstəricinin tətbiqi asimmetriya dərəcəsini təyin etməklə yanaşı əlamətin

baş yığımda paylanması asimmetriyanın olub-olmamasını da müəyyən etməyə imkan verir.

Bu göstəricinin əhəmiyyətlik dərəcəsi

$$\sigma_{As} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}$$

düsturu ilə hesablanan orta kvadratik xəta vasitəsilə qiymətləndirilir. Belə ki,  $\frac{|As|}{\sigma_{As}} > 3$  olduqda asimmetriya əhəmiyyətlidir və əlamətin baş yığımda paylanması

simmetrik deyildir.  $\frac{|As|}{\sigma_{As}} < 3$  olduqda isə asimmetriya əhəmiyyətsizdir və onun varlığı ancaq təsadüfi amillərin təsiri ilə izah edilir.

Paylanma funksiyası qrafikinə normal əyriyə görə yuxarı və aşağı olduğunu təyin etmək üçün eksəs əmsalından istifadə edilir.

Dörd tərtibli mərkəzi moment vasitəsilə təyin olunan

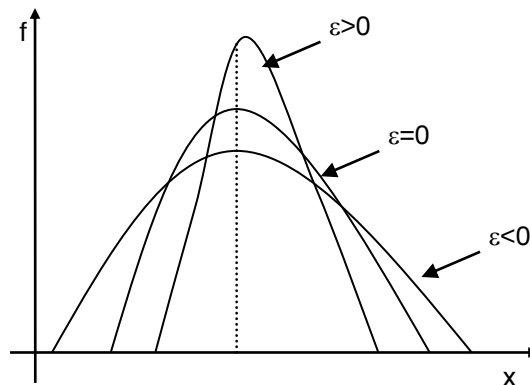
$$e = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$$

kəmiyyəti eksəsi daha dəqiq xarakterizə edir. Qeyd edək ki, normal paylanmalar üçün  $\frac{m_4}{\sigma^4} = 3$ . Əməli məsələlərin həllində qruplaşdırılmış seçmələr üçün asimmetriya və eksəs əmsallarını aşağıdakı düsturların köməyi ilə hesablamaq daha məqsədəuyğundur:

$$a = \frac{1}{\sigma_u^2} (b_3 - 3b_2b_1 + 2b_1^3)$$

$$e = \frac{1}{\sigma_u^4} (b_4 - 4b_1b_3 + 6b_1^2b_2 - 3b_1^4) - 3.$$

Burada  $\sigma_u^2 = \frac{1}{n} \sum (z_i - c)^2$  şərti variantlarının dispersiyası;  $b_1, b_2, b_3$  isə həmin variantların uyğun tərtibli başlanğıc momentləridir.



Şəkil . 2.3. Paylanmanın eksəsi

Eksəs empirik paylanmanın təpə nöqtəsinin normal əyrinin təpə nöqtəsinə nisbətən yuxarıda və ya aşağıda yerləşməsini göstərir.

Eksəsin orta kvadratik xətası

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{2nn(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}$$

düsturu ilə hesablanır

6. İkiölçülü təsadüfə kəmiyyətin təsviri və ədədi xarakteristikaları.

Tutaq ki  $(x_i, n_i), i = 1, 2, \dots, n$ , ikiölçülü  $(X, Y)$  təsadüfə kəmiyyətin müşahidələrinin həcmi  $n$  olan seçimidir. Baş yığımın ilkin təsvirini seçimin eləmlətlərinin müstəvidə yerləşməsinə əsasən əldə etmək olar.

$(x_i, n_i), i = 1, 2, \dots, n$ , qiymətlərini uyğun olaraq  $\frac{1}{n}$  ehtimalları ilə alan ikiölçülü diskret təsadüfə vektorun paylanması ikiölçülü təsadüfə seçimim paylanması deyildir. Seçmə xarakteristikalar uyğun diskret təsadüfə vektorun xarakteristikaları kimi hesablanır.

Seçmə xarakteristikaların hesablamasını aşağıdakı ardıcılıqla aparmaq məqsəduyğundur. Əvvəlcə

$$\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n x_i^2, \sum_{i=1}^n y_i^2, \sum_{i=1}^n x_i y_i, \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2$$

cəmləri hesablanır. Ş

Hesablamaların düzgünlüyü

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2$$

eyniliyinin köməyi ilə yoxlanılır.

Seçmə ortalar

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

kimi hesablanır. Sonra isə seçmə ortadan kənarlaşmaların kvadratları cəmi, və hasillərin və seçmə ortadan kənarlaşmaları cəmi hesablanır:

$$Q_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n},$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n},$$

$$Q_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n} Q_x, S_y^2 = \frac{1}{n} Q_y, r = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x Q_y}}$$



## MÖVZU 7. Birölçülü paylanmalar. Normal paylanma ilə bağlı paylanmalar.

### P L A N

1. Birölçülü diskret paylanmalar.
  - 1.1. Puasson paylanması
  - 1.2. Həndəsi paylanma.
  - 1.3. Hiperhəndəsi paylanma.
2. Birölçülü kəsilməz paylanmalar.
  - 2.1. Müntəzəm paylanma
  - 2.2. Normal aylanma.
  - 2.3. Üç siqma qanunu.
  - 2.4. Loqarifmik normal paylanma. Pareto paylanması.
3. Normal paylanma ilə bağlı paylanmalar.”
  - 3.1. ” Xi – kvadrat” paylanma
  - 3.2. Fiher – Snedekor paylanması.
  - 3.3. Styudent paylanması
4. Styudent, Fiher və “xi-kvadrat” paylanmaya malik bəzi xarakteristikalar.

### Ə D Ə B İ Y Y A T

1. S.Ö.Ömərov, N.Ə. Cavadov. Riyazi və tətbiqi statistika. Bakı, Azərneşr, 2007.
2. Ə.Ə. Hüseyinov, S.Y. Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çapıoğlu, 2006.

#### 1. Birölçülü diskret paylanmalar.

##### 1.1. Puasson paylanması

$X$  təsadüfi kəmiyyəti  $k=0,1,2,\dots$  qiymətlərini uyğun olaraq

$$\pi(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

ehtimalı ilə alırsa, onda ona  $\lambda$  parametrlili Pyasson kəmiyyəti deyilir.

$$\pi(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k \geq 0) \text{ ardıcılığına } \lambda \text{ parametrlili Pyasson paylanması deyilir.}$$

Pyasson paylanması nəzəriyyədə və əməli fəaliyyətdə (məsələn; fizikada, biologiyada, etibarlılıq və kütləvi xidmət nəzəriyyəsində) geniş tətbiq edilir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$\pi(k, \lambda) > 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \pi(k, \lambda) = 1$$

#### 1.2. Həndəsi paylanma

Fərz edək ki,  $n$  sayda asılı olmayan sınaq aparılır və hər sınaqda  $A$  hadisəsinin baş vermə ehtimalı  $p$ -yə bərabərdir. Bu o deməkdir ki, hər hansı sınaqda  $A$

hadisənin baş verməsi (baş berməməsi) nüvbəti sınaqlarda həmin hadisənin baş verməsinə təsir etmir.

Asılı olmayan sınaqları A hadisəsi baş verənə qədər davam etdirək. By sınaqların sayını  $X$  ilə işarə edək. Aydındır ki,  $X = 0, 1, 2, \dots$  qiymətləri alan diskret təsadüfi kəmiyyətdir.  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin  $m$  qiymətini alması hadisəsinin ehtimalını hesablayaq.

$X=m$  olması üçün birinci  $m-1$  sınaqda A hadisəsi baş verməməli,  $m$ -ci sınaqda isə baş verməlidir. Sınaqlar asılı olmadığına görə axtarılan ehtimal

$$P(X=m)=(1-p)^{m-1} \cdot p$$

olar.

$P(X=m)=(1-p)^{m-1}p$  bərabərliyi ilə verilən ehtimallar çoxluğuna  $p$  parametrlili həndəsi paylanma deyilir.

### 1.3.Hiperhəndəsi paylanma

Qutuda  $M$  sayda ağ,  $N - M$  sayda isə qara har vardır. Bəzi hallarda məmulatın keyfiyyətini yoxladıqda o, sıradan çıxır. Məsələn, məhsulun keyfiyyətinə nəzarəti həyata keçirərkən nəzarət əməliyyatı nəticəsində məhsul satıl üçün yararsız hala düşür. Bu halda məmulatların hamısının deyil, onların müəyyən hissəsinin keyfiyyəti yoxlanılır. Tutaq ki, qutudan təsadüfi qaydada  $n$  har çıxarılmışdır. Çıxarılan harlardan  $m$  sarın ağ har olması hadisəsinin ehtimalını hesablayaq.  $N$  hardan  $n$  harı  $C_N^n$  üsulla seçmək olar. Deməli, mümkün halların sayı  $C_N^n$ -dir. Çıxarılan harlardan  $m$  harın ağ har olması hadisəsi ( $A$ ) üçün əlverişli halların sayını tapaq.  $M$  ağ hardan  $m$  harı  $C_M^m$  üsulla,  $N - M$  qara hardan isə  $n - m$  harı  $C_{N-M}^{n-m}$  üsulla seçmək olar. Onda əlverişli halların sayı  $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$  olar. Beləliklə, klassik ehtimalın tərifinə görə axtarılan ehtimal

$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

olar

$$h(k, N, n, m) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

işarə edək.  $h(k, N, n, m) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$  bərabərliyi ilə verilən ehtimallar çoxluğuna hiperhəndəsi paylanma deyilir.

## 2 .Birölçülü kəsilməz paylanmalar.

### 2.1.Müntəzəm paylanma

$[a, b]$  parçasında qiymət alan kəsilməz  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a}, x \in [a, b] \end{cases}$$

şəklində olduqda müntəzəm paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Müntəzəm paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətin  $(x, x + \Delta)$  intervalından qiymət alması  $x$ -dən asılı deyildir və parçanın  $\Delta$  uzunluğu ilə mütənasibdir:

$$P(x < X < x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta} \frac{1}{b-a} dt = \frac{\Delta}{b-a}$$

$X$  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, a < x \leq b, \\ 1, x > b \end{cases}$$

həkilindədir.

## 2.2. Normal paylanma

Normal paylanma terminini ehtimal nəzəriyyəsinə K.Pirson daxil etmişdir. Bu terminlə yanaşı, "Haus paylanması", "Haus qanunu" terminləri də işlədilir.

$$f(x; a\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty, \sigma > 0$$

bərabərliyi ilə verilən funksiya normal sıxlıq deyilir. Uyğun paylanma funksiyasına isə normal paylanma funksiyası deyilir.

$$F(x; a\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$a = 0, \sigma = 1$  olduqda :

$$f(x; 0; 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

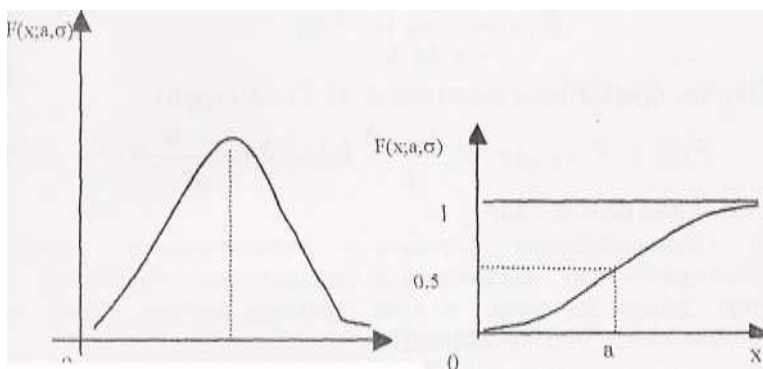
və

$$F(x; 0; 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Bu funksiyalara uyğun olaraq standart normal sıxlıq və standart normal paylanma funksiyaları deyilir.

Paylanma funksiyası  $F(x; a\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$  bərabərliyi ilə verilən

təsadüfi kəmiyyətə  $(a, \sigma^2)$  parametrlili normal kəmiyyət deyilir və  $X \in N(a, \sigma^2)$  kimi iharə edilir.  $X \in N(0, 1)$  kəmiyyətinə standart normal kəmiyyət deyilir. Normal paylanmanın və onun sıxlıq funksiyasının qrafiki həkil 1-də verilməlidir.



Həkil 1. Normal paylanma

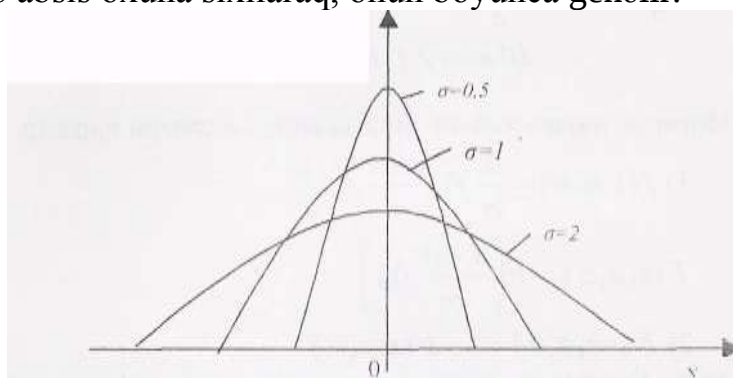
Normal paylanmanın aşağıdakı xassələri vardır:

$$1) f(x; a; \sigma) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-a}{\sigma}; 0,1\right)$$

$$F(x; a; \sigma) = F\left(\frac{x-a}{\sigma}; 0,1\right)$$

$$2) F(-x; a; \sigma) = 1 - F(x; a; \sigma)$$

3) Normal əyrinin forması  $\sigma$  parametrindən asılıdır. Normal əyri  $\sigma$ -nın azalması ilə ordinat oxuna sıxılaraq, onun boyunca yuxarı dartılır;  $\sigma$ -nın artması ilə isə absis oxuna sıxılaraq, onun boyunca genişlir.



Həkil 2. Normal əyrinin formasının  $\sigma$ -dan asılılığı

$$4) f(x,0,1) \rightarrow 0, x \rightarrow \pm\infty$$

Axırıncı münasibət  $z = 4(f(4) = 0,0001 \approx 0)$  –dən böyük olduqda təqribən ödənilir. Ona görə də bu funksiyanın qiymətləri cədvəlində argumentin (0, 4) intervaldakı qiymətləri verilir.

$F(x,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  integralı elementar funksiyalar ilə ifadə edilmir. Ona görə də Laplas funksiyasından istifadə edilir.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Bu integral yuxarıdan  $y = f(x)$  əyrisi, aşağıdan absis oxu, soldan ordinat oxu, sağdan isə  $y = x$  düz xətti ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsinə bərabərdir.

Laplas funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:

1)  $\Phi(x)$ - monoton artan funksiyadır.

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} > 0, \text{ istənilən } x \text{ üçün};$$

2)  $\Phi(x)$ - tək funksiyadır,  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$  (qrafiki absis oxuya nəzərən simmetrikdir). Xüsusi halda  $\Phi(0) = 0$ .

3)  $\Phi(x) \rightarrow 0.5, x \rightarrow \infty$ . Bu xassə laplas inteqralından alınır.  $\Phi(4) = 0.49997 \approx 0.5$  və monoton olduğu üçün təcrübədə kifayət qədər dəqiqliklə  $\Phi(x) = 0.5$ ,  $x \geq 4$  qəbul etmək olar. Bu xassələrə əsasən Laplas funksiyasının  $x$ -in  $(0, 4)$  parçasındakı qiymətləri üçün qiymətləri cədvəli ihləyib hazırlanmışdır

$F(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  funksiyasını  $\Phi(x)$  Laplas funksiyası ilə ifadə edək:

$$\begin{aligned} F(x, 0, 1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

$$\int_0^{-\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \text{ olduğunu nəzərə alsaq}$$

$$F(x, 0, 1) = \Phi(x) + 0.5$$

olduğunu yaza bilərik.

Tutaq ki,  $X \in N(a, \sigma^2)$ . Onda

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}, 0, 1\right) - F\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}, 0, 1\right)$$

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}, 0, 1\right) - F\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}, 0, 1\right)$  düsturunu Laplas funksiyası vasitəsi ilə yazmaq:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

Xüsusi halda

$$P(|X - a| \leq \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

2.3. Üç siqma qanunu.

$$P(|X - a| \leq \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Düsturunda  $\varepsilon = t\sigma$  qəbul etsək

$$P(|X - a| \leq t\sigma) = 2\Phi(t)$$

olduğunu alırıq. Xüsusi halda  $t = 3$  qəbul edərək,  $\Phi(3) = 0.4986$  olduğunu nəzərə alsaq  $\Phi(3) = 0.4986$

$$P(|X - a| \leq 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0.9972$$

olduğunu yazı bilərik. Bahqa sözlə,  $|X - a| > \varepsilon$  hadisəsinin ehtimalı kifayət qədər kiçik 0.0028 ədədinə bərabərdir. Bu isə o deməkdir ki,  $|X - a| > \varepsilon$  hadisəsi orta hesabla 10000 haldan 27-də bahverə bilər. Yəni bu hadisə praktiki olaraq mümkün olmayan hadisədir. Üç siqma qanununun mahiyyəti də məhz bundan ibarətdir.

## 2.4 .Loqarifmik normal paylanma.Pareto paylanması.

Ehtimal modellərinin qurulmasında yormal təsadüfi kəmiyyətlərdən asılı qeyri xətti funksiyaların paylanmasına tez-tez təsadüf edilir.Məsələn, texniki-iqtisadi göstəricilərin modelləşdirilməsində loqarifmik normal paylanmada istifadə edilir.

Tutaq ki,  $Y$  təsadüfi kəmiyyəti müsbətdir.Əgər bu təsadüfi kəmiyyətin loqarifmi -  $X = \ln Y$  normal paylanarsa, onda ona loqarifmik-normal paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir.Tərifdən aydın olur ki,  $Y = e^X$ .

$Y$  təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasını tapaq:

$$P(\ln X < \ln x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln x} e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}} d(\ln t),$$

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$f(x, a, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}$$

Bu paylanmadan gəlirlərin bölühdürülməsi, əmanət qoyulularının, aylıq əmək haqqının və əkin sahələrinin paylanmasının tədqiqində geniş surətdə istifadə edilir.

Pareto paylanması.

Pareto paylanmasından iqtisadi statistikada geniş surətdə istifadə edilir.Məsələn, vergi orqanları vergi məcəlləsi ilə müəyyən edilmə qaydalara əsasən illik gəlirləri müəyyən sərhəddən -  $x_0$  -dan çox olan həxslərin gəlirlərinin paylanmasını müəyyən edirlər. Bu və digər bir sıra paylanmalar Pareto paylanması ilə bilavasitə bağlıdır. Pareto paylanmasının paylayma funksiyası aşağıdakı həkildədir:

$$P(X > x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha, x > x_0, \alpha > 0$$

Sıxlıq funksiyası isə  $x > x_0$  olduqda  $\frac{\alpha}{x_0} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha-1}$ ,  $x \leq x_0$  olduqda isə sıfır

## 3.Normal paylanma ilə bağlı paylanmalar.

### 3.1. "Xi- kvadrat " paylanma

Tutaq ki,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  asılı olmayan standart normal kəmiyyətlərdir. Onda

$$u^2(n) = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ C_n x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

bərabərliyi ilə verilir.  $f_{\chi^2}(x)$  funksiyası "xi-kvadrat" sıxlıq, bu sıxlığın təyin etdiyi paylanma funksiyası isə 'xi-kvadrat' paylanma adlanır.  $n$  ədədinə sərbəstlik dərəcəsi deyilir.  $u^2(n)$  kəmiyyətinin sərbəstlik dərəcəsi onun ifadəsindəki asılı olmayan dəyişənlərin sayı ilə müəyyən edilir.

'xi- kvadrat' paylanması aşağıdakı xassələrə malikdir:

1)  $n$ - nin böyük ( $n > 30$ ) qiymətlərində 'xi -kvadrat' paylanma normal paylanmaya yaxınlaşır.

2) Tutaq ki,  $U_1^2$  və  $U_2^2$  sərbəstlik dərəcələri uyğun olaraq  $n_1$  və  $n_2$  olan 'xi-kvadrat' paylanmaya malik asılı olmayan kəmiyyətlərdir. Onda  $U_1^2 + U_2^2$  kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi  $n_1 + n_2$  olan 'xi- kvadrat' paylanmaya malikdir.

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{U^2(n) - n}{\sqrt{2n}} < x\right) = \Phi(x; 0; 1)$$

Tutaq ki,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  asılı olmayan kəmiyyətlərdir və  $X_i \in N(a, \sigma^2)$   $i = 1, 2, \dots, n$ .

Onda  $Y_i = \frac{X_i - a}{\sigma} \in N(0, 1)$  olar. Beləliklə,  $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - a}{\sigma}\right)^2$  təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi  $n$  olan "xi-kvadrat" paylanmaya malikdir.

"xi-kvadrat" paylanmanın böhran nöqtələri cədvəli ihlənib hazırlanmışdır. Üçüncü xassəyə görə  $U^2(n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı asimptotik normal paylanmaya malikdir. Ona görə də cədvəldə böhran nöqtələri sərbəstlik dərəcəsinin  $n < 30$  qiymətləri üçün verilmişdir.  $n > 30$  olduqda böhran nöqtəsini tapmaq üçün normal paylanmanın qiymətləri cədvəlindən istifadə etmək olar.

### 3.2. Fiher-Snedekor paylaması (F- paylanma)

Tutaq ki,  $X_1$  və  $X_2$  asılı olmayan və sərbəstlik dərəcələri uyğun olaraq  $n_1$ ,  $n_2$  olan 'xi- kvadrat' paylanmasına malikdirlər. Bu halda  $\frac{X_1}{n_1} : \frac{X_2}{n_2}$  nisbətinin sıxlıq funksiyası, ancaq  $n_1$  və  $n_2$  ədədlərindən asılıdır və

$$f_F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ C_n \frac{x^{\frac{n_1-1}{2}}}{\left(1 + \frac{n_1}{n_2} x\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & x > 0 \end{cases}$$

$f_F(x)$  funksiyası Fiher-Snedekor sıxlığı, bu sıxlığın təyin etdiyi paylanma funksiyası isə Fiher-Snedekor paylanması adlanır.

Aydındır ki,  $X_i \in N(a, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n_1 + n_2$  olduqda

$$F(n_1, n_2) = \frac{\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - a)^2}{\frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (X_i - a)^2}$$

təsadüfə kəmiyyəti Fiher-Snedekor paylanmasına malikdir.

"Fiher - Snedekor" paylanmasının böhran nöqtələri cədvəli ihlənib hazırlanmışdır.  $n_1$  və  $n_2$  -nin böyük qiymətlərində bu paylanmanı normal paylanma ilə əvəz etmək olar.

### 3.3. Styudent paylanması (t-paylanma)

Tutaq ki,  $X \in N(0,1)$  və  $Y$  sərbəstlik dərəcəsi  $n$  olan "xi-kvadrat" paylanmasına malik asılı olmayan kəmiyyətlərdir.

Onda  $f(n) = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$  ölçüsüz kəmiyyəti Styudent nisbəti adlanır və bu nisbətin sıxlıq

funksiyası

$$f_t(x) = C_n \left( 1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-\frac{n+1}{2}}, -\infty < x < \infty$$

bərabərliyi ilə verilir.  $f_t(x)$  funksiyası Styudent sıxlığı, bu sıxlığın təyin etdiyi funksiya isə Styudent paylanması adlanır.  $n$ -ədədinə isə Styudent paylanmasının sərbəstlik dərəcəsi deyilir.

Tutaq ki,  $X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  asılı olmayan təsadüfə kəmiyyətlərdir və  $X \in N(0,1), Y_i \in N(0, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$ . Onda  $\frac{X_i}{\sigma}$  təsadüfə kəmiyyətləri də asılı deyillər və  $Y_i \in N(0,1), i = 1, 2, \dots, n$ .

Normal, "Xi – kvadrat", Fiher – Snedekor və Styudent paylanma ları arasında aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$t^2(n) = F(1, n); F(n, \infty) = \frac{\chi^2(n)}{n}, \chi^2(1) = U^2$$

Styudent paylanması üçün

$$P(|t| > t_0) = 2 \int_{t_0}^{\infty} S_n(x) dx = 2(1 - S_n(t))$$

münasibəti doğrudur.

Tutaq ki,  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$  asılı olmayan təsadüfə kəmiyyətlərdir və  $X_i \in N(0, \sigma^2), i = 0, 1, \dots, n$ . aydındır ki,  $Y_i = \frac{X_i}{\sigma}$  təsadüfə kəmiyyətləri asılı deyillər və  $Y_i \in N(0,1), i = 0, 1, \dots, n$ .

Onda

$$F(X, \sigma) = P \left\{ \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}} < x \right\} = P \left\{ \frac{\sigma Y_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma Y_i)^2}} < x \right\} =$$

$$= P \left\{ \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}} < x \right\} = F(x, 1)$$

Beləliklə, Styudent paylanması  $\sigma$  parametrindən asılı deyil.

Tutaq ki,  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$  asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və  $X_i \in N(a, \sigma)$ . Onda  $X_i - a$  təsadüfi kəmiyyətləri də asılı deyillər və  $X_i - a \in N(0, 1)$ . Beləliklə,

$$t_n = \frac{X_0 - a}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}}$$

təsadüfi kəmiyyəti Styudent paylanmasına malikdir.

Styudent sıxlığı  $n \rightarrow \infty$  hərtində standart normal sıxlığa yığılır, yə'ni

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow s(x, n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ona görə böyük  $n$ -lər üçün  $P(t < t_0)$  ehtimalını Laplas funksiyası vasitəsilə ifadə etmək olar.

$$P(t < t_0) = S(t, n) = C \int_{-\infty}^{t_0} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx \approx 0.5 + \phi(t_0)$$

Styudent paylanmasının böhran nöqtələri cədvəli ihlənib hazırlanmışdır. Sərbəstlik dərəcəsinin böyük qiymətlərində bu paylanmanı normal paylanma ilə əvəz etmək olar.

Styudent paylanmasından orta qiymətin hipotetik orta ilə müqayisəsi haqqında və iki orta qiymətin müqayisəsi haqqında hipotezlərin yoxlanılmasında istifadə edilir.

4. Styudent, Fiher və “xi-kvadrat” paylanmaya malik bəzi xarakteristikalar.

**Teorem 1.** Tutaq ki,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  asılı olmayan  $(a, \sigma^2)$  parametrlili normal təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  təsadüfi kəmiyyəti  $\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  parametrlili normal təsadüfi kəmiyyətdir.

**İsbatı:** Ehtimal nəzəriyyəindən məlymdyr ki, asılı olmayan normal təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi də normal təsadüfi kəmiyyətdir.

Riyazi gjozləmə və dispersiyanın məlym xassələrinə əsasən

$$M \bar{X} = M \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a = a$$

BƏ

$$D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

oldyğyny alırıq. Beləliklə  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  kəmiyyəti  $\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  parametrlı normal təsadüfı kəmiyyətdır.

Nəticə 1.  $Z = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma}$  normallaşdırılmış təsadüfı kəmiyyəti (0;1) parametrlı normal paylanmaya malıkdir:

$$M \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \cdot M(\bar{X} - a) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (a - a) = 0$$

$$D \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{n}{\sigma^2} D(\bar{X} - a) = \frac{n}{\sigma^2} D\bar{X} = \frac{n}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n} = 1$$

Tutaq ki,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  asılı olmayan  $(a, \sigma^2)$  parametrlı normal təsadüfı kəmiyyətlərdir və  $EX = a$  rıyazi gıozləməsi məlymdır.

$$S_*^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$$

təsadüfı kəmiyyətinin paylanmasını tapaq. Bu məqsədlə axırncı bərabərliyin sağ tərəfini aşağıdakı kimi çevirək:

$$S_*^2 = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - a}{\sigma} \right)^2.$$

Onda

$$\frac{nS_*^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - a}{\sigma} \right)^2$$

olar

$$U = \frac{nS_*^2}{\sigma^2}, \quad U_i = \frac{X_i - a}{\sigma}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

işarə edək.

$$MU_i = \frac{1}{\sigma} M(X_i - a) = 0$$

$$DU_i = \frac{1}{\sigma^2} D(X_i - a) = \frac{1}{\sigma^2} DX_i = 1$$

Deməli,  $U_1, U_2, \dots, U_n$  təsadüfı kəmiyyətləri asılı olmayan (0;1) parametrlı normal kəmiyyətlərdir bə

$$U = \sum_{i=1}^n U_i^2$$

Beləliklə,  $U$  - sərbəstlik dərəcəsi  $n$  olan  $\chi^2$  paylanmaya malik təsadüfı kəmiyyətdır. Yıxarıda deyilənləri aşağıdakı teorem basitəsilə ifadə etmək olar.

Teorem 2. Tytaq ki,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  asılı olmayan bə  $(a, \sigma^2)$  parametrlı normal təsadüfı kəmiyyətlərdir. Onda

$$U = \frac{nS_*^2}{\sigma^2}$$

kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi  $n$  olan  $\chi^2$  paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətdir.

**Teorem 3.** Tytaq ki,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  asılı olmayan və  $(a, \sigma^2)$  parametrlı normal təsadüfi kəmiyyətlərdir və  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ . Onda

$V = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n-1}$  təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi  $n-1$  olan Styudent paylanmasına malikdir.

**İsbatı.** Teoremi isbat etmək üçün B-ni iki təsadüfi kəmiyyətin nisbəti şəklində göstərmək lazımdır. Belə ki, kəsrin syrətində  $(0,1)$  parametrlı normal təsadüfi kəmiyyət, məxrəcində isə  $\chi^2$  paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətin onyn sərbəstlik dərəcəsinə nisbətının kvadrat küçünə nisbəti olmalıdır.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$V = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n-1} = \left( \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \sqrt{n} : \frac{S \sqrt{n}}{\sigma} \right) \cdot \sqrt{n-1}$$

bərabərliyi doğrduyr.

$$M \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} M(\bar{X} - a) = 0$$

$$D \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{n}{\sigma^2} D(\bar{X} - a) = \frac{n}{\sigma^2} \cdot D\bar{X} = \frac{n}{\sigma^2} \cdot \frac{\delta^2}{n} = 1$$

Deməli,  $\frac{\bar{X} - a}{\sigma} \sqrt{n}$   $(0;1)$  parametrlı normal paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətdir. Digər tərəfdən  $\frac{nS^2}{\sigma^2}$  - sərbəstlik dərəcəsi  $n-1$  olan  $\chi^2$  paylanmaya malikdir. By isə sübyt edir ki,  $V = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n-1}$  sərbəstlik dərəcəsi  $n-1$  olan Styudent paylanmasına malikdir.

**Teorem 4.**  $X_1, X_2, \dots, X_n$  asılı olmayan  $(a, \sigma^2)$  parametrlı normal təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  və  $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  təsadüfi kəmiyyətləri asılı deyillər.  $\frac{nS^2}{\sigma^2}$  kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi  $n-1$  olan  $\chi^2$ - paylanmaya malikdir.

**Nəticə.**  $T = \frac{(\bar{X} - a) \sqrt{n-1}}{S}$  təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi  $n-1$  olan Styudent paylanmasına malikdir. Doğrudan da,

$$\frac{(\bar{X} - a) \sqrt{n}}{\sigma} \in N(0,1), \quad \frac{nS^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n-1) \text{ olduğu üçün tərifə görə}$$

$$\frac{(\bar{X} - a) \sqrt{n}}{\sigma} / \sqrt{\frac{nS^2}{\sigma^2}} = \frac{(\bar{X} - a) \sqrt{n-1}}{S}$$

sərbəstlik dərəcəsi  $n-1$  Styudent paylanmasına malik olar.



## MÖVZU 8. PAYLANMA PARAMETRLƏRİNİN STATİSTİK QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

### P L A N

1. Nöqtəvi qiymətləndirmələr və onların qurulması üsulları
- 1.1. Məsələnin qoyuluşu. Statistik qiymətləndirmələr lər.
- 1.2. Nöqtəvi qiymətləndirmələrin qurulması üsulları.
2. Ehtimalin nisbi tezliyə görə nöqtəvi qiymətləndirilməsi.
3. Etibarlılıq intervallarının qurulması.
- 3.1. Paylanma parametrlərinin etibarlılıq intervalı. Etibarlılıq ehtimalı.
- 3.2. Orta kvadratik kənarlaşma ( $\sigma$ ) məlum olduqda məlum riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalının qurulması.
- 3.3. Orta kvadratik kənarlaşma ( $\sigma$ ) məlum olmadıqda məlum riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalının qurulması.
4. Hadisənin məlum  $p$  ehtimalı üçün etibarlılıq intervalının qurulması.
5. Müxtəlif növ seçmələr üçün seçmə xətanın tapılması.
6. Seçimin zəruri həcmnin hesablanması.

### Ə D Ə B İ Y Y A T

1. S.Ö.Ömərov, N.Ə. Cavadov. Riyazi və tətbiqi statistika. Bakı, Azərneşr, 2007.
2. Ə.Ə. Hüseynov, S.Y. Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çapıoğlu, 2006.

1. Nöqtəvi qiymətləndirmələr və onların qurulması üsulları

1.1. Məsələnin qoyuluşu. Statistik qiymətləndirmələr

Tutaq ki,  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin ( $X$  baş yığımının) paylanma funksiyası məlum deyil, ancaq onun hansı şəkildə funksiya olduğu və müəyyən sayda məlum parametrlərdən asılı olan funksiyalar sinfinə daxil olduğu məlumdur. Yəni, paylanma funksiyası  $F(x) = F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  şəklindədir. Bu funksiyanı tapmaq üçün asılı olmayan  $n$  sınaq aparılır ( $X$  baş yığımından həcmi  $n$  olan təsadüfi seçim götürülür) və nəticədə  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçimi alınır. Məsələnin qoyuluşu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçiminə əsasən məlum  $F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  funksiyasının tapılmasından ibarətdir. Aydın ki, bu halda məlum paylanma funksiyasının tapılması məsələsi, onun  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  parametrlərinin  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçiminə əsasən tapılması məsələsinə gətirilir. Qeyd etmək lazımdır ki, ümumiyyətlə seçmə yığımın elementləri vasitəsilə məlum parametrlərin əsl qiymətlərini tapmaq mümkün deyildir. Belə ki, bu yolla həmin parametrlərin ancaq təqribi qiymətlərini tapmaq olar.

Tutaq ki,  $F(x, \theta)$  paylanma funksiyası ancaq bir məlum  $\theta$  parametridən asılıdır.

Tərif 1.1. Naməlum  $\theta$  parametrinin  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçminə əsasən alınmış  $\theta_H$  təqribi qiymətinə onun nöqtəvi qiymətləndirməsi deyilir.

Aydınır ki,  $\theta_H$  qiymətləndirməsi seçmənin elementlərinin müəyyən funksiyasıdır, yəni  $\theta_H = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Seçmənin elementlərindən asılı olan istənilən funksiyaya statistika deyilir.

Beləliklə, naməlum  $\theta$  parametri üçün çoxlu sayda qiymətləndirmələr qurmaq olar. Onda belə bir sual qarşıya çıxır: hansı şərtləri ödəyən  $\theta_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funksiyasını naməlum  $\theta$  parametri üçün ən yaxşı qiymətləndirmə hesab etmək olar?

$\theta_H$  qiymətləndirməsi aşağıdakı şərtləri ödədikdə o, digər qiymətləndirmələrə nisbətən müəyyən mənada “yaxşı” qiymətləndirmə hesab edilir.

Tərif.1.2. Riyazi gözləməsi qiymətləndirilən parametərə bərabər olan, yəni istənilən  $n$  üçün

$$E\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta$$

bərabərliyini ödəyən  $\theta_H = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$  qiymətləndirməsinə  $\theta$  parametrinin yerindəyişməyən (sürüşdürülməmiş) qiymətləndirməsi deyilir.

Tərif.1.3. Riyazi gözləməsi qiymətləndirilən parametrdən fərqli olan, yəni istənilən  $n$  üçün

$$E\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \theta$$

bərabərliyini ödəyən  $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$  qiymətləndirməsinə yerindəyişən (sürüşdürülmüş) qiymətləndirmə deyilir.

Bu halda  $E\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta = \delta_n$  fərqi nə yerdəyişmə (sürüşmə) deyilir.

$E\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta$  şərti ödənildikdə sonlu həcmə malik müxtəlif mümkün seçmələrə görə qurulmuş  $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$  statistikasının qiymətləri  $\theta$  kəmiyyəti ətrafında qruplaşacaqlar (yerləşəcəklər).

Naməlum  $\theta$  parametrinin verilmiş seçməyə görə  $\theta_n^*$  qiymətləndirməsini qurarkən (taparkən) çalışmaq lazımdır ki, kifayət qədər böyük ehtimalla  $\theta_n^*$ ,  $\theta$  parametrinin əsl qiymətinə yaxın olsun. Seçmənin həcmi kiçik olduqda təsadüfi seçmənin böyük rol oynamasına görə buna nail olmaq mümkün deyil. Ona görə də bu halda seçmənin həcmnin kifayət qədər böyük olduğu fərz edilir və tələb edilir ki,  $n \rightarrow \infty$  şərtində parametrin qiymətləndirilməsi hər hansı mənada (ehtimalla görə, vahid ehtimalla, orta kvadratik mənada və s.) həmin parametrin özünə yığılsın.

Tərif 1.4.  $\theta_n^*$  qiymətləndirməsi  $n \rightarrow \infty$  şərtində ehtimalla görə  $\theta$  parametrinə yığılarsa, yəni kifayət qədər kiçik, istənilən  $\varepsilon > 0$  ədədi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon) = 1$$

bərabərliyi ödənilirsə, onda ona  $\theta$  parametrinin əsaslı qiymətləndirməsi deyilir.

Əsaslılıq xassəsi  $n$  artdıqca  $\theta_n^*$  statistikasının paylanması  $\theta$  parametrinin kifayət qədər kiçik ətrafında yerləşdiyini göstərir və  $\theta_n^*$  statistikasını üçün böyük ədədlər qanununu ifadə edir. Məsələn, əlamətin  $p$  hissəsinin

qiymətləndirilməsi olaraq  $\theta^* = \frac{m}{n}$  statistikasını götürdükdə  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon) = 1$

münasibəti Bernulli teoreminə, baş yığının m naməlum riyazi gözləməsi olaraq seçmə ortanı götürdükdə isə Çebışev teoreminə çevrilir.

Tərif 1.6.  $\theta_n^{(1)}$  və  $\theta_n^{(2)}$  qiymətləndirmələri üçün

$$M(\theta_n^{(1)} - \theta)^2 < M(\theta_n^{(2)} - \theta)^2$$

bərabərliyi ödəniləndə,  $\theta_n^{(1)}$  qiymətləndirilməsi  $\theta_n^{(2)}$  qiymətləndirməsinə nisbətən daha effektiv qiymətləndirmə adlanır.

Yerinidəyişməyən qiymətləndirmələr üçün  $M(\theta_n^{(1)} - \theta)^2 < M(\theta_n^{(2)} - \theta)^2$  bərabərsizliyi  $D\theta_n^{(1)} < D\theta_n^{(2)}$  bərabərsizliyinə çevrilir.

Effektiv qiymətləndirmə dispersiyası ən kiçik olan mümkün qiymətləndirmə olur.

$\bar{x}$  seçmə ortasının ən kiçik dispersiyaya malik xətti qiymətləndirmə olduğunu göstərk.

Tutaq ki,  $(a, \sigma^2)$  parametrlili  $X$  baş yığımından həcmi  $n$  olan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçməsi alınmışdır..

Tutaq ki,  $E(a) = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$   $a$  parametrinin hər hansı yerinidəyişməyən xətti qiymətləndirməsidir. Burada  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ .

$x_1, x_2, \dots, x_n$ -lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu üçün dispersiyanın məlum xassəsinə əsasən

$$DE(a) = \sigma^2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

olduğunu yaza bilərik. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,  $DE(a)$ -nın yeganə minimumu vardır və o,  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$  olduqda alınır. Beləliklə,  $\bar{x}$  seçmə ortası ən kiçik dispersiyaya malik xətti qiymətləndirmədir.

## 1.2. Nöqtəvi qiymətləndirmələrin qurulması üsulları

Bu paraqrafda biz nöqtəvi qiymətləndirmələrin qurulması üsulları ilə, konkret olaraq əvəzetmə (anoloji), ən kiçik kvadratlar, momentlər və ən böyük həqiqətə oxşarlıq üsulları ilə tanış olacağıq.

Əvəzetmə üsulu.

Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, naməlum parametrin qiymətləndirilməsi olaraq uyğun seçmə xarakteristika götürülür. Məsələn, baş yığının naməlum riyazi gözləməsinin qiymətləndirilməsi olaraq seçmə orta, dispersiya üçün seçmə dispersiya, üç tərtibli mərkəzi moment üçün üç tərtibli mərkəzi seçmə moment və s. götürülür.

Ən kiçik kvadratlar üsulu.

Bu üsula görə statistik qiymətləndirmə seçmənin elementlərinin statistik qiymətləndirmədən kənarlaşmalarının kvadratları cəminin minimumlaşdırılması şərtindən tapılır.

X baş yığımının  $EX = m$  riyazi gözləməsinin ən kiçik kvadratlar üsuluna görə statistik qiymətləndirməsini tapaq.

Bu məqsədlə X baş yığımından həcmi  $n$  olan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçməsinə götürək. Ən kiçik kvadratlar üsuluna görə naməlum  $m$  parametrinin statistik qiymətləndirilməsi

$$Y = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m})^2 \rightarrow \min$$

şərtindən tapılır;

Ekstremum zəruri şərtinə əsasən

$$\frac{dY}{dm} = 2 \sum_{i=1}^n (x_i - m) = 0$$

olduğunu alırıq. Buradan isə axtarılan qiymətləndirmənin

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

seçmə orta olduğunu alırıq.

Momentlər üsulu.

Statistik qiymətləndirmələrin qurulmasının ümumi üsulunu birinci dəfə K. Pirson təklif etmişdir. Bu üsula momentlər üsulu deyilir.

Momentlər üsuluna görə seçmə momentlər baş yığımın naməlum parametrlərdən asılı olan uyğun nəzəri momentlərinə bərabər edilir. Baxılan momentlərin sayı isə naməlum parametrlərin sayına bərabər götürülür. Alınan tənliklər sistemini naməlum parametrlərə görə həll edərək axtarılan qiymətləndirməni tapırıqlar.

Tutaq ki, X baş yığımının  $f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  sıxlıq funksiyası  $n$  sayda naməlum  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  parametrlərindən asılıdır. Baş yığımın birinci  $n$  sayda başlanğıc momentlərini təyin edək:

$$b_m(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = MX^m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) dx$$

$m=1, 2, \dots, n$ .

Fərz edək ki, X baş yığımından həcmi  $k$  olan  $x_1, x_2, \dots, x_k$  seçməsi alınmışdır. Uyğun seçmə momentləri tapaq

$$b_m^* = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^m$$

Baş yığımın  $b_m$  nəzəri momentlərini uyğun  $b_m^*$  seçmə momentlərinə bərabər götürməklə

$$\begin{cases} b_m(\theta_1, \dots, \theta_n) = b_m^* \\ m=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

tənliklər sistemini alırıq. Alınmış tənliklər sistemini naməlum  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  parametrlərinə görə həll edərək, axtarılan  $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_n$  qiymətləndirmələrini tapırıq.

Məsələn, tutaq ki, X baş yığımı üstlü qanun ilə paylanmışdır. Bu halda

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geq 0); \quad b_1(\lambda) = Mx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma_1^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_i = \bar{x}$$

Onda  $\begin{cases} b_m(\theta_1, \dots, \theta_n) = b_m^* \\ m = 1, 2, \dots, n \end{cases}$  tənliklər sistemi  $\frac{1}{\lambda} = \bar{x}$  tənliyinə çevrilir. Buradan

isə  $\lambda^* = \frac{1}{\bar{x}}$  olduğunu alırıq. Deməli,  $\lambda$  parametrinin axtarılan qiymətləndirilməsi seçmə ortanın tərs qiymətidir.

X baş yığımı normal paylanma qanununa tabe olduqda isə

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, b_1(a, \sigma^2) = EX = a$$

$$b_2(a, \sigma^2) = DX - (EX)^2 = \sigma^2 - a^2$$

$$b_1^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_i = \bar{x}, \quad \sigma_2^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_i^2 = \sigma_s^2 - \bar{x}^2.$$

Bu halda tənliklər sistemi

$$\begin{cases} a = \bar{x} \\ \sigma^2 - a^2 = \sigma_s^2 - (\bar{x})^2 \end{cases}$$

tənliklər sisteminə çevrilir. Bu tənliklər sistemini axtarılan  $a$  və  $\sigma^2$  parametrlərinə nəzərən həll etsək  $a = \bar{x}$ ,  $\sigma^2 = \sigma_s^2$  olduğunu alırıq.

Ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsulu.

Müəyyən mənada «yaxşı» qiymətləndirmələrin qurulmasının daha optimal üsulu amerika statistiki R. Fişer tərəfindən təklif edilmiş ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsuludur. Bu üsula görə verilmiş paylanmanın naməlum parametrlərinin qiymətləndirilməsi həmin parametrlərdən asılı funksiyanın maksimumunun axtarılması məsələsinə gətirilir.

Tutaq ki,  $x_1, x_2, \dots, x_k$  sıxlıq funksiyası  $p(x, \theta)$  olan baş yığımdan aparılmış həcmi  $n$  olan seçmədir. X-diskret təsadüfi kəmiyyət olduqda  $p(x, \theta)$  ehtimal, kəsilməz olduqda isə paylanmanın sıxlıq funksiyasıdır.  $L(\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)$  funksiyasına baxılır. Bu funksiyanı R. Fişer həqiqətəoxşarlıq funksiyası adlandırmışdır.

Məlumdur ki,  $L(\theta)$  əvəzinə  $l_n(\theta) = \ln L(\theta)$  funksiyasına baxdıqda maksimum nöqtəsi dəyişmir. Təcrübədə adətən  $L(\theta)$  əvəzinə  $l_n(\theta) = \ln L(\theta)$  funksiyasından istifadə edilir. Çünki bu hesablamaları əhəmiyyətli dərəcədə sadələşdirir.

Fərz edək ki,  $p(x, \theta)$  bir naməlum parametrdən asılıdır.

Bu halda  $l_n(\theta)$  funksiyasının maksimumunu aşağıdakı kimi tapmaq olar.

- 1)  $\frac{d \ln L}{d \theta}$  - törəməsini tapaq.
- 2)  $\frac{d \ln L}{d \theta} = 0$  şərtindən  $\theta^*$  böhran nöqtəsini tapaq.
- 3)  $\left. \frac{d^2 \ln L}{d \theta^2} \right|_{\theta=\theta^*} < 0$  olduqda  $\theta^*$  maksimum nöqtəsidir.

Tapılmış  $\theta^*$  maksimum nöqtəsi naməlum  $\theta$  parametrlərinin ən böyük həqiqətəoxşarlıq qiymətləndirməsi olaraq qəbul edilir

İndi isə fərz edək  $x_i$ , kəsilməz  $X$  - təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası naməlum  $\theta_1$  və  $\theta_2$  parametrlərindən asılıdır. Bu halda həqiqətəoxşarlıq funksiyası naməlum  $\theta_1$  və  $\theta_2$  parametrlərinin funksiyası olacaqdır, yəni

$$L = f(x_1; \theta_1, \theta_2). f(x_2; \theta_1, \theta_2)$$

Bu halda naməlum parametrlər üçün

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

tənliklər sisteminə çevrilir.

Puasson paylanmasının naməlum  $\lambda$  parametrlərinin  $\lambda^*$  nöqtəvi qiymətləndirməsini quraq.

Bu halda həqiqətəoxşarlıq funksiyası

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

şəklində olar. Axırncı bərabərlikdən

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^n x_i!$$

olduğunu alırıq. Həqiqətəoxşarlıq tənliklər sistemi

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

şəklində düşər. Axırncı tənlikdən isə  $\lambda^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$  olduğunu alırıq.

Beləliklə, Puasson paylanmasının  $\lambda$  parametrlərinin ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsulu ilə qurulmuş qiymətləndirilməsi seçmə ortadır.

Normal paylanmanın  $\theta$  və  $\sigma^2$  naməlum parametrlərinin nöqtəvi qiymətləndirilməsini tapaq.

$$L(\theta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Axırncı bərabərliyin hər iki tərəfini loqarifmləsək

$$\ln L(\theta, \sigma^2) = -\frac{H}{2} \left( \ln 2\pi + \ln \sigma^2 \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^H (x_i - \hat{a})^2$$

olduğunu yaza bilərik. Baxılan halda həqiqətəoxşarlıq tənliklər sistemi

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\theta, \sigma^2)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^H (x_i - \hat{a}) = 0 \\ \frac{\partial L(\theta, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^H (x_i - \hat{a})^2 - \frac{H}{2\sigma^2} = 0 \end{cases}$$

sisteminə çevrilər. Tənliklər sistemini həll edərək

$$\hat{a}^* = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^H x_i = \bar{x}$$

$$(\sigma^2)^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2$$

olduğunu alırıq.

Göründüyü kimi, normal paylanma parametrlərinin ən böyük həqiqətəoxşarlıq qiymətləndirmələri, ən kiçik kvadratlar və momentlər üsulları ilə tapılmış qiymətləndirmələrlə üst – üstə düşür.

## 2. Ehtimalın nisbi tezliyə görə nöqtəvi qiymətləndirilməsi

Tutaq ki, aparılan asılı olmayan sınaqlarda A hadisəsinin p baş vermə ehtimalı naməlumdur. Nisbi tezliyə əsasən naməlum p parametrlərinin nöqtəvi qiymətləndirməsini tapmaq tələb edilir. Naməlum p ehtimalının nöqtəvi qiymətləndirilməsi olaraq

$$w = \frac{m}{n}$$

nisbi tezliyini götürərək. Burada n- aparılan sınaqların, m isə A hadisəsinin başvermə sayıdır. Elitimal nəzəriyyəsinə sübut edilmişdir ki,

$$Em=np \text{ və } Dm=npq$$

Burada q=1-p götürülmüşdür. Beləliklə,

$$Ew = \frac{1}{n} Em = \frac{1}{n} np = p$$

və

$$DW = \frac{1}{n^2} Dm = \frac{pq}{n}$$

olduğunu alırıq.  $Ew=p$  və  $\lim_{n \rightarrow \infty} DW=0$  olduğuna görə  $w = \frac{m}{n}$  nisbi tezliyi naməlum p ehtimalının yerindəyişməyən və əsaslı qiymətləndirməsidir.

## 3.ETİBARLILIQ İNTERVALLARININ QURULMASI

### 3.1. Paylanma parametrlərinin etibarlılıq intervalı.

Etibarlılıq ehtimalı

Tutaq ki,  $X$  baş yığımının  $F(x, \theta)$  paylanma funksiyası naməlum  $\theta$  parametrindən asılıdır. Yuxarıda bu parametrin seçmə xarakteristikalar vasitəsi ilə yerini dəyişməyən, əsaslı, effektiv və kafi mənada ən yaxşı qiymətləndirməsindən danışılmışdır. Məsələn, normal paylanmış baş yığımın naməlum riyazi gözləməsinin ən yaxşı qiymətləndirməsi seçmə ortadır. Beləliklə, naməlum riyazi gözləmə bir ədədlə - seçmə orta ilə qiymətləndirilir. Parametr üçün tapılmış təqribi qiymətlər bir ədəddən ibarət olduğu üçün onlara nöqtəvi qiymətləndirmələr deyilir. Nöqtəvi qiymətləndirmələr müəyyən təsadüfi kəmiyyətlərin xüsusi qiymətləridir və onlar qiymətləndirilməsi tələb edilən parametrlərin əsil qiymətlərindən xeyli fərqlənə bilərlər. Məhz bu səbəbə görə naməlum parametrlər üçün qiymətləndirmələrin dəqiqliyinin və etibarlılığının öyrənilməsi riyazi statistikanın mühüm məsələlərindən biridir.

Parametrlər üçün tapılmış təqribi qiymətlərin dəqiqlik və etibarlılıq məsələləri intervallı qiymətləndirmə üsulu ilə, yəni qiymətləndirmə (etibarlılıq) intervallarının qurulması vasitəsi ilə tədriq edilir. Kiçik seçmələr üçün qiymətləndirmə intervallarının qurulması daha çox əhəmiyyət kəsb edir. Bu halda nöqtəvi qiymətləndirmə əhəmiyyətli dərəcədə təsadüfidir və ona görə də onun etibarlılığı kiçikdir.

Tutaq ki, axtarılan  $\theta$  parametri üçün  $\theta_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  qiymətləndirilməsi tapılmışdır və  $\varepsilon > 0$  kifayət qədər kiçik ixtiyari həqiqi ədəddir.  $\theta_n$  qiymətləndirməsinin  $\theta$  parametrinə yaxın olmasını

$$|\theta_n - \theta| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi vasitəsi ilə xarakterizə etmək olar. Aydındır ki, bu bərabərsizliyi ödəyən  $\varepsilon$  ədədi nə qədər kiçik olarsa  $\theta_n$  qiymətləndirməsi də  $\theta$  parametrinə bir o qədər yaxın olar. Bu isə o deməkdir ki, qiymətləndirmənin dəqiqliyini  $|\theta_n - \theta| < \varepsilon$  bərabərsizliyini ödəyən  $\varepsilon$  ədədi vasitəsi ilə ölçmək olar. Bununla yanaşı, qeyd edək ki,  $\theta_n$  təsadüfi kəmiyyət olduğundan  $|\theta_n - \theta| < \varepsilon$  bərabərsizliyinin hökmən ödənildiyini demək olmaz. Onun ancaq müəyyən ehtimalla ödənilməsindən danışmaq olar.

Tərif. 3.1.  $\theta$  parametrinin əsil qiymətini verilmiş  $0 < \alpha < 1$  ehtimalı ilə öz daxilində saxlayan  $(\theta_n - \varepsilon, \theta_n + \varepsilon)$  intervalına qiymətləndirmə (etibarlılıq) intervalı deyilir.

Bu halda:

$$P(\theta_n - \varepsilon < \theta < \theta_n + \varepsilon) = \alpha$$

bərabərliyi ödənilir.  $\theta_n - \varepsilon, \theta_n + \varepsilon$  ədədlərinə etibarlılıq sərhədləri,  $\alpha$  ədədinə isə etibarlılıq ehtimalı deyilir. Etibarlılıq intervalı tapılmış qiymətləndirmələrin dəqiqliyini, etibarlılıq ehtimalı isə qiymətləndirmələrin etibarlılığını xarakterizə edir.

Etibarlılıq intervalının daha ümumi tərifini də vermək olar. Uc nöqtələri  $\theta_n^{(1)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  və  $\theta_n^{(2)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  təsadüfi kəmiyyətləri olan və  $P(\theta_n^{(1)} < \theta < \theta_n^{(2)}) = \alpha$  münasibətini ödəyən  $(\theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)})$  intervalı  $\theta$  parametrinin etibarlılıq intervalı adlanır.  $P(\theta_n - \varepsilon < \theta < \theta_n + \varepsilon) = \alpha$  şərtinin ödənilməsi o deməkdir ki, hər birində həcmi  $n$  olan seçmə alınmış çoxlu sayda asılı olmayan sınaqlarda qurulmuş

etibarlılıq intervallarından orta hesabla  $\alpha \cdot 100\%$ -i naməlum  $\theta$  parametrinin əsil qiymətini öz daxilində saxlayır.

Bəzi məsələlərin həllində uc nöqtələri:

$$P(\theta < \theta_2) = \alpha; \Pi(\theta > \theta_1) = \alpha$$

şərtlərindən tapılan birtərəfli etibarlılıq intervallarından istifadə edilir. Bu intervallar uyğun olaraq sol tərəfli və sağ tərəfli interval adlanır.

Qiymətləndirmənin dəqiqliyini xarakterizə edən etibarlılıq intervalının uzunluğu seçmənin  $n$  həcmindən və  $\alpha$  etibarlılıq ehtimalından asılıdır. Belə ki, seçmənin həcmi artdıqca etibarlılıq intervalının uzunluğu kiçilir, etibarlılıq ehtimalı vahidə yaxınlaşdıqca isə onun uzunluğu artır.

1 -  $\alpha$  ədədinə əhəmiyyətlik səviyyəsi deyilir. Statistik tədqiqatlarda həll edilən məsələlərin əhəmiyyətindən və çıxarılan nəticələrin məsuliyyətindən asılı olaraq 1 -  $\alpha$  əhəmiyyətlik səviyyəsinin 0,1; 0,05 və 0,01 qiymətlərindən istifadə edilir. İtisadi tədqiqatlarda isə əhəmiyyətlik səviyyəsinin 0,01 və 0,05 qiymətlərindən istifadə edilir.

Əhəmiyyətlik səviyyəsinin və beləliklə etibarlılıq ehtimalının seçilməsində riayət edilməsi vacib olan prinsipləri konkret misal üzərində izah edək. Etibarlılıq ehtimalının seçilməsi riyazi məsələ deyil və bilavasitə həll edilən problemlərin məzmununa görə təyin edilir.

Tutaq ki, iki müəssisədə keyfiyyətli məhsulun buraxılma ehtimalı  $P = \alpha = 0,99$  -a bərabərdir. Deməli, keyfiyyətsiz məhsulun buraxılma ehtimalı  $1 - \alpha = 0,01$  - dir. Riyazi nöqteyi nəzərdən, yəni məlumatın xarakterilə maraqlanmadan,  $\alpha$  ehtimalının kiçik və ya böyük olduğunu müəyyən etmək olarmı?

Tutaq ki, müəssisələrdən biri elektrik lampası, digəri isə paraşüt istehsal edir. Qəbul edək ki yüz lampadan biri zaydır. Lampaların bir faizinin atılması, texnoloji prosesin yenidən qurulmasına nisbətən ucuz başa gələrsə bununla barışmaq olar. Ancaq yüz paraşütdən birinin zay olması çox ciddi və arzuolunmaz nəticələrə gətirib çıxarır. Beləliklə, birinci halda zay olma ehtimalı qəbul edilən, ikinci halda isə qəbul edilməzdir. Ona görə də etibarlılıq ehtimalı məsələnin məzmununa əsasən müəyyən edilməlidir.

3.2. Orta kvadratik kənarlaşma ( $\sigma$ ) məlum olduqda naməlum riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalının qurulması

Tutaq ki, normal qanunla paylanmış yığımın (və ya  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin) dispersiyası məlum,  $m$  riyazi gözləməsi isə məlum deyildir. Naməlum  $m$

parametrinin  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçməsinin  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  orta qiyməti vasitəsi ilə

qiymətləndirməsinin etibarlılıq intervalını tapmaq lazımdır. Bunun üçün, seçməni təşkil edən  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ədədlərini asılı olmayan və eyni normal qanunla paylanmış  $X_1, X_2, \dots, X_n$  təsadüfi kəmiyyətlərinin qiymətləri kimi qəbul edək. Onda,

$$M\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M X_i = m, \quad D\bar{X} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D X_i = \frac{1}{n^2} \cdot n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

olar. Ehtimal nəzəriyyəsinə görə

$$\begin{aligned} \Pi(|X - M| < \varepsilon) &= \Pi(M - \varepsilon < X < M + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{M + \varepsilon - M}{\sigma}\right) - \\ &- \Phi\left(\frac{M - \varepsilon - M}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

olar. Burada  $x$  əvəzinə  $\bar{x}$  götürüldükdə  $\sigma^2$  əvəzinə  $\frac{\sigma^2}{n}$  yazılmalıdır və nəticədə:

$$P(\bar{x} - \varepsilon < m < \bar{x} + \varepsilon) = 2\phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

bərabərliyi,

$$t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$$

əvəzləməsini apardıqda isə

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t < m < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t\right) = 2\phi(t)$$

bərabərliyi alınır. Axırınbı bərabərlikdə  $2F(t_\alpha) = \alpha$ , qəbul etsək  $m$  parametrinin  $\alpha$  etibarlılıq ehtimalına uyğun olan etibarlılıq intervalının

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

intervalı olduğunu аларыг.

Beləliklə,  $X$  baş yığımının  $\sigma$  orta kvadratik kənarlaşması məlum olduqda, baş yığımın naməlum riyazi gözləməsinin  $\alpha$  etibarlılıq ehtimalına uyğun olan etibarlılıq intervalının qurulması üçün aşağıdakı qaydanı alarıq:

Qayda 1. Normal paylanmış baş yığımın  $\sigma$  orta kvadratik kənarlaşması məlum olduqda  $\bar{x}$  seçmə ortasına görə onun naməlum  $m$  riyazi gözləməsinin etibarlılıq intervalı  $\alpha$  etibarlılıq ehtimalı ilə

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

kimi təyin edilir.

3.3. Orta kvadratik kənarlaşma  $\sigma$  məlum olmadıqda naməlum riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalının qurulması

Baş yığımın orta kvadratik kənarlaşması məlum olmadıqda yuxarıda alınmış qiymətləndirmələrdən istifadə etmək olmaz. Bu halda  $\bar{x}$  seçmə orta və düzəldilmiş

(təshihli)  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$  orta kvadratik kənarlaşma vasitəsilə təyin edilmiş

$T = \frac{(\bar{x} - m)\sqrt{n}}{S}$  təsadüfi kəmiyyətinə baxaq. Məlumdur ki,  $T$

sərbəstlik dərəcəsi  $k=n-1$  olan Student paylanmasına malikdir.

Student paylanmasının sıxlıq funksiyasının cüt funksiya olduğunu nəzərə alsaq

$$\Pi(|T| < \varepsilon) = \Pi\left(\left|\frac{(\bar{X} - M) \sqrt{H}}{S}\right| < \varepsilon\right) = 2 \int_0^{\varepsilon} c_H(T) dT$$

bərabərliyini alırıq.

Buradan,

$$\Pi\left(|\bar{X} - M| < \frac{S}{\sqrt{H}} \varepsilon\right) = 2 \int_0^{\varepsilon} c_H(T) dT$$

və ya

$$\Pi\left(\bar{X} - \varepsilon \frac{S}{\sqrt{H}} < M < \bar{X} + \varepsilon \frac{S}{\sqrt{H}}\right) = 2 \int_0^{\varepsilon} c_H(T) dT$$

münasibəti alınır.

Bu münasibəti

$$2 \int_0^{t_\alpha} c_H(T) dT = \alpha$$

bərabərliyindən təyin olunan  $t_\alpha$  ədədi vasitəsi ilə  $P\left(|x - m| < \frac{s}{xt_\alpha \sqrt{n}}\right) = \alpha$  və yaxud

$$\Pi\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{H}} t_\alpha < M < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{H}} t_\alpha\right) = \alpha \quad \text{kimi yazmaq olar.}$$

Beləliklə, baş yığımın  $\sigma^2$  dispersiyası məlum olmadıqda onun naməlum m riyazi gözləməsinin  $\alpha$  etibarlılıq intervalına uyğun olan etibarlılıq intervalının qurulması üçün aşağıdakı qaydanı alırıq.

Qayda 2. Normal paylanmış baş yığımın orta kvadratik meyli məlum olmadıqda  $\bar{x}$  seçmə ortasına görə onun naməlum m riyazi gözləməsinin etibarlılıq intervalı  $\alpha$  etibarlılıq ehtimalı ilə

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{H}} t_\alpha < M < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{H}} t_\alpha$$

kimi təyin edilir.

4. Hadisənin naməlum p ehtimalı üçün etibarlılıq intervalının qurulması

Tutaq ki, aparılan asılı olmayan sınaqlarda A hadisəsi müşahidə edilir və onun p- başvermə ehtimalı namələumdür. Nisbi tezliyə görə naməlum p ehtimalı üçün etibarlılıq intervalı quraq. Məlumdur ki,  $X \in N(a, \sigma^2)$  olduqda  $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$  münasibəti doğrudur. n kifayət qədər böyük olduqda nisbi tezlik asimptotik normal kəmiyyətdir və

$$Ew = p, Dw = \frac{pq}{n}, \sigma_w = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_w}\right)$$

münasibətində  $X$  və  $a$ -nı uyğun olaraq  $w$  və  $p$  ilə əvəz etsək  $P(|W - p| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_w}\right)$  təqribi bərabərsizliyini alarıq.  $2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_w}\right) = \alpha$  işarə edək.

$t = \frac{\delta\sqrt{H}}{\sqrt{\pi\Gamma}}$  qəbul edək,  $\sigma_w = \sqrt{\frac{\pi\Gamma}{H}}$ . Onda axıncı təqribi bərabərliyi

$P(|W - p| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 2\Phi(t) = \alpha$  şəklində yazı bilərik. Beləliklə,  $\alpha$  ehtimalı ilə

$$|W - \pi| < t\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{H}}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Naməlum  $p$  parametri üçün alınmış qiymətləndirmənin iki çatışmamazlığı vardır:

1) Bu qiymətləndirmə  $n$ -in böyük qiymətlərində doğrudur, bu isə qeyri müəyyən anlayışdır;

2) (3.7) bərabərsizliyinin sağ tərəfində naməlum  $p$  parametrindən asılı kəmiyyət durur.

$n$ -in böyük qiymətlərində ikinci çatışmamazlıq  $p$ -ni  $w$  ilə əvəz etməklə aradan qaldırıla bilər.

Fərz edək ki,  $w > p$ . Onda

$$W - \pi < t\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{H}}.$$

olar. Bərabərsizliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək ( $w > p$ ). Onda əvvəlki bərabərsizliyə ekvivalent olan

$$\left(1 + \frac{t^2}{H}\right)\pi^2 - 2\left(W + \frac{t^2}{H}\right)\pi + w^2 < 0$$

bərabərsizliyini alarıq. Sol tərəfdəki kvadrat üçhədlinin diskriminantı müsbətdir. Deməli, naməlum  $p$  ehtimalı üçün etibarlılıq intervalını  $p_1 < p < p_2$  şəklində yazmaq olar.

Burada

$$p_1 = \frac{n}{t^2 + n} \left[ w + \frac{t^2}{2n} - t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2} \right]$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2 + n} \left[ w + \frac{t^2}{2n} + t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2} \right]$$

Eyni nəticəyə  $W < p$  olduqda da gəlmək olar.

Beləliklə, axtarılan etibarlılıq intervalı

$$p_1 < p < p_2$$

şəklində olar.

## 5. Müxtəlif növ seçmələr üçün seçmə xətanın tapılması

Tipik seçim. Tutaq ki, naməlum  $a$  riyazi gözləməsini qiymətləndirmək üçün baş yığım tipik qruplara ayrılmışdır. Tipik qrupların sayını  $s$  ilə işarə edək. Fərz

edək ki, i-ci qrupdan həcmi  $n_i$ ,  $i=1,2,...,s$  olan seçmə alınmışdır və  $\sum_{i=1}^s n_i = H$ . Baş

yığımın i-ci qrupundan təsadüfi qaydada seçilmiş  $n_i$  sayda element seçmədə i-ci qrupu təşkil edir. Seçmə qrupların orta qiymətlərini və dispersiyalarını uyğun olaraq  $\bar{X}_i$  və  $\bar{\sigma}_i^2$  ilə, tipik qruplarınkini isə  $\tilde{X}_i$  və  $\tilde{\sigma}_i^2$  ilə işarə edək.

Məlumdur ki, i-ci seçmə qrupun  $\bar{X}_i$  ortası müvafiq tipik qrupun  $\tilde{X}_i$  ortası üçün yerinidəyişməyən qiymətləndirmədir, yəni  $M\bar{X}_i = \tilde{X}_i$ ,  $i=1, 2, ..., s$ .  $s$  sayda seçmə qrupdan ibarət olan seçmənin orta kəmiyyətini  $\bar{X}_S$ , dispersiyanı isə  $\bar{\sigma}_S^2$  ilə işarə edək.

Orta qiymət haqqında teoremə əsasən

$$\bar{X}_C = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^s \bar{X}_i \cdot n_i$$

olduğunu yaza bilərik. Onda

$$M\bar{X}_C = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^s M\bar{X}_i \cdot n_i = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i \cdot n_i$$

olar. Axırncı bərabərlikdə  $n_i$ -i müxtəlif üsullarla təyin etmək olar. Məlumdur ki, proporsional tipik seçmələr üçün

$$\frac{n_i}{H} = \frac{H_i}{H}, i=1,2,...,s$$

Burada,  $N_i$ - i-ci tipik qrupun həcmidir və  $\sum_{i=1}^s H_i = H$ .

Beləliklə,

$$M\bar{X}_C = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i \cdot n_i = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i \cdot \frac{H_i}{H} \cdot H = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i \cdot H_i$$

Orta qiymət haqqında teoremə görə

$$a = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i \cdot H_i$$

olduğunu yaza bilərik.

Deməli,  $M\bar{X}_C = a$ . Bu isə  $\bar{X}_S$ -in yerinidəyişməyən qiymətləndirmə olduğunu göstərir. Hər bir seçmə qrupa  $n_i$ -həcmli təkrar seçmə kimi baxsaq

$$D\bar{X}_i = \frac{\bar{\sigma}_i^2}{n_i}, i=1, 2, ..., s$$

olduğunu alırıq.

Naməlum  $a$  parametri üçün etibarlılıq intervalını qurmaq üçün  $D\bar{X}_C$ -i hesablayaq:

$$D\bar{X}_C = \sum_{i=1}^s \frac{n_i^2}{H^2} D\bar{X}_i = \sum_{i=1}^s \frac{n_i^2}{H^2} \cdot \frac{\bar{\sigma}_i^2}{n_i} = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^s \bar{\sigma}_i^2 \cdot \frac{n_i}{H}$$

Axırncı bərabərliyin sağ tərəfi seçmə qruplar üçün orta qrup daxili dispersiyadır.

Beləliklə,

$$D\bar{X}_c = \frac{\sigma_{\text{гр.дах}}^2}{H}$$

$$P(|\bar{X} - a| < \Delta) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$$

münasibətindən istifadə etsək naməlum  $a$  parametri üçün  $\alpha$  etibarlılığı ilə

$$\bar{X}_c - t_{\alpha} \frac{\sigma_{\text{гр.дах.}}}{\sqrt{H}} < \hat{a} < \bar{X}_c + t_{\alpha} \frac{\sigma_{\text{гр.дах.}}}{\sqrt{H}}$$

etibarlılıq intervalını alarıq.

Təkrar olmayan seçmələrə baxıldıqda etibarlılıq intervalını qurmaq üçün axırıncı bərabərsizlikdə  $\bar{x}$ -in orta xətasını  $\sqrt{\frac{\sigma_{\text{гр.дах.}}}{H} \left(1 - \frac{H}{H}\right)}$  ilə əvəz etmək kifayətdir.

Əlamətin variasiyasına mütənasib seçmələrdə orta xəta aşağıdakı kimi hesablanır. Təkrar seçmələr üçün

$$\Delta = \frac{1}{H} \sqrt{\sum_{i=1}^C \frac{\sigma_i^2 H_i}{H_i}}$$

Təkrar olmayan seçmələr üçün:

$$\Delta = \frac{1}{H} \sqrt{\sum_{i=1}^C \frac{\sigma_i^2 H_i}{H_i} \left(1 - \frac{H_i}{H}\right)}$$

Burada,  $\sigma_i^2 - i=1,2,\dots,s$  qrup dispersiyasıdır.

Seçmə qrupların həcmi

$$H_i = \frac{H \sigma_i}{\sum_{i=1}^C \sigma_i H_i}$$

kimi təyin edildikdə aparılmış tipik seçməyə optimal seçmə deyilir. Optimal seçmənin  $D\bar{X}_c$  dispersiyası minimalıq xassəsinə malikdir. Baş yığımdan optimal tipik seçmə aparmaq üçün qrup dispersiyaları məlum olmalıdırlar.

Qeyd edək ki, tipik seçmə əlamətin hissəsini qiymətləndirmək üçün də istifadə edilə bilər.

$\bar{p}_i$  ilə  $i$ -ci seçmə qrupda əlamətə malik olanların hissəsini işarə etsək.

$$D\bar{p} = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^C \bar{p}_i \cdot (1 - \bar{p}_i) \cdot \frac{H_i}{H}$$

olar. Burada,  $\bar{p}$   $s$  sayda seçmə qrupdan ibarət olan seçmənin orta kəmiyyətidir. Bu halda baş yığımda əlamətin  $p$  hissəsi üçün etibarlılıq intervalı

$$\bar{p} - t_{\alpha} \sqrt{\frac{D\bar{p}}{H}} < p < \bar{p} + t_{\alpha} \sqrt{\frac{D\bar{p}}{H}}$$

Təkrar olmayan seçmələr üçün uyğun interval

$$\bar{p} - t_{\alpha} \sqrt{\frac{D\bar{p}}{H} \left(1 - \frac{H}{H}\right)} < p < \bar{p} + t_{\alpha} \sqrt{\frac{D\bar{p}}{H} \left(1 - \frac{H}{H}\right)}$$

şəklində olar.

Mexaniki seçim. Bu üsulda  $n_1=n_2=\dots=n_s$  olduğundan  $\sum_{i=1}^c H_{ii} = c$  olar. Bu halda etibarlılıq intervalı tipik seçmədə olduğu kimi qurulur. Mexaniki seçmədə hər bir seçmə qrupda bir element olduğu üçün orta qrup daxili dispersiyanı həcmi  $n=s$  olan təsadüfi seçmənin dispersiyası ilə əvəz etmək lazımdır.

$$\bar{X}_c - t_{\alpha} \frac{\sigma_c}{\sqrt{H}} < \hat{a} < \bar{X}_c + t_{\alpha} \frac{\sigma_c}{\sqrt{H}}$$

Seriya seçimi. Tutaq ki,  $X$  baş yığımının naməlum  $a$  riyazi gözləməsini qiymətləndirmək üçün seriyalı seçmə aparılmışdır. Fərz edək ki, baş yığım həcmi eyni  $H_{ii} = \frac{H}{s}$  ədədinə bərabər olan  $s$  sayda seriyalara ayrılmışdır.  $s$  sayda seriyadan təsadüfi təkrar seçmə üsulu ilə  $k$  sayda seriya seçək. Onda həcmi  $H = kH_{ii} = k \frac{H}{s}$  olan təsadüfi seçmə alırıq. Seriyaların seçmə xarakteristikalarını  $\bar{X}_i$  və  $\sigma_i^2$ ,  $i=1,2,\dots,s$  ilə işarə edək.  $s$  sayda seriyadan  $k$  saydası təsadüfi qaydada seçildiyinə görə 1-ci seçmənin nəticəsinə  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_c$  qiymətlərini eyni  $\frac{1}{s}$  ehtimalı ilə alan  $X_i^*$  təsadüfi kəmiyyəti kimi baxmaq olar.

Orta qiymət haqqında teoremə görə

$$a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i \cdot N_i = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i$$

olduğunu deyə bilərik.

Digər tərəfdən

$$MX_{ii}^* = \sum_{i=1}^c \tilde{X}_{ii} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^c \tilde{X}_{ii} = \hat{a}$$

Bu halda seçmə ortanı aşağıdakı kimi göstərmək olar.

$$\bar{X}_c = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K X_{ii}^*$$

Onda

$$M\bar{X}_c = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K MX_{ii}^* = \hat{a}$$

olar. Deməli,  $\bar{X}_s$  baş yığımının naməlum  $a$  riyazi gözləməsinin yerindəyişməyən qiymətləndirməsidir. Onun dispersiyasını hesablayaq:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= D\bar{X}_c = \frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^K DX_{ii}^* = \frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^K \left( \frac{1}{s} \sum_{j=1}^c (\tilde{X}_j - \hat{a})^2 \right) = \\ &= \frac{1}{K} \sum_{j=1}^c (\tilde{X}_j - \hat{a})^2 = \frac{\sigma_{\text{rp.ap.}}^2}{K} \end{aligned}$$

Beləliklə,  $D\bar{X}_c = \frac{\sigma_{\text{rp.ap.}}^2}{K}$  olduğunu alırıq.

$$P(|\bar{X} - a| < \Delta) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_{\bar{X}}}\right)$$

olduğundan

$$\Pi \left( \bar{X} - T \frac{\sigma_{rp.ap.}^2}{K} < a < \bar{X} + T \frac{\sigma_{rp.ap.}^2}{K} \right) = 2\Phi(T)$$

olar. Beləliklə,  $\alpha$  etibarlılığı ilə naməlum  $a$  riyazi gözləməsi üçün

$$\bar{X}_c - T_\alpha \frac{\sigma_{rp.ap.}^2}{\sqrt{K}} < a < \bar{X}_c + T_\alpha \frac{\sigma_{rp.ap.}^2}{\sqrt{K}}$$

etibarlılıq intervalını alırıq.

Təkrar olmayan seçmələr üçün etibarlılıq intervalı

$$\bar{X}_c - T_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_{rp.ap.}}{K} \left(1 - \frac{K}{c}\right)} < a < \bar{X}_c + T_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_{rp.ap.}}{K} \left(1 - \frac{K}{c}\right)}$$

şəklində olar.

## 6. Seçmənin zəruri həcmnin hesablanması

Baş yığımın parametrlərini qiymətləndirmək üçün seçmənin təşkili üsulu əsaslandırıldıqdan sonra, seçmə xətanın  $1 - \alpha$  etibarlılıq ehtimalı ilə arzu edilən dəqiqliyini təmin etmək məqsədi ilə seçmənin zəruri həcmi müəyyən etmək lazımdır.

Seçmə ortaya əsasən naməlum riyazi gözləmənin qiymətləndirilməsində təkrar və təkrar olmayan seçmələrin zəruri həcmnin hesablanması məsələsinə baxaq.

Əvvəlcə təkrar seçmənin həcmi hesablayaq. Orta kvadratik kənarlaşma məlum olduğu halda naməlum riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalı

$$\Pi \left( \bar{X} - T_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{H}} < M < \bar{X} + T_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{H}} \right) = 2\Phi(T)$$

şəklində olar. Etibarlılıq intervalının uzunluğu  $2T_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{H}}$ -ə bərabərdir. Intervalın

uzunluğu qiymətləndirilən parametrin dəqiqliyini müəyyən edir.  $\Delta = T_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{H}}$  işarə

edək. Onda verilmiş  $\Delta$  dəqiqliyini və  $\alpha$  etibarlılıq ehtimalına görə tapılmış  $t_\alpha$ -ya görə seçmənin  $n$  zəruri həcmi hesablamaq olar. Doğrudan da,

$$\Delta^2 = T_\alpha^2 \frac{\sigma^2}{H}$$

münasibətindən

$$H = \frac{T_\alpha^2 \sigma^2}{\Delta^2}$$

olduğunu alırıq. Deməli,  $H = \left[ \frac{T_\alpha^2 \sigma^2}{\Delta^2} \right] + 1$ .

İndi isə orta kvadratik kənarlaşma məlum olmayan hala baxaq. Verilmiş  $\alpha$  etibarlılıq ehtimalı ilə aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir.

$$\bar{X} - T_{\alpha,H} \frac{c}{\sqrt{H}} < M < \bar{X} + T_{\alpha,H} \frac{c}{\sqrt{H}}$$

Orta kvadratik kənarlaşma məlum olan halda olduğu kimi, seçmənin zəruri

həcmnin hesablanması üçün

$$n = \left[ \frac{T_{\alpha, n}^2 c^2}{\Delta^2} \right] + 1$$

düsturunu alırıq. Burada  $t_{\alpha, n}$  -  $x$  və  $n$  verilənlərinə görə xüsusi cədvəldən tapılır.

$s^2$  isə həcmi  $n$  olan seçməyə görə hesablanmış düzəldilmiş dispersiyadır.

İndi isə fərz edək ki, seçmə orta təkrar olmayan seçməyə əsasən hesablanmışdır. Onda

$$n(\bar{x} - T_{\alpha} \sigma_{\bar{x}} < m < \bar{x} + T_{\alpha} \sigma_{\bar{x}}) = 2\Phi(t) = \alpha$$

olar. Baş yığının dispersiyası məlum olduqda

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{H - n}{H - 1}$$

Burada  $N$  baş yığının həcmidir. Bu halda seçmə xəta üçün  $\Delta^2 = T_{\alpha}^2 \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{H - n}{H - 1}$  düsturunu alırıq. Axıncı münasibətdən seçmənin zəruri həcmi hesablamaq üçün

$$n = \left[ \frac{HT_{\alpha}^2 \sigma^2}{(H - 1)\Delta^2 + T_{\alpha}^2 \sigma^2} \right] + 1$$

düsturunu alırıq.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{HT_{\alpha}^2 \sigma^2}{(H - 1)\Delta^2 + T_{\alpha}^2 \sigma^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T_{\alpha}^2 \sigma^2}{\left(1 - \frac{1}{H}\right)\Delta^2 + \frac{T_{\alpha}^2 \sigma^2}{H}} = \frac{T_{\alpha}^2 \sigma^2}{\Delta^2}$$

olduğuna görə,  $N \rightarrow \infty$  olduqda  $n = \left[ \frac{T_{\alpha}^2 \sigma^2}{\Delta^2} \right] + 1$  qəbul etmək olar.

Tutaq ki, verilmiş  $\alpha$  etibarlılığı ilə uzunluğu  $2\Delta$  olan etibarlılıq intervalı qurulmuşdur. Yuxarıda deyildiyi kimi, təkrar seçmələr üçün seçmənin zəruri sayı

$$n = \left[ \frac{T_{\alpha}^2 \sigma^2}{\Delta^2} \right] + 1$$

təkrar olmayan seçmə üçün isə

$$n' = \left[ \frac{HT_{\alpha}^2 \sigma^2}{(H - 1)\Delta^2 + T_{\alpha}^2 \sigma^2} \right] + 1$$

düsturu ilə hesablanır.  $n$ -in ifadəsini aşağıdakı kimi çevirək:  $\frac{1}{n} = \frac{\Delta^2}{T_{\alpha}^2 \sigma^2}$

olduğu üçün

$$n' = \frac{1}{\frac{H - 1}{H} \cdot \frac{\Delta^2}{T_{\alpha}^2 \sigma^2} + \frac{T_{\alpha}^2 \sigma^2}{HT_{\alpha}^2 \sigma^2}} = \frac{1}{\frac{H - 1}{H} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{H}} = \frac{Hn}{H + (n - 1)}$$

olduğunu alırıq.  $n - 1 > 0$  olduğu üçün  $n' \leq \frac{Hn}{H} = n$  olduğunu alırıq.

Beləliklə, təkrar seçmənin həcmi təkrar olmayan seçmənin həcmindən kiçik deyil.

Təcrübədə tez- tez təsadüf edilən hallar üçün seçmənin zəruri sayının hesablanması ifadəsini aşağıdakı cədvəldə verək.

Cədvəl 1.

Müxtəlif növ seçmələr üçün seçmənin zəruri sayının hesablanması

| Seçmənin növü        | Seçmənin növü                                                     |                                                                                                                |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                      | Təkrar                                                            | Təkrar olmayan                                                                                                 |
| Təsadüfi və mexaniki | $n = \frac{\tau_a^2 \sigma^2}{\Delta^2}$                          | $\frac{H \tau_a^2 \sigma^2}{(H - 1) \Delta^2 + \tau_a^2 \sigma^2}$                                             |
| Tipik                | $n = \frac{\tau_a^2 \sigma_{\text{гр.дах.}}^2}{\Delta^2}$         | $n = \frac{\tau_a^2 \sigma_{\text{гр.дах.}}^2 \cdot C}{\Delta^2 \cdot c + \tau_a^2 \sigma_{\text{гр.дах.}}^2}$ |
| Serialı              | $p = \frac{\tau_a^2 \sigma_{\text{гр.дах.}}^2 \cdot c}{\Delta^2}$ | $p = \frac{\tau_a^2 \sigma_{\text{гр.дах.}}^2 \cdot c}{\Delta^2 \cdot c + \tau_a^2 \sigma_{\text{гр.дах.}}^2}$ |

## Mövzu 9.Statistik hipotezlərin yoxlanması.

### P L A N

- 1.Statistik hipotezlər haqqında ümumi anlayış
- 2.Statistik hipotezlərin yoxlanılmasının əsas anlayışları.
  - 2.1. Statistik hipotezlər.Əsas və alternativ, sadə və mürəkkəb hipotezlər.
  - 2.2.Statistik kriteriyalar.Kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti
  - 2.3. Kriteriyanın böhran və qəbul oblastları. Böhran nöqtələri və onların təyini.
  - 2.4.Birinci və ikinci növ səhvlər. Kriteriyanın gücü.
3. Statistik hipotezlərin yoxlanılmasının ümumi sxemi
  4. Əlamətin hissəsi haqqında hipotezlərin yoxlanması.
    - 4.1. Əlamətin hissəsinin standartla müqayisəsi.
    - 4.2. İki yığırda əlamətin hissələri haqqında hipotezin yoxlanılması.
5. Orta qiymətlər haqqında hipotezlərin yoxlanılması.
  - 5.1. Seçmə ortanın hipotetik orta ilə müqayisəsi haqqında hipotezin yoxlanması
  - 5.2.Orta qiymətlərin müqayisəsi haqqında hipotezin yoxlanılması
    - 5.2.1.Dispersiyalar məlum olan hal.Laplas kriteriyası.
    - 5.2.2.Dispersiyalar məlum olmayan hal.Styudent kriteriası
- 6.Asılı seçmələr haqqında hipotezlərin yoxlanılması
7. Dispersiyaların bərabərliyi haqqında hipotezin yoxlanılması. Fişer-Snedekor kriteriyası
- 8.Baş yığırın paylanma funksiyasının növü haqqında hipotezin yoxlanılması.Pirson kriteriyası.

### Ə D Ə B İ Y Y A T

- 1.S.Ö.Ömərov, N.Ə.cavadov.Riyazi və tətbiqi statisika.Bakı, Azərnəşr, 2007.
2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasimov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çapıoölu, 2006.

1.Statistik hipotezlər haqqında ümumi anlayış  
Hipotez termini yunancadan (hypothesis) tərcümədə fərziyyə, güman, təxmin və ya ehtimal mənasını bildirir.

Hipotezlər adətən müəyyən faktların müşahidəsinə əsasən irəli sürülür və həmin faktların ümumiləşdirilməsi cəhdidir.

İrəli sürülən hipotezin doğruluğunun təsdiqi və yaxud onun rədd edilməsi adətən hipotezin irəli sürülməsindən dərhal sonra baş vermir.Çox vaxt hipotezin

yanarından onun sübutuna qədər kifayət qədər uzun zaman keçir. Məsələn, kainatın mənşəyi haqqında elmi hipotez indiyə kimi yoxlanmamışdır. Kopernikin günəş sistemi haqqında təlimi isə yarandığı dövrdən keçən üç yüz il ərzində yalnız hipotez olaraq qalmışdır. Yalnız XIX əsrin ortalarında Leverye və Hallenin cəhdləri sayəsində bu hipotezin doğruluğu sübut olunmuşdur. Bəzən hipotezin yoxlanılması kiçik zaman kəsiyində mümkün olur. Məsələn, 1846-cı ildə məşhur fransız astronomu Leverye Uran planetinin tədqiqinə əsaslanaraq naməlum planetin mövcud olması haqqında hipotez irəli sürmüşdür. O, Neptun adlandırılan bu planetin orbitini hesablayaraq onun yerini göstərdi. Elə həmin il Leveryenin hipotezi təsdiq edildi. Bu planeti Alman astronomu Halle kəşf etdi.

Deyilənləri nəzərə alaraq hipotez anlayışına tərif verək. Sözün geniş mənasında hipotez dedikdə, müəyyən hadisələr toplusunu izah edən inkişaf qanunauyğunluqları haqqında elmi cəhətdən əsaslandırılmış güman (təxmin) başa düşülür. Bunu isə yoxlamaq və sübut etmək tələb edilir.

İrəli sürülən hipotezin yoxlanılması tədqiqatın məqsədlərinə uyğun olaraq xüsusi təşkil edilmiş elmi müşahidə və ya eksperiment nəticəsində əldə edilmiş faktların köməyi ilə mümkün bilər. Bunun üçün aparılmış eksperimentin və ya tədqiqatın nəticələri haqqında kütləvi məlumatlara malik olmaq lazımdır. Həmin kütləvi məlumatların kəmiyyətə ifadəsi təsadüfi kəmiyyətlərlə xarakterizə edilir.

Qeyri-müəyyənlik şəraitində müşahidə edilən təsadüfi kəmiyyətlərə görə, nəzəri gümanın doğruluğunun yoxlanması statistik hipotezlərin köməyi ilə aparıla bilər. Təsadüfi kəmiyyətlərin və ya baş yığımların paylanma qanunları haqqında irəli sürülən təklif statistik hipotez adlanır.

Statistik hipotez elmi hipotezin xüsusi halıdır. O, elmi hipotez anlayışına nisbətən məhdud anlayışdır.

Belə ki, Marsda canlı materiyanın mövcud olması hipotezi elmi hipotezdir. Lakin statistik deyil. Çünki hər hansı statistik yığma heç bir aidiyyəti yoxdur. Eyni zamanda "Bitkiçilik məhsulları istehsalı ilə məşğul olan fermer təsərrüfatlarında rentabellik səviyyəsi heyvandarlıq məhsulları istehsal edən fermer təsərrüfatlarına nisbətən yüksəkdir" hipotezi statistikdir. Ona görə ki, bu halda orta rentabellik səviyyəsinə təsərrüfatlar yığımına nəzərən təsadüfi kəmiyyət kimi baxılır və o, paylanmanın parametri kimi qəbul edilir.

"Azərbaycan Respublikasında əhalinin əmək haqqının həcminə görə paylanması loqarifmik normal qanuna tabedir" hipotezi də həmçinin statistikdir.

Təcrübədə tez-tez sınaqların, müşahidələrin və s. nəticələrinə əsasən konkret kütləvi hadisənin xarakteristikaları haqqında müxtəlif hipotezləri yoxlamaq tələb olunur. Aşağıdakı məsələləri nəzərdən keçirək.

Məsələ 1. Heyvanların yoluxması yoluxanların hissəsi ilə ölçülür və adi şəraitdə müəyyən  $p_0$  səviyyəsinə malik olur. Fərz edək ki, peyvənd nəticəsində heyvanların yoluxması  $p_1 < p_0$  səviyyəsinə qədər azalır. Heyvanların yoluxmasının müayinəsinə əsasən bunun doğru olub- olmamasını yoxlamaq tələb olunur.

Məsələ 2. Məhsuldarlığı  $a_0$  olan buğda növünü məhsuldarlığı  $a_1$  olan buğda növü ilə əvəz edirlər. İkinci növ buğdanı rayonlaşdırdıqda, onun birinci növə nisbətən daha məhsuldar olduğunu yoxlamaq tələb edilir.

Statistik hipotezlərin yoxlanılması metodları təcrübədə geniş tətbiq edilir. Məsələn, müəssisələrin əmək məhsuldarlığına görə planı yerinə yetirmələrinə nəzarət, kənd təsərrüfatı bitkilərinin məhsuldarlıqlarının müqayisəsi, istehsal edilən məhsulun keyfiyyəti və s. statistik hipotezlərin yoxlanılmasına əsaslanır.

Yuxarıda göstərilən məsələlərdə hipotezlərin şifahi təsvir forması verilmişdir. Riyazi statistikada isə şifahi təsvir formasını riyazi formaya çevirmək lazımdır. Şifahi təsvir formasının riyazi formaya çevrilməsini birinci məsələnin üzərində aydınlaşdırırıq.

Məlumdur ki, bitkilərin məhsuldarlığı müxtəlif amillərdən (torpağın keyfiyyətindən, hektara verilən gübrənin miqdarından, orta illik yağıntı miqdarından və s.) asılıdır. Ona görə də məhsuldarlığa normal təsadüfi kəmiyyət kimi baxmaq olar. İkinci məsələdə 1-ci növ buğdanın məhsuldarlığına  $(a, \sigma^2)$  parametrlili, 2-ci növ buğdanın məhsuldarlığına isə  $(b, \sigma^2)$  parametrlili təsadüfi kəmiyyət kimi baxmaq olar. Beləliklə, iki fərziyyə alırıq:

1)  $a = b$ , yəni orta qiymətləri bərabər olan iki müxtəlif normal paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət vardır (hər iki buğda növünün məhsuldarlığı eynidir);

2)  $a < b$ , 2-ci təsadüfi kəmiyyətin orta qiyməti birincidən böyükdür (ikinci növ buğda birinciyyə nisbətən daha məhsuldardır).

Yuxarıda deyilənlərə əsasən statistik hipotezin yoxlanılması məsələsinin riyazi qoyuluşuna aşağıdakı məsələ kimi baxa bilərik.

Təqdim edilən baş yığımın (və ya  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin) paylanma parametrləri bəzən məlum olmur. Lakin aparılan müşahidələrə və başqa məlumatlara əsasən bu paylanmanın  $a$  parametrlinin müəyyən  $a_0$  ədədinə bərabər olması,  $a_0$  - dan böyük və ya kiçik qiymətlər alması və s. haqqında müəyyən hipotezlər söyləmək olar. Ola da bilər ki, baş yığımın paylanma funksiyasının növü müəyyən deyil, ancaq aparılan müşahidələrə əsasən onun paylanma funksiyasının növü haqqında müəyyən hipotezlər söyləmək mümkün olur.

Tərif 1. Baş yığımın paylanma parametrləri və yaxud paylanma funksiyasının növü haqqında hipotezlərə statistik hipotezlər deyilir.

Məsələn, " $X$  baş yığımı normal qanunla paylanmışdır", "Paylanmanın parametrləri  $a_0$  qiymətinə bərabərdir:  $a = a_0$ ", " $X$  və  $Y$  baş yığımlarının dispersiyaları müxtəlifdir" və s. statistik hipotezlərdir.

2. Statistik hipotezlərin yoxlanılmasının əsas anlayışları.

2.1. Statistik hipotezlər. Əsas və alternativ, sadə və mürəkkəb hipotezlər.

Statistik hipotezlər empirik nəticələr və ya seçmə yığım vasitəsilə yoxlanılır. Bu məqsədlə, müəyyən bir qayda ilə sınağın  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nəticələrinin baş yığımın paylanma parametrləri və yaxud onun paylanma funksiyasının növü haqqında hipotez ilə uzlaşdığı və yaxud onlar arasındakı fərqi təsadüfi seçim mexanizmi ilə bağlı olan təsadüfi xəta ilə əlaqədar olduğu yoxlanılır. Həmin qaydaya, yəni irəli sürülən fərziyyənin qəbul və ya rədd edilməsini göstərən qaydaya uzlaşma kriteriyası deyilir.

Statistik hipotezlərin yoxlanılmasının əsas anlayışları ilə tanış olaq.

İrəli sürülən hər bir başlanğıc hipotezə əsas (sıfırıncı) hipotez deyilir. Əsas hipotez  $H_0$  kimi işarə edilir.

Əsas hipotezə zidd olan hər bir hipotezə alternativ (rəqib) hipotez deyilir. Alternativ hipotezi  $H_1$  kimi işarə edilir.

Hipotezləri riyazi olaraq təsvir etmək üçün hipotezin işarəsindən sonra iki nöqtə (:) qoyulur və ondan sonra hipotezin məzmunu yazılır. Məsələn, normal paylanmış baş yığımın riyazi gözləməsi  $a$  ədədinə bərabərdir əsas hipotezi  $H_0: MX = a$  kimi, “ $X$ -baş yığımı normal paylanmaya malik deyil” alternativ hipotezi isə  $H_1: “X$ -normal paylanmaya malik deyil” kimi yazılır.

Hipotezlər sadə və mürəkkəb olur.

Seçmə yığımın paylanmasını birqiymətli olaraq təyin edən hipotezə sadə deyilir.

Məsələn, 1-ci məsələdəki hipotezlər sadədir. Çünki burada 2 hal mümkündür:  $p=0,1$  peyvənd edilməyib;  $p=0,05$  peyvənd edilmişdir. Göründüyü kimi, paylanma parametrlərinin konkret ədədə bərabər olması haqqında hipotez yoxlanılır, yəni təsadüfi kəmiyyətin paylanması tamamilə müəyyəndir.

Sadə olmayan hipotezlərə mürəkkəb hipotezlər deyilir. Mürəkkəb hipotezlərdə parametrlərin ehtimal edilən qiymətlər çoxluğu verilir. 2-ci məsələdəki alternativ hipotezi  $H_1: b > a$  şəklində yazı bilərik. Bu mürəkkəb hipotezdır. Çünki,  $b$  parametri  $a$  -dan böyük istənilən qiyməti ala bilər. Mürəkkəb hipotezlər sonlu və ya sonsuz sayda sadə hipotezlərdən ibarətdir. Məsələn,  $H_1: b > a$  hipotezi, sonsuz sayda sadə  $b = b_k$  ( $b_k$   $a$  -dan böyük istənilən ədəddir) hipotezlərindən ibarətdir.

## 2.2. Statistik kriteriyalar. Kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti.

Seçmə məlumatların yoxlanılan hipotez ilə uzlaşması haqqında mülahizə tədqiqat üçün götürülmüş kriteriyaya görə söylənilir. Belə ki, seçilmiş kriteriyaya görə əsas hipotez qəbul edilir və yaxud rədd edilir. Başqa sözlə kriteriya əsas hipotezin qəbul və ya rədd edilməsi qaydasıdır. Adətən kriteriya olaraq seçməyə əsasən təyin edilən statistik xarakteristika götürülür. Beləliklə, kriteriya paylanma funksiyası dəqiq və ya təqribi olaraq məlum olan təsadüfi kəmiyyətdir.

İki dispersiyanın bərabərliyi və yaxud iki orta qiymətin bərabərliyi haqqında əsas hipotezin doğruluğunu yoxlamaq üçün kriteriyanı uyğun olaraq dispersiyaların nisbəti və seçmə ortaların fərqi kimi götürə bilərik.

Əsas hipotezi yoxlamaq üçün kriteriyanı müxtəlif üsullarla təyin etmək olar. Məsələn, baş yığımın riyazi gözləməsinin verilmiş  $a$  ədədinə bərabər olması haqqında  $H_0: MX = a$  əsas hipotezi yoxlamaq lazımdır.  $X$  baş yığımından həcmi  $n$  olan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçməsinə götürərək. Əsas hipotezin doğruluğunu yoxlamaq üçün

kriteriya olaraq  $\theta_1 = \bar{X}$  seçmə ortasını,  $\theta_2 = \bar{X} - a$  fərqlərini və yaxud  $\theta_3 = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma}$  normallaşdırılmış fərqlərini götürmək olar. Belə təyin olunan təsadüfi kəmiyyətlər vasitəsilə müxtəlif uzlaşma kriteriyaları alınır.

Seçilmiş kriteriyanın seçməyə əsasən hesablanmış qiymətinə onun müşahidə edilmiş qiyməti deyilir. Məsələn tutaq ki,  $X$  baş yığımının orta kvadratik meyli

$\sigma = 0.5$  məlumdur.  $H_0: EX = 15$  əsas hipotezinin doğruluğunu yoxlamaq üçün həcmi  $n=100$  olan seçməyə əsasən  $\bar{x} = 16$  seçmə ortası tapılmışdır. Onda kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti

$$\theta_3 = \frac{(16-15)\sqrt{100}}{0.5} = 20$$

olar.

2.3. Kriteriyanın böhran və qəbul oblastları. Böhran nöqtələri və onların təyini..

Tutaq ki, əsas hipotezi yoxlamaq üçün  $\theta$  kriteriyası seçilmişdir. Seçilmiş kriteriyaya uyğun olaraq təsadüfi kəmiyyətin qiymətlər oblastı kəsişməyən iki oblasta ayrılır: böhran və hipotezin qəbul olunma (yol verilən) oblastına.

Kriteriyanın qiymətlər çoxluğunun elə  $S$  alt çoxluğuna böhran oblastı deyilir ki, kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti bu oblasta daxil olduqda əsas hipotez rədd edilir. Əksinə kriteriyanın qəbul oblastı onun qiymətlər çoxluğunun elə alt çoxluğuna deyilir ki, kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti bu oblasta daxil olduqda əsas hipotez qəbul edilir.

Kriteriya bir ölçülü təsadüfi kəmiyyət olduğu üçün onun qiymətlər oblastı müəyyən intervala daxildir. Ona görə də böhran və kriteriyanın yol verilə bilən qiymətlər oblastları da müəyyən intervallardır. Deməli, onları bir-birindən ayıran nöqtələr vardır.

Kriteriyanın böhran oblastını onun qəbul oblastından ayıran nöqtələrə böhran nöqtələri deyilir.

Böhran oblastları birtərəfli (sol və sağ tərəfli) və ikitərəfli oblastlara ayrılır.

$\theta > z_{böh}$ ,  $z_{böh} > 0$  bərabərsizliyi ilə təyin edilən oblasta sağ tərəfli,  $\theta < z_{böh}$ ,  $z_{böh} < 0$  bərabərsizliyi ilə təyin edilən oblasta sol tərəfli və  $\theta < z_1, \theta > z_2$  ( $z_2 > z_1$ ) - bərabərsizlikləri ilə təyin edilən oblasta ikitərəfli böhran oblastı deyilir.

Xüsusi halda ikitərəfli simmetrik böhran oblastı  $|\theta| > z_{böh}$  bərabərsizliyi ilə təyin edilir.

İndi isə böhran nöqtələrinin və beləliklə, böhran oblastının təyini ilə tanış olaq.

Böhran nöqtələrinin təyini ehtimalı kifayət qədər kiçik olan hadisələrin praktiki cəhətdən mümkün olmaması prinsipinə əsaslanır.  $P(\theta \in S) = \alpha$  hadisəsinin ehtimalı kifayət qədər kiçik olduğu üçün o, praktiki olaraq mümkün olmayan hadisədir. Onun başverməsini, yəni  $\theta \in S$  olmasını əsas hipotezin yalan olması ilə izah etmək olar. Bu halda əsas hipotez rədd edilir. Beləliklə,  $P(\theta \in S) = \alpha$  şərti kriteriyanın elə qiymətlərini müəyyən edir ki, bu qiymətlərdə əsas hipotez rədd edilir, onlar isə böhran oblastını təşkil edirlər. Ona görə də böhran nöqtəsini tapmaq üçün əhəmiyyətlik səviyyəsi adlanan kifayət qədər kiçik  $\alpha$  ədədi götürülür və böhran nöqtəsi əsas hipotezin doğruluğu şərtində  $P(\theta \in S) = \alpha$  şərtindən tapılır.

Sağtərəfli böhran oblastı qurmaq üçün əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehtimalının əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər olması şərtindən istifadə edilir.

$$P(Z > z_{böh}) = \alpha$$

Aydındır ki,  $P(0 < Z < z_{böh}) + P(Z > z_{böh}) = \frac{1}{2}$

Buradan  $\Phi(z_{böh}) + \alpha = \frac{1}{2}$

və yaxud

$$\Phi(z_{böh}) = \frac{1 - 2\alpha}{2}$$

Beləliklə, sağtərəfli böhran nöqtəsi  $\Phi(Z_\delta) = \frac{1 - 2\alpha}{2}$  bərabərliyindən tapılır.

Sağtərəfli böhran oblastı  $Z > z_{böh}$ , kriteriyanın qəbul oblastı isə  $Z < z_{böh}$  bərabərsizliyi ilə təyin edilir.

İkitərəfli böhran oblastı qurmaq üçün əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehtimalının əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər olması şərtindən istifadə edilir.

$$P(Z < z_{sol.böh}) = \frac{\alpha}{2},$$

$$P(Z > z_{sağ.böh}) = \frac{\alpha}{2}$$

$Z$  - normal təsadüfi təsadüfi kəmiyyət olduğu üçün onun paylanması sıfır nəzərən simmetrikdir. Onda böhran nöqtələri də sıfır nəzərən simmetrikdirlər.

Beləliklə, ikitərəfli böhran oblastını və kriteriyanın qəbul oblastını qurmaq üçün sağtərəfli böhran nöqtəsini tapmaq kifayətdir. Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki,

$$P(0 < Z < z) = \Phi(z)$$

$Z$  - in paylanması sıfır nəzərən simmetrik olduğu üçün onun  $(0, \infty)$  intervalına düşməsi hadisəsinin ehtimalı  $\frac{1}{2}$  olar. Onda ehtimalların toplanması qanununa görə

$$P(0 < Z < z_{böh}) + P(Z > z_{böh}) = \frac{1}{2}$$

Deməli ,

$$\Phi(z_{böh}) + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

Beləliklə,  $\Phi(z_{böh}) = \frac{1 - \alpha}{2}$

İkitərəfli böhran oblastı  $|Z| > z_{böh}$ , kriteriyanın qəbul oblastı isə  $|Z| < z_{böh}$  bərabərsizliyi ilə təyin edilir.

Soltərəfli böhran nöqtəsi  $P(Z > z_{böh}) = \alpha$ ,  $z_{böh} > 0$  şərtindən tapılan sağtərəfli böhran nöqtəsinə simmetrikdir. Soltərəfli böhran nöqtəsini tapmaq üçün əvvəlcə  $\Phi(Z_\delta) = \frac{1 - 2\alpha}{2}$  bərabərliyindən  $z_\delta$  tapılır və soltərəfli böhran nöqtəsi  $-z_\delta$  götürülür.

Soltərəfli böhran oblastı  $Z < z_{böh}$ , kriteriyanın qəbul oblastı isə  $Z > z_{böh}$  bərabərsizliyi ilə təyin edilir.

Hər bir kriteriyanın böhran nöqtələri cədvəli işlənilib hazırlanmışdır.

Böhran nöqtəsi tapıldıqdan sonra kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti hesablanır.  $\theta \in S$  olarsa, onda  $H_0$  əsas hipotezi rədd edilir. Əks halda onu rədd etməyə heç bir əsas yoxdur.

#### 2.4. Birinci və ikinci növ səhvlər. Kriteriyanın gücü.

Təsadüfi seçmə sonlu olduğundan və real vəziyyəti tam əks etdirə bilmədiyindən statistik hipotezin onun vasitəsilə yoxlanılması zamanı səhv qərar qəbul olunması istisna edilmir. Əlavə seçmə ola bilsin ki, “uğurlu” olmasın və onun əsasında əldə olunacaq məlumat yalan olsun. Bu xüsusiyyət statistik yoxlamanın əhəmiyyətini azaltmır, əksinə, hipotezlərin statistik yoxlanılması imkan verir ki, səhv qərarın qəbul olunması ehtimalını hesablamaq mümkün olsun və bu ehtimal nə qədər kiçik olsa, onda qurulan kriteriya səhvə yol verməni azaldır.

Yuxarıda deyilənlərdən aydın olur ki, hipotezlərin yoxlanılması müəyyən ehtimalla səhv qərarın qəbul edilməsi ilə əlaqədardır. Statistik hipotezlər yoxlanılan zaman iki növ səhv buraxıla bilər. Əgər əsas hipotezin doğruluğu şərtində onun rədd edilməsi haqqında qərar qəbul edildikdə, onda buraxılan bu cür səhvə, birinci növ səhv deyilir. Başqa sözlə, birinci növ səhv doğru olan əsas hipotezin rədd edilməsidir. Belə səhvlər  $\alpha = P_{H_0}(\theta \in S)$  ehtimalı ilə xarakterizə edilir. Alternativ hipotezin doğruluğu şərtində əsas fərziyyə qəbul edildikdə də səhv buraxılır. Bu cür səhvə ikinci növ səhv deyilir. İkinci növ səhvin buraxılması doğru olmayan hipotezin qəbul edilməsidir. İkinci növ səhvlər  $\beta = P_{H_1}(\theta \in \bar{S})$  ehtimalı ilə xarakterizə edilir.

Aydındır ki, düzgün qərar iki halda ola bilər.

Cədvəl 1.

Birinci və ikinci növ səhvlərin yaranma şərtləri

| Hipotezin yoxlanılmasının nəticələri | Yoxlanılan hipotezin mümkün halları |                         |
|--------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------|
|                                      | $H_0$ hipotezi doğrudur             | $H_1$ hipotezi doğrudur |
| Hipotez rədd edilir                  | Birinci növ səhv                    | Düzgün qərar            |
| Hipotez qəbul edilir                 | Düzgün qərar                        | İkinci növ səhv         |

Birinci növ səhvin buraxılma ehtimalına əhəmiyyətlik səviyyəsi deyilir. Başqa sözlə, əhəmiyyətlik səviyyəsi doğru olan əsas hipotezin rədd edilmə ehtimalıdır:  $\alpha = P_{H_0}(\theta \in S) = P_{H_0}(\bar{H}_0)$

Praktiki məsələlərin həllində  $\alpha$  əhəmiyyətlik səviyyəsinin 0,1; 0,05; 0,01; 0,001 qiymətlərindən istifadə edilir. İqtisadi tədqiqatlarda əhəmiyyətlik səviyyəsinin 0,05 və 0,01 standart səviyyələrindən istifadə edilir.

Əhəmiyyətlik səviyyəsi əvvəlcədən verilir. Əhəmiyyətlik səviyyəsinin  $\alpha$  -ya bərabər olması o deməkdir ki, 100 haldan,  $100\alpha$  halda birinci növ səhv buraxıla bilər, yəni doğru olan hipotez rədd edilə bilər.  $\alpha$  nə qədər kiçik olsa belə

$\theta$ -nın  $S$  oblastına düşməsi hadisəsinin kifayət qədər kiçik ehtimalı olmasına baxmayaraq, o mümkün olmayan hadisə deyil. Ona görə də  $H_0$  əsas hipotezinin doğruluğu şərtində  $\theta$ -nın qiyməti  $S$  oblastına düşə bilər. Bu halda  $H_0$  hipotezini rədd edərək, biz ehtimalı  $\alpha$  əhəmiyyətlik səviyyəsi ilə ölçülən birinci növ səhvə yol veririk.  $\alpha$ -nın kiçilməsilə birinci növ səhvin buraxılma ehtimalı kiçilir və böhran oblastı daralır. Beləliklə, əsas hipotez doğru olmadıqda belə,  $\theta$ -nın müşahidə edilən qiymətinin böhran oblastına düşməsi az ehtimalı olur.  $\alpha=0$  olduqda isə kriteriyanın müşahidə edilən qiymətindən asılı olmayaraq əsas hipotez həmişə qəbul ediləcəkdir. Ona görə də  $\alpha$ -nın kiçildilməsi ikinci növ səhvə, yəni doğru olmayan hipotezin qəbul edilməsi hadisəsinin ehtimalının artırılmasına gətirib çıxarır. Bu mənada, birinci və ikinci növ səhvlər rəqibdir.

Əksər hallarda göstərilən səhvlərin nəticələri eyni deyildir. Belə ki, səhvlərdən biri daha ehtiyatlı qərarın, digəri isə heç bir əsası olmayan qərarın qəbul edilməsinə gətirib çıxarır. Hansı növ səhvin buraxılmasının “yaxşı” və ya “pis” olması məsələnin konkret qoyuluşundan və əsas fərziyyənin məzmunundan asılıdır. Məsələn, əgər məhsulun keyfiyyəti haqqında əsas fərziyyə yoxlanırsa və birinci növ səhv buraxılıbsa bu zaman yararlı məhsul qüsurlu məhsul kimi qəbul edilir. Əksinə ikinci növ səhv buraxılıbsa, biz istehlakçılara qüsurlu məhsul göndəririk. Göründüyü kimi, bu halda ikinci növ səhvin nəticəsi daha ciddi əhəmiyyət kəsb edir.

Hər iki səhvi aradan qaldırmaq mümkün olmadığına görə hər bir konkret məsələdə bu səhvlərdən irəli gələn itkini minimallaşdırmağa çalışırlar. Əlbəttə, yaxşı olar ki, eyni zamanda hər iki səhvin buraxılma ehtimalı kiçik olsun, lakin onlar rəqib olduğuna görə səhvlərdən birinin buraxılma ehtimalının kiçildilməsi, digər səhvin buraxılma ehtimalını artırır. Ona görə də hər bir konkret halda kompromis qərar çıxarmaq lazımdır. Əksər hallarda seçmənin həcmının artırılması eyni zamanda hər iki səhvin buraxılma ehtimalının kiçildilməsinin yeganə yoludur.

Alternativ hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın böhran oblastına düşməsi ehtimalına, yəni alternativ hipotezin doğruluğu şərtində əsas hipotezin rədd edilmə ehtimalına kriteriyanın gücü deyilir.

İkinci növ səhvin buraxılma ehtimalına, yəni doğru olmayan hipotezin qəbul edilməsi ehtimalına kriteriyanın gücü deyilir və  $\beta$  ilə işarə edilir. “ikinci növ səhv buraxılmışdır” hadisəsinin ehtimalı  $\beta$  olduğundan onun tamamlayanı olan “ikinci növ səhv buraxılmamışdır” hadisəsinin ehtimalı  $1 - \beta$  olar. Buradan aydın olur ki, kriteriyanın gücü ikinci növ səhvin buraxılmaması hadisəsinin ehtimalıdır.

Kriteriyanın gücünün artması ilə ikinci növ səhvin buraxılma ehtimalı kiçilir. Deməli, kriteriyanın gücü nə qədər çox olarsa, ikinci növ səhvin buraxılma ehtimalı bir o qədər kiçik olar. Beləliklə, əhəmiyyətlik səviyyəsi seçildikdən sonra böhran oblastı elə qurulmalıdır ki, kriteriyanın gücü maksimal olsun. Bu tələbin ödənilməsi ikinci növ səhvin buraxılma ehtimalının minimallığını təmin etməlidir.

### 3. Statistik. hipotezlərin yoxlanılmasının ümumi sxemi

İstənilən statistik hipotez yoxlanılarkən aşağıdakı mərhələlər yerinə yetirilməlidir.

1. Tədqiq edilən məsələ statistik hipotez şəklində dürüst ifadə edilməlidir.
2. Əsas və alternativ hipotez seçilməlidir. Alternativ hipotezin növü adətən tədqiq edilən məsələnin mahiyyətinə əsasən müəyyən edilir. Məsələn, məhsulun 5%-nin zay (qüsurlu) olması haqqında  $H_0: p=0,05$  əsas hipotezi yoxlanılarsa, onda alternativ hipotez  $H_1: p>0,05$  şəklində seçilməlidir. Çünki, qüsurlu olma faizi 5-dən kiçik olduqda, məhsul onsuz da keyfiyyətli məhsul kimi qəbul ediləcəkdir.
3.  $\alpha$  - əhəmiyyətlik səviyyəsi müəyyən edilməlidir.
4. Əsas və alternativ hipotezin xarakterindən asılı olaraq, birtərəfli və yaxud ikitərəfli böhran oblastı seçilməlidir. Əgər mürəkkəb alternativ hipotez  $H_1: \theta_1 \neq \theta_2$  şəklindədirsə, bizi öyrənilən  $\theta$  parametrinin  $\theta_1$ -dən hər iki tərəfə kənarlaşması maraqlandırdığına görə  $\theta < \theta_1$  və  $\theta > \theta_2$  ikitərəfli böhran oblastı qurulur. Alternativ hipotez  $H_1: \theta < \theta_1$  şəklində olduqda sol tərəfli,  $H_1: \theta > \theta_2$  olduqda isə sağ tərəfli böhran oblastı seçilir.
5. Qiymətlərinə əsasən hipotezin doğruluğu haqqında fikir söyləmək mümkün olan statistika seçilir. Statistika olaraq seçmənin elementlərindən asılı olan istənilən funksiya götürmək olar. Göründüyü kimi, hər hansı bir hipotezi yoxlamaq üçün müxtəlif statistikalar seçmək olar. Seçilmiş statistikanın hipotezin yoxlanılması kriteriyası kimi qəbul edilməsi üçün o bir sıra optimallıq (yerindəyişməzlik, əsaslılıq və effektivlik) şərtlərini ödəməlidir.
- Yerindəyişməzlik xassəsi əsas hipotezin qəbul oblastının simmetrikliliyini təmin edir. Əsaslılıq xassəsi paylanmanın mərkəz ətrafında daha yığcamlılığını təmin edir. Bu isə verilmiş  $\alpha$  əhəmiyyətlik səviyyəsində ikinci növ səhvin buraxılma ehtimalını kiçildir. Effektivlik xassəsi digər bərabər şərtlər daxilində birinci və ikinci növ səhvin ehtimalının kiçildilməsinə imkan verir.
6. Seçilmiş kriteriyanın paylanma qanunu müəyyən edilməlidir. Qeyd edək ki, bu mərhələ riyazi cəhətdən hipotezlərin yoxlanılmasında ən çətin mərhələdir.
7. Kriteriyanın məlum paylanma qanununa əsasən böhran oblastının növünə uyğun olaraq müvafiq tənliklərindən böhran nöqtələri tapılmalıdır.
8. Həcmi nəzərdə tutulan seçmə götürülməli və ona əsasən kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti hesablanmalıdır.
9. Statistik hipotezin yoxlanılması qaydası ifadə edilir və bu qaydaya əsasən statistik qərar qəbul edilir. Belə ki, əgər kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti böhran oblastına düşürsə, onda əsas hipotez seçmə məlumatlarla ziddiyyət təşkil edir və ona görə də rədd edilir. Kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti qəbul oblastına düşdükdə isə əsas hipotez qəbul edilir. Çünki, o seçmə məlumatlarla ziddiyyət təşkil etmir.
- Qeyd edək ki, yoxlanılan hər bir hipotez üçün uyğun kriteriyalar işlənilib hazırlanmışdır.
- Kriteriyanın qurulması üçün ən çox normal, Student, Fişer- Snedekor və Pirson statistikalarından istifadə edilir.
4. Əlamətin hissəsi haqqında hipotezlərlərin yoxlanılması.
- 4.1. Əlamətin hissəsinin standartla müqayisəsi.
- Tutaq ki, hər hansı əlamətin  $r$  hissəsinin baş yığımda müəyyən  $a$  kəmiyyətinə bərabər olması haqqında  $H_0: p = p_0$  əsas hipotezini yoxlamaq

lazımdır. Alternativ hipotezi  $H_1: p \neq p_0$  şəkilində qəbul edək. Əsas hipotezi yoxlamaq üçün baş yığımdan həcmi  $n$  olan seçmə götürək. Tutaq ki,  $n$  elementdən  $s_n$  saydası əlamətə malikdir. Onda əlamətin hissəsi  $\frac{s_n}{n}$  olar. Muavr-Laplasın

integral teoremnə görə  $\frac{s_n}{n}$  statistikasını  $\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$  parametrlili asimptotik normal

kəmiyyətdir. Onda  $\theta = \frac{\frac{s_n}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{s_n - np}{\sqrt{npq}}$  normallaşdırılmış statistikasını  $(0,1)$  parametrlili

asimptotik normal kəmiyyətdir.

Əsas hipotezi yoxlamaq üçün  $\theta = \frac{s_n - np}{\sqrt{npq}}$  statistikəsindən istifadə edək. Əsas

hipotezin doğruluğu şərtində  $\theta = \frac{s_n - p_0}{\sqrt{np_0q_0}}$  statistikasını  $(0,1)$  parametrlili asimptotik

normal kəmiyyətdir.

Böhran oblastı ikitərəflidir. Ona görə də, verilmiş  $\alpha$  əhəmiyyətlik səviyyəsi üçün Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən  $\Phi(\theta_{böh}) = \frac{1-\alpha}{2}$  münasibətindən böhran nöqtəsini tapırıq.

Beləliklə  $|\theta_{müş}| < \theta_{böh}$  olduqda  $H_0: p = p_0$  əsas hipotezi qəbul edilir,  $|\theta_{müş}| > \theta_{böh}$  olduqda isə o rədd edilir.

İndi isə fərz edək ki, alternativ hipotez  $H_1: r > a$  şəkilindədir. Bu halda böhran oblastı sağtərəflidir və böhran nöqtəsi

$$\Phi(\theta_{böh}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

şərtindən tapılır. Beləliklə  $\theta_{müş} < \theta_{böh}$  olduqda  $H_0$  hipotezi qəbul edilir,  $\theta_{müş} > \theta_{böh}$  olduqda isə rədd edilir.

Alternativ hipotez  $H_1: p < a$  şəkilində olduqda  $\Phi(z) = \frac{1-\alpha}{2}$  şərtindən  $z_\alpha = z_{sağ.böh}$  sağtərəfli böhran nöqtəsi tapılır və  $z_{sol.bü} = -z_{sağ.böh}$  qəbul edilir.

$\theta_{müş} > -\theta_{böh}$  olduqda əsas hipotezi rədd etməyə heç bir əsas yoxdur.  $\theta_{müş} < -\theta_{böh}$  olduqda isə əsas hipotez rədd edilir.

4.2. İki yığımda əlamətin hissələri haqqında hipotezin yoxlanılması.

Tutaq ki, birinci yığımdan həcmi  $n$ , ikinci yığımdan isə həcmi  $m$  olan seçmə alınmışdır və  $n$  elementdən  $s_n$ -i,  $m$  elementdən isə  $s_m$ -i əlamətə malikdir. Onda birinci yığımda əlamətin başvermə tezliyi  $\frac{s_n}{n}$ , ikinci yığımda isə

$$\frac{s_m}{m} \text{ olar.}$$

$H_0: p_1 = p_2 = p$ , başqa sözlə "hər iki yığıma əlamətinin hissəsi  $p$  olan eyni baş yığımdan seçmə kimi baxmaq olar." əsas hipotezini yoxlamaq tələb edilir.

Əsas hipotezi seçmə tezliklər arasındakı fərqlin təsadüfi seçmə mexanizmi ilə əlaqədar olduğunu qəbul edir. Ona görə də bu cür hipotezləri əlamətin hissələri haqqında və yaxud onlar arasındakı fərqlin əhəmiyyətliyi haqqında fərziyyələr də adlandırılır.

Əsas hipotezi yoxladıqda böyük və kiçik seçmələri fərqləndirmək lazımdır.

1. Böyük seçmələr. ( $n > 30$ )  $\frac{S_n}{n}$  və  $\frac{S_m}{m}$  statistikaları müvafiq olaraq  $\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$  və  $\left(p, \sqrt{\frac{pq}{m}}\right)$  parametrlili asimptotik normal paylanmaya malikdirlər.  $\theta = \frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m}$

statistikasının riyazi gözləməsini və dispersiyasını hesablayaq:

$$E\theta = E\left(\frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m}\right) = E\frac{S_n}{n} - E\frac{S_m}{m} = p - p = 0$$

$$D\theta = D\left(\frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m}\right) = D\frac{S_n}{n} + D\frac{S_m}{m} = pq\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) = \frac{pq(n+m)}{nm}$$

$$\theta = \frac{\left(\frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m}\right)\sqrt{nm}}{\sqrt{pq(n+m)}}$$

normallaşdırılmış statistikası əsas hipotezin doğruluğu şərtində, yəni  $p_1 = p_2 = p$  olduqda  $(0,1)$  parametrlili asimptotik normal kəmiyyətdir. Naməlum  $p$  erhimalının onun  $\tilde{p} = \frac{S_n + S_m}{n + m}$  qiymətləndirməsilə əvəz edək.

$H_0 : p_1 = p_2 = p$  əsas hipotezini yoxlamaq üçün

$$\theta = \frac{\left(\frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m}\right)\sqrt{nm}}{\sqrt{pq(n+m)}}$$

Beləliklə, kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti

$$\theta_{mü\tilde{s}} = \frac{\left(\frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m}\right)\sqrt{nm}}{\sqrt{\frac{S_n + S_m}{n + m} \left(1 - \frac{S_n + S_m}{n + m}\right)(n + m)}}$$

olar.

Böhran oblastı ikitərəflidir. Ona görə də, verilmiş  $\alpha$  əhəmiyyətlik səviyyəsi Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən  $\Phi(\theta_{böh}) = \frac{1-\alpha}{2}$  münasibətindən böhran nöqtəsini tapırıq.

Beləliklə  $|\theta_{mü\tilde{s}}| < \theta_{böh}$  olduqda  $H_0 : p_1 = p_2 = p$  əsas hipotezi qəbul edilir,  $|\theta_{mü\tilde{s}}| > \theta_{böh}$  olduqda isə o rədd edilir.

İndi isə fərz edək ki, alternativ hipotez  $H_1 : p_1 > p_2$  şəklindədir. Bu halda böhran oblastı sağtərəflidir və böhran nöqtəsi

$$\Phi(\theta_{böh}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

şərtindən tapılır. Beləliklə  $\theta_{mü\check{s}} < \theta_{böh}$  olduqda  $H_0 : p_1 = p_2 = p$  hipotezi qəbul edilir,  $\theta_{mü\check{s}} > \theta_{böh}$  olduqda isə rədd edilir.

Alternativ hipotez  $H_1 : p_1 < p_2$  şəklində olduqda  $\Phi(z) = \frac{1-\alpha}{2}$  şərtindən  $z_\alpha = z_{sağ.böh}$  sağtərəfli böhran nöqtəsi tapılır və  $z_{sol.bü} = -z_{sağ.böh}$  qəbul edilir.

$\theta_{mü\check{s}} > -\theta_{böh}$  olduqda əsas hipotezi rədd etməyə heç bir əsas yoxdur.  $\theta_{mü\check{s}} < -\theta_{böh}$  olduqda isə əsas hipotez rədd edilir.

2. Kiçik seçmələr ( $n < 30$ ). Aydındır ki, kiçik seçmələr üçün  $\theta = \frac{\left(\frac{s_n}{n} - \frac{s_m}{m}\right)\sqrt{nm}}{\sqrt{pq(n+m)}}$

statistikasının normal paylanmaya malik olduğunu qəbul etmək olmaz. Bu halda əsas hipotezi yoxlamaq üçün “xi-kvadrat” kriteriyasından istifadə edilir. Hər iki seçmənin eyni baş yığımdan götürüldüyünü qəbul edib,  $pn, (1-p)n, pm, (1-p)m$  nəzəri tezliklərini hesablayaq və p-ni onun  $\tilde{p} = \frac{s_n + s_m}{n + m}$  qiymətləndirməsi ilə əvəz edək. Onda

$$\chi^2 = \frac{(s_n - pn)^2}{pn} + \frac{(n - s_n - (1-p)n)^2}{(1-p)n} + \frac{(s_m - pm)^2}{pm} + \frac{(m - s_m - (1-p)m)^2}{(1-p)m} \text{ olar.}$$

Dörd nəzəri tezlik arasında üç asılı olmayan münasibət olduğuna görə onlardan biri sərbəstdir. Bu isə o deməkdir ki, «xi-kvadrat» paylanmasının sərbəstlik dərəcəsi vahidə bərabərdir.

$\chi^2$ -in ifadəsindən göründüyü kimi əsas hipotezin doğruluğu şərtində nəzəri və faktiki tezliklər arasındakı fərqi yalnız təsadüfi seçmə mexanizmi ilə bağlamaq olar. Verilmiş  $\alpha$  əhəmiyyətlik səviyyəsinə və  $k=1$  sərbəstlik dərəcəsinə görə “Xi-kvadrat” paylanmasının böhran nöqtələri cədvəlindən  $\chi_{\delta}^2$  böhran nöqtəsini tapırıq və kriteriyanın  $\chi_M^2$  qiymətini hesablayırıq.

$\chi_M^2 > \chi_{\delta}^2$  olduqda əsas hipotez rədd edilir,  $\chi_M^2 < \chi_{\delta}^2$  olduqda isə onun qəbulu haqqında qərar qəbul edirik.

5. Orta qiymətlər haqqında hipotezlərin yoxlanılması.

5.1. Seçmə ortanın hipotetik orta ilə müqayisəsi haqqında hipotezin yoxlanılması.

Tutaq ki,  $X$  baş yığımının orta qiymətinin müəyyən bir  $a$  ədədinə bərabər olması haqqında  $H_0 : EX = a$  əsas hipotezini yoxlamaq lazımdır. Əsas hipotezi yoxlamaq üçün kriteriya seçərkən böyük və kiçik seçmələri fərqləndirmək lazımdır.

1. Böyük seçmələr ( $n > 30$ ).

a) Baş yığımın dispersiyası məlumdur.

Hipotezi yoxlamaq məqsədilə  $X$  baş yığımından həcmi  $n$  olan seçmə götürək və  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  seçmə ortasını hesablayaq. Əsas hipotezi yoxlamaq üçün

$$Z = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{DX}$$

kriteriyasından istifadə edək. Aydındır ki,  $Z \in N(0,1)$  olar. Tutaq ki, alternativ hipotez  $H_1: EX \neq a$  şəklindədir. Bu halda böhran oblastı ikitərəflidir. Böhran nöqtələrini  $\Phi(z_{boh}) = \frac{1-\alpha}{2}$  şərtindən tapırıq

$|Z_{müş}| > z_{boh}$  olduqda əsas hipotez rədd edilir, əks halda isə onu rədd etməyə heç bir əsas yoxdur.

Alternativ hipotez  $H_1: EX > a$  şəklində olduqda sağtərəfli böhran nöqtəsi

$$\Phi(z_{boh}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

şərtindən tapılır.  $Z_{müş} > z_{boh}$  olduqda əsas hipotez  $\alpha$  əhəmiyyətlik səviyyəsi ilə rədd edilir.  $Z_{müş} < z_{boh}$  olduqda isə qəbul edilir. Bu isə o deməkdir əsas hipotez təjribi verilənlərlə uzlaşır, yəni seçmə ortanın ümumi ortadan kənarlaşması seçmənin təsadüfi xətalara nətiyyəsidir.

Tutaq ki, alternativ hipotez  $H_1: EX < a$  şəklindədir. Bu  $\Phi(z_{boh}) = \frac{1-2\alpha}{2}$  şərtindən sağtərəfli böhran nöqtəsi tapılır və onun əksi soltərəfli böhran nöqtəsi olaraq qəbul edilir.

$Z_{müş} > z_{sol,t}$  olduqda əsas hipotez qəbul edilir.  $Z_{müş} < z_{sol,t}$  olduqda isə o rədd edilir.

b) Baş yığımın dispersiyası naməlumdur.

$DX$  məlum olmadıqda əsas hipotezin yoxlanılmasında baxılan kriteriyadan istifadə etmək olmaz. Mərkəzi limit teoreminə əsasən seçmə orta asimptotik normal paylanmaya malikdir. Ona görə də böyük  $n$ -lər üçün ( $n > 30$  olduqda)  $DX$ -i onun yerindəyişməyən  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$  seçmə qiymətləndirilməsi ilə əvəz etmək olar. Bu halda kiçik seçmələr üçün

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - a)}{S}$$

statistikasından istifadə etmək daha məqsədə uyğundur.  $T$  statistikasını sərbəstlik dərəcəsi  $v = n-1$  olan Student paylanmasına malikdir. Kriteriya seçildikdən sonra əsas hipotez eyni ilə  $DX$  dispersiyası məlum olan hal kimi yoxlanılır.

5.2. Orta qiymətlərin müqayisəsi haqqında hipotezin yoxlanılması

5.2.1. Dispersiyalar məlum olan hal. Laplas kriteriyası.

Tutaq ki,  $X$  və  $Y$  baş yığımlardır və onların orta qiymətlərinin bərabərliyi haqqında  $H_0: EX = EY$  əsas hipotezini yoxlamaq lazımdır. Əvvəlcə fərz edək ki,  $DX$  və  $DY$  dispersiyaları məlumdur.  $X$  baş yığımından həcmi  $n_1$  olan  $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$  seçməsinə,  $Y$  yığımından isə həcmi  $n_2$  olan  $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$  seçməsinə götürək. Baş yığımların seçmə ortalarını və seçmə dispersiyalarını uyğun olaraq  $\bar{x}, s_x^2$  və  $\bar{y}, s_y^2$  kimi işarə edək.

Aydındır ki,  $E\bar{X} = EX$  və  $E\bar{Y} = EY$ . Seçmələr asılı olmadığına görə  $\bar{X}$  və  $\bar{Y}$  kəmiyyətləri də asılı deyillər. Deməli,

$$D(\bar{X} - \bar{Y}) = D\bar{X} + D\bar{Y} = \frac{DX}{n_1} + \frac{DY}{n_2}$$

olar.

Əsas hipotezi yoxlamaq üçün

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{D(\bar{X} - \bar{Y})}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{DX}{n_1} + \frac{DY}{n_2}}}$$

kriteriyasından istifadə edək. Bu kriteriyaya Laplas kriteriyası deyilir. Əsas hipotezin doğruluğu şərtində  $Z \in N(0;1)$  olar.

$Z$  normal təsadüfi təsadüfi kəmiyyət olduğu üçün onun paylanması sıfır nəzərən simmetrikdir. Onda böhran nöqtələri də sıfır nəzərən simmetrikdirlər.

Beləliklə, ikitərəfli böhran oblastını və kriteriyanın qəbul oblastını qurmaq üçün sağtərəfli böhran nöqtəsini tapmaq kifayətdir. Ehtimal nəzəriyyəsiindən məlumdur ki,

$$P(0 < Z < z) = \Phi(z)$$

$Z$ -in paylanması sıfır nəzərən simmetrik olduğu üçün onun  $(0, \infty)$  intervalına düşməsi hadisəsinin ehtimalı  $\frac{1}{2}$  olar. Onda ehtimalların toplanması qanununa görə

$$P(0 < Z < z_{b\bar{o}h}) + P(Z > z_{b\bar{o}h}) = \frac{1}{2}$$

Deməli ,

$$\Phi(z_{b\bar{o}h}) + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Beləliklə, } \Phi(z_{b\bar{o}h}) = \frac{1-\alpha}{2}$$

İkitərəfli böhran oblastı  $|Z| > z_{b\bar{o}h}$ , kriteriyanın qəbul oblastı isə  $|Z| < z_{b\bar{o}h}$  bərabərsizliyi ilə təyin edilir.

Beləliklə,  $X$  və  $Y$  baş yığımlarının  $DX$  və  $DY$  dispersiyaları məlum olduqda  $H_0: EX = EY$  hipotezini yoxlamaq üçün aşağıdakı qaydanı alırıq.

Qayda. Alternativ hipotez  $H_1: EX \neq EY$  olduqda,  $\alpha$  dəqiqlik səviyyəsinə görə Laplas funksiyası qiymətləri cədvəlindən

$$\Phi(Z_\delta) = \frac{1-\alpha}{2}$$

bərabərliyinə əsasən  $Z_\delta$  nöqtəsini tapırıq.  $|Z_M| < Z_\delta$  olduqda əsas hipotezi qəbul edirik.  $|Z_M| > Z_\delta$  olduqda isə əsas hipotezi rədd edilir.

Bu halda sağtərəfli böhran oblastı qurmaq üçün əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehtimalının əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər olması şərtindən istifadə edilir.

$$P(Z > z_{b\bar{o}h}) = \alpha$$

$$\text{Aydındır ki, } P(0 < Z < z_{b\bar{o}h}) + P(Z > z_{b\bar{o}h}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Buradan} \quad \Phi(z_{b\ddot{o}h}) + \alpha = \frac{1}{2}$$

və yaxud

$$\Phi(z_{b\ddot{o}h}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

Beləliklə, alternativ hipotez  $H_1: EX > EU$  olduqda böhran nöqtəsi  $\Phi(z_\delta) = \frac{1-2\alpha}{2}$  bərabərliyindən tapılır.

Alternativ hipotez  $H_1: EX < EU$  olduqda soltərəfli böhran oblastı qurulur. Soltərəfli böhran nöqtəsi  $P(Z > z_{b\ddot{o}h}) = \alpha$ ,  $z_{b\ddot{o}h} > 0$  şərtindən tapılan sağtərəfli böhran nöqtəsinə simmetrikdir.

Beləliklə, soltərəfli böhran nöqtəsini tapmaq üçün əvvəlcə  $\Phi(z_\delta) = \frac{1-2\alpha}{2}$  bərabərliyindən  $z_\delta$  tapılır və soltərəfli böhran nöqtəsi  $-z_\delta$  götürülür.

### 5.2.2. Dispersiyalar məlum olmayan hal. Student kriteriası

İndi isə  $X$  və  $U$  baş yığımlarının dispersiyaları məlum olmayan hala baxaq. Fərz edək ki,  $DX = DU = \sigma^2$

Əsas hipotezi yoxlamaq üçün

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1-1)S_x^2 + (n_2-1)S_y^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

kriteriyasından istifadə edək. Bu kriteriyanın paylanma qanunu aşağıdakı teorem vasitəsi ilə verilir.

**Teorem 1.** Tutaq ki,  $X$  baş yığımindan həcmi  $n_1$  olan  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ ,  $Y$  baş yığımindan isə həcmi  $n_2$  olan  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  təsadüfə seçimi alınmışdır. Fərz edək ki,

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i; \quad \bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i; \quad S_x^2 = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2; \quad S_y^2 = \frac{1}{n_2-1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2$$

$X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$

Onda

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{n_1 S_x^2 + n_2 S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi  $n_1 + n_2 - 2$  olan Student paylanmasına malikdir.

İsbatı.

$$M \frac{\bar{X} - a}{\sigma} = 0; \quad D \frac{\bar{X} - a}{\sigma} = 1$$

olduğu üçün nəticəsinə görə  $\frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma} \in N(0,1)$  olar. Eyni səbəbdən

$$\frac{(\bar{Y} - a)\sqrt{n}}{\sigma}$$

olar.

Məlum teoremə görə  $\frac{n_1 S_x^2}{\sigma^2}$  və  $\frac{n_2 S_y^2}{\sigma^2}$

kəmiyyətləri sərbəstlik dərəcələri uyğun olaraq  $n_1-1$  və  $n_2-1$  olan “Xi-kvadrat” paylanmaya malikdirlər. Seçimlər asılı olmadıqları üçün

$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma} \in N\left(0; \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$  və yaxud  $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} \in N(0,1)$  olar. Digər tərəfdən  $\frac{1}{\sigma^2}(n_1 S_x^2 + n_2 S_y^2)$  jəmi sərbəstlik dərəcəsi  $n_1+n_2-2$  olan  $\chi^2$ -paylanmaya malikdir və  $\bar{X}-\bar{Y}$ ,  $n_1 S_x^2 + n_2 S_y^2$  kəmiyyətləri asılı deyillər.

Beləliklə, Styudent paylanmasının tərifinə əsasən  $T$  kəmiyyətinin sərbəstlik dərəcəsi  $n_1+n_2-2$  olan Styudent paylanmasına malik olduğunu deyə bilərik.

Beləliklə  $\alpha$  dəqiqlik səviyyəsi ilə orta qiymətlərin bərabərliyi haqqında  $H_0: EX = EY$  əsas hipotezini yoxlamaq üçün aşağıdakı qaydanı alırıq.

Qayda 1. Dəqiqlik səviyyəsi  $\alpha$  verildikdə və alternativ hipotez  $H_1: EX \neq EY$  şəkilində olduqda  $H_0: EX = EY$  əsas hipotezini yoxlamaq üçün kriteriyanın  $T_m$  müşahidə edilən qiymətini ystablayırıq. İkitərəfli böhran oblastı əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehtimalının verilmiş əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər olması şərtindən tapılır. Bu halda sol və sağtərəfli böhran nöqtələri

$$P(T < t_{sol,t}) = \frac{\alpha}{2}, P(T > t_{sağ,t}) = \frac{\alpha}{2}$$

şərtlərindən tapıldıqda kriteriya daha güclü olur.

Styudent paylanması sıfır nəzərən simmetrik olduğu üçün sağtərəfli  $t_\alpha(k)$  böhran nöqtəsini tapmaq kifayətdir.

$|T_{mü}| < t_\alpha(k)$  olduqda əsas hipotezi rədd etməyə heç bir əsas yoxdur  $|T_{mü}| > t_\alpha(k)$  olduqda isə əsas hipotez rədd edilir.

Qayda 2. Alternativ hipotez  $H_1: EX > EU$  olduqda böhran oblastı əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehtimalının verilmiş əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər olması şərtindən tapılır:

$$P(T > t_{sağ,t}) = \alpha$$

tapılır.  $T_{mü} < t_{sağ,t}$  olduqda əsas hipotezi qəbul edirik,  $T_{mü} > t_{sağ,t}$  olduqda isə rədd edilir.

Qayda 3. Alternativ hipotez  $H_1: EX < EU$  olduqda əvvəlcə qayda 2-y əsasən  $t_{böh}$  tapılır və soltərəfli böhran nöqtəsi  $t'_{böh} = -t_{böh}$  kimi götürülür.  $T_{mü} > -t_{böh}$  olduqda əsas hipotezi rədd etməyə heç bir əsas yoxdur.  $T_{mü} < -t_{böh}$  olduqda isə hipotez rədd edilir.

Orta qiymətlərin bərabərliyi haqqında əsas hipotezi Styudent kriteriyasına əsasən yoxlayarkən əvvəlcə baş yığımların dispersiyalarının bərabərliyinə əmin olmaq lazımdır. Əgər dispersiyaların müqayisəsi zamanı onların əhəmiyyətli dərəcədə fərqləndiyi aşkar olarsa, onda Styudent kriteriyasının köməyi ilə orta qiymətləri müqayisə etmək olmaz. Belə ki, seçmələr dispersiyaları bərabər olan baş yığımlardan götürüldükdə Styudent paylanması ancaq sərbəstlik dərəcəsindən asılı olur. Dispersiyalar məlum olmadıqda bu paylanma sərbəstlik dərəcəsi ilə

yanışı naməlum  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  nisbətindən də asılıdır. Beləliklə nəticənin səhvi orta qiymətlərin və dispersiyaların müqayisəsi haqqında hipotezlərin səhvlərinin mürəkkəb kombinasiyasından ibarətdir. Bu cür hallarda orta qiymətlərin bərabərliyi haqqında  $H_0: EX = EY$  əsas hipotezini yoxlamaq üçün

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n_1} + \frac{S_y^2}{n_2}}}$$

kriteriyasından istifadə etmək məqsədəuyğundur. T-kriteriyası sərbəstlik dərəcəsi

$$K = \frac{\left(\frac{S_x^2}{n_1} + \frac{S_y^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_x^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{S_y^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

kimi təyin edilən Student paylanmasına malikdir. Qeyd edək ki, ixtiyari  $n_1$  və  $n_2$  üçün

$$\min(n_1 - 1; n_2 - 1) \leq k \leq n_1 + n_2 - 2$$

Əsas hipotezin yoxlanılması yuxarıdakına analogi olaraq aparılır.

#### 6. Asılı seçmələr haqqında hipotezlərin yoxlanılması

Statistik hipotezlərin yoxlanılmasında elə hallara rast gəlinir ki, bu zaman müqayisə edilən seçmələrə asılı olmayan seçmələr kimi baxmaq olmaz. Məsələn, ənənəvi və yeni yem payının mal-qaranın məhsuldarlığına təsiri eyni mal-qara qrupu üzərində yoxlanıla bilər, iki növ əmtəəyə tələbat eyni mağazada öyrənilə bilər, hər bir işçinin əmək məhsuldarlığı səviyyəsi yeni texnologiyanın tətbiqindən əvvəl və sonra müəyyən edilə bilər, ana inəklərin və qız inəklərin məhsuldarlığı müqayisə edilə bilər və s. Göstərilən bu misalların hər biri asılı seçmələrin müqayisəsi haqqında fərziyyələrin yoxlanılmasına aiddir. Təbii ki, asılı olmayan seçmələr üçün əvvəlki paraqraflarda öyrənilən metodlar bu halda tətbiq edilə bilməz. Çünki, həmin metodların tətbiqi seçmələrin asılı olmamazlıq şərtinə əsaslanır. Asılı seçmələr haqqında hipotezləri yoxlamaq üçün aşağıda göstərilən kriteriyadan istifadə etmək olar.

Hər bir müşahidə obyektini üçün iki  $x$  və  $y$  göstəricisini (məsələn, ənənəvi və yeni yem payına görə mal-qaranın məhsuldarlığını) qeyd edək. Müşahidənin nəticəsini

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$y: y_1, y_2, \dots, y_n$$

kimi işarə edək. Deməli  $(x_i; y_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  asılı cütlər ardıcılığıdır. Əgər öyrənilən amil ancaq  $x$  və ya  $y$  əlamətinə təsir edirsə, onda  $x_i$  və  $y_i$  arasında əhəmiyyətli fərq müşahidə ediləcəkdir. Bu fərqi təsadüfi kənarlaşmalar və ya öyrənilən amilin təsiri hesabına olmasını müəyyən etmək üçün kriteriyanı seçək.  $d_i = x_i - y_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  işarə edək. Onda cüt müşahidələr fərqi üçün ümumiləşdirici kəmiyyəti olaraq

$$d = \frac{\sum d_i}{n}$$

götürmək olar. Aydındır ki,  $d$  nə qədər kiçik olarsa müşahidələr fərqi üçün bir o qədər kiçik olması həqiqətə uyğun olar. Ona görə də əsas fərziyyəni,  $H_0: d=0$

alternativ fərziyyəni isə

$$H_1^{(1)}: d < 0; H_1^{(2)}: d < 0; H_1^{(3)}: d \neq 0$$

şəklində götürə bilərik. Əsas hipotezi yoxlamaq üçün

$$T = \frac{d\sqrt{n}}{s} \text{ statistikasından istifadə edək. Burada}$$

$$s^2 = \frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}$$

düzəldilmiş dispersiyadır.

Əgər baş yığım normal paylanmaya malikdirsə əsas hipotezin doğruluğu şərtində

$$T = \frac{d\sqrt{n}}{s}$$

statistikası sərbəstlik dərəcəsi  $k=n-1$  olan Styudent paylanmasına malikdir. Kriteriya təyin edildikdən sonra əsas hipotez əvvəlki paraqraflarda olduğu kimi yoxlanılır.

7. Dispersiyaların bərabərliyi haqqında hipotezin yoxlanılması. Fişer-Snedekor kriteriyası.

Təcrübədə dispersiyaların müqayisəsi haqqında hipotezlərin yoxlanılmasına tez-tez təsadüf edilir. Belə ki, ölçü cihazlarının keyfiyyəti öyrənilərkən onların dispersiyaları müqayisə edilir, yeni texnologiyanın tətbiqindən əvvəl və sonra istehsal prosesinin stabililiyi təhlil edilərkən məhsul istehsalındakı kənarlaşmalar orta kvadratik kənarlaşma ilə ölçülür. İki baş yığının hər hansı bir əlamətə görə (məsələn, iş stajına, ixtisas dərəcəsinə və s) birincinsliyi yoxlanılarkən də dispersiyalar müqayisə edilir. Baş yığımların orta qiymətləri haqqında fərziyyələr yoxlanılarkən onların əksər hallarda eyni dispersiyaya malik olduqları qəbul edilir və s.

Tutaq ki,  $X$  və  $Y$  normal paylanmış baş yığımlardır. Onların dispersiyalarının bərabərliyini yoxlayaq. Bu məqsədlə  $X$  baş yığımından həcmi  $n$  olan  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $Y$  baş yığımından isə həcmi  $m$  olan  $y_1, y_2, \dots, y_m$  seçməsinə götürək.

Əsas hipotezi  $H_0: DX = DY$ , alternativ hipotezi isə  $H_1: DX \neq DY$  şəklində götürək.

Əvvəlcə fərz edək ki,  $EX$  və  $EY$  orta qiymətləri məlum deyildir. Aydındır ki, əsas hipotezi uyğun

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

və

$$S_y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2$$

düzəldilmiş seçmə dispersiyalarının müqayisəsinə əsasən yoxlamaq olar. Belə ki, onların nisbəti vahidə yaxın olduqda dispersiyaların bərabərliyi haqqında əsas hipotezi rədd etməyə heç bir əsas yoxdur. Bu nisbətin vahiddən əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənməsi isə əsas hipotezi rədd edilməsinə zəmin yaradır.

Ona görə də seçmə dispersiyaların nisbətinin hansı qiymətində uyğun qərarın çıxarılmasının kifayət qədər əsaslı olmasını müəyyən etmək lazımdır. Əsas hipotezi yoxlamaq üçün

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2}, \text{ burada } \frac{S_x^2}{S_y^2} > 1$$

kriteriyasından istifadə edək.

Kriteriya olaraq qəbul edilmiş  $\frac{S_x^2}{S_y^2}$  təsadüfə kəmiyyətinin paylanması aşağıdakı teorem vasitəsilə müəyyən edilir.

Teorem 1.  $DX = DY = \sigma^2$  olduqda

$\frac{S_x^2}{S_y^2}$  - təsadüfə kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri  $n_1-1$  və  $n_2-1$  olan Fişer- Snedekor paylanmasına malikdir.

İsbatı:  $\frac{S_x^2}{S_y^2}$  nisbətini aşağıdakı kimi göstərək.

$$\begin{aligned} \frac{S_x^2}{S_y^2} &= \frac{(n_1-1)S_x^2}{(n_2-2)S_y^2} \cdot \frac{n_2-1}{n_1-1} = \left[ \frac{(n_1-1)S_x^2}{\sigma^2} \cdot \frac{(n_2-1)S_y^2}{\sigma^2} \right] \cdot \frac{n_2-1}{n_1-1} = \\ &= \frac{(n_1-1)S_x^2}{\sigma^2} : \frac{(n_2-1)S_y^2}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Məlumdur ki,  $\frac{(n_1-1)S_x^2}{\sigma^2}$  və  $\frac{(n_2-1)S_y^2}{\sigma^2}$  təsadüfə kəmiyyətləri sərbəstlik dərəcələri uyğun olaraq  $n_1-1$  və  $n_2-1$  olan  $\chi^2$  paylanmasına malikdirlər. Tərifə əsasən bu isə o deməkdir ki,  $\frac{S_x^2}{S_y^2}$  nisbəti sərbəstlik  $n_1-1$  və  $n_2-1$  olan Fişer- Snedekor paylanmasına malikdir.

Bu halda böhran oblastı  $F \succ F_{sağ.böh}$  və  $F \prec F_{sol.böh}$  şəklindədir, böhran nöqtələri isə

$$P(F \succ F_{sağ.böh}) = \frac{\alpha}{2}, P(F \prec F_{sol.böh}) = \frac{\alpha}{2}$$

şərtlərindən tapılır. Ancaq Fişer-Snedekor paylanmasının böhran nöqtələri cədvəlində soltərəfli böhran nöqtəsi verilməmişdir. Sağtərəfli böhran nöqtəsini  $P(F \succ F_{sağ.böh}) = \frac{\alpha}{2}$  şərtinə tapmaqla kriteriyanın ikitərəfli böhran oblastına düşməsinə əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər ehtimalla təmin etmək olar.

$F \succ F_{sağ.böh}$  və  $F \prec F_{sol.böh}$  hadisələri uyuşmayan hadisələr olduqları üçün kriteriyanın ikitərəfli böhran oblastına düşməsi ehtimalı  $\alpha$ -ya bərabər olar.

Beləliklə, böhran oblastı  $H_1: DX \neq DY$  şəklində olduqda  $F_{sağ.böh} = F\left(\frac{\alpha}{2}, n_1, n_2\right)$  böhran nöqtəsini tapmaq kifayətdir.

Yuxarıda deyilənlərə əsasən orta qiymətlər məlum olmadıqda dispersiyaların müqayisəsi üçün aşağıdakı qaydanı alırıq.

Qauda 1. Alternativ hipotez  $H_1: DX \neq DY$  kriteriyasının  $F_m$  müşahidə edilən qiymətini hesablayırıq. Fişer-Snedekor paylanmasının böhran nöqtələri

cədvəlinə verilmiş  $\frac{\alpha}{2}$  dəqiqlik səviyyəsinə və  $n_1, n_2$  sərbəstlik dərəcəsinə görə  $F_{\frac{\alpha}{2}}(\alpha; n_1; n_2)$  böhran nöqtəsini tapırıq.  $F_m < F_{\frac{\alpha}{2}}$  olduqda əsas hipotezi rədd etməyə əsas yoxdur.  $F_m > F_{\frac{\alpha}{2}}$  olduqda isə əsas hipotez rədd edilir.

Alternativ hipotez  $H_1: DX \succ DY$  şəklində olduqda sağtərəfli böhran oblastı əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın müşahidə edilən qiymətinin bu oblasta düşməsi hadisəsinin ehtimalının əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər olması şərtindən tapılır:

$$P(F \succ F_b(\alpha; n_1, n_2)) = \alpha$$

Qayda 2. Alternativ hipotez  $H_1: DX \succ DY$  olduqda verilmiş  $\alpha$  dəqiqlik səviyyəsinə və  $n_1, n_2$  sərbəstlik dərəcələrinə görə  $F_b(\alpha; n_1, n_2)$  böhran nöqtəsi tapılır.

$F_m < F_{\frac{\alpha}{2}}$  olduqda əsas hipotezi rədd etməyə əsas yoxdur.  $F_m > F_{\frac{\alpha}{2}}$  olduqda isə əsas hipotez rədd edilir.

8. Baş yığının paylanma funksiyasının növü haqqında hipotezin yoxlanılması. Pirson kriteriyası.

Empirik paylanma ilə nəzəri paylanmanın uzlaşması, başqa sözlə baş yığının paylanma funksiyasının növü haqqında hipotezin yoxlanılması mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Bu cür hipotezlərin yoxlanılması üçün müxtəlif uzlaşma kriteriyalarından məsələn, K. Pirsonun “Xi-kvadrat”, Kolmoqorov, Smirnov və s. kriteriyalarından istifadə edilir.

Uzlaşma kriteriyaları empirik paylanma ilə nəzəri paylanma arasındakı kənarlaşmanın əhəmiyyətli və yaxud əhəmiyyətsiz, yəni təsadüfün nəticəsi olub-olmadığını müəyyən etməyə imkan verir.

Əlamətin dəyişmə xarakteri haqqında ilkin nəzəri şərtlər baş yığım haqqında fərziyyənin irəli sürülməsi üçün əsas götürülə bilər. Bu şərtlərə mərkəzi limit teoreminə zəmin yaradan şərtlərin ödənilməsinə, Puasson paylanmasına gətirən şərtlərin ödənilməsinə və s. göstərmək olar.

Məsələn, Lyapunovun mərkəzi limit teoreminin şərtlərinə uyğun şərtlərin ödənilməsi baş yığının normal paylanması haqqında hipotezi irəli sürməyə əsas verir. Bir çox hallarda, empirik paylanmanın bəzi formal xassələri nəzəri paylanmanın növü haqqında hipotezi söyləməyə imkan verir. Məsələn, asimmetriya və eksess əmsallarının sıfıra bərabər olması baş yığının normal paylanması haqqında hipotezi söyləməyə əsas verir. Empirik paylanmanın seçmə ortasının və seçmə dispersiyasının bərabərliyi isə nəzəri paylanmanın Puasson qanununa tabe olduğunu söyləməyə əsas verir. Empirik paylanmanın poliqonuna və histogramına əsasən də nəzəri paylanma haqqında bəzi hallarda fikir söyləmək olur.

Məsələn,  $(x_i; n_i)$   $i=1, 2, \dots, n$  nöqtələrinin düzbucaqlı koordinat sistemində müəyyən düz xəttin yaxınlığında yerləşməsi baş yığının normal paylanması haqqında hipotezi irəli sürməyə əsas verir. İrəli sürülən təkliflər qəti olmadığına,

yəni fərziyyə xarakterli olduqlarına görə onlar uzlaşma kriteriyalarının köməyi ilə statistik yoxlanılmalıdır.

Tutaq ki,  $X$  baş yığımı  $F(x)$  paylanma funksiyasına malikdir. Əvvəlcə fərz edək ki,  $F(x)$  paylanma funksiyası tam müəyyəndir, yəni onun ifadəsi naməlum parametrlərdən asılı deyil və istənilən  $x$  üçün  $F(x)$  hesablanı bilər.  $X$  baş yığımından həcmi  $n$  olan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçməsinə götürək.  $H_0$ : " $X$  baş yığımı  $F(x)$  paylanma funksiyasına malikdir"  $F(x)$  hipotezini yoxlamaq üçün kriteriya seçək. Aydın ki,  $H_0$  əsas  $F(x)$  hipotezinin doğruluğu şərtində  $F_n(x)$  paylanma funksiyasına  $F(x)$  nəzəri paylanmasının anoloqu kimi baxmaq olar. Təsadüf meyllər nəticəsində bu iki paylanma funksiyası bir qayda olaraq bərabər olmayacaq. Bununla yanaşı, məlum Qlivenko teoreminə görə  $n$ -nin kifayət qədər böyük qiymətlərində  $F_n(x)$   $F(x)$ -ə ehtimala görə yığılacaqdır. Ona görə də əvvəlcə  $F_n(x)$  empirik paylanma funksiyasının  $F(x)$  nəzəri paylanma funksiyasından meylinin ölçüsü müəyyən edilməlidir. Axtarılan kriteriya bu ölçünün empirik paylanmanın xassələrinə əsaslanaraq seçilməlidir. Bu cür meyl ölçülərini müxtəlif şəkildə müəyyən etmək olar. Ancaq onların içərisində ən çox istifadə ediləni K. Pirson tərəfindən təklif edilmiş "xi- kvadrat" kriteriyası ilə bağlı olan meyl ölçüsüdür.

Tutaq ki,  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasının müəyyən  $F(x)$  funksiyası olması hipotezini  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçməsi vasitəsilə yoxlamaq lazımdır.  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlər çoxluğunu  $k$  sayda kəsişməyən  $S_1, \dots, S_k$  intervallarına ayraq. Bu kəmiyyətin  $S_1, \dots, S_k$  intervallarına düşmə ehtimalını  $F(x)$  nəzəri paylanma funksiyası vasitəsilə tapmaq olar:

$$p_i = P(X \in S_i), i = 1, 2, \dots, k$$

Fərz edək ki,  $p_i > 0$ ,  $n_i$  ilə  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçməsinin  $S_i$  intervalına düşən elementlərinin sayını işarə edək.  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ . Onda  $X$  kəmiyyətinin qiymətlərinin  $n$  sınaq nəticəsində  $S_i$  intervalına düşməsinin tezliyi  $\frac{n_i}{n}$  olar.

$$\sum_{i=1}^r n_i = n, \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{n} = 1$$

Beləliklə, seçmənin  $F_n(x)$  empirik paylanma funksiyasının  $S_i$  intervalında artımı  $\frac{n_i}{n}$ ,  $F(x)$  nəzəri paylanma funksiyasındakı isə  $p_i$  olar. Seçmənin  $F_n(x)$  paylanma funksiyasının  $F(x)$  nəzəri paylanma funksiyasından meylini xarakterizə edə ölçünü müəyyən edək. Ən kiçik kvadratlar üsuluna görə  $F(x)$  nəzəri paylanma funksiyasının seçmənin  $F_n(x)$  empirik paylanma funksiyasından meylinin ölçüsü olaraq, əmsalları az-çox ixtiyari qaydadan seçilə bilən

$$\sum_{i=1}^n c_i \left( \frac{n_i}{n} - p_i \right)^2$$

kəmiyyəti götürülə bilər.

K. Pirson isbat etmişdir ki,  $c_i = \frac{n}{p_i}$  götürüldükdə, alınan

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^k \frac{n}{p_i} \left( \frac{n_i}{n} - p_i \right)^2$$

meyl ölçüsü həddən artıq yaxşı xassələrə malikdir. Belə ki,  $\chi^2$  müşahidə edilən  $n_i$  tezlikləri və gözlənilən  $np_i$  tezlikləri ilə sadə şəkildə ifadə edilir. Aydındır ki, empirik və nəzəri tezliklər nə qədər yaxın olarlarsa,  $\chi^2$  kəmiyyəti bir o qədər kiçik olar və o, müəyyən dəqiqliklə empirik paylanmanın nəzəri paylanmadan meylinin ölçüsü olaraq qəbul edilə bilər.

K. Pirson isbat etmişdir ki,  $\chi^2$  kəmiyyətinin paylanma funksiyasının limit qiyməti “xi-kvadrat” paylanmasıdır.

Paylanmanın sərbəstlik dərəcəsi  $r-1-k$  ədədinə bərabərdir. Burada  $r$  qrupların sayı  $k$  isə paylanmanın parametrləri sayıdır.

Kriteriyanı qurmaq məqsədilə elə sabit  $\varepsilon > 0$  ədədi götürək ki, əsas hipotezin doğruluğu şərtində  $\chi^2 > \varepsilon$  hadisəsinin ehtimalı kifayət qədər kiçik olsun, yəni bu hadisə praktiki olaraq mümkün olmayan hadisə olsun. Bu isə o deməkdir ki, əsas hipotezin doğruluğu şərtində  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçməsi üçün  $\chi^2 > \varepsilon$  bərabərsizliyinin ödənilməsi praktiki olaraq mümkün deyildir. Buradan  $H_0$  əsas hipotezini yoxlamaq üçün K. Pirsonun aşağıdakı uzlaşma kriteriyası alınır:

Verilmiş  $\alpha$  əhəmiyyətlik səviyyəsinə və  $r-1-k$  sərbəstlik dərəcəsinə görə “xi-kvadrat” kriteriyasının böhran nöqtələri cədvəlindən  $\chi_0^2$  böhran nöqtəsini tapırıq.  $\chi_m^2 = 0$  olduqda nəzəri və empirik paylanma tam üst-üstə düşür.  $\chi_{m\alpha}^2 > \chi_0^2$  olduqda  $H_0$  əsas hipotez rədd edilir.  $\chi_m^2 < \chi_0^2$  olduqda isə əsas hipotez qəbul edilir.

$\chi^2$ -kriteriyasının tətbiqi zamanı aşağıdakı şərtlərə riayət edilməlidir:

1) təcrübü məlumatlar asılı olmamalıdır, yəni onlar təsadüfi seçmənin nəticələri olmalıdırlar;

2) seçmənin həcmi kifayət qədər böyük olmalıdır (praktiki olaraq  $n > 50$ );

3) hər bir intervalda ən azı 5 element olmalıdır.

Axırncı şərt ödənilmədikdə tezlikləri 5 - dən kiçik olan intervalları əvvəlcədən birləşdirmək lazımdır.

İndi isə  $\chi^2$  kriteriyasının köməyi ilə  $H_0$ : “Baş yığım normal paylanmaya malikdir” əsas fərziyyəsini yoxlayaq. Başqa sözlə,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçməsinə  $F(X)$  normal paylanma funksiyasına malik təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri kimi baxmaq olar.

Aşağıdakı iki hala baxaq:

1. Empirik paylanma bərabər addımlı intervallar ardıcılığı və onlara uyğun tezliklər şəklində verilmişdir.

Seçmənin bütün elementlərini öz daxilində saxlayan intervalı, eyni uzunluqlu  $r$  sayda kəsişməyən  $(x_i, x_{i+1})$  intervallarına bölək və  $i$ -ci intervaldakı elementlərin sayını  $n_i$  ilə işarə edək. Qruplaşdırma intervallarının orta nöqtələrini variant olaraq qəbul edək.

Əsas fərziyyənin doğruluğu şərtində i-ci intervala uyğun  $p_i$  ehtimalını hesablayaq. Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki,

$$p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - a}{\sigma}\right), i = 1, 2, \dots, r$$

Burada  $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$  Lanlas funksiyasıdır.  $a$  və  $\sigma$  parametrləri məlum

olduqda Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən  $p_i$  ehtimallarını tapa bilərik. Ancaq təcrübədə əksər hallarda  $a$  və  $\sigma$  parametrləri məlum olmur. Ona görə də onları seçmə orta və seçmə orta kvadratik meyl ilə əvəz edirlər. Bu xarakteristikaları hesablayarkən seçmənin elementi olraq qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsi götürülür:

$$z_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki,  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin  $x_i, x_{i+1}$  intervalına düşməsi ehtimalı təqribən onun uzunluğu ilə sıxlıq funksiyasının bu intervalın hər hansı nöqtəsindəki qiymətinin hasinə bərabərdir. Xüsusi halda

$$p_i = f(z_i)h$$

Məlumdur ki,  $f(x) = \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ . Burada  $\varphi(u)$  standart normal sıxlıqdır.

Onda  $f(z_i) = \varphi\left(\frac{z_i - a}{\sigma}\right)$ .  $a$ -nı  $\bar{z}$  ilə,  $\sigma$ -nı isə  $s_z$  əvəz etsək

$$np_i = \frac{nh}{s_z} \varphi(u_i), u_i = \frac{z_i - \bar{z}}{s_z}$$

Beləliklə,  $H_0$  əsas hipotezini yoxlamaq üçün aşağıdakı qaydanı alırıq. Tutaq ki, empirik paylanma qruplaşdırılmış seçmə şəklində verilmişdir:

|                 |              |                    |                  |
|-----------------|--------------|--------------------|------------------|
| Inter<br>vallar | $(x_0, x_1)$ | $(x_1, x_2) \dots$ | $(x_{r-1}, x_r)$ |
| Tezli<br>klər   | $n_1$        | $n_2 \dots$        | $n_r$            |

1.  $z_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$  qəbul edərək,  $\bar{z}$  seçmə ortasını və  $s_z$  seçmə orta kvadratik meylini hesabmaq lazımdır;

2.  $np_i = \frac{nh}{s_z} \varphi(u_i), u_i = \frac{z_i - \bar{z}}{s_z}$  nəzəri tezliklərini hesablayırıq.

3. Statistik qərar qəbul edirik. Bunun üçün kriteriyanın

$$\chi_M^2 = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

müşahidə edilən qiymətini hesablayırıq. Verilmiş  $\alpha$  dəqiqlik səviyyəsinə və  $k=r-3$  sərbəstlik dərəcəsinə görə ( $r$ - intervalların sayıdır)  $\chi^2$  paylanmasının böhran nöqtələri cədvəlindən  $\chi_{\delta}^2(\alpha; k)$  sağtərəfli böhran nöqtəsini tapırıq.  $\chi_M^2 > \chi_{\delta}^2(\alpha; k)$  olduqda baş yığımın normal paylanması haqqında əsas hipotez rədd edilir, əks halda isə onu rədd etməyə heç bir əsas yoxdur.

2. Empirik paylanma bərabər addımlı variantlar və onlara uyğun tezliklər şəklində verilmişdir:

|       |       |             |       |
|-------|-------|-------------|-------|
| $z_i$ | $Z_1$ | $z_2 \dots$ | $z_k$ |
| $n_i$ | $N_1$ | $n_2 \dots$ | $n_k$ |

1) bilavasitə (müşahidələrin sayı az olduqda) və yaxud şərti sıfır üsulu ilə  $\bar{x}$  seçmə ortasını,  $s_x$  orta kvadratik meylini hesablayırıq.

2) nəzəri tezlikləri hesablayırıq:

$$np_i = \frac{nh}{s_z} \varphi(u_i), \quad u_i = \frac{z_i - \bar{z}}{s_z}, \quad \varphi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

burada,  $h = z_{i+1} - z_i$  iki qonşu variant arasındakı fərkdir.

3) kriteriyanın

$$\chi_M^2 = \frac{\sum (n_i - np_i)^2}{np_i}$$

müşahidə edilən qiymətini hesablayırıq və  $\alpha$  dəqiqlik səviyyəsinə və  $k = s - 3$  sərbəstlik dərəcəsinə görə  $\chi^2$  paylanmasının böhran nöqtələri cədvəlindən sağtərəfli  $\chi_b^2(a; k)$  böhran nöqtəsini tapırıq;

4)  $\chi_M^2 < \chi_b^2$  olduqda baş yığımın normal paylanması haqqında hipotezi rədd etməyə əsas yoxdur. Başqa sözlə empirik və nəzəri tezliklər cüzi fərqlənirlər.  $\chi_M^2 > \chi_b^2$  olduqda əsas hipotezə rədd edilir. Başqa sözlə desək, nəzəri və empirik tezliklər əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənirlər.

12. Sağtərəfli böhran oblastı hansıdır?

1)  $\theta > z_{b\bar{o}h}, \quad z_{b\bar{o}h} > 0$  2)  $\theta < z_{b\bar{o}h}, \quad z_{b\bar{o}h} < 0$  3)  $\theta < z_1, \theta > z_2 \quad (z_2 > z_1)$  4)  $|\theta| > z_{b\bar{o}h}$  5)  $|\theta| < z_{b\bar{o}h}$

13. Soltərəfli böhran oblastı hansıdır?

1)  $\theta > z_{b\bar{o}h}, \quad z_{b\bar{o}h} > 0$  2)  $\theta < z_{b\bar{o}h}, \quad z_{b\bar{o}h} < 0$  3)  $\theta < z_1, \theta > z_2 \quad (z_2 > z_1)$  4)  $|\theta| > z_{b\bar{o}h}$  5)  $|\theta| < z_{b\bar{o}h}$

14. İkitərəfli böhran oblastı hansıdır?

1)  $\theta > z_{b\bar{o}h}, \quad z_{b\bar{o}h} > 0$  2)  $\theta < z_{b\bar{o}h}, \quad z_{b\bar{o}h} < 0$  3)  $\theta < z_1, \theta > z_2 \quad (z_2 > z_1)$  4)  $|\theta| > z_{b\bar{o}h}$  5)  $|\theta| < z_{b\bar{o}h}$

15. Sağtərəfli böhran nöqtəsi hansı şərtdən tapılır?

$$\Phi(Z_\delta) = \frac{1 - 2\alpha}{2}$$

16. Soltərəfli böhran nöqtəsi hansı şərtdən tapılır?

1)  $\Phi(Z_\delta) = \frac{1 - 2\alpha}{2}$  bərabərliyindən  $z_\delta$  tapılır və soltərəfli böhran nöqtəsi  $-z_\delta$  götürülür. 2)

17. İkitərəfli böhran nöqtəsi hansı şərtdən tapılır?

$$\Phi(z_{boh}) = \frac{1-\alpha}{2}$$

18. Aşağıdakı təkliflərdən neçəsi doğrudur?

1) Əsas hipotezin doğruluğu şərtində onun rədd edilməsi haqqında qərar qəbul edilsə, onda birinci növ səhv buraxılır. 2) Doğru olan hipotez rədd edilsə, onda birinci növ səhv buraxılır. 3) Alternativ hipotezin doğruluğu şərtində əsas hipotez qəbul edilsə, onda birinci növ səhv buraxılır. 4) Doğru olmayan hipotez qəbul edilsə, onda birinci növ səhv buraxılır. 5) Birinci növ səhvin buraxılma ehtimalına kriteriyanın gücü deyilir.

19. Aşağıdakı təkliflərdən neçəsi doğrudur?

1) Birinci növ səhvin buraxılma ehtimalına kriteriyanın gücü deyilir. 2) İkinci növ səhvin buraxılma ehtimalına kriteriyanın gücü deyilir. 3) Doğru olmayan hipotezin qəbul edilməsi ehtimalına kriteriyanın gücü deyilir. 4) Heç olmasa bir səhvin buraxılma ehtimalına kriteriyanın gücü deyilir. 5) Heç bir səhvin buraxılmaması ehtimalına kriteriyanın gücü deyilir.

20. Əlamətin hissəsinin standartla müqayisəsi haqqında hipotez hansı kriteriyanın köməyi ilə yoxlanılır?

$$1) \theta = \frac{s_n - np}{\sqrt{npq}} \quad 2) \theta = \frac{\left(\frac{s_n}{n} - \frac{s_m}{m}\right)\sqrt{nm}}{\sqrt{pq(n+m)}} \quad 3)$$

$$3) Z = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{DX}$$

21. İki yığımada əlamətin hissələrinin müqayisəsi haqqında hipotez hansı kriteriyanın köməyi ilə yoxlanılır?

$$1) \theta = \frac{\left(\frac{s_n}{n} - \frac{s_m}{m}\right)\sqrt{nm}}{\sqrt{pq(n+m)}}$$

22. Baş yığımın dispersiyası məlum olduqda orta qiymətin standartla müqayisəsi ( haqqında hipotez hansı kriteriyanın köməyi ilə yoxlanılır?

$$1) Z = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{DX}$$

23. Baş yığımın dispersiyası məlum olmadıqda orta qiymətin standartla müqayisəsi ( haqqında hipotez hansı kriteriyanın köməyi ilə yoxlanılır?

$$1) T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - a)}{S}$$

24. Baş yığımın dispersiyası məlum Baş yığımın dispersiyası məlum olduqda iki orta qiymətin müqayisəsi haqqında hipotez hansı kriteriyanın köməyi ilə yoxlanılır? 1)

25. Baş yığımın dispersiyası məlum olmadıqda iki orta qiymətin müqayisəsi haqqında hipotez hansı kriteriyanın köməyi ilə yoxlanılır?

$$1) T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{n_1 S_x^2 + n_2 S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

26. Dispersiyaların müqayisəsi haqqında hipotez hansı krineriyanın köməyi ilə yoxlanılır?

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2}, \frac{S_x^2}{S_y^2} > 1 \quad 2) \quad F = \frac{S_x^2}{S_y^2}, \frac{S_x^2}{S_y^2} < 1$$

27. Asılı seçimlərin müqayisəsi müqayisəsi haqqında hipotez hansı krineriyanın köməyi ilə yoxlanılır?

$$T = \frac{d\sqrt{n}}{s}$$

28. Baş yığımın normal paylanmaya malik olması müqayisəsi haqqında hipotez hansı krineriyanın köməyi ilə yoxlanılır?

$$1) \chi_M^2 = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

## MÖVZU 10. STATİSTİKANIN PREDMETİ VƏ METODU

### PLAN:

1. Statistika haqqında ümumi anlayış
2. Statistikanın predmeti
3. Statistikanın metodologiyası
4. Bazar iqtisadiyyatına keçid şəraitində statistikanın vəzifələri

### Ə D Ə B İ Y Y T S İ Y A H I S I .

- 1.Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, "Maarif nəşriyyatı", 1973.
2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çarşıoğlu, 2006.

#### 1. STATİSTİKA HAQQINDA ÜMUMİ ANLAYIŞ

**Statistika** termini latın sözü olan «status» - dan əmələ gəlmişdir ki, hərfi tərcüməsi hadisələrin vəziyyəti deməkdir. Bu sözün kökündən «*stato*» (dövlət), «*statista*» (statistik - dövlət işlərinin bilicisi) və «*statistica*» (statistika – dövlət haqqında müəyyən biliklərin, məlumatların cəmi) sözləri yaranmışdır. Bu termindən ilk dəfə alman alimi, fəlsəfə və hüquq professoru Qotfrid Axenval (1719-1772) istifadə etmişdir. O, 1746-cı ildən əvvəlcə Marburq, sonra isə Qettingen universitetlərində statistika adlandırıdığı yeni fənni tədris etməyə başlamışdır. Statistikada alman təsviri məktəbinin əsasını qoyan Q. Axenvalın statistika haqqında baxışları müasir baxışlardan əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənir. O, yeni tədris olunan fənnin məzmununu *dövlətlərin siyasi vəziyyətinin və diqqətəlayiq yerlərin təsvir edilməsi hesab edirdi*.

İngilis siyasi arifmetika məktəbinin yaradıcıları olan Con Braunt (1620-1674) və Vilyam Pettinin (1623-1687) elmi baxışları statistika haqqında müasir

baxışlara daha yaxın olmuşdur. Təsadüfi deyil ki, K.Marks *V.Pettini siyasi iqtisadın atası və statistikanın yaradıcısı* adlandırmışdır.

Statistikanın sonrakı inkişafı Belçika statistiki A.Ketlenin (1796-1874) adı ilə bağlıdır. Statistik göstəricilərin sabitliyi nəzəriyyəsinin işlənməsində onun xüsusi xidmətini qeyd etmək lazımdır.

Statistikanın inkişafında riyazi istiqamətin nümayəndələri olan F.Qalton (1822-1911), K.Pirson (1857-1936), V.Qosset (1876-1936), R.Fişer (1890-1962), M.Mitçel (1874-1948) və s. kimi alimlərin xüsusi xidmətləri olmuşdur. Belə ki, K.Pirson hadisələr arasındakı qarşılıqlı əlaqələrin miqdarca qiymətləndirilməsi nəzəriyyəsinin işlənməsində böyük xidmətə malikdir. Kiçik seçmə nəzəriyyəsi V.Qossetə (Styudent ləqəbi ilə yazmışdır) məxsusdur. R.Fişer miqdar təhlili metodlarını inkişaf etdirmişdir. Dispersiya təhlili metodu onun adı ilə bağlıdır. M.Mitçel isə «iqtisadi barometr» ideyasını irəli sürmüşdür.

Bu istiqamətin nümayəndələri tam haqlı olaraq statistikanın əsasını ehtimal nəzəriyyəsi hesab edirlər.

Hazırda statistika termini üç mənada işlədilir. *İlk növbədə statistika dedikdə* adamların xüsusi praktiki fəaliyyət sahəsi başa düşülür. Hansı ki, bu fəaliyyət sosial-iqtisadi inkişaf səviyyəsini əks etdirən məlumatların toplanması, işlənməsi və təhlilinə istiqamətlənmişdir. *İkincisi*, statistika təcrübəsində istifadə olunan nəzəri fikirlərin və metodların işlənməsi ilə məşğul olan elm sahəsi statistika adlandırılır. *Nəhayət*, bəzən müxtəlif hesabatlarda əks etdirilən, dövrü mətbuatda və külliyyatlarda dərc edilən statistik məlumatlar da statistika adlandırılır.

Statistika elmi ilə statistika təcrübəsi arasında sıx əlaqə mövcuddur. İstənilən statistik iş elmi cəhətdən təşkil olunmalıdır. Bunsuz düzgün nəticələr əldə etmək olmaz. Ona görə də statistika təcrübəsi elmə əsaslanmalıdır. Eyni zamanda statistika elmi özü də təcrübəyə əsaslanır, praktiki iş təcrübəsini ümumiləşdirir və aparılmış ümumiləşdirmələr əsasında yeni ideyalar irəli sürür. Öz növbəsində statistika elminin yeni nəzəri nəticələrinin təcrübədə tətbiqi onun inkişafına təkan verir.

## 2. STATİSTİKANIN PREDMETİ

Hər bir elm onu digər elmlərdən fərqləndirən özünəməxsus fərqli xüsusiyyətlərə malik olur. Elmin başlıca xüsusiyyəti onun predmetində ifadə olunur.

***Statistikanın predmetini*** kütləvi sosial-iqtisadi həyat hadisələri təşkil edir. O, müəyyən məkan və zaman şəraitində bu hadisələrin kəmiyyət tərəfini onların keyfiyyət məzmunundan ayırmaz surətdə öyrənir. Cəmiyyətin sosial-iqtisadi həyatı müxtəlif növ kütləvi hadisələrdə görünür (məsələn, müxtəlif növ məhsul istehsalı və istehlakı, məhsul ixracı, yük və sərnişin daşınması və digər iqtisadi, mədəni və siyasi həyat hadisələri). Statistika eyni zamanda təbii resursları və təbii şəraiti də öyrənir. Çünki onlar cəmiyyət həyatına əhəmiyyətli təsir göstərir. *Cəmiyyət həyatında baş verən hadisə və proseslər statistika tərəfindən statistik göstəricilər vasitəsilə öyrənilir.*

***Statistik göstərici*** – öyrənilən hadisənin xassəsinin (xüsusiyyətinin) kəmiyyətə qiymətləndirilməsidir. Statistika statistik göstəricilərin köməyi ilə öyrənilən hadisələrin həcmi, onların xüsusiyyətlərini, inkişafın qanunauyğunluqlarını və qarşılıqlı əlaqəsini xarakterizə edir. Bu nöqtəyi-nəzərdən statistik göstəricilər iki əsas növə ayrılır: uçot - qiymətləndirmə göstəriciləri və analitik göstəricilər.

***Uçot – qiymətləndirmə göstəriciləri*** öyrənilən hadisənin həcmi və ya səviyyəsini əks etdirir. Öyrənilən hadisənin spesifik xüsusiyyətlərindən asılı olaraq uçot – qiymətləndirmə göstəriciləri ya onların müəyyən məkanda yayılma həcmi, ya da müəyyən momentdə (anda) əldə olunmuş inkişaf səviyyəsini əks etdirir.

***Analitik göstəricilər*** statistik informasiyanın təhlili üçün tətbiq edilir və öyrənilən hadisənin inkişaf xüsusiyyətlərini (əlamətin tipikliyi, onun ayrı-ayrı hissələrinin nisbətini, müəyyən məkanda yayılma dərəcəsini, zamanca inkişaf sürətini və s.) xarakterizə edir. Statistikada analitik göstəricilər kimi nisbi və orta kəmiyyətlər, variasiya, dinamika, əlaqə sıxlığı və başqa göstəricilər tətbiq edilir.

Statistika elminin göstərici ilə sıx bağlı olan mühüm kateqoriyalarından biri **əlamət** anlayışdır. Statistikada əlamət dedikdə öyrənilən hadisəyə xas olan və onu digər hadisələrdən fərqləndirən xassə (xüsusiyyət) başa düşülür. Bəzən statistik göstərici və öyrənilən hadisənin əlaməti anlayışları eyniləşdirilir. Nəzərə almaq lazımdır ki, statistik göstəricidə öyrənilən hadisənin keyfiyyət və kəmiyyət tərəfləri birlikdə ifadə edilmiş olur. Öyrənilən əlamət isə hadisənin yalnız keyfiyyət xüsusiyyətini əks etdirir. Statistik tədqiqat zamanı öyrənilən keyfiyyət əlaməti kəmiyyət qiyməti alır və statistik göstərici olur.

Statistikanın öyrəndiyi əlamətlər ya məna anlayışları ilə, ya da ədədi qiymətlərlə ifadə oluna bilirlər. Məna anlayışları ilə ifadə olunan əlamətləri **atributiv** adlandırmaq qəbul edilmişdir. Məsələn, aşağıdakılar atributiv əlamətlərdir: insanın cinsi – kişi, qadın; təhsil pillələri – bakalavr, magistratura, doktorantura. Atribut fəlsəfə termini olub obyektin ayrılmaz mühüm xassəsini bildirir. Əgər atributiv əlamət bir-birinin əksi olan iki qiymətdən yalnız birini qəbul edə bilərsə, ona **alternativ əlamət** deyilir.

Ədədi qiymətlərlə ifadə olunmuş əlamətlər **kəmiyyət əlamətləri** adlanır. Məsələn, insanın yaşı, neft hasilatı, taxıl istehsalı və s.

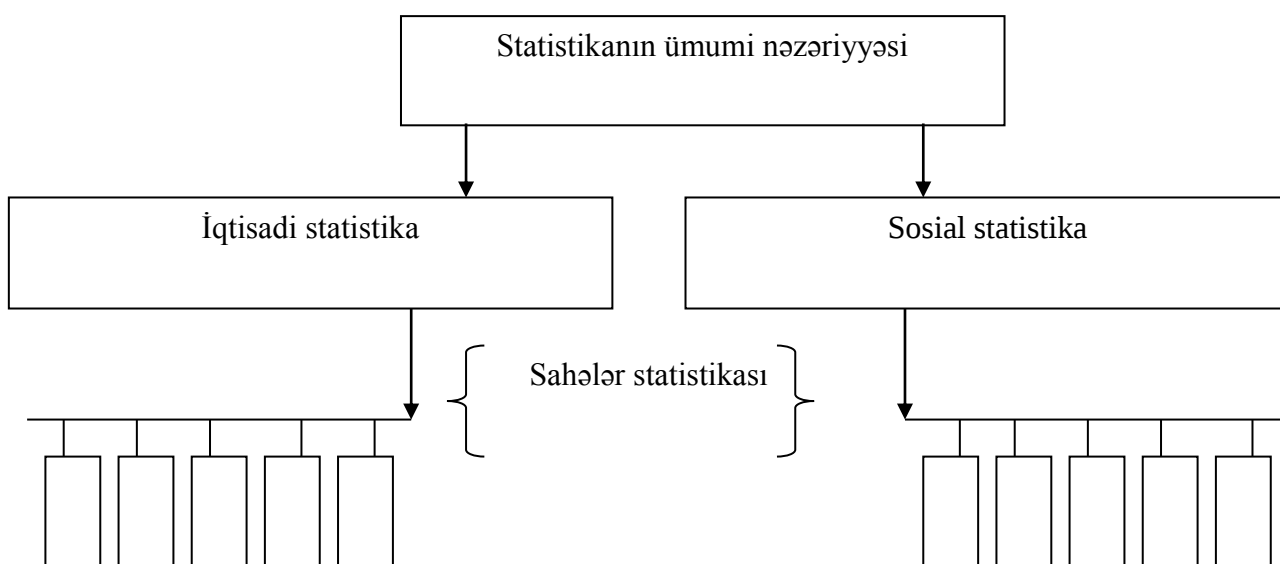
Öyrənilən hadisənin ayrı-ayrı vahidlərində müxtəlif qiymətlər alan əlamətlər **variasiya edən** adlandırılır. Məsələn, müəssisədə işçilərin aldığı əmək haqqı – variasiya edən əlamətdir. Belə ki, onun qiyməti ayrı-ayrı işçilər üzrə fərqlənir. Variasiya edən əlamətinin öyrənilən hadisənin ayrı-ayrı vahidlərində aldığı qiymət **variant** adlanır.

Konkret statistik tədqiqatda əlamətlər **əsas (mühüm)** və **ikinci dərəcəli (qeyri-mühüm)** əlamətlərə ayrıla bilər. Öyrənilən hadisələri bilavasitə xarakterizə edən, onların mühüm xüsusiyyətlərini əks etdirən əlamətlərə **əsas əlamətlər** deyilir. Öyrənilən hadisələrin daxili məzmunu ilə bağlı olmayan əlamətlərə isə **ikinci dərəcəli əlamətlər** deyilir.

Statistika elminin mühüm xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, öz predmetini öyrənərkən o statistik məcmu (toplu və ya yığım) yaradır. **Statistik məcmu** dedikdə, öyrənilən hadisənin, tədqiqatın vəzifələrinə müvafiq olaraq keyfiyyətə

eyni olan vahidlər çoxluğu başa düşülür. Statistik məcmunun tərkibi sabit olur. O, statistika tərəfindən konkret tədqiqatın məqsədlərinə müvafiq olaraq yaradılır.

Statistika elminin tarixi inkişafı gedişində onun tərkibində bir sıra müstəqil statistik fənlər meydana gəlmişdir. Bu konkret tədqiqat predmetinin və onun xarakteristikası üçün xüsusi statistik göstəricilər sisteminin mövcud olması ilə izah edilir. Statistika elminin quruluşu 1-ci şəkildə əks etdirilmişdir.



1-ci şəkl. *Statistika elminin quruluşu*

Beləliklə, statistika elmində aşağıdakı hissələr ayrılır: statistikanın ümumi nəzəriyyəsi, iqtisadi statistika və onun sahələri, sosial statistika və onun sahələri.

**Statistikanın ümumi nəzəriyyəsi** ictimai hadisələrin statistik tədqiqinin prinsiplərini və metodlarını, statistikanın ən ümumi kateqoriyalarını (göstəricilərini) öyrənir.

**İqtisadi statistikanın** vəzifəsi milli iqtisadiyyatın vəziyyətini, sahələrin qarşılıqlı əlaqəsini, istehsal qüvvələrinin yerləşmə xüsusiyyətlərini, material, əmək, və maliyyə resurslarının mövcudluğunu, onlardan istifadənin əldə olunmuş səviyyəsini əks etdirən sintetik göstəriciləri işləyib hazırlamaq və təhlil etməkdən ibarətdir. İqtisadi statistikanın sahələrinə daxildir: sənaye, kənd təsərrüfatı, tikinti, nəqliyyat, rabitə, əmək, təbii resurslar, ətraf mühitin mühafizəsi statistikasına və i.a.

onların vəzifəsi müvafiq sahələrin inkişaf göstəriciləri sisteminin işlənməsi və təhlilidir.

İri sahələr statistikasına daha xırda sahələr statistikasına ayrılır: məsələn, sənaye statistikasına-maşınqayırma, metallurgiya, kimya statistikasına və s; kənd təsərrüfatı statistikasına-bitkiçilik və heyvandarlıq statistikasına və i.a.

**Sosial statistika** əhalinin həyat tərzinin və sosial münasibətlərin müxtəlif baxışlarının xarakteristikası üçün göstəricilər sistemi hazırlayır. Onun sahələri-əhali, siyasət, mədəniyyət, səhiyyə, elm, maarif, hüquq və s. statistikasındır.

**Sahələr statistikasına** iqtisadi və ya sosial statistikanın göstəricilərinin bazasında təşkil olunur. Onlar isə öz növbəsində statistikanın ümumi nəzəriyyəsində işlənmiş kateqoriyalara (göstəricilərə) və metodlara əsaslanır.

### 3. STATİSTİKANIN METODOLOGİYASI

Statistika öz predmetini öyrənmək üçün müxtəlif metodları işləyib hazırlayır və tətbiq edir. Bu metodlar məcmusu statistik metodologiyanı təşkil edir. Statistik tədqiqatda konkret metodun tətbiqi qarşıya qoyulan vəzifədən və ilkin informasiyanın xarakterindən asılı olaraq müəyyən edilir.

Statistik metodologiyanın işlənməsinin və tətbiqinin ümumi əsasını ictimai həyat hadisələrinin öyrənilməsinə dialektik yanaşma prinsipi təşkil edir. Bu prinsipin əsas tələbi hadisə və proseslərə tam halında, qarşılıqlı əlaqə və asılılıqda, dəyişmə və inkişafda baxmaqdan ibarətdir.

Sosial-iqtisadi hadisələrin statistik öyrənilməsi zamanı materialist dialektikanın kəmiyyət dəyişikliklərinin keyfiyyət dəyişikliklərinə keçməsi haqqında müddəası rəhbər tutulur. Bu kütləvi sosial-iqtisadi hadisələrin kəmiyyət dəyişikliklərinin öyrənilməsi zamanı dərin keyfiyyət dəyişikliklərinin dərk edilməsi üçün mühüm əhəmiyyətə malikdir.

*İdrakın dialektik metodu iqtisadi nəzəriyyə ilə birlikdə statistikanın nəzəri əsasını təşkil edir.*

Statistika nəzəri bazaya əsaslanaraq hadisələrin rəqəmlərlə əks etdirilməsinin spesifik metodlarını tətbiq edir. Bu isə öz ifadəsini statistik tədqiqatın aşağıdakı üç mərhələsində tapır.

1. **Elmi surətdə təşkil olunmuş kütləvi müşahidə.** Onun köməyi ilə öyrənilən hadisənin ayrı-ayrı vahidləri (faktlar) haqqında ilkin informasiya alınır.

2. **Statistik materialın qruplaşdırılması və yekunlaşdırılması.** Bu halda öyrənilən hadisə vahidlərinin eyninövlü qrup və yarımqruplara ayrılması, hər bir qrup və yarımqrup üzrə yekunların hesablanması və alınmış nəticələrin statistika cədvəlində əks etdirilməsi nəzərdə tutulur.

3. Yekunlaşdırma zamanı alınmış statistik göstəricilərin işlənməsi və öyrənilən hadisənin vəziyyəti və onun inkişafının qanunauyğunluqları haqqında əsaslandırılmış nəticələr alınması üçün **təhlil aparılması.** Nəticələr bir qayda olaraq mətn şəklində şərh olunur və qrafik və cədvəllərlə müşayiət olunur.

Məlumatların işlənməsi zamanı ayrı-ayrı eyninövlü qrupların (yarımqrupların) xüsusiyyətlərini, onlar arasındakı qarşılıqlı əlaqə və asılılıqları əks etdirən analitik göstəricilər hesablanır. Onlar orta və nisbi kəmiyyətlər, variasiya göstəriciləri və indekslər şəklində müəyyən edirlər. Tədqiqatın bu mərhələsi üçün statistik metodların bütün arsenalının tətbiqi xarakterikdir.

Beləliklə, spesifik statistik metod analiz və sintezin birləşdirilməsinə əsaslanır. Əvvəlcə öyrənilən hadisənin tərkibində hissələr (qrup və yarımqruplar) ayrılır və ayrıca öyrənilir, əlamətin kəmiyyətində müşahidə edilən fərqlərin mühüm olub-olmaması qiymətləndirilir, fərqlərin səbəbləri aşkar edilir. Sonra isə hadisənin bütün tərəfləri, meylləri və inkişaf formaları məcmusuna bütövlükdə xarakteristika verilir.

Statistik tədqiqatın mərhələləri bir-biri ilə sıx bağlıdır. Onların birində yol verilən nöqsan bütövlükdə bütün tədqiqata təsir göstərir. Ona görə də statistika elminin qaydalarına ciddi riayət olunması statistik tədqiqatın bütün mərhələlərində vacibdir.

Statistik metoddan danışarkən onun riyaziyyatla əlaqəsini xüsusi qeyd etmək lazımdır. Bu əlaqə onunla izah olunur ki, miqdar nisbətlərinin ölçülməsi və təhlili

üçün riyazi üsul və metodların tətbiqi lazımdır. Statistika öz işində uzun müddət riyaziyyatın sadə üsullarından (hesab qaydaları, cəbri ifadələr və s.) istifadə etmişdir. Lakin kütləvi təsadüfi proseslərin öyrənilməsi xüsusi riyazi fənlərdən-ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikadan istifadə edilməsinə ehtiyac doğurdu.

**Ehtimal nəzəriyyəsi** təsadüfi proseslərin tədqiqi ilə məşğul olur. Onun teorem və qanunlarından statistika geniş istifadə edir. İctimai hadisələrin inkişafının meyl və qanunauyğunluqlarının öyrənilməsində statistika böyük ədədlər qanununa əsaslanır. Bu qanun təsadüfilik və zəruriliyin dialektikasını ifadə edir. Bunun mahiyyəti aşağıdakı kimidir: kifayət qədər böyük saylı hallar (statistik məcmu vahidləri) üzrə məlumatları cəmlədikdə öyrənilən hallar toplusunun ayrı-ayrı vahidlərinin fərqi qarşılıqlı ödənilir və ümumi orta kəmiyyətlərdə hadisənin mühüm xarakterik cizgiləri və qarşılıqlı əlaqələri bütövlükdə ifadə olunur. Yəni çoxsaylı təsadüfi amillərin birgə təsiri, təsadüfdən demək olar ki, asılı olmayan nəticəyə gətirir.

Deməli, **böyük ədədlər qanununun əsas məzmunu** bütövlükdə bütün məcmu üçün xarakterik olan müəyyən səviyyədə fərdi meyllərin qarşılıqlı ödənməsindən ibarətdir. Elə bu qarşılıqlı ödənmələrin nəticəsində qanunauyğunluq meydana çıxır. Ona görə də statistik tədqiqatın əsasında həmişə faktların kütləvi müşahidəsi durur. Müşahidə vahidlərinin həcmi nə qədər böyükdürsə, müşahidə edilən orta kəmiyyətlər öyrənilən hadisənin qanunauyğunluğunu bir o qədər dəqiq ifadə edir. Statistika təcrübəsində mühüm əhəmiyyətə malik olan müşahidənin seçmə metodunun tətbiqi buna əsaslanır.

Statistikada **riyazi statistikanın metodları**-variasiya sıralarının təhlili, korrelyasiya və reqressiya təhlili geniş tətbiq edilir. Son vaxtlar ali riyaziyyatın digər üsullarından da (optimal proqramlaşdırma metodları, sürətlərin tanınması metodları və s.) istifadə edilir.

Müasir şəraitdə hesablama texnikasının geniş tətbiqi ilə əlaqədar olaraq riyaziyyatın statistikanın inkişafında əhəmiyyəti kəskin sürətdə artmışdır. Lakin nəzərə almaq lazımdır ki, mürəkkəb riyazi aparatdan istifadə edilməsi statistikanı riyaziyyata çevirməməlidir. Sosial-iqtisadi həyat hadisələrini onların konkret

özünəməxsusluğu ilə öyrənən statistika üçün riyaziyyat yalnız tədqiqat aləti əhəmiyyətinə malikdir.

#### **4. BAZAR İQTİSADİYYATINA KEÇİD ŞƏRAİTİNDƏ STATİSTİKANIN VƏZİFƏLƏRİ**

Bazar iqtisadiyyatına keçid şəraitində köklü iqtisadi islahatların həyata keçirilməsinin əsasını inzibati-komanda idarəetmə formasından iqtisadi idarəetməyə keçilməsi təşkil edir. Bu xalq təsərrüfatını idarəetmə sisteminin tərkib hissəsi kimi statistika qarşısında yeni vəzifələr qoyur.

*Statistikanın* inkişafının yeni mərhələsində onun *əsas vəzifələri* aşağıdakılardan ibarətdir:

- 1) elmi surətdə əsaslandırılmış göstəricilər sistemi əsasında cəmiyyətdə baş verən iqtisadi və sosial proseslərdəki dərin dəyişikliklərin hərtərəfli tədqiqi;
- 2) xalq təsərrüfatının inkişaf meyllərinin ümumiləşdirilməsi və proqnozlaşdırılması;
- 3) ictimai istehsalın səmərəliliyinin mövcud ehtiyatlarının aşkar edilməsi;
- 4) qanunverici hakimiyyətin, idarəetmə, icra və təsərrüfat orqanlarının, həmçinin geniş ictimaiyyətin vaxtlı-vaxtında geniş informasiya ilə təmin edilməsi.

Statistikanın ictimai fikrin formalaşmasının amili kimi ictimai-siyasi rolunun dəyişildiyi şəraitdə, aşkarlığın genişlənməsi və ümumi statistik informasiyanın əldə edilməsinin mümkün olması xüsusi əhəmiyyətə malikdir. Lakin bu zaman fərdi məlumatların məxfi saxlanması prinsipi gözlənilməlidir. Bu cəmiyyətin demokratikləşdirilməsinin ən vacib elementlərindən biridir. Statistik informasiyanın nəşrinin genişləndirilməsi yerlərdə, ayrı-ayrı regionlarda işlərin vəziyyətini daha yaxşı görməyə, diqqəti yol verilmiş nöqsan və çatışmazlıqlara və onların aradan qaldırılmasına yönəltməyə imkan verir.

Statistikanın artan ictimai-siyasi əhəmiyyəti onun inkişafının başlıca istiqamətlərini müəyyən edir: statistik informasiyanın təhlilinin təkmilləşdirilməsi, hesabatların qaydaya salınması, onların etibarlılığının təmin edilməsi.

Statistik informasiyanın etibarlılığının yüksəldilməsinin başlıca vasitəsi onun yaradılma metodologiyasının daha da təkmilləşdirilməsidir. Qarşıda sosial və iqtisadi inkişaf nəticələrinin şişirdilməsinə imkan verən mövcud metodikaya yenidən baxılması durur.

Statistik hesabatların həcmnin əhəmiyyətli dərəcədə ixtisar edilməsi yolları tapılmalıdır. Bu ilk növbədə operativ-texniki məlumatlarla doldurulmuş təcili hesablara aiddir.

Statistika elmi qarşısında, iqtisadiyyatın müasir və gələcək inkişafı şəraitinə cavab verən, statistik informasiyanın həcmnin və quruluşunun nəzəri cəhətdən əsaslandırılması kimi ciddi problemlər durur.

Başdan-başa hesabatdan statistik müşahidənin başdan-başa olmayan növlərinə (birdəfəlik uçot, seçmə və monoqrafik tədqiqat) keçilməsinin həll edilməsi çox vacibdir. Bunu birbaşa bazar iqtisadiyyatı şəraitində müəssisələrin mövqeyinin dəyişilməsi, müxtəlif təsərrüfat qurumlarının mövcud olması və onların təşkilati-iqtisadi proseslərinin dinamikliyi tələb edir.

Müşahidənin başdan-başa olmayan statistik metodlarının tətbiqi, baş verən şərait dəyişikliklərinə operativ reaksiya verilməsini yüksəldir, idarəetməni vaxtlı-vaxtında qərarlar qəbul edilməsinə imkan verən informasiya ilə təmin edir. Dövri seçmə tədqiqatları kütləvi sosial-iqtisadi hadisələrin dəyişilməsinin, regionlarda işlərin vəziyyətinin statistik müşahidəsinin başlıca vasitəsi olmalıdır.

Statistik informasiyanın toplanmasında ***birdəfəlik uçotun tətbiqi*** getdikcə daha əhəmiyyətli və zəruri olur. Onun əsasında toplanmış iqtisadi potensialın təhlili məsələləri həll edilir. Statistik informasiya çoxukladlı iqtisadiyyatın yaranmasını, müxtəlif mülkiyyət formalarının və sahibkarlıq növlərinin inkişafını, xalq təsərrüfatının ictimai quruluşunu xarakterizə etməlidir.

Bazar iqtisadiyyatına keçid ***milli hesablar sisteminin (MHS)*** mühasibat uçotuna və statistikaya tətbiqini zəruri edir. Dünya praktikasında tətbiq geniş

edilən MHS bazar iqtisadi münasibətlərinin tələblərinə və xüsusiyyətlərinə daha geniş cavab verir. Bununla bağlı olaraq BMT-nin beynəlxalq statistik xidmət orqanları, ilk növbədə Statistika Komissiyası ilə əlaqələri inkişaf etdirmək lazımdır.

## MÖVZU 11. STATİSTİK MÜŞAHİDƏ

### PLAN:

1. Statistik müşahidə haqqında anlayış və onun vəzifələri.
2. Statistik müşahidənin təşkilinin əsas formaları.
3. Statistik müşahidənin növləri.
4. Statistik müşahidənin üsulları.
5. Statistik müşahidənin əsas proqram – metodoloji məsələləri.
6. İlk uçot və hesabat.
7. Xüsusi təşkil edilmiş statistik müşahidə.
8. Statistik müşahidənin xətası.

### Ədəbiyyat

- 1.Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, "Maarif nəşriyyatı", 1973.
2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasimov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çarşıoğlu, 2006.

### 1. *STATİSTİK MÜŞAHİDƏ HAQQINDA ANLAYIŞ VƏ ONUN VƏZİFƏLƏRİ*

Statistik müşahidə statistikanın mühüm metodlarından biridir. İctimai hadisələrin kəmiyyət tərəfini öyrənmək üçün hər şeydən əvvəl, həmin hadisələrin həcmi, səviyyəsini xarakterizə edən statistik məlumat əldə etmək lazımdır. Ona görə də statistik tədqiqatın birinci mərhələsi statistik müşahidədir.

İctimai hadisələr haqqında kütləvi məlumatların toplanması prosesinə *statistik müşahidə* deyilir. Tədqiqatın bu mərhələsində buraxılan hər hansı bir səhv sonrakı tədqiqat mərhələlərində mütləq özünü göstərməlidir. Ona görə də hər bir tədqiqatın nəticəsi toplanılan məlumatın düzgünlüyündən, dəqiq-liyindən və vaxtında uçota alınmasından çox asılıdır. Bütün bunları nəzərə alaraq, statistik müşahidə planlı surətdə, müntəzəm və elmi əsasda aparılmalıdır.

*Statistik müşahidənin başlıca vəzifəsi* ölkəmizin iqtisadi və mədəni inkişafını, xalqımızın həyat səviyyəsinin durmadan artmasını xarakterizə etmək üçün lazım olan statistik məlumatları toplamaqdan ibarətdir.

## **2. STATİSTİK MÜŞAHİDƏNİN TƏŞKİLİNİN ƏSAS FORMALARI**

Statistik müşahidənin təşkilinin əsas formaları *hesabat və xüsusi təşkil edilmiş statistik müşahidə*dən ibarətdir.

Hesabat müşahidənin elə təşkil olunmuş formasıdır ki, burada ayrı-ayrı müəssisə, idarə və təşkilatların verdikləri hesabat məlumatları mühüm rol oynayır. Hesabat vasitəsilə ölkənin iqtisadi vəziyyəti haqqında müntəzəm və geniş proqram üzrə ətraflı və düzgün məlumat almaq mümkündür.

Hesabat iqtisadiyyata operativ rəhbərliyi təmin etmək, iqtisadiyyatın inkişafına dair dövlət tapşırıqlarını (sifarişlərini) tərtib etmək və onların yerinə yetirilməsinə nəzarəti həyata keçirmək, ayrı-ayrı hadisələrin iqtisadi-statistik təhlilini aparmaq üçün lazım olan ən dəqiq və dolğun məlumat mənbəyidir.

Statistik müşahidənin təşkilinin ikinci forması xüsusi təşkil edilmiş müşahidələrdir. Hesabat vasitəsilə toplana bilməyən, lakin mühüm əhəmiyyətə malik olan bir çox ictimai hadisələr haqqında məlumat xüsusi təşkil edilmiş statistik müşahidə vasitəsilə əldə edilir. Məsələn, əhalinin tərkibi (cinsi, yaşı, ictimai mənşəyi və s.) haqqında məlumatı hesabat vasitəsilə almaq qeyri-mümkündür. Bu cür məlumat ancaq xüsusi təşkil edilmiş uçot və siyahıyaalmalar vasitəsilə əldə edilə bilər. Müşahidənin bu növünə respublikamızda 2009-cu il yanvarın... üçün əhalinin siyahıyaalınmasını, 2005-ci ilin iyununda keçirilən kənd təsərrüfatının siyahıyaalınmasını misal göstərmək olar.

Beləliklə, xüsusi təşkil edilmiş statistik müşahidələrin məlumatları da hesabat məlumatı kimi mühüm yer tutur.

## **3. STATİSTİK MÜŞAHİDƏNİN NÖVLƏRİ**

Statistik müşahidə təşkil olunma forması ilə bərabər başqa əlamətə görə də fərqlənir. Belə əlamətə misal olaraq hadisələrin qeydə alınmasının dövriliyini göstərmək olar. Müşahidə dövriliyə görə iki yerə bölünür:

- 1) cari (fasiləsiz);
- 2) fasiləli.

***Cari müşahidəyə misal olaraq*** doğum, ölüm, kəbin və boşanma hallarının qeydə alınmasını, məhsul buraxılışının uçota alınmasını və s. göstərmək olar.

Fasiləli müşahidə isə vaxtaşırı, ya da ehtiyacdən asılı olaraq aparılır.

Statistik müşahidənin bu və ya digər növünün təcrübədə tətbiqi məsələsi, öyrənilən ictimai hadisənin xüsusiyyətlərindən, müvafiq məlumata olan ehtiyacdən asılı olaraq həll edilir. İctimai həyatda baş verən hadisə və proseslərin əksəriyyəti cari müşahidənin aparılmasını tələb edir. Bununla bərabər, bir sıra hadisələr üzrə cari uçot aparmaq xeyli vaxt tələb etdiyi üçün əlverişli deyildir. Digər tərəfdən bəzi ictimai hadisələr haqda cari uçotun təşkilinə ehtiyac yoxdur. Məsələn, əhəlinin sinfi, milli, yaş tərkibi və s. əlamətlər üzrə cari uçotun təşkilinə ehtiyac yoxdur. Bu kimi ictimai hadisələr üzrə dövrü və birdəfəlik müşahidə aparmaq məqsəduyğundur.

Statistik müşahidə öyrənilən hadisənin vahidlərinin əhatə olunmasına görə də təsnifləşdirilir. Vahidlərin əhatə olunmasına görə statistik müşahidə iki yerə bölünür:

- 1) Başdan-başa müşahidə;
- 2) Başdan-başa olmayan müşahidə.

Öyrənilən obyektin bütün vahidləri uçota alınarsa, buna başdan-başa (ümumi) müşahidə deyilir. Başdan-başa müşahidəyə misal olaraq bütün müəssisələrdə məhsul istehsalı, işçilərin sayı, əhəlinin və mal-qaranın uçota alınmasını göstərmək olar.

Obyektin vahidlərinin bir hissəsi uçota alınarsa, buna başdan-başa olmayan (qeyri-ümumi) müşahidə deyilir.

Başdan-başa olmayan (qeyri-ümumi) müşahidənin aşağıdakı növləri vardır:

- seçmə müşahidəsi;

- əsas kütlənin müşahidəsi;
- monoqrafiya müşahidəsi;
- anket müşahidəsi;
- müxbir müşahidəsi.

#### 4. STATİSTİK MÜŞAHİDƏNİN ÜSULLARI

Statistik məlumatları müxtəlif üsullarla toplamaq olar. Ən mühüm üsullardan aşağıdakıları göstərmək olar: ***btlavasitə müşahidə, sənəd üsulu və sorğu üsulu.***

***Bilavasitə müşahidə*** üsulunda statistika sənədləri statistika orqanlarının və yaxud digər təşkilatların nümayəndələri tərəfindən ictimai hadisəni şəxsən sayması, ölçməsi və çəkməsi əsasında doldurulur. Bilavasitə müşahidə üsuluna misal olaraq əhalinin şəxsi təsərrüfatında olan mal-qaranın siyahıyaalınmasından sonra aparılan nəzarət gəzintisini, bağların və giləmeyvə kollarının, vaqonların siyahıyaalınmasını göstərmək olar. Bu müşahidə üsulu yaxşı təşkil edilərsə, toplanılan statistik məlumatın düzgün olmasını təmin etmək olar. Çünki müşahidənin bu üsulunda təlimatlandırılmış, hazırlıqlı kadrlar iştirak edirlər.

***Sənədli müşahidə*** üsulunda məlumatlar müxtəlif sənədlər əsasında toplanılır. Ayrı-ayrı müəssisə, idarə və təşkilatların statistik hesabatlarının tərtibi başlıca olaraq sənəd üsuluna əsaslanır. Statistik hesabatlar, adətən, ilk uçot sənədləri əsasında tərtib edirlər.

Statistik məlumatların qeydə alınması üsullarından biri də sorğu üsuludur. ***Sorğu üsulunun*** üç növü vardır: şifahi sorğu, özünüqeydəalma və müxbir üsulu.

***Şifahi sorğu*** üsuluna ekspedisiya üsulu da deyilir. Bu üsulla daha çox məlumat əldə etmək mümkündür, çünki məlumatın qeydə alınmasını xüsusi təlimat keçmiş hazırlıqlı kadrlar həyata keçirirlər. Əhalinin siyahıyaalınması əsasən şifahi sorğu üsulu əsasında aparılır.

***Özünüqeydəalma*** üsulunda statistika sənədləri soruşulan şəxslərin özləri tərəfindən doldurulur. Statistika orqanlarının nümayəndələri müvafiq sənədləri soruşulan şəxslərə əvvəlcədən paylayır, onlara sənədlərdəki suallara necə cavab yazmağı izah edir və müəyyən vaxtdan sonra həmin sənədləri toplayır.

***Müxbir üsulunda*** sual vərəqələri yerlərdə olan könüllü müxbirlərə göndərilir. Müxbirlər vərəqələrdə qoyulmuş suallara cavab yazaraq statistika orqanlarına, yaxud həmin vərəqəni göndərən təşkilata qaytarırlar.

## 5. STATİSTİK MÜŞAHİDƏNİN ƏSAS PROQRAM-METODOLOJİ MƏSƏLƏLƏRİ

Proqram-metodoloji məsələ dedikdə burada müşahidənin məqsədi, obyekt və vahidi nəzərdə tutulur.

**Müşahidənin məqsədi.** Statistik müşahidənin aparılmasında, hər şeydən əvvəl, onun vəzifələrinin müəyyən edilməsinin xüsusi əhəmiyyəti vardır. Statistik müşahidənin vəzifələrini bilmədən onun aparılmasına başlamaq olmaz. Müşahidənin vəzifəsi öyrənilən ictimai hadisənin xüsusiyyətindən, təcrübə və elmi ehtiyacından asılı olaraq müəyyən edilir. Statistik müşahidənin vəzifələri dövlət idarəetmə orqanlarının ehtiyaclarına müvafiq olaraq müəyyən edilir.

Azərbaycan Respublikasında statistika işlərinin planlaşdırılması Dövlət Statistika Komitəsi (DSK) tərəfindən həyata keçirilir və həmin işlərə metodoloji cəhətdən də rəhbərlik edir.

**Müşahidə obyekt.** Müşahidənin vəzifələrini müəyyən etdikdən sonra, müşahidə obyektinə ona müvafiq olaraq müəyyənləşdirilir.

Statistik tədqiqatdan keçəcək ictimai-iqtisadi hadisələrin məcmuunu ***müşahidə obyekt*** adlanır. Məsələn, əhəlinin siyahıyaalınması aparıldıqda bütün şəxslərin məcmuunu müşahidə obyektinə olur. Sənayenin siyahıyaalınmasında-bütün sənaye obyektləri müşahidə obyektinə olur.

Müşahidə obyektinin düzgün müəyyən edilməsinin mühüm əhəmiyyəti vardır.

Statistik müşahidənin təcrübəsində tədqiqat obyektinin sərhəddini müəyyən etmək üçün bəzi şərti əlamətlərdən-senzdən istifadə edilmişdir. Müşahidə obyektinin sərhəddini müəyyən edərkən əvvəlcədən müəyyən edilmiş bir və ya bir neçə əlamət **senz** adlanır. Sənaye statistikasında uzun müddət aşağıdakı senzdən istifadə edilmişdir. İri sənayeyə mühərrikləri olan və eyni zamanda fəhlələrinin sayı 16 və daha çox olan müəssisələr, mühərrikləri olmadıqda isə fəhlələrinin sayı 30 və daha çox olan müəssisələr daxil edilirdi.

**Müşahidə vahidi.** Statistik müşahidə obyektinin hər bir elementi ***müşahidə vahidi***dir. Statistik müşahidəni təşkil edərkən müşahidə vahidini düzgün, elmi cəhətdən əsaslandırılmış qaydada müəyyən etmək lazımdır. Buna nail olmaq üçün müşahidə obyektini keyfiyyətcə təhlil etmək lazımdır. Ancaq müşahidə vahidinin düzgün müəyyən edilməsi nəticəsində ictimai hadisə haqqında düzgün, dolğun məlumat toplamaq mümkündür.

Müşahidə olunacaq obyektdən asılı olaraq ayrı-ayrı zavodlar, fabriklər, fermer təsərrüfatları, məktəblər, fəhlələr, fermerlər və s. müşahidə vahidi ola bilərlər.

**Müşahidənin proqramı.** Hər bir müşahidə elmi əsasda tərtib edilmiş proqram üzrə aparılır. Müşahidənin proqramı cavab toplanılacaq sualların siyahısından ibarətdir. Toplanılacaq məlumatın keyfiyyəti, onun yararlılığı müşahidə proqramının nə dərəcədə yaxşı işlənilib hazırlanmasından asılıdır.

Müşahidənin proqramı statistik tədqiqatın məqsəd və vəzifəsindən, obyektin məzmunundan asılı olaraq tərtib edilir. Müşahidənin proqramını tərtib etmək üçün öyrənilən obyekt haqqında dərin biliyə malik olmaq lazımdır. Məsələn, kənd təsərrüfatının iqtisadiyyatını, təşkilini mükəmməl bilmədən dövlət kənd təsərrüfatı müəssisələrinin hesabatlarının proqramını tərtib etmək olmaz.

Müşahidənin proqramına qabaqcıl nümunələri, istehsalda istifadə edilməmiş ehtiyatları aşkar etməyə imkan verən sualları daxil etmək lazımdır. Bununla belə müşahidənin proqramını hədsiz-hesabsız suallarla mürəkkəbləşdirmək olmaz.

Müşahidəni apararkən toplanılan məlumatın tam, dolğun və müqayisəli olmasını təmin etmək üçün lazımi tədbir görülməlidir.

**Statistik formulyarlar.** Müşahidənin proqramında nəzərdə tutulan suallara cavab ayrıca işlənilib hazırlanmış xüsusi statistika formulyarlarında yazılır.

Doldurulmamış formulyarlar sadəcə olaraq ***blank*** adlanır. Blankda müşahidənin sualları göstərilir və həmin suallara cavab yazmaq üçün boş yer qoyulur.

Hər bir statistika formulyarının məcburi ünsürlərindən biri titul və ünvan hissələrinin olmasıdır. Formulyarın titul hissəsində, adətən, statistik müşahidənin

adı, müşahidə aparan orqanın adı və həmin formulyarın hansı təşkilat tərəfindən və nə vaxt təsdiq edildiyi göstərilir. Formulyarın ünvan hissəsində soruşulan (tədqiq edilən) müşahidə vahidinin, yaxud hesabat təqdim edən müəssisənin, idarənin, təşkilatın ünvanı qeydə alınır.

Statistik formulyar iki sistemə ayrılır: 1) fərdi kartoçka, 2) siyahı sistemi.

**Kartoçka** sistemində hər bir kartočkada bir müşahidə vahidi və onun əlamətləri qeydə alınır.

Formulyarın **siyahı** sistemində bir siyahıda-blankda bir neçə müşahidə vahidi haqqında suallara cavab yazılır.

Kartoçka sisteminə nisbətən siyahı sisteminin bir sıra üstünlükləri və mənfi cəhətləri vardır.

Müşahidənin proqramındakı sualların sayı çox olduqda siyahı formulyarları çox böyük olur, bu da iş üçün əlverişli deyil. Belə hallarda kartoçka sisteminin tətbiqi məqsədəuyğundur.

Siyahı formulyarının tətbiq edilməsinin müşahidə prosesində bir sıra üstün cəhətləri vardır. Məsələn, formulyarın ünvan hissəsinin yazılması işləri xeyli azalır, qeydçinin əmək məhsuldarlığı artır.

## 6. İLK UÇOT VƏ HESABAT

Müəssisələrdə baş verən hadisə və proseslərin xüsusi sənədlərdə qeyd olunmasına **ilk uçot** deyilir. Belə sənədlər ilk uçot sənədləri adlanır.

İlk uçot məlumatı müəssisələrin fəaliyyətinə gündəlik rəhbərliyi həyata keçirmək üçün lazımdır. ***İlk uçot müəssisə, idarə və təşkilatların cari və illik hesabatlarını tərtib etmək üçün əsasdır.*** Ümumiyyətlə, müəssisələrdə statistika və mühasibat uçotu ilk uçot əsasında aparılır.

Hesabatlar dövrün əhatə olunması və məlumatın verilmə müddətinə görə cari və illik hesabatla bölünürlər. Gündəlik, həftəlik, aylıq, rüblük hesabatlara cari hesabatlar deyilir. İl üçün verilən hesabat illik hesabat deyilir. Ən dolğun, geniş məlumat illik hesabatda verilir.

Hesabatın qoyuluşuna bilavasitə rəhbərliyi DSK və onun yerli orqanları həyata keçirir.

## 7. XÜSUSİ TƏŞKİL EDİLİMŞ STATİSTİK MÜŞAHİDƏ

Mühüm məlumat mənbəyinin biri də xüsusi təşkil edilmiş statistik müşahidədir. Xüsusi statistika müşahidəsi özünün təşkili xarakterinə görə hesabatlardan əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənir. Xüsusi təşkil edilmiş müşahidəyə misal olaraq mal-qaranın, əhalinin, bağların, üzümlüklərin, məktəblərin və s. siyahıya alınmasını göstərmək olar.

Əhalinin siyahıya alınması xüsusi statistik müşahidənin ən qədim növüdür. SSRİ-də əhalinin siyahıya alınması 1920, 1926, 1939, 1959, 1970, 1979 və 1989-cu illərdə aparılmışdır. Azərbaycan müstəqillik əldə etdikdən sonra isə 1999-cu və 2009-cu illərdə siyahıyaalma həyata keçirilmişdir. Əhalinin siyahıya alınması əhalini sayı, onun yerləşməsi, cinsi, yaşı, milli tərkibi, təhsil dərəcəsi, ailə tərkibi, məşğuliyyəti, ictimai qrupları və digər əlamətləri haqqında dolğun, dəqiq məlumat əldə etməyə imkan verir.

## 8. STATİSTİK MÜŞAHİDƏNİN XƏTASI

Dəqiq, düzgün məlumat əldə etmək hər bir statistik müşahidənin qanunudur. Səhvə yol verməmək və onun qarşısını qabaqcadan almaq müşahidənin əsas prinsipidir. Səhvə yol verməmək üçün bir sıra tədbirlərin həyata keçirilməsi vacibdir. Bu tədbirlərə kadrların düzgün seçilməsi, onların mükəmməl surətdə təlimatlandırılması, əhali arasında geniş izahat işi aparılması və s. daxildir.

*Statistik müşahidənin xətası iki qrup xətaya ayrılır* - qeyd xətası və reprenzetativ xətaya. Bu xətlərin hər biri təsadüfi və müntəzəm xətaya bölünür.

**Qeyd xətası** faktların düzgün müəyyən edilməməsi, yaxud faktların düzgün qeydə alınmaması nəticəsində baş verir. Qeyd xətası həm ümumi, həm də qeyri-ümumi müşahidədə baş verə bilər.

**Reprezentativ xəta** ancaq başdan-başa olmayan müşahidədə baş verir. Bu xəta öyrənilən hadisənin bütün vahidlərinin əhatə olunmamasından irəli gəlir.

## **MÖVZU 12-13. STATİSTİKA MATERİALLARININ YEKUNLAŞDIRILMASI VƏ QRUPLAŞDIRILMASI**

### **PLAN:**

1. Yekunlaşdırma haqqında anlayış
2. Statistika məlumatının qruplaşdırılması haqqında anlayış
3. Qruplaşdırma əlamətinin seçilməsi, qrup və fasilələrin təşkili prinsipləri
4. Tipik qruplaşdırma
5. Quruluş qruplaşdırması
6. Analitik qruplaşdırma
7. Təkrar qruplaşdırma, onun mahiyyəti və aparılma qaydası
8. Çoxölçülü qruplaşdırma

### **Ə D Ə B İ Y Y T S İ Y A H İ S İ .**

- 1.Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, "Maarif nəşriyyatı", 1973.
2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çarşıoğlu, 2006.

### **1. YEKUNLAŞDIRMA HAQQINDA ANLAYIŞ**

Statistika müşahidəsi nəticəsində müşahidə edilən obyektin (hadisə və proseslərin) hər bir vahidini müxtəlif əlamətlər üzrə xarakterizə edən məlumat toplanır. Məsələn, əhalinin siyahıyaalınması nəticəsində ölkədə yaşayan ayrı-ayrı şəxslər haqqında bir sıra əlamətlər üzrə (cinsi, yaşı, milliyyəti, təhsili, ana dili və s. haqqında) məlumat toplanır. Bu məlumatlar ilkin materialdır və onlar rus statistiki A.A.Kaufmanın ifadəsi ilə desək, statistik bina tikmək üçün lazım olan daş, kərpic, truba, qum və s. rolunu oynayır. Adətən, ayrı-ayrı vahidlər haqqında toplanmış məlumat, daha böyük məqsədə nail olmaq üçün - müşahidə edilən obyektini xarakterizə etmək üçün vasitə rolunu oynayır. Toplanmış bu məlumatı ayrı-ayrılıqda nəzərdən keçirməklə, müşahidə edilən obyektini xarakterizə etmək, hadisənin inkişaf qanunauyğunluğunu dərk etmək olmaz. Bunun üçün həmin məlumatı yekunlaşdırmaq, sistemləşdirmək, başqa sözlə desək, ümumiləşdirmək

lazımdır. Məsələn, əhali haqqında toplanmış məlumat işlənməzsə, ümumiləşdirilməzsə onun sayında və tərkibində baş vermiş dəyişikliklər haqqında heç bir nəticə çıxarmaq olmaz. Ölkənin əhalisini bu məlumat əsasında xarakterizə etmək üçün həmin məlumatı sistemləşdirmək və əhalinin sayını bir sıra əlamətlər üzrə müəyyənləşdirmək, yəni yekun məlumat əldə etmək lazımdır.

Ölkə əhalisinin sayını, şəhər və kənd əhalisinin sayını, əhalinin yaş qrupları üzrə sayını, kişi və qadınların sayını, əmək qabiliyyətlilərin sayını və s. müəyyən etmək üçün yekunlaşdırmadan istifadə edilir. Onun nəticəsində ölkənin əhalisi haqqında aydın təsəvvür əldə etmək olar. Beləliklə, sosial-iqtisadi hadisələrin tipik xüsusiyyətlərini və qanunauyğunluqlarını aşkar etmək üçün ilkin statistika materiallarının sistemləşdirilməsi və işlənilməsi statistika materiallarının yekunlaşdırılması adlanır.

Yekunlaşdırma, statistik tədqiqat işinin müşahidədən sonra ikinci mərhələsidir və bunun nəticəsində hadisə və proseslər rəqəmlər vasitəsilə izah edilir (aydınlaşdırılır).

Statistika yekunlaşdırması sözün geniş və məhdud mənasında başa düşülür. Geniş mənada yekunlaşdırma statistika materiallarının müvafiq əlamətlər üzrə qruplara ayrılmasından, statistika məcmuyunu bütövlükdə və onun ayrı-ayrı qruplarını xarakterizə edən göstəricilər sisteminin işlənilməsindən, qrup və ümumi yekunların hesablanmasından, onun nəticələrinin statistika cədvəllərində, sıralarında və qrafiklərdə təsvirindən ibarətdir.

Yekunlaşdırmanı aparmazdan əvvəl statistika müşahidəsi nəticəsində toplanmış məlumat yoxlanılmalıdır. Məlumat öyrənilən hadisənin vahidlərinin tam əhatə olunması və onun keyfiyyəti nöqtəyi-nəzərindən yoxlanılmalıdır.

Yekunlaşdırma statistik tədqiqatın vəzifəsinə uyğun olaraq, əvvəlcədən tərtib edilmiş proqram əsasında aparılır. Proqramda hər şeydən əvvəl yekunlaşdırmanın xəbəri və mübtədasi təyin edilir.

Mübtədada təşkil ediləcək qruplar göstərilir. Hər bir qrupu və bütövlükdə statistika məcmuyunu xarakterizə edən göstəricilər sistemi xəbəri təşkil edir.

Ümumiyyətlə proqramın əsas məzmununu yekcins qrupları təşkil etmək üçün əlamətin seçilməsi, qrupların sayının müəyyən edilməsi, iş cədvəlinin maketinin qurulması, statistika məcmuyunu bütövlükdə və onun ayrı-ayrı qruplarını xarakterizə edən göstəricilər sistemi təşkil edir.

Proqram işlənərkən statistika məlumatlarını istifadə edənlərin tələbləri hərtərəfli nəzərə alınmalıdır. Proqramın tərtibində, yekunlaşdırmanın nəticəsindən istifadə edənlər də iştirak etməlidirlər. Onun proqramında ayrı-ayrı işlərin hansı müddətdə yerinə yetirilməsi və onların cədvəldə, statistika məcmuələrində və s. təsvir edilməsi ilə əlaqədar olan tədbirlər şərh edilir.

## ***2. STATİSTİKA MƏLUMATININ QRUPLAŞDIRILMASI HAQQINDA ANLAYIŞ***

Statistika materiallarının yekunlaşdırılmasında qruplaşdırma mühüm yer tutur. Yekunlaşdırma prosesində bir qayda olaraq statistika materialları sıraya düzülür, sistemləşdirilir, mühüm əlamətlər üzrə öz tərkib hissələrinə ayrılır və bunun əsasında statistika məcmuyu təşkil olunur. Bunun nəticəsində statistika məlumatını, onun xarakterizə etdiyi sosial-iqtisadi hadisəni dərk ediləcək şəkllə salmaq mümkün olur.

Statistika məcmusu vahidlərinin onlara xas olan mühüm əlamətlər üzrə hissələrə ayrılmasına ***qruplaşdırma*** deyilir.

Qruplaşdırma kütləvi statistika məlumatlarının işlənməsinin və təhlilinin elmi əsasını təşkil edir. Məlumdur ki, sosial-iqtisadi hadisələr, əsasən kəmiyyət və keyfiyyət bir-birindən fərqlənən küllü miqdarda vahidlərdən ibarətdir. Həmin vahidləri müəyyən əlamətlər üzrə yekcins qruplara ayırmadan sosial-iqtisadi hadisəni dərk etmək olmaz. Məsələn, əhəlinin siyahıya alınmasında əhəli haqqında bir çox əlamətlər üzrə məlumatlar toplanır. Əhəlinin ümumi sayını sadəcə olaraq müəyyən etsək, bu, əhəlini hərtərəfli xarakterizə etmək üçün heç də kifayət etməz. Bunun üçün onun ümumi sayını müəyyən etməklə bərabər, cinsi, yaş qrupları,

məşğuliyyəti, təhsili, yaşayış yeri haqqında göstəricilər əldə etmək lazımdır ki, bu da əhalinin həmin əlamətlər üzrə qruplaşdırılması nəticəsində mümkün olur.

Qruplaşdırma metodu hadisə və proseslərin tipik xüsusiyyətlərini müəyyən etmək, onların inkişaf qanunauyğunluqlarını dərk etmək üçün statistik təhlilin digər metodlarının tətbiqinə əsas yaradır. O, tədqiqat prosesindəki öz roluna görə, təbiət elmlərində sınağın funksiyasına uyğun funksiyanı yerinə yetirir. Ayrı-ayrı əlamətlər və ya onların kombinasiyası üzrə qruplaşdırma hadisənin qanunauyğunluqlarını, onlar arasındakı əlaqəni müəyyən etməyə, müxtəlif amillərin qarşılıqlı əlaqəsini və onların nəticə göstəricisinə təsirini aşkar etməyə imkan verir.

### ***3. QRUPLAŞDIRMA ƏLAMƏTİNİN SEÇİLMƏSİ, QRUP VƏ FASILƏLƏRİN TƏŞKİLİ PRİNSİPLƏRİ***

Qruplaşdırma metodunun mühüm məsələlərindən biri qruplaşdırma əlamətinin seçilməsidir.

Statistika materiallarının işlənməsinin nəticəsi qruplaşdırma əlamətinin düzgün seçilməsindən çox asılıdır. Müxtəlif üsullarla qruplaşdırdıqda eyni bir material bir-birinə tamamilə zidd nəticələr vermiş olur.

Buna görə də qruplaşdırma əlaməti öyrənilən hadisənin hərtərəfli nəzəri təhlili əsasında müəyyən edilməlidir. Hadisənin mahiyyətinin və inkişafının hərtərəfli nəzəri-iqtisadi təhlili ona yönəldilməlidir ki, tədqiqatın vəzifə və məqsədinə uyğun olaraq qruplaşdırma mühüm əlamətlər üzrə aparılsın.

Qruplaşdırma əlaməti konkret şəraitdən və vaxtdan asılı olaraq seçilməlidir. Konkret şəraitdən asılı olaraq qruplaşdırma əlaməti dəyişməlidir, yəni müxtəlif şəraitdə eyni bir tipi ayırdıqda o, xüsusiləşməlidir. Məsələn, indiki zamanda sənaye müəssisələrini onların həcmələrinə görə qruplaşdırdıqda qruplaşdırma əlaməti olaraq, istehsal gücünü, əsas fondların dəyərini, sənaye-istehsal heyətinin sayını, istifadə edilən enerji gücünü götürmək olar. Əgər əmək tutumlu sahələr üçün qruplaşdırma əlaməti olaraq işçilərin sayını götürmək məqsədəuyğundursa,

fondtutumlu sahələr üçün istehsal fondlarının dəyərini, enerji tutumlu sahələr üçün isə – istifadə edilən elektrik enerjisinin miqdarını götürmək məqsəduyğundur.

Bununla yanaşı qeyd etmək lazımdır ki, hadisənin tam xarakteristikasını ancaq əlamətlər sistemindən (göstəricilər sistemindən) istifadə etməklə vermək olar. Ancaq əlamətlər sistemi hadisənin inkişafını əks etdirməyə, real əlaqələri hərtərəfli aşkar etməyə, hadisələrin ayrı-ayrı tərəflərinin qarşılıqlı əlaqəsini müəyyən etməyə imkan verir.

Hadisənin ancaq bir tərəfini xarakterizə edən, onun inkişafının bir cəhətini əks etdirən bir əlamətdən istifadə edilməsi həqiqətin təhrif edilməsinə gətirib çıxara bilər.

Belə ki, hadisənin inkişafında adətən müxtəlif, hərdənbir əks meyllər və istiqamətlə bir-birinə keçir. Obyektləri xarakterizə edən əlamətlərin çoxluğu onların çoxtərəfli olmasının nəticəsidir.

Qruplaşdırma bir əlamət üzrə aparılırsa, buna **sadə qruplaşdırma** deyilir. Qruplaşdırma əlaqədə götürülmüş iki və daha çox əlamət üzrə aparılırsa, ona **quraşlıq qruplaşdırma** deyilir. Quraşlıq qruplaşdırma kombinasiyalı və ya çoxölçülü qruplaşdırma şəklində həyata keçirilə bilər. **Kombinasiyalı qruplaşdırmada** hər hansı bir əlamət üzrə ayrılmış qruplar, sonradan digər əlamət üzrə altqruplara ayrılır, öz növbəsində alt qruplar başqa bir əlamətə görə hissələrə ayrılır və s. Əgər qruplaşdırma ayrı-ayrı əlamətlər üzrə ardıcıl olaraq deyil, eyni zamanda əlamətlər kompleksi üzrə aparılırsa, ona **çoxölçülü qruplaşdırma** deyilir.

Sadə qruplaşdırmaya misal olaraq kənd təsərrüfatı müəssisələrinin hər ha əkin sahəsindən əldə etdiyi gəlirin həcminə görə qruplaşdırmasını göstərmək olar. Sadə qruplaşdırmaya nisbətən quraşlıq qruplaşdırma daha geniş elmi təhlil xüsusiyyətinə malikdir. Xüsusən mürəkkəb sosial-iqtisadi hadisələrin təhlilində quraşlıq qruplaşdırma mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Qeyd etmək lazımdır ki, əlamətlərin sayının artması ilə əlaqədar olaraq qrupların sayı sürətlə artır. Ona görə də iki və üçdən artıq qruplaşdırma əlamətinin götürülməsi alınan nəticələrin təhlilini mürəkkəbləşdirir, onların aydın oxunması və başa düşülməsi işini

çətinləşdirir. Belə halda çox mühüm əhəmiyyətə malik olan quraşlıq qruplaşdırma öz mənasını itirmiş olur.

Qruplaşdırma əlamətinin növündən asılı olaraq kəmiyyət və keyfiyyət əlamətinə görə qruplaşdırmanı fərqləndirirlər.

**Atributiv əlamətlər** üzrə qruplar əlamətlərin təbii xüsusiyyətlərinə müvafiq olaraq keyfiyyətlərin, xüsusiyyətlərin siyahısı kimi təşkil edilir. Məsələn, əhali cinsinə görə iki qrupa (kişi və qadın), savad dərəcəsinə görə iki qrupa (savadlı və savadsız) ayrılır. Lakin bir sıra atributiv əlamətlər çoxlu sayda adlara malik olur. Məsələn, fəhlələrin ixtisasları, məhsul növləri, səbəblər üzrə əhalinin xəstəlikləri, təhsil pillələri və s. Belə hallarda müxtəlifliklərin klassifikasiyasını işləyib hazırlayırlar, yəni, öz xüsusiyyətlərinə görə oxşar olan müxtəliflikləri bir qrupda birləşdirirlər. Atributiv əlamətlər üzrə xüsusi işlənmiş və möhkəm qeydə alınmış qruplaşdırmalar **təsnifat** adlanır. Klassifikasiyalar adətən milli və beynəlxalq standartlar şəklində təsdiq edilir. Məsələn, kənd təsərrüfatı sahələrinin, sənaye sahələrinin, sənaye məhsullarının, əkin sahələrinin, mal-qaranın, tədavül xərclərinin və s. hadisələrin elmi cəhətdən əsaslandırılmış təsnifatı verilmişdir.

**Kəmiyyət əlaməti** üzrə qruplaşdırma apararkən qrupların sayı qarşıda duran tədqiqatın vəzifəsindən asılı olaraq müəyyən edilir. Məsələn, müəssisələri həcmələrinə görə qruplaşdırarkən kəmiyyətə bir-birindən fərqlənən üç qrup – iri, orta və xırda qruplar təşkil etmək vəzifəsi qarşıya qoyularsa, belə halda təşkil ediləcək qrupların sayı məsələsini həll edilmiş hesab etmək olar.

**Diskret əlamətlər** üzrə qruplaşdırmanı təşkil etmək nisbətən çətin deyil. Məsələn, fəhlələrin tarif dərəcələrinə görə qruplaşdırılmasında tarif dərəcələrinin sayı qədər (5-6) qrup təşkil edilir. Ailə üzvlərinin sayına görə qruplaşdırmada da qrupların sayı müəyyən dərəcədə məhdudlaşdırılır.

**Fasiləsiz kəmiyyət əlamətləri** üzrə qrupların sayı müəyyən edilərkən əlamətin tərəddüd dərəcəsi nəzərə alınmalıdır. Əlamətin tərəddüd dərəcəsi kiçik olduqda çoxlu sayda qruplar ayırmaq olmaz. Qrupların sayı müəyyən edilərkən məcmudakı vahidlərin az-çoxluğu da nəzərə alınmalıdır. Vahidlərin sayı az olarsa, qrupların sayı çox olmamalıdır. Qruplaşdırma zamanı elə etmək lazımdır ki, hər bir

qrupa kifayət qədər vahid düşsün. Əks halda böyük ədədlər qanununun prinsiplərinə əməl edilməz və qruplar üzrə çıxarılacaq nəticələr hadisəni dəqiq, düzgün xarakterizə edə bilməz.

Kəmiyyət əlaməti üzrə qruplaşdırmanın mühüm məsələlərindən biri də qruplaşdırma fasiləsinin həcmnin, yəni hər bir qrup üçün əlamətin minimum və maksimum qiymətini müəyyən etməkdir. Məcmuda vahidlərin bölüşdürülməsi xarakterindən asılı olaraq, fasilə bərabər və qeyri-bərabər şəkildə müəyyən edilə bilər. Vahidlərin bölgüsü az-çox bərabər şəkildədirsə, bərabər fasilələr təşkil etmək məqsədəuyğun olar. Məsələn, hər hansı kənd təsərrüfatı bitkisinin məhsuldarlığı üzrə əkin sahələrini qruplaşdırarkən bərabər fasiləli qruplar təşkil etmək daha düzgün nəticələr əldə etməyə imkan verir.

$$d = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{n}$$

d – fasilə kəmiyyəti;

$X_{\max}$  – əlamətin ən böyük qiyməti;

$X_{\min}$  – əlamətin ən kiçik qiyməti;

n - qrupların sayıdır.

Vahidlərin bölgüsü az-çox bərabər şəkildədirsə, qrupların sayını müəyyən etmək üçün amerikan alimi Sterdjesin təklif etdiyi

$$n = 1 + 2,30259 \lg N$$

düsturundan istifadə etmək olar. Burada N – statistika məcmuyundakı vahidlərinin sayıdır.

Fasilələr qapalı və açıq ola bilər. Qapalı fasilələrdə qrupların aşağı və yuxarı sərhədləri göstərilir. Açıq fasilələrdə ancaq ya aşağı, ya da yuxarı sərhəd göstərilir. Açıq fasilə ancaq birinci və axıncı qruplarda verilə bilər.

#### **4. TİPİK QRUPLAŞDIRMA**

Qruplaşdırmanın vəzifələrindən biri öyrənilən statistika məcmuyunun vahidlərini sosial-iqtisadi tiplərə ayırmaqdır. Hadisələri sosial-iqtisadi tiplərə

ayırmaq məqsədilə aparılan qruplaşdırmaya *tipik qruplaşdırma* deyilir. Tipik qruplaşdırmaya misal olaraq əhalinin cinsinə, təsərrüfatların mülkiyyət formalarına, əhalinin sosial qruplara, işçilərin əməyin xarakterinə görə bölgüsünü və s. göstərmək olar.

Tipik qruplaşdırmanın metodologiyası öyrənilən hadisələrdə keyfiyyət fərqlərinin nə dərəcədə aydın görünməsi ilə müəyyən edilir. Məsələn, sənaye müəssisələrini məhsulun iqtisadi təyinatına görə qruplaşdırdıqda əmək vasitələri və əmək alətləri istehsal edən sahələri, pərakəndə mal dövriyyəsinin makrostrukturunda isə ərzaq və qeyri-ərzaq məhsullarını fərqləndirirlər. Əksər hallarda hadisələr arasındakı keyfiyyət fərqi o qədər də aydın görünmür. Məsələn, sənaye sahəsində iri, orta və kiçik müəssisələrin seçilməsi metodoloji baxımdan kifayət qədər çətin problemdir. Bu cür hallarda tiplərin təxmini qeyd edilməsindən sonra, tiplərin ayrılmasını müəyyən edən əlamətlərin seçilməsini müəyyən etmək vacibdir.

## **5. QURULUŞ QRUPLAŞDIRMASI**

Hadisələri sosial-iqtisadi tiplərə ayırmaq onların bütün əlamətlər üzrə yekcins olması deyildir. Məsələn, kənd təsərrüfatı müəssisələri təsərrüfat tipi kimi yekcins, lakin istehsal istiqamətlərinə, əkin sahəsinə, əsas istehsal fondlarının həcminə, gəlirlərin həcminə və s. görə bir-birindən fərqlənirlər. Qruplaşdırmanın mühüm vəzifələrindən biri məkan və zaman daxilində hadisələrin quruluşunu və quruluşunda baş vermiş dəyişiklikləri konkret rəqəmlərlə işıqlandırmaqdan ibarətdir. Eyni tipli statistik məcmuyun vahidlərinin hər hansı əlamətə görə bölgüsünü xarakterizə edən qruplaşdırmaya *quruluş qruplaşdırması* deyilir.

Sosial-iqtisadi hadisələrin tədqiqində quruluş qruplaşdırmasından geniş istifadə edilir.

Quruluş qruplaşdırması öyrənilən hadisələrin quruluşunu xarakterizə etməklə bərabər, zaman etibarilə quruluşda baş vermiş dəyişiklikləri də müəyyənləşdirməyə imkan verir.

Əhalinin ginsi, yaş qrupu, yaşayış yeri və s. əlamətlər üzrə qruplaşdırılması da quruluş qruplaşdırmasına aiddir. Əhalinin təkrar istehsalını öyrənmək üçün bu əlamətlər üzrə qruplaşdırmanın böyük əhəmiyyəti vardır. Məsələn, əhalinin yaşa görə qruplaşdırılması onun quruluşunu, yəni əhalinin ümumi sayında ayrı-ayrı yaş qruplarının xüsusi çəkisini müəyyən etməyə imkan verir. Bu məlumatdan isə əhalinin təkrar istehsalının öyrənilməsində, məktəbəqədər müəssisələrin və məktəb şəbəkələrinin planlaşdırılmasında, həmçinin əmək məhsuldarlığının müəyyən edilməsində istifadə edilir.

## 6. *ANALİTİK QRUPLAŞDIRMA*

Qruplaşdırmanın üçüncü mühüm məsələsi sosial-iqtisadi hadisələr arasındakı qarşılıqlı əlaqə və asılılıqları öyrənməkdən ibarətdir. Sosial-iqtisadi hadisələr və onların əlamətləri arasındakı qarşılıqlı əlaqəni öyrənmək üçün aparılan qruplaşdırmaya *analitik qruplaşdırma* deyilir.

Qarşılıqlı əlaqədə olan əlamətlər təsiredici amil və nəticə əlamətinə ayrılır. Məsələn, müəssisələri əsas fondların həcminə görə qruplaşdırıb, hər qrup üzrə bir müəssisəyə düşən məhsul istehsalı hesablasa, onda əsas fondlar amil əlaməti, hər müəssisəyə düşən məhsul buraxılışı isə nəticə əlaməti olar. Başqa sözlə desək, əsas fondun həcmi nəticəyə (məhsul istehsalına) təsir edən amildir. Müəssisələr əmək məhsuldarlığının səviyyəsinə görə qruplaşdırılaraq hər bir qrup üçün məhsulun orta maya dəyəri hesablasa, əmək məhsuldarlığının səviyyəsi amil əlaməti, məhsulun orta maya dəyəri isə nəticə əlaməti olar. Eyni bir əlamət bir halda amil, digər halda isə nəticə əlaməti ola bilər. Belə ki, əmək məhsuldarlığı ilə maya dəyəri arasındakı əlaqəni öyrənərkən əmək məhsuldarlığının səviyyəsi amil əlaməti, əməyin enerji ilə təchiz olunma səviyyəsi ilə əmək məhsuldarlığı arasındakı əlaqənin öyrənilməsində isə əmək məhsuldarlığının səviyyəsi nəticə əlaməti olur.

Amil əlaməti üzrə qruplaşdırma aparıb nəticə əlaməti üzrə nisbi və orta kəmiyyətlər hesablanarsa, bu göstəricilər arasındakı qarşılıqlı əlaqə aşkar edilir.

## 7. *TƏKRAR QRUPLAŞDIRMA, ONUN MAHİYYƏTİ VƏ APARILMA QAYDASI*

Bəzən aparılmış qruplaşdırmanı yenidən qruplaşdırmaq zərurəti meydana çıxır. Əvvəlki qruplar tədqiqatın məqsədlərini təmin etmədikdə (məsələn, qruplar çox xırda olduqda) və məlumat müqayisəli şəkildə olmadıqda təkrar qruplaşdırmadan istifadə edilir. Əvvəlcədən aparılmış qruplaşdırma əsasında yeni qrupların təşkil edilməsinə təkrar qruplaşdırma deyilir.

Yeni qrupların təşkili iki üsulla aparıla bilər:

- ilk qruplaşdırmadakı qrupların fasilələrini dəyişməklə (adətən fasilələri iriləşdirməklə);
- ümumi yekunda qrupların xüsusi çəkisini tapmaqla.

## **8. ÇOXÖLÇÜLÜ QRUPLAŞDIRMA**

Bir əlamət üzrə qruplaşdırmada qruplaşdırmalar mürəkkəb sosial-iqtisadi hadisələrin ancaq bir tərəfini xarakterizə etməyə imkan verir. Hadisələri dərinədən, hərtərəfli öyrənmək üçün həmin hadisəyə təsir edən bütün amilləri nəzərə almaq lazımdır. Lakin bir çox amillərin təsirini nəzərə alan yekcins qrupların təşkilində bir sıra çətinliklərə rast gəlinir. Belə çətinliklərdən biri öyrənilən məcmudakı vahidlərin sayının çox zaman az olması ilə əlaqədardır. Bununla əlaqədar bəzi iqtisadçılar yekcins qrupların təşkilində ***klaster təhlilindən*** istifadə olunmasını təklif edirlər. Məlumdur ki, bu metodun tətbiqi elektron hesablayıcı maşınlardan istifadə edilməsi yolu ilə mümkündür.

Son zamanlar amil əlamətlərinin nəticə əlamətinə təsirinin təhlilində çoxölçülü qruplaşdırma metodundan istifadə edilir. Bu metod öz sadəliyi ilə klaster və korrelyasiya təhlilindən əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənir.

İqtisadiyyatın inkişafı ona təsir edən amillərin hərtərəfli təhlili əsasında istifadə olunmamış ehtiyatların aşkar edilməsi və onların istehsala yönəldilməsi yolu ilə təmin edilə bilər. Deməli, hadisələrin dəyişilməsinə təsir edən bütün iqtisadi amillər nəzərə alınmalıdır. Bu çoxölçülü qruplaşdırma metodunun vasitəsilə öyrənilir. Bu metod amilləri yekcins şəkildə idarə etməyə imkan verir.

***Çoxölçülü qruplaşdırma*** metodunun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, məcmu vahidləri üzrə amil əlamətlərinin natural qiymətlərinin orta kəmiyyətə nisbətlərinin hesablanması nəticəsində göstəricilər yekcins şəkllə salınır. Sonra məcmu vahidləri üzrə orta nisbi göstərici hesablanır. Bunun üçün amil əlamətlərinin nisbi göstəricilərini cəm edib əlamətlərin sayına bölmək lazımdır. *Orta nisbi göstərici əsasında qruplaşdırma apardıqda, bir neçə amil əlamətinin nəticə əlamətinə birgə təsirini müəyyənləşdirmək mümkündür.*



## MÖVZU 14. STATİSTİKA CƏDVƏLLƏRİ. STATİSTİK QRAFİKLƏR

### Plan:

#### 1.Statistik cədvəllər.

- 2.Qrafiklər haqqında ümumi anlayış
- 3.Qrafiklərin əsas elementləri
- 4.Qrafiklərin təsnifatı
- 5.Statistika məlumatlarının qrafiklərlə təsvirinin əsas növləri.

### Ə D Ə B İ Y Y T S İ Y A H I S I .

- 1.Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, "Maarif nəşriyyatı", 1973.
2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çapaşloğlu, 2006.

Yekunlaşdırma və qruplaşdırmanın nəticələri statistika cədvəllərində əks etdirilir. Statistika məlumatının izahı bir neçə formada, məsələn, mətn, cədvəl və qrafiklər şəklində verilə bilər. Statistika cədvəlləri tədqiq olunan ictimai hadisənin rəqəmlərlə təsvirinin və təhlil edilməsinin ən səmərəli formasıdır.

Statistika cədvəlində yekun məlumatı daha yığcam, aydın, ifadəli və əyani şəkildə görünür. Cədvəllər hadisəni daha yaxşı təhlil etməyə, məlumatı müqayisə etməyə geniş imkan verir. Mətn hadisə haqqında nəticə çıxartmağa da çətinlik törədir. Cədvəldə göstəricilər arasındakı əlaqə daha asanlıqla müəyyən edilir.

Statistika cədvəlləri yekunlaşdırılmış və qruplaşdırılmış materialların əlverişli şəkildə verilməsinin mühüm vasitəsidir.

Statistika cədvəlinin əsas elementləri mübtəda və xəbərdir.

Statistik məcmunun vahidləri, onların qrupları cədvəlin mübtədasını təşkil edir. Statistika məcmusunu, yəni mübtədanı xarakterizə edən göstəricilərə cədvəlin xəbəri deyilir.

Statistika cədvəli üfüqi sətirlərdən və şaquli sütunlardan ibarətdir. Sətirlər və sütunlar bir-birini kəsən düz xətlərlə ayrılır və onların kəsişən yerlərində xanalar əmələ gəlir. Cədvəlin ümumi, yan və yuxarı başlığı olmalıdır. Ümumi başlıq, bir qayda olaraq, cədvəlin üstündə yazılır və onun məzmununu xarakterizə edir. Cədvəlin yan başlığı onun sol tərəfində, mübtəda hissəsində yazılaraq cədvəlin

Statistika cədvəlinin maketi aşağıdakı şəkildədir.

Eyni zamanda müşahidə vahidlərinin siyahısı və ərazilərin adları verilən cədvəllər də sadə cədvəl adlanır.

Sadə cədvəllər öyrənilən hadisənin tipini, quruluşunu və hadisələr arasındakı qarşılıqlı əlaqəni aşkar etməyə imkan vermir. Bu cəhətdən qruplu və quraşığı

cədvəllər böyük imkana malikdir. Mübtədasında bir əlamət üzrə təşkil edilmiş qruplar olan cədvələ qruplu statistik cədvəl deyilir. Qruplu statistik cədvələ misal olaraq ..... ildə Azərbaycan Respublikasının əhalisinin yaşayış yerinə görə qruplaşdırılmasını göstərmək olar.

Azərbaycan respublikasının əhalisinin şəhər və kənd əhalisinə görə bölgüsü

| Əhali qrupları | Əhalinin sayı<br>(min nəfər) | Yekuna görə faizlə |
|----------------|------------------------------|--------------------|
| Şəhər əhalisi  |                              |                    |
| Kənd əhalisi   |                              |                    |
| Yekun          |                              | 100                |

Mübtədasında əlaqəli götürülmüş iki və daha çox əlamət üzrə qruplar olan cədvələ quraşlıq cədvəl deyilir. Əgər şəhər və kənd əhalisini cinsinə görə yarımqruplara ayırsaq, quraşlıq cədvəli alarıq.

Cədvəlin xəbərini həddindən artıq xırdalamaq olmaz. Xəbəri həddindən artıq xırdalanmış cədvəl öz əyanilik xarakterini itirir və onu dərk etmək çətinləşir.

Cədvəlin əyanilik xarakterini yüksəltmək onun nə dərəcədə düzgün və yığcam tərtib edilməsindən asılıdır. Cədvəlin başlıqları dəqiq və aydın yazılmalıdır. Çox böyük cədvəl əvəzinə iki və ya daha çox cədvəl vermək məqsədəuyğundur. Cədvəl böyük olduqda onun sütunlarını nömrələmək məqsədəuyğundur.

***Statistik cədvəllərin tərtibi zamanı aşağıdakı qaydaya əməl olunmalıdır.***

1. Başlıqda cədvəlin əsas məzmunu, hadisənin yeri və vaxtı əks etdirilməlidir.
2. Rəqəm məlumatlarını yuvarlaqlaşdırmaq lazımdır.
3. Bir sıra göstəricilər üçün ümumi olan sözləri başlıqda vermək lazımdır.
4. Yalnız ümumi şəkildə qəbul edilmiş ixtisarlardan istifadə edilməlidir.

5. Eyni tipli göstəricilər eyni dəqiqliklə verilməlidir.
6. Cədvəl qapalı olmalıdır. Yəni onda orta və yekun göstəricilər verilməlidir.
7. Xüsusi əhəmiyyətə malik göstəricilərin və qruplar üzrə yekunların ayrıca verilməsi üçün müxtəlif texniki üsullardan (xətt çəkmə, şriftin dəyişdirilməsi və s.) istifadə edilməlidir.
8. Aşağıdakı xüsusi işarələr tətbiq oluna bilər:
  - «—» – göstəricinin olmaması;
  - «0»(sıfır) – göstəricinin kəmiyyəti qəbul edilmiş dəqiqlikdən kiçikdir;
  - «<sup>x,1,2</sup>» – qeydlərə müraciət;
  - «x» – göstərici qiymət ala bilməz.

## STATİSTİK QRAFİKLƏR

### 1. Qrafiklər haqqında ümumi anlayış

Statistikada sosial-iqtisadi hadisələrin kəmiyyət tərəfləri haqqında məlumatın və onların nisbətlərinin nöqtələr, xətlər, şərti həndəsi fiqurlar, işarələr və şəkillər vasitəsilə təsvirinə **qrafiklər** deyilir.

İqtisadi-statistik tədqiqatda qrafiklər xüsusi rol oynayır. Qrafiklərin köməyiylə hadisələrin inkişafındakı qanunauyğunluqları asanlıqla aşkar etmək və onları əyani şəkildə təsvir etmək mümkün olur. Statistika məlumatının başa düşülə biləcək şəkildə əhaliyə çatdırılmasında qrafiklərin rolu böyükdür. Qrafiklərin çox böyük əyanilik xarakteri vardır. Onlar güclü təbliğat-təşviqat vasitəsidir.

Qrafikləri qurmaqda məqsəd statistika məlumatını geniş xalq kütləsi üçün əyani, başa düşüləcək şəkildə təsvir etməkdən və statistika məlumatını ümumiləşdirməkdən, öyrənilən hadisə üçün xarakterik olan əlaqə və nisbətləri aydınlaşdırmaqdan ibarətdir.

Statistika qrafiklərindən: 1) vaxt etibarilə hadisənin inkişafını xarakterizə etmək ; 2) tapşırıqın yerinə yetirilmə dərəcəsini göstərmək ; 3) müxtəlif obyektləri bir-birilə müqayisə etmək ; 4) öyrənilən statistika məcmusunun tərkibini, quruluşunu və quruluş dəyişikliklərini xarakterizə etmək ; 5) hadisələr və onların əlamətləri arasındakı qarşılıqlı əlaqələri öyrənmək; 6) hadisənin məkanca paylanmasını göstərmək üçün istifadə edilir.

Hal-hazırda qrafiklərin təcrübədə tətbiqini asanlaşdırmaq üçün kompyuter qrafikasının müxtəlif tətbiqi proqramlar paketi hazırlanmışdır. Məsələn: “Harvardgraphics”, “Statgraf”, “Supercolc”, “Excel” və s.

### 2. Qrafiklərin əsas elementləri

Statistika qrafiklərinin elementləri aşağıdakılardır:

1) Qrafik sahəsi-müəyyən həcmə, nisbətə malik olan işarələrin yerləşdiyi sahədir;

2) Həndəsi işarələr-qrafikdə əks olunan hadisələrin simvollarıdır. Bu simvollar müxtəlif ola bilər: nöqtələr, xətlər, dairələr, sektorlar, fiqurlar;

3) Sahə oriyentasiyaları: bunlar qrafik sahəsində həndəsi işarələrin yerləşdirməsini müəyyən edir. Bu oriyentasiyalar qəbul edilmiş koordinat sistemindən asılıdır.

4) Miqyas oriyentasiyaları: bunlar həndəsi fiqurların kəmiyyətini əks etdirir - işarələrin etalonudur. Onlar dairə, düzbucaqlı, kvadratlar şəklində təsvir edilir və adətən qrafik sahəsindən çıxarılır. Hadisənin kəmiyyətini ancaq hadisənin qrafik işarəsini etalonla müqayisə etməklə müəyyən etmək olar.

5) Qrafikin izahı. Bu, qrafikin məzmununun sözlə izah edilməsi və həndəsi işarənin hər birinin mahiyyətinin, mənasının göstərilməsi deməkdir.

Qrafik sahəsinin həcmi onun təyinatından asılıdır. Həndəsi işarələrin tətbiqindən asılı olaraq qrafiklər nöqtələrlə, xətlərlə, sütunlarla, kvadratlarla, dairələrlə və s. təsvir oluna bilər. Qrafiklər fiqurlar vasitəsi ilə də verilir. Bu zaman həndəsi işarələrin düzgün seçilməsinin mühüm əhəmiyyəti vardır. O, qarşıda duran məqsədə və təsvir edilən statistika məlumatının əyaniliyinin artırılması məqsədinə uyğun olmalıdır.

Sahə oriyentasiyaları koordinat sistemi şəklində verilir. Statistika qrafiklərində adətən düzbucaqlı koordinat sistemlərindən istifadə edilir.

Miqyas oriyentasiyaları miqyas şkalaları ilə müəyyən edilir. Statistika məlumatının şərti ölçülərlə qrafiklərdə verilməsinə **miqyas** deyilir. Qəbul edilmiş miqyasa uyğun olaraq ayrı - ayrı nöqtələri müəyyən statistika göstəricilərinin qiyməti kimi oxuna bilən xətlərə **şkala** deyilir.

Cədvəllər kimi, qrafiklərin də başlığı qısa və aydın olmalıdır. O, qrafikdə təsvir olunan məlumatın əsas məzmununu əks etdirməlidir. Başlıq adətən iri hərflərlə qrafikin üstündə yazılır. Kitab və məqalələrdə qrafiklərin başlığı onun aşağı hissəsində yazılır. Başlıqdan başqa hər bir qrafikdə şaquli şəkildə miqyaslar, əyri xətlərin adları, şərti işarələr, qrafiklərin xarakterizə etdiyi vaxt və s. göstərməlidir.

Qrafiklərin həcmi onların təyinatına uyğun olmalıdır. Sərgilərdə nümayiş etdirmək, mühazirələr aparmaq üçün böyük formatlı qrafiklər, elmi hesabatları işıqlandırmaq, kitab və məqalələrdə vermək üçün isə kiçik formatlı qrafiklər tərtib edilməlidir.

Qrafiklərin əyanilik, ifadəlik xarakterini yüksəltmək üçün onun rənglənməsinə xüsusi əhəmiyyət vermək lazımdır. Rənglənmə qrafikin məzmunun mənasını başa düşməyə imkan verir.

### **3. Qrafiklərin təsnifatı**

Çoxlu sayda xüsusiyyətlərinə görə bir-birindən fərqlənən qrafik təsvirlər olduğu üçün onların ayrı - ayrı qruplara ayrılması zərurəti meydana çıxır. Qruplaşdırma əlaməti olaraq əvvəlcə qrafik sahələrinin müxtəlifliyini götürək.

Qrafik sahəsi adi təmiz kağız, adi coğrafi xəritə və yaxud kontur xəritəsi ola bilər. Bu nöqtəyi-nəzərdən qrafiklər iki qrupa - diaqramlara və statistika xəritələrinə ayrılır. Statistika məlumatının həndəsi fiqurlar sisteminin köməyi ilə təsvirinə **diaqram** deyilir. Diaqramlar: a) statistika göstəricilərinin müqayisəli diaqramına, b) quruluş və quruluş dəyişikliyi diaqramına, v) dinamika diaqramına, d) tapşırığın yerinə yetirilməsi diaqramına, e) variasiya sıraları qrafikinə, f) əlaqə qrafikinə ayrılır. Diaqramları qurmaq üçün ən çox həndəsi fiqurlardan və xətlərdən istifadə olunur.

Statistika xəritələri hadisənin ərazi üzrə yerləşməsinə göstərir. Statistika xəritələri kartoqramlara, kartodioqramlara və sentroqramlara ayrılır. Statistika xəritələri BMT-nin nəşrlərində tez-tez istifadə edilir. Kartoqram ayrı-ayrı rayonlarda öyrənilən əlamətin əraziyə görə paylanmasını göstərir və bu paylanmanın qanunauyğunluğunu aşkar etmək üçün istifadə edilir. Kartoqram fon və nöqtəvi olurlar. Fon kartoqramları (müxtəlif tündlüyə malik rənglərlə) öyrənilən əlamətin müxtəlif ərazilərdə paylanmasını xarakterizə edir. Məsələn, bir neçə rayonda dənli bitkilərin məhsuldarlığı haqqında məlumatlar fon kartoqramları vasitəsilə təsvir edilə bilər. Belə ki, məhsuldarlığı 20 s olan rayonlar solğun-sarı rəngli, 20-30 s olanlar açıq-sarı, 30 s-dan yuxarı olanlar isə sarı-qırmızı ilə rənglənə bilər.

Kartoqramda statistika məlumatı, məsələn, əhalinin sıxlığı haqqında məlumat coğrafi xəritədə rəngləmək və ya ştrixləməklə təsvir edilir. Yüksək sıxlığa malik olan rayon, ölkə daha tünd rənglənilir.

Nöqtəli kartoqramda hər bir nöqtəyə eyni ədədi qiymət, məsələn 100 t uyğun gəlir. Hər bir rayonun konturunda uyğun miqdarda nöqtələri qurmaqla biz öyrənilən əlamətin rayonlar üzrə paylanmasını xarakterizə edən nöqtəvi kartoqramı alaraq. Bir qayda olaraq fon kartoqramları nisbi və orta kəmiyyətlərin təhlili üçün, nöqtəvi isə mütləq kəmiyyətlərin yerləşməsinə xarakterizə etmək üçün istifadə edilir.

Statistika məlumatı coğrafi xəritə və ya tor üzərində şərti işarələr əsasında həndəsi fiqurlarla təsvir edilərsə buna **kartoqram** deyilir. Kartoqram diaqramın coğrafi xəritə ilə birləşməsidir. O öyrənilən əlamətin paylanmasında hər bir rayonun xüsusiyyətini, onun quruluş xüsusiyyətlərini əks etdirməyə imkan verir.

#### 4. Statistika məlumatlarının qrafiklərlə təsvirinin əsas növləri

**Xətti qrafiklər.** Bu qrafiklər ən çox hadisələrin vaxt etibarı ilə dəyişilməsini, həmçinin hadisələr arasındakı əlaqənin öyrənilməsinə xarakterizə etmək üçün istifadə edilir.

Xətti qrafiklər vasitəsi ilə hadisələrin vaxt etibarı ilə dəyişilməsini xarakterizə etmək üçün adətən düzbucaqlı koordinat sistemindən istifadə edilir. Absis oxu (yəni X oxu) üzərində dövr, vaxt, an ordinat oxu (yəni Y oxu) üzərində göstəricinin həcmi, səviyyəsi göstərilir.

Sütunlu qrafiklərə nisbətən, xətti qrafiklərin böyük üstünlüyü vardır. Belə ki, xətti qrafiklər bir deyil, bir neçə göstəricinin dəyişilməsini və onların əlaqəsini birlikdə xarakterizə etmək imkanına malikdir. Məsələn, bir koordinat sistemində,

dənli bitkilər üzrə ümumi məhsul yığımı ilə birlikdə əkin sahəsinin və bitkilərin məhsuldarlığının dəyişilməsini göstərmək mümkündür.

**Sütunlu diaqramlar.** Təcrübədə hadisələri bir-biri ilə müqayisə etmək üçün, hadisənin vaxt etibarı ilə dəyişilməsini və quruluşunu xarakterizə etmək üçün sütunlu diaqramlardan çox geniş istifadə olunur.

Sütunlu diaqramlar qurmaq üçün: 1) düzbucaqlı koordinat sistemindən istifadə olunur, 2) Şkalalar absis və ordinat oxlarına köçürülür (məkan və dövrlər absis oxunda, hadisələrin vaxt etibarı ilə dəyişilməsini xarakterizə edən kəmiyyət göstəriciləri isə ordinat oxunda yerləşdirilir), 3) koordinat oxlarında statistika məlumatı bərabər enlikdə olan düzbucaqlı sütunlar vasitəsilə təsvir edilir. Düzbucaqlı sütunlar şaquli şəkildə yerləşərsə, sütunlu diaqram, üfüqi şəkildə yerləşərsə lentvarı diaqram alınır.

**Fiqurlu diaqramlar.** Hadisələri daha əyani şəkildə xarakterizə etmək üçün həmin hadisələrə uyğun gələn fiqurlardan istifadə edilir. Bu zaman ölçü vahidi kimi şərti fiqurlar tətbiq olunur. Belə ki, diaqram vasitəsilə yük dövriyyəsinin artmasını xarakterizə etmək üçün şərti fiqur kimi vaqonları, süd istehsalının inkişafını xarakterizə etmək üçün şərti fiqur kimi süd balonlarını, yun istehsalının inkişafını xarakterizə etmək üçün şərti fiqur kimi qoyun götürülür. Bu o deməkdir ki, şərti olaraq 100 mln ton/km yük dövriyyəsinə bir vaqona bərabər götürsək, onda 500 mln ton/km yük dövriyyəsinə təsvir etmək üçün 5 yük vaqonunun şəklini çəkmək lazımdır.

**Kvadrat və dairəvi diaqramlar.** Hadisələrin əlamətlərinin qiymətləri bir-birindən ciddi surətdə fərqləndikdə onları sütunlu diaqramlarla təsvir etmək əlverişli olmur. Belə halda kvadrat və dairəvi diaqramlardan istifadə etmək məsləhət görülür. Onlar həm hadisələrin vaxt etibarı ilə dəyişilməsini xarakterizə etmək, həm də eyni dövrə və ya vaxt anına aid olan kəmiyyətləri müqayisə etmək üçün istifadə edilir.

Kvadrat və dairəvi diaqramlar vasitəsilə statistika məlumatlarını təsvir etmək üçün.

1)həmin məlumatın kvadrat kökünü almaq lazımdır, 2) müəyyən miqyas əsasında tərəfləri alınmış nəticələrə proporsional olan kvadrat və dairə qurmaq lazımdır.

Dairəvi diaqramı qurmaq üçün radiusları təsvir edilən kəmiyyətin kvadrat kökünə proporsional olan dairələr çəkmək lazımdır.

**Sektorlu diaqramlar.** Bu diaqramlarda hadisənin tərkibini, quruluşunu göstərən məlumat təsvir olunur. Təsvir edilən hadisənin tərkibinə, quruluşuna müvafiq olaraq radianlarla sektorlara bölünən dairə **sektorlu diaqram** adlanır. Sektorlu diaqramla hadisəni təsvir etmək üçün:

1) sahələri 100%-ə bərabər olan dairə və yaxud kvadrat götürülür;

2) dairə və ya kvadrat təsvir edilən məcmunun ayrı-ayrı hissələrinə proporsional olaraq sektorlara bölünür. Bunun üçün sektorların mərkəzi bucaqları tapılır və transportir vasitəsilə bölüşdürülür.

a) Hadisənin tərkib hissələri mütləq kəmiyyətlə verildikdə, mərkəzi bucaqları müəyyən etmək üçün tamı  $360^0$ -ə bölüb, alınan nəticəni ardıcıl olaraq tamın tərkib hissələrinin mütləq qiymətinə vurmaq lazımdır.

b) Hissə yekuna görə faizlə verilibsə, o zaman 360 dərəcəni 100-ə bölüb, alınan nəticəni  $(3,6^0)$  faizlə ifadə olunan hissələrin xüsusi çəkirlərinə vurmaq, yaxud hissənin xüsusi çəkisini  $360^0$  dərəcəyə vurmaq lazımdır.

Sektorlu diaqram vasitəsi ilə hadisənin ümumi həcmnin dəyişməsinə xarakterizə etməklə bərabər, onun xüsusi çəkisinin dəyişməsinə də vermək mümkündür. Bunun üçün öyrənilən hadisənin ümumi həcminə proporsional olan dairələr çəkmək lazımdır. Belə diaqram nəinki hadisənin tərkibinin dəyişməsinə, eyni zamanda onun ümumi həcmnin dəyişməsinə xarakterizə etmək imkanına malikdir.

Varzar işarələri. Bir-biri ilə əlaqəsi olan 2 mütləq səviyyənin hasili nəticəsində 3-cü statistik göstərici alınır. Bu göstəriciləri qrafikdə təsvir etmək üçün təcrübədə xüsusi işarədən istifadə edilir. Belə qrafikləri ilk dəfə rus statistiki V.Y.Varzar (1851-1940) tətbiq etmişdir. Üç amilin qarşılıqlı əlaqəsini əyani şəkildə Varzar işarələri ilə təsvir etmək olduqca əlverişlidir.

Bu qrafiki qurmaq üçün oturacağı və hündürlüyü amil əlamətlərini, sahəsi isə nəticə əlamətini xarakterizə edən düzbucaqlıdan istifadə etmək lazımdır. Məsələn, X – məhsuldarlıq, Y – əkin sahəsi olarsa,  $S = XY$  ümumi yığım olar.

Bu işarələrdən, ayrı-ayrı rayonlar, ölkələr üzrə hər bir kənd təsərrüfatı bitkisinin ümumi məhsul yığımına məhsuldarlığın və əkin sahəsinin təsirini müqayisə etmək üçün istifadə edilir.

## MÖVZU 15. MÜTLƏQ VƏ NİSBİ KƏMİYYƏTLƏR

### PLAN:

1. Mütləq kəmiyyətlər
2. Mütləq kəmiyyətlərin ölçü vahidləri
3. Nisbi kəmiyyətlərin ifadə formaları
4. Nisbi kəmiyyətlərin növləri
5. Mütləq və nisbi kəmiyyətlərdən istifadə olunmasının ümumi prinsipləri

### Ə D Ə B İ Y Y T S İ Y A H I S I .

1.Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, "Maarif nəşriyyatı", 1973.

2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasimov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çarşıoğlu, 2006.

### **1. Mütləq kəmiyyətlər**

Məlumdur ki, ictimai-iqtisadi hadisələrin kəmiyyət tərəflərini və onların nisbətini öyrənmək statistikanın predmetini təşkil edir. Hadisə və proseslərin kəmiyyət tərəflərini və onların nisbətini statistika xüsusi ümumiləşdirici göstəricilərlə ölçür və ifadə edir. ***İctimai-iqtisadi hadisələrin kəmiyyət tərəfi mütləq kəmiyyətlərlə, miqdar nisbətləri isə nisbi kəmiyyətlərlə xarakterizə edilir.*** Statistika müşahidəsi vasitəsilə toplanmış məlumat və onların yekunlaşdırılması və qruplaşdırılması mütləq və nisbi kəmiyyətləri müəyyənləşdirməyə imkan verir.

Statistika müşahidəsi nəticəsində statistika məcmusunun hər bir vahidini xarakterizə edən əlamətlər üzrə məlumatlar toplanır. Statistika məcmusunu bütövlükdə və ya onun ayrı-ayrı hissələrini xarakterizə etmək üçün toplanmış məlumatlar yekunlaşdırılır və nəticədə ümumiləşdirici göstəricilər alınır. Öyrənilən hadisənin kəmiyyət tərəfi bu göstərici vasitəsilə ifadə edilir.

***İlkin məlumatların bilavasitə cəmlənməsi nəticəsində mütləq kəmiyyətlər alınır.*** Statistika ictimai-iqtisadi hadisələrinin konkret zaman və məkan daxilində həcmi, səviyyəsini ifadə edən göstəricilərə ***mütləq kəmiyyətlər*** deyilir.

Məsələn, 1.01.2009-cu il tarixə Azərbaycan Respublikasında daimi əhalinin sayı ..... min nəfər, həmin ildə ümumi daxil məhsul (ÜDM) istehsalının həcmi isə ..... mlrd.manat olmuşdur. Birinci göstərici əhalinin konkret ana sayını göstərir və cari müşahidənin nəticələrinin yekunlaşdırılması nəticəsində alınır. İkinci göstərici isə cari müşahidə nəticəsində toplanmış məlumatların yekunlaşdırılması nəticəsində alınır və hadisənin müəyyən dövr ərzində həcmi ifadə edir.

Mütləq kəmiyyətlər ***fərdi və yekun mütləq*** kəmiyyətlərinə bölünür. Fərdi mütləq kəmiyyətlər obyektin ayrı-ayrı vahidlərinin həcmi, səviyyəsini ifadə edir. Statistika müşahidələri, birinci növbədə, fərdi mütləq kəmiyyətləri aşkar etməyə imkan verir. Onlar hər bir elmi tədqiqat işinin aparılmasının əsasını təşkil edir. Fərdi mütləq kəmiyyətlərə misal olaraq ayrı-ayrı təsərrüfatların pambıq əkin sahəsini, traktorlarının sayını, aylıq əmək haqqının həcmi və s. göstərmək olar.

Fərdi mütləq kəmiyyətlər yekun mütləq kəmiyyətlərini əldə etmək üçün əsasdır. ***Yekun mütləq kəmiyyətləri*** öyrənilən məcmunun bütün vahidlərinin, yaxud onun ayrı-ayrı qruplarının bu və ya digər əlamət üzrə kəmiyyətini ifadə edir. Onlar əsasən müşahidə zamanı toplanmış fərdi mütləq kəmiyyətləri cəmləmək yolu ilə əldə edilir. Əhalinin siyahıya alınması məlumatlarını əlamətlər üzrə yekunlaşdırdıqda, ayrı-ayrı kəndlər, qəsəbələr, şəhərlər, rayonlar və respublika üzrə bütövlükdə əhalinin sayı, şəhər və kənd əhalisinin sayı, kişi və qadınların sayı haqqında yekun mütləq kəmiyyəti alınır.

Bəzən yekun mütləq kəmiyyətlər xüsusi hesablamalar əsasında müəyyən edilir. Proqnozlaşdırmada əhalinin perspektiv sayının müəyyən edilməsinin mühüm əhəmiyyəti vardır. Bu işlə statistika orqanları məşğul olur. Belə hesablamalar nəticəsində yekun mütləq kəmiyyəti alınır. Əhalinin həyətyanı sahələrində istehsal olunan məhsulun miqdarı da xüsusi hesablama əsasında

müəyyən edilir. Hesablama nəticəsində əldə edilmiş mütləq kəmiyyətlər ən çox proqnozlaşdırma işində istifadə edilir.

## **2. Mütləq kəmiyyətlərin ölçü vahidləri**

Mütləq kəmiyyətlər adlı kəmiyyətlərdir. Onlar həmişə müəyyən ölçü vahidi ilə ifadə olunur. Onlar natural, şərti - natural, kombinəlaşdırılmış, dəyər (pul) və əmək ölçü vahidləri ilə ifadə oluna bilər.

İctimai hadisələrin təbii xüsusiyyətlərinə uyğun olaraq istifadə olunan ölçü vahidlərinə **natural ölçü vahidləri** deyilir. Natural ölçü vahidləri ictimai hadisələrin fiziki xüsusiyyətlərini əks etdirir. Ölçü vahidi məhsulun istehlak xassəsinə uyğun gəldikdə natural ölçü vahidlərindən istifadə edilir. Məsələn, neft hasilatı tonla, parça istehsalı  $m^2$ -ə, satışı isə m-ə, daşınmaz yükün miqdarı tonla, onun aparıldığı məsafə km-ə, ölkənin ərazisinin sahəsi  $km^2$  və s. ifadə olunur. Bütün bunlar natural ölçü vahidləri adlanır.

Bəzən bir ölçü vahidi məhsul istehsalı haqqında aydın təsəvvür yaratmır. Bu halda həmin məhsulun təbii xüsusiyyətinə uyğun olaraq iki ölçü vahidindən istifadə edilir. Məsələn, elektrik generatorları və motorları istehsalı ədəd və güc vahidi ilə, parça istehsalı m və  $m^2$ -lə, kağız istehsalı ton və  $m^2$ -lə, polad truba istehsalı ton və paqon metrə ifadə olunur.

Natural ölçü vahidləri ilə ifadə olunan eyni adlı, lakin müxtəlif istehlak xüsusiyyətinə malik olan məhsulların miqdarı haqqında məlumatı cəmləmək olmaz. Ona görə də ***şərti natural ölçü vahidlərindən*** istifadə edilir. Məsələn, müxtəlif gücə malik olan traktorları şərti etalon traktor, yağlılıq dərəcəsinə görə müxtəlif faizli sabunları şərti 40%-li sabuna, müxtəlif oxlu vaqonları ikioxlu vaqonlara, müxtəlif yanacaq növlərini şərti 7000 kilokalorili yanacağa və s. çevirmək mümkündür.

Bu halda məhsul növlərindən biri etalon olaraq qəbul edilir, digərləri isə uyğun çevirmə əmsallarının köməyi ilə etalona çevrilir.

Deyilənləri şərti 40%-li sabun misalında izah edək.

|              |            |     |
|--------------|------------|-----|
| Firma sabun  | 10 min ton | 40% |
| buraxmışdır: | 3 min ton  | 80% |

5 min ton    60%

Şerti 40%-li sabuna çevirək (40%-li etalon olaraq qəbul edilir).

Çevirmə əmsalları:

40%-li üçün..... $40:40=1,0$

60%-li üçün..... $60:40=1,5$

80%-li üçün..... $80:40=2,0$

Onda şerti 40%-li sabun hesabı ilə məhsul istehsalı

$10*1,0+5*1,3+3*2,0=23,5$  min ton təşkil edər.

Şerti natural ölçü vahidləri eyni adlı məhsul istehsal edən müəssisələrin işini müqayisə etmək üçün istifadə edilir.

Bir sıra hadisələrin həcmi ifadə etmək üçün **kombinəlaşdırılmış ölçü vahidlərindən** istifadə edilir. Məsələn, nəqliyyatda yük və sərnişin daşınması ton-kilometrlə və sərnişin-kilometrlə, elektrik enerjisi istehsalı və istehlakı kv-tsaatla, işlənmiş vaxt adam-saat, adam-gün və s. ilə ifadə edilir.

Müxtəlif istehlak dəyərli məhsulların birlikdə həcmi ancaq pul ölçü vahidi ilə ifadə etmək mümkündür. Məsələn, əsas və dövryyə fondlarının ümumi həcmi, sənaye və kənd təsərrüfatı məhsulunun, mal dövryyəsinin, milli gəlirin həcmi pul ifadəsində müəyyən edilir. Həmin göstəriciləri dinamikada öyrənmək üçün statistikada müqayisəli (sabit, dəyişməz) qiymətlərdən istifadə olunur.

Mühüm ölçü vahidlərindən biri də **əmək ölçü vahidləri**dir. Əmək ölçü vahidlərinə adam-saat, adam-gün, adam-il daxildir. Bu ölçü vahidlərindən məhsul istehsalına sərf edilmiş əmək məsrəfini və əmək məhsuldarlığının səviyyəsini ölçmək üçün istifadə edilir. Bu vahidlərdən əmək ehtiyatlarını müəyyən etmək, onlardan istifadənin səmərəliliyini müəyyən etmək və bir çox digər hesablamalar üçün də istifadə edilir.

### **3. Nisbi kəmiyyətlərin ifadə formaları**

Tədqiq olunan hadisələrin xüsusiyyətlərindən asılı olaraq nisbi kəmiyyətlər müxtəlif formalarda ifadə olunur. Nisbi kəmiyyətin ən sadə ifadə forması bir

kəmiyyətin digər kəmiyyətdən neçə dəfə çox və ya az olduğunu göstərən **əmsal** göstəricisidir. Bu ifadə formasından, adətən, müqayisə olunan göstərici müqayisənin əsasını təşkil edən göstəricidən bir neçə dəfə böyük olduqda istifadə edilir. Statistikada iki mütləq kəmiyyət göstəricisinin müqayisəsi nəticəsində əmələ gələn üçüncü bir göstəriciyə əmsal deyilir. *Əmsal hesablanarkən müqayisə üçün əsas götürülmüş kəmiyyət vahidə bərabər tutulur.*

Müqayisə edilən ədədi müqayisə üçün əsas götürülmüş kəmiyyətə bölüb, 100-ə vurduqda nisbi kəmiyyət **faiz**lə ifadə edilmiş olur. Burada müqayisənin əsası olan kəmiyyət şərti olaraq 100-ə bərabər götürülür. *Bu ifadə formasından, adətən, müqayisə olunan kəmiyyətlə müqayisənin əsasını təşkil edən kəmiyyət bir-birinə çox yaxın olduqda istifadə edilir.*

Bəzən nisbi kəmiyyətlər **promille** (ədədin mində biri) və **prodesimille** (ədədin on mində biri) ilə ifadə olunur. Promilledə müqayisənin əsası şərti olaraq 1000-ə, prodesimilledə isə 10000-ə bərabər götürülür. *Bu ifadə formalarından müqayisə olunan kəmiyyət müqayisənin əsasını təşkil edən kəmiyyətdən çox kiçik olduqda, başqa sözlə, əmsal və faiz ifadə formalarından istifadə etmək səmərəsiz, ifadəsiz olduqda istifadə olunur.*

$\text{‰}$ -**promille**,  $\text{‰‰}$ -**prodesimille**.

Promilledən əhali statistikasında, prodesimilledən isə səhiyyə statistikasında geniş istifadə edilir.

Bəzi müxtəlif adlı kəmiyyətləri müqayisə etdikdə adlı nisbi kəmiyyətlər alınır. Onların adları müqayisə edilən və bazis kəmiyyətinin adlarının kombinasiyası əsasında əmələ gəlir. Əhalinin sıxlığı (1 km<sup>2</sup> sahəyə düşən əhalinin sayı) və 1 nəfərə düşən məhsul istehsalı bu nisbi kəmiyyətlərə misal ola bilər.

#### **4. Nisbi kəmiyyətlərin növləri**

Məzmunundan, yəni hansı nisbəti ifadə etməsindən asılı olaraq nisbi kəmiyyətlərin aşağıdakı növlərini fərqləndirirlər:

- 1) Müqavilə öhdəliyinin yerinə yetirilməsi nisbi kəmiyyəti;

- 2) Müqavilə öhdəliyi nisbi kəmiyyəti;
- 3) Dinamika nisbi kəmiyyəti;
- 4) Quruluş nisbi kəmiyyəti;
- 5) İntensivlik nisbi kəmiyyəti;
- 6) Müqayisə nisbi kəmiyyəti;
- 7) Koordinasiya nisbi kəmiyyəti;
- 8) İqtisadi inkişaf səviyyəsi nisbi kəmiyyəti.

***Müqavilə öhdəliyinin yerinə yetirilməsi nisbi*** kəmiyyəti bu və ya digər müddət ərzində müəyyən göstəricilər üzrə müqavilə öhdəliyinin yerinə yetirilmə dərəcəsini xarakterizə edir. Bu kəmiyyət adətən faiz şəklində hesablanır.

O, göstəricinin faktiki və müqavilə səviyyəsi arasındakı nisbəti ifadə edir. Bu kəmiyyəti hesablamaq üçün faktiki məlumatı 100-ə vurub müqavilə öhdəliyi məlumatına bölmək lazımdır.

Nisbi kəmiyyətlər hesablanarkən faktiki və müqavilə məlumatları müqayisə edilməli olmalıdır. Yəni:

- ❖ Məlumatlar eyni obyektə və eyni müddətə xarakterizə etməli, eyni ölçü vənidi ilə ifadə olunmalıdır;
- ❖ Faktiki və müqavilə göstəricilərinin kəmiyyəti eyni metodologiya ilə hesablanmalıdır;
- ❖ Müqayisə edilən dəyər göstəriciləri eyni bir dövrün qiyməti ilə (müqayisəli qiymətlə) ifadə edilməlidir;
- ❖ Məlumatlar göstəricinin konkret məzmunu mənasında müqayisəli olmalıdır (müqavilə məlumatı satılmış məhsulun həcmidirsə, faktiki məlumat da satılmış məhsulun həcmi qəbul edilməlidir).

***Müqavilə öhdəliyi nisbi kəmiyyəti*** əsas götürülmüş dövrün faktiki (hesabat) göstəricilərinə nisbətən müqavilə öhdəliyində nəzərdə tutulmuş göstəricilərin necə dəyişildiyini xarakterizə etmək üçün istifadə edilir. Bu kəmiyyəti hesablamaq üçün qarşıdakı dövr üçün müqavilə öhdəliyi göstəricisini 100-ə vurub, əsas dövrdəki müvafiq faktiki göstəriciyə bölmək lazımdır. Burada hər iki göstərici eyni obyektə

xarakterizə edib, eyni ölçü vahidi ilə ifadə olunmalıdır. Lakin 1-ci göstərici gələcək dövr üçün, 2-ci göstərici isə əsas dövr üçün hadisənin, müvafiq olaraq müqavilə və həqiqi vəziyyətini xarakterizə edir.

Çox vaxt müqavilə öhdəliyi nisbi kəmiyyət şəklində verilir. Belə halda müqavilə öhdəliyinin yerinə yetirilmə dərəcəsini müəyyən etmək üçün həqiqi səviyyəni 100-ə vurub, müqavilə öhdəliyi nisbi kəmiyyətinə bölmək lazımdır. Məsələn, əmək məhsuldarlığının müqavilədə 8% artırılması nəzərdə tutulmuşsa, həqiqətdə isə o, 10% artmışsa, deməli, əmək məhsuldarlığı üzrə müqavilə öhdəliyi 101,8% ( $110 \cdot 100 / 108$ ), yəni 1,8% artıqlaması ilə yerinə yetirilib. Başqa bir misal. Məhsul vahidinə çəkilən xərcləri əsas dövrün həqiqi səviyyəsinə nisbətən 6% azaltmaq nəzərdə tutulmuşdur. Həqiqətdə isə hesabat dövründə xərclər 8% aşağı düşmüşdür. Onda müqavilə öhdəliyinin dərəcəsi  $92/94 \cdot 100\% = 97,8\%$  təşkil edər ki, bu da o deməkdir ki, məhsul vahidinə çəkilən xərc müqaviləyə nisbətən 2,2 % ( $97,8 - 100$ ) aşağı düşmüşdür.

Bir növlü ictimai hadisələrin səviyyəsinin zaman etibarilə dəyişməsinə xarakterizə edən nisbi göstəricilərə **dinamika nisbi kəmiyyəti** deyilir. O, iki eyni adlı obyektə xarakterizə edən, lakin müxtəlif vaxtlara aid olan göstəricinin müqayisəsi nəticəsində alınır. Dinamika nisbi kəmiyyəti əmsal və faizlə ifadə oluna bilər. O, qonşu dövr və uzun dövr üçün hesablanı bilər. Uzun dövr üçün dinamika nisbətini hesablayarkən müqayisə üçün götürüləcək əsas kəmiyyətin düzgün seçilməsinin xüsusi əhəmiyyəti vardır.

Dinamika nisbi kəmiyyəti iki qaydada - əsas və silsiləvi qaydada hesablanı bilər. Hər dövr özündən əvvəlki dövrlə müqayisə edildikdə alınan göstəricilərə **silsiləvi dinamika nisbi kəmiyyəti** deyilir. Bütün dövrləri müqayisə üçün əsas götürülmüş dövrlə müqayisə etdikdə alınan nisbi göstəricilərə **əsas dinamika nisbi kəmiyyətləri** deyilir. Müqavilə öhdəliyi, müqavilə öhdəliyinin yerinə yetirilməsi və dinamika nisbi kəmiyyətləri arasında qarşılıqlı əlaqə vardır. Əsas dövrün mütləq kəmiyyətini  $q_0$ , hesabat dövrünün mütləq kəmiyyətini  $q_1$ , müqavilə öhdəliyinin mütləq kəmiyyətini  $q_{müq}$  ilə işarə edək.

Onda:

$q_{müq} / q_0$  - müqavilə öhdəliyi nisbi kəmiyyəti;

$q_1 / q_{müq}$  - müqavilə öhdəliyi yerinə yetirilməsi nisbi kəmiyyəti;

$q_1 / q_0$  – dinamika nisbi kəmiyyəti

olar. Bu üç göstərici arasında əlaqə aşağıdakı kimidir:

- 1)  $q_1 / q_0 : q_{müq} / q_0 = q_1 / q_{müq}$ ;
- 2)  $q_{müq} / q_0 * q_1 / q_{müq} = q_1 / q_0$ ;
- 3)  $q_1 / q_0 : q_1 / q_{müq} = q_{müq} / q_0$ .

Bu əlaqədən istifadə edərək, hər hansı iki nisbi kəmiyyət haqqında məlumat verilərsə, üçüncü nisbi kəmiyyəti müəyyən etmək olar.

***Quruluş nisbi kəmiyyəti*** öyrənilən məcmunun tərkibini xarakterizə edir. O, hissənin tama olan nisbətini və ya ümumi yekunda hissələrin xüsusi çəkirlərin göstərir. Onu hesablamaq üçün məcmunun ayrı-ayrı hissələrinin kəmiyyətlərini yekun kəmiyyətinə bölmək lazımdır. *Öyrənilən məcmunun quruluş nisbi kəmiyyətlərinin cəmi əmsalla hesablandıqda vahidə, faizlə hesablandıqda isə 100-ə bərabər olmalıdır.*

Quruluş nisbi kəmiyyəti statistika məlumatının qruplaşdırılması ilə sıx əlaqədardır. Müəssisədə fəhlələrin tərkibini öyrənərkən onları ixtisaslarına, iş stajlarına, cinsinə, təhsil dərəcəsinə və s. əlamətinə görə, əhalinin cinsi, milli, yaş və s. tərkibini öyrənmək üçün onları həmin əlamətlərə görə qruplaşdırmaq lazım gəlir. Kənd təsərrüfatı müəssisələrinin istehsal istiqamətini müəyyən etmək üçün onlar əkin sahələri – dənli bitkilər, texniki bitkilər, bostan-tərəvəz və yem bitkiləri üzrə qruplaşdırılır.

Xüsusi çəki göstəriciləri öyrənilən hadisənin quruluşu haqqında aydın təsəvvür yaratmaqla bərabər, onun zaman etibarilə dəyişilməsini xarakterizə etməyə də imkan verir.

Hadisənin yayılma dərəcəsini xarakterizə edən göstəriciyə ***intensivlik nisbi kəmiyyəti*** deyilir. Bu nisbi kəmiyyət iki müxtəlif adlı mütləq kəmiyyətin müqayisəsi nəticəsində alınır. *Nisbətin surətində yayılma dərəcəsi öyrənilən*

*hadisənin kəmiyyəti, məxrəcində isə hadisənin yayılması baş verən mühitin həcmi durur. Məsələn, ölüm əmsalı (il ərzində 1000 nəfərə düşən ölənlərin sayı): surətdə öyrənilən ərazidə il ərzində ölənlərin sayı, məxrəcdə isə həmin ərazidə əhalinin orta illik sayı götürülür.*

İntensivlik nisbi kəmiyyətinə misal olaraq demoqrafiya əmsallarını, işçilərin, dəzgahların boş dayanma əmsallarını göstərmək olar. İntensivlik nisbi kəmiyyəti ictimai hadisələri qarşılıqlı əlaqədə götürülmüş iki müxtəlif əlamət üzrə xarakterizə edir. Qarşılıqlı əlaqədə olan əlamətlərə misal olaraq:

– əhalinin sayı ilə həmin əhalinin yaşadığı ərazinin sahəsini (əhalinin sıxlığı  $= \frac{\text{y} \text{u} \text{a} \text{e} \text{e} \text{i} \text{e} \text{i} \text{ } \text{n} \text{a} \text{e} \text{u}}{\text{y} \text{d} \text{a} \text{ç} \text{e} \text{i} \text{e} \text{i} \text{ } \text{n} \text{a} \text{u} \text{y} \text{n} \text{e}}$ );

– müəyyən torpaq sahəsi ilə məhsul istehsalını

(kənd təsərrüfatına yararlı torpaqların 100 hektarına düşən ət və s. məhsul istehsalı  $= \frac{\text{i} \text{y} \text{u} \text{n} \text{o} \text{e} \text{ } \text{e} \text{n} \text{o} \text{a} \text{u} \text{n} \text{a} \text{e} \text{u}}{\text{e} / \text{o} \text{ } \text{e} \text{a} \text{d} \text{a} \text{d} \text{e} \text{u} \text{o} \text{i} \text{d} \text{i} \text{a} \text{a} \text{e} \text{a} \text{d} \text{u} \text{ } \text{i} \text{ } \text{n} \text{a} \text{u} \text{y} \text{n} \text{e}} \cdot 100$ )

– əsas istehsal fondları ilə milli gəlir və məhsul istehsalı (əsas fondların hər manatına düşən milli gəlir və məhsul)

- müəssisənin enerji gücləri və işçilərin sayı (əməyin enerji ilə silahlanma səviyyəsi  $= \frac{\text{u} \text{y} \text{i} \text{e} \text{ } \text{a} \text{i} \text{a} \text{d} \text{a} \text{e} \text{y} \text{o} \text{u} \text{e} \text{y} \text{d} \text{e}}{\text{e} \text{o} \text{ } \text{e} \text{e} \text{y} \text{d} \text{a} \text{d} \text{a} \text{e} \text{u}}$ )

- fondların dəyəri və işçilərin sayı (əməyin fondla silahlanma səviyyəsi  $= \frac{\text{o} \text{i} \text{a} \text{e} \text{a} \text{d} \text{u} \text{i} \text{ } \text{i} \text{d} \text{o} \text{a} \text{ } \text{e} \text{e} \text{e} \text{e} \text{a} \text{y} \text{e} \text{y} \text{d} \text{e}}{\text{e} \text{o} \text{ } \text{e} \text{e} \text{y} \text{d} \text{a} \text{d} \text{a} \text{ } \text{e} \text{e} \text{e} \text{e} \text{a} \text{e} \text{u}}$ ) göstəricilərini göstərmək olar.

Göründüyü kimi, intensivlik nisbi kəmiyyəti vasitəsilə istehsalın texniki inkişaf səviyyəsini xarakterizə etmək olar.

Ölkənin iqtisadi inkişaf da intensivlik nisbi kəmiyyətləri ilə xarakterizə oluna bilər. Əhalinin hər nəfərinə düşən mühüm növ məhsul istehsalı, əhalinin mənzil ilə təmin olunma səviyyəsi, əhalinin hər nəfərinə düşən ərzaq və qeyri-ərzaq məhsulları və s.

Əhalinin hər nəfərinə düşən məhsul istehsalını hesablamaq üçün istehsal olunmuş məhsulun miqdarını əhalinin orta illik sayına bölmək lazımdır.

*Koordinasiya nisbi kəmiyyəti* statistika məcmusunda ayrı-ayrı hissələrin müqayisə üçün əsas götürülmüş hissəyə nisbətini xarakterizə edir. Bu üsulla əldə olunmuş göstəricilər məcmunun quruluşu haqqında müəyyən təsəvvür yaratdıqlarına görə onları çox vaxt quruluş nisbi kəmiyyətindən ayırırlar. Lakin onlar məcmunun quruluşunu deyil, hissələrin bir-birinə olan nisbətini müəyyən edir. *Bu kəmiyyəti hesablamaq üçün tamın hissələrindən biri müqayisənin əsası kimi qəbul edilir və digər hissələr onunla müqayisə edilir.*

Koordinasiya nisbi kəmiyyəti vasitəsilə tamın verilmiş hissəsinin müqayisə üçün əsas götürülmüş hissənin hər 1, 100, 1000 vahidinə neçə vahidin düşdüyünü hesablayırlar.

Koordinasiya nisbi kəmiyyətinə misal olaraq kənd və şəhər əhalisi, fəhlələr və qulluqçular, kişilər və qadınlar arasındakı nisbəti göstərmək olar.

Hər 100 fəhləyə düşən qulluqçuların sayı, hər 100 kişiye düşən qadınların sayı, ölkəmizin iqtisadiyyatında məşğul olan 1000 nəfərə düşən işsizlərin sayı və s. koordinasiya nisbi kəmiyyətinə misal ola bilər.

**Müqayisə nisbi kəmiyyəti** müxtəlif obyektlərə aid olan eyni adlı göstəricilərin müqayisəsi nəticəsində alınan nisbi göstəricilərə deyilir. Müqayisə edilən göstəricilər eyni dövrə və eyni zaman anına aid olmalıdır. Məsələn, müxtəlif ölkələrdə, bir ölkə daxilində, müxtəlif iqtisadi zonalarda, ayrı-ayrı müəssisələrdə eyni vaxtda məhsul istehsalının vəziyyətini müqayisə etdikdə müqayisə nisbi kəmiyyəti alınır. Müqayisə nisbi kəmiyyəti adətən *dəfə və faiz* şəklində ifadə olunur.

Müqayisə nisbi kəmiyyəti beynəlxalq müqayisələrdə və ayrı-ayrı müəssisələrin, regionların göstəricilərinin müqayisəli qiymətləndirilməsində böyük əhəmiyyətə malikdir. Müxtəlif mülkiyyət formalarına malik müəssisələrin fəaliyyəti bu cür müqayisə edilə bilər. Dövlət və xüsusi müəssisələrdə məhsulun qiymətinin, orta aylıq əmək haqqının və s. müqayisəsi böyük maraq doğurur. Bu halda müqayisə nisbi kəmiyyətini hesablayarkən dövlət müəssisələrinin qiymət və digər göstəricilərini müqayisənin əsası olaraq qəbul etmək lazımdır.

Beləliklə, nisbi kəmiyyətlər statistik məlumatların tənlili və ümumiləşdirilməsi üçün mühüm vasitələrdən biridir. Nisbi kəmiyyətin növü statistik tədqiqatın məqsədinə əsasən seçilir. Öyrənilən hadisəni hərtərəfli xarakterizə etmək üçün bir sıra mühüm əlamətlər üzrə hesablanmış nisbi kəmiyyətlər sistemindən istifadə etmək lazımdır. Məsələn, sənaye müəssisələrində fəhlələrin tərkibi cinsinə, yaşına, təhsil səviyyəsinə, iş stajına, onların əməyinin mexanikləşmə səviyyəsinə və digər əlamətlərə görə öyrənilir. Bu halda quruluş nisbi kəmiyyəti yuxarıda sadalanan əlamətlər üzrə öyrənilməlidir. Digər tərəfdən fəhlələrin tərkibindəki dəyişikliyin əsas inkişaf meylini aşkar etmək vacibdir. Bu isə məlumatların müəyyən dövr üçün dinamika nisbi kəmiyyəti vasitəsilə müqayisəsini zəruri edir. Eyni zamanda daimi və müvəqqəti işçilərin saylarının müqayisəsi, fəhlələrin tərkibini və hərəkətini xarakterizə edən digər nisbi kəmiyyətlər də müəyyən maraq doğurur.

İqtisadi-statistik təhlildə mütləq və nisbi kəmiyyətlərə qarşılıqlı əlaqədə baxılmalıdır. Bu o deməkdir ki, nisbi kəmiyyətlərdən formal olaraq istifadə etmək lazım deyil, hər bir nisbi kəmiyyətin arxasında hansı mütləq kəmiyyətin durduğunu müəyyən etmək lazımdır. Buna nisbi kəmiyyətləri hesablayarkən xüsusilə riayət etmək lazımdır.

### **5. Mütləq və nisbi kəmiyyətlərdən istifadə olunmasının ümumi prinsipləri**

Mütləq və nisbi kəmiyyətləri hesablayarkən və onlardan istifadə edərkən bir sıra şərtlərə əməl etmək lazımdır.

-  İctimai hadisələri mütləq və nisbi kəmiyyətlərlə xarakterizə edərkən həmin hadisələrin mahiyyətini, spesifik xüsusiyyətlərini və inkişaf qanunauyğunluqlarını düzgün başa düşmək lazımdır.
-  Hadisələrin xarakterindən asılı olaraq, mütləq və nisbi kəmiyyətlərdən istifadə edilməsinə diferensial yanaşmaq lazımdır.

- ✚ Onlardan kompleks şəkildə istifadə edilməlidir. Dinamika nisbi kəmiyyətinin hesablanması bu şərtə əməl etməyin daha böyük əhəmiyyəti vardır. Belə ki, faiz ifadəsində hadisənin səviyyəsində ciddi dəyişiklik gözə çarpdığı halda, mütləq kəmiyyət ifadəsində dəyişiklik kiçik rəqəmlərlə ifadə oluna bilər.
- ✚ Nəzərə almaq lazımdır ki, müxtəlif dövrlərdə nisbi kəmiyyətlərin hər faizi arxasında müxtəlif həcmdə mütləq kəmiyyətlər durur.
- ✚ Nisbi kəmiyyətlər hesablanarkən göstəricilərin müqayisəli olmasına xüsusi diqqət yetirilməlidir.

Statistika məlumatının müqayisə nöqteyi-nəzərindən yekcins olmaması, başlıca olaraq aşağıdakı səbəblərdən irəli gəlir:

- a) statistika məlumatının müxtəlif üsullarla toplanması və işlənməsi;
- b) müşahidənin müxtəlif dövrlərdə və ya anlarda aparılması;
- v) ərazi və idarə-təşkilat dəyişiklikləri;
- q) məlumatın tam etibarlı olmaması.

## MÖVZU16 -17. ORTA KƏMİYYƏTLƏR

### PLAN:

1. Orta kəmiyyətin tərfi və mahiyyəti
2. Qruplaşdırma ilə orta kəmiyyətlər metodunun qarşılıqlı əlaqəsi
3. Orta kəmiyyətin tətbiqi şərtləri
4. Orta kəmiyyət formasının seçilməsi metodikası
5. Hesabı orta kəmiyyətin xassələri
6. Hesabı orta kəmiyyətin moment (şərti sıfır, ixtisar) üsulu ilə hesablanması
7. Harmonik orta kəmiyyət
8. Həndəsi orta kəmiyyət
9. Quruluş orta kəmiyyətləri
10. Xronoloji orta kəmiyyət

### Ə D Ə B İ Y Y A T

1. S.Ö.Ömərov, N.Ə.cavadov. Riyazi və tətbiqi statisika. Bakı, Azərnəşr, 2007.
2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasimov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çaşıoğlu, 2006.

#### 1. Orta kəmiyyətin tərfi və mahiyyəti

Konkret məkan və zaman şəraitində ictimai-iqtisadi hadisələrin dəyişən əlamətlərinin tipik səviyyələrini xarakterizə edən göstərici orta kəmiyyət adlanır.

Hadisələrin tiplərinin və ya proseslərin ümumi şərtlərinin, ümumi qanunauyğunluqlarının xarakteristikası orta kəmiyyətlərin köməyi ilə həll olunan mühüm ictimai-iqtisadi məsələdir. Bu ümumi vəzifə aşağıdakı konkret məsələlərə ayrılı bilər:

1. Hadisənin inkişaf səviyyəsinin ümumi xarakteristikası
2. İki və daha artıq səviyyələrin müqayisəsi
3. Hadisələrin səviyyəsinin vaxta görə dəyişməsinin xarakteristikası
4. Hadisələrin əlaqənin aşkar edilməsi xarakteristikası
5. Planlaşdırma, proyektləşdirmə və s. bağlı olaraq hesablamaların və qiymətləndirmələrin aparılması

Yekun göstəricinin xarakterindən asılı olaraq orta kəmiyyətlər müxtəlif real əhəmiyyətə malikdir.

a) Yekun göstərici real kəmiyyəti ifadə edir. Bu halda orta kəmiyyət ilk növbədə yığının miqdar nisbətlərinin ümumi xarakteristikası kimi çıxış edir.

b) Yekun göstərici real kəmiyyəti ifadə etmir. Bu halda orta kəmiyyət hadisənin tipik ölçüsünü xarakterizə edir.

Statikada istifadə edilən ümumiləşdirici göstəricilərin ən mühüm növlərindən biri orta kəmiyyətlərdir. Statistika məlumatların ümumiləşdirilməsi və işlənməsi prosesində orta kəmiyyətin müəyyən edilməsi zərurəti meydana çıxır.

Sosial-iqtisadi hadisələrə xas olan qanunauyğunluqların öyrənilməsində, hadisə və proseslərin dərk edilməsində orta kəmiyyətlərin əhəmiyyəti çox böyükdür.

Məlumdur ki, hər bir yekcins statistika məcmusu fərdi xüsusiyyətlərə malik olan və bir-birindən kəmiyyətə fərqlənən ayrı-ayrı vahidlər yığımından ibarətdir. Məsələn, hər hansı bir müəssisədə eyni bir iş prosesini həyata keçirən fəhlələrin hər birinin aylıq əmək haqqı, məhsul vahidi istehsalına sərf etdikləri vaxt və s. müxtəlif səbəblərə görə bir-birindən fərqlənə bilər. Buna baxmayaraq həmin əlamətlər üzrə orta kəmiyyətləri hesablamaqla, bütün fəhlələrin ümumi xarakteristikasını vermək olar. Belə ki, fəhlələrin hesablanmış orta əmək haqqı həmin fəhlələrin əmək haqqının səviyyəsini xarakterizə edə bilər. Orta əmək haqqını hesablamadan onun səviyyəsinin hansı müəssisədə yüksək olduğunu söyləmək mümkün deyil.

Ayrı-ayrı k/t bitkiləri üzrə orta məhsul darlığı hesablamadan hansı iqtisadi rayonda məhsuldarlığın yüksək olduğunu müəyyən etmək olmaz. Əhalinin maddi və mənəvi səviyyəsini xarakterizə etmək üçün bir sıra əlamətlər üzrə orta kəmiyyətləri hesablamaq lazım gəlir.

Orta kəmiyyətlər nəzəriyyəsinin əsaslandırılması və inkişaf etdirilməsində Belçika EA-nın üzvü, Peterburq EA-nın üzvü Adolf Ketlenin (1796-1874) böyük xidmətləri olmuşdur.

Birinci qrupa məcmunun bütün vahidləri üçün ümumi olan səbəblər, kütləvi prosesin vəziyyətini müəyyən edən səbəblər aid edilir. Onlar keyfiyyətə bircins olan məcmu vahidlərinin tipik səviyyəsini xarakterizə edirlər və öyrənilən hadisənin mahiyyəti ilə bağlıdırlar.

İkinci qrup (fərdi) səbəblər məcmunun ayrı-ayrı vahidlərinin spesifik xüsusiyyətlərini və beləliklə onların tipik səviyyədən kənarlaşmasını müəyyən edir. Bu səbəblər öyrənilən hadisənin təbiəti ilə bağlı deyillər və təsadüfi səbəblər adlanırlar.

Kütləvi hadisələr üçün orta kəmiyyət hesablanarkən müxtəlif təsadüflər nəticəsində statistika məcmusunun vahidlərinin bir-birindən fərqləri qarşılıqlı sürətdə ödənilir. Orta kəmiyyətlər təsadüflər nəticəsində əmələ gələn fərdi kənarlaşmaları silib atır və bütün məcmuya əsas olan ümumi xüsusiyyəti, tipik səviyyəni xarakterizə edir. Orta kəmiyyətin bu xüsusiyyəti onu ümumiləşdirici göstərici kimi məşhurlaşdırır. Kettle qeyd edir ki, statistik ortalar təkcə riyazi ölçü deyildir, obyektiv gerçəkliyin kateqoriyasıdır. Statistik idrakın prinsipial mahiyyəti fərdi səbəblərin nəticəsində yaranan təsadüflərin silinməsindən və ümumi səbəblərin şərtləndirdiyi qanunauyğunluqları aşkar etməkdən ibarətdir.

Orta kəmiyyətlərin mühümlüyü, xüsusidən ümumiyyə, təsadüfdən qanunauyğunluğa keçməyin mümkünlüyü ilə izah edilir. Məhz bu səbəbə görə orta kəmiyyətlər statistik tədqiqatlarda geniş tətbiq edilir.

Orta kəmiyyətlərin işlənilib hazırlanmasında və onların əməli məsələlərin həllinə tətbiqində Rus alimləri İ.S.Pasxaver, A.Y.Boyavski, V.K.Dvejininin böyük xidmətləri olmuşdur.

Statistika məcmusu vahidləri orta kəmiyyətləri az-çox tərəddüd edir. Bu tərəddüdlər orta kəmiyyətdə qarşılıqlı sürətdə ödənilir. Orta kəmiyyətin bu xüsusiyyəti orta kəmiyyət qanunu adlanır. Bu qanunun mahiyyəti ondan ibarətdir

ki, statistika məcmusunun ayrı-ayrı vahidlərinin ümumi istiqamətdən uzaqlaşması qarşılıqlı ödənilir.

Kütləvi məlumat əsasında hesablanmış orta kəmiyyətlər hadisənin qanunauyğunluğunu xarakterizə edə bilər. Belə orta kəmiyyətlər təsadüfi təsirləri nəzərə almır.

Beləliklə, konkret məkan və zaman şəraitində sosial-iqtisadi hadisələrin tipik səviyyələrini xarakterizə edən göstəriciyə orta kəmiyyət deyilir.

Orta kəmiyyət real göstəricidir. Bu göstərici sosial-iqtisadi hadisələrin obyektiv mövcud olan xüsusiyyətini ifadə edir, doğrudan da sosial-iqtisadi hadisələrin tipik səviyyələri obyektiv olaraq mövcuddur.

Sosial-iqtisadi hadisələrin inkişaf qanunauyğunluqları ancaq kütləvi məlumat əsasında müəyyənləşdirilə bilər. Məcmunun ayrı-ayrı vahidlərinin əsasında hadisənin inkişaf qanunauyğunluğu aydın görünməyə bilər. Çünki hadisənin ümumi inkişaf meyli ancaq kütləvi məlumatın ümumiləşdirilməsi əsasında aşkar olunur. Məsələn, bütün kənd təsərrüfatı müəssisələrində əmək məhsuldarlığının yüksəlişi aydın göründüyü halda, bəzi təsərrüfatlarda bu və ya digər amillərin təsiri altında əmək məhsuldarlığı artmaya da bilər. Ona görə də orta göstərici kütləvi faktların ümumiləşdirilməsinə əsaslanmalıdır.

## **2. Qruplaşdırma ilə orta kəmiyyətlər metodunun qarşılıqlı əlaqəsi**

Orta kəmiyyətin hesablanması qruplaşdırma ilə əlaqələndirilməlidir. Çünki qruplaşdırma lazımınca əsaslandırılmadan hesablanan orta kəmiyyəti aradan qaldırmağa imkan verir.

Orta kəmiyyəti hesablayarkən qruplaşdırma üsulunun tətbiqi həmçinin qabaqcıl və geridə qalan sahələri aşkar etməyə imkan verir.

Qruplaşdırma metodunun tətbiqi uydurma, həqiqi vəziyyəti xarakterizə etməyən orta kəmiyyətlərin hesablanmasına yol vermir.

Sosial-iqtisadi hadisələrin tipik səviyyəsini xarakterizə etmək üçün ümumi orta kəmiyyətlərlə bərabər qrup orta kəmiyyətləri də hesablamaq lazımdır. Qrup orta kəmiyyətlərin hesablanması qabaqcıl və geridə qalan sahələri aşkar etməyə imkan verir. Ümumi orta kəmiyyət hadisənin ümumi səviyyəsini xarakterizə etdiyi halda, qrup orta kəmiyyətlər ayrı-ayrı qrupların səviyyəsini xarakterizə edir.

Beləliklə, ümumi orta kəmiyyətlərlə bərabər qrup orta kəmiyyətlərin hesablanması orta kəmiyyətlərin düzgün tətbiqinin ikinci mühüm şərtidir.

Ümumi orta kəmiyyətlər arxasında qabaqcıl və geridə qalan təsərrüfatlar görünür, ona görə də ümumi orta kəmiyyətlərlə bərabər təbəqələri (qabaqcılları və geridə qalanları) xarakterizə edən orta kəmiyyətləri də hesablamaq lazımdır. Belə orta kəmiyyətlər ayrı-ayrı müəssisə və təşkilatların işlərini düzgün qiymətləndirməyə imkan verir.

## **3. Orta kəmiyyətin tətbiqi şərtləri**

1. Orta kəmiyyəti tapılan əlamət məzmunlu və mühüm əhəmiyyətə malik olmalıdır. Əks halda o öyrənilən məcmunun tipik xüsusiyyətini əks etdirməz.
2. Orta kəmiyyətin hesablandığı məcmu keyfiyyətə eyni növlü olmalıdır.
3. Məcmu vahidlərinin sayına görə kifayət qədər böyük olmalıdır.

$$\text{Orta kəmiyyət} = \frac{\text{Щадисянинцями}}{\text{Мяьму ващдилярин сайы (мяьмунун шьями)}}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{\sum x\phi}{\sum \phi}$$

Hadisənin həcmi = Orta kəmiyyət x Məcmunun həcmi

$$M = \sum X\phi = \bar{X} \cdot n$$

**Misal.**

| I fəhlə | II fəhlə                      | III fəhlə |
|---------|-------------------------------|-----------|
|         | (aylıq əmək haqqı, min manat) |           |
| 240     | 60                            | 40        |

Üç fəhlənin orta aylıq əmək haqqı  $\frac{240 + 60 + 40}{3} = 120$  min manat təşkil

edir. Aydınır ki, tədqiq edilən fəhlələr müxtəlif kateqoriyalara malikdirlər, ona görə də hesablanmış orta aylıq əmək haqqının xarakteristikası kimi qəbul edilməsi konkret deyildir.

Başqa bir misal:

Məhdud məsuliyyətli kompaniyanın auksion kapitalı 1000 min manat təşkil edir. Auksionerlərin sayı – 100 nəfərdir. Aksiya paketinin orta göstəricisi 10 min manata bərabərdir. Bu orta kəmiyyət göstərir ki, kompaniyanın kapitalı – aksiyalar kiçik aksionerlərin əllərində cəmləşibdir. Həqiqətdə isə vəziyyət belə ola bilər: 1 aksionerin 505 min. manat dəyərində 1010 aksiyası vardır; 99 aksionerin isə hərəsinin 10 aksiyası olmaqla cəmi 495 min manat dəyərində aksiyaları vardır.

Göründüyü kimi iki kateqoriya aksionerlər vardır: Aksionerlərdən biri kapitalın 50%-dən çoxuna malikdir və bütün kompaniyaya nəzarət edir. Alınmış orta kəmiyyət – 10 min. manat öyrənilən məcmunun xassələrinin etibarlı qiymətləndirilməsi sayıla bilməz. Ona görə ki, onun kəmiyyəti kompaniyanın 99% aksionerlərinin aksiya paketindən 2 dəfə çoxdur. Ona görə də orta kəmiyyət ancaq bircins yığımlar üçün hesablanmalıdır. Ancaq bu şərtə əməl edildikdə ümumiləşdirici xarakteristika kimi tədqiq edilən orta kəmiyyət yığımın bütün vahidlərinə xas olan ümumiliyi, tipikliyi və qanunauyğunluğu əks etdirir.

Orta kəmiyyəti hesablamazdan əvvəl müxtəlif növlü, keyfiyyətə yekcins olmayan statistika məcmusunu, yekcins qruplara ayırmaq lazımdır. Məhz ona görə də orta kəmiyyətlər metodu qruplaşdırma metodu ilə sıx surətdə əlaqədar olmalıdır. Qruplaşdırma metodunun tətbiqi, həqiqi vəziyyəti xarakterizə etməyən orta kəmiyyətin hesablanmasına yol vermir.

Orta kəmiyyətlərlə bərabər qrup orta kəmiyyətləri də hesablanmalıdır. Onların hesablanmış qabaqcıl və geridə qalan sahələri aşkar etməyə imkan verir. Ümumi orta kəmiyyət hadisənin ümumi səviyyəsini, qrup orta kəmiyyətləri ayrı-ayrı qrupların səviyyəsini xarakterizə edir.

#### 4. Orta kəmiyyət formasının seçilməsi metodikası

I mərhələ. Məqsədin dürüst ifadə edilməsi

II mərhələ. Müəyyənəddici göstəricinin (və ya müəyyənəddici funksiyanın) riyazi ifadəsinin tapılması.

III mərhələ. Müəyyənəddici funksiyada fərdi qiymətlərin orta kəmiyyətlə əvəz edilməsi yolu ilə orta kəmiyyətlə əvəz edilməsi yolu ilə orta kəmiyyət tənliyinin qurulması.

IV mərhələ. Orta kəmiyyət tənliyini həll etməklə axtarılan orta kəmiyyətə müvafiq gələn düstur alınır.

Orta kəmiyyətin bir və ya digər formasının seçilməsi tədqiqatın vəzifəsindən, ilkin məlumatların xarakterindən və əlamətin iqtisadi mahiyyətindən asılıdır.

Yuxarıdakı prosesi orta əmək haqqının tapılması misalında izah edək. Fərz edək ki, orta kəmiyyətin hansı düsturla müəyyən ediləcəyi məlum deyil. Orta əmək haqqı əmək haqqı fondu ilə sıx bağlıdır. Orta kəmiyyətin hesablanması əmək haqqı fondu ilə tam uyğunluqda olmalıdır.

Əmək haqqı fondu burada təyinedici göstəricidir və orta kəmiyyət ondan bilavasitə asılıdır.

$$\text{Təyinedici funksiya} = \sum X_{\text{ифи}} \left( \begin{array}{l} \text{фиинчиляр аайдыр,} \\ X_{\text{и}} - \text{ямьяк шаггыны фярдиймятляри} \end{array} \right)$$

$$\text{Ortanın tənliyi: } \sum X_{\text{ифи}} \neq \sum \bar{X} \phi_i$$

Təyinedici funksiyaya uyğun gələn ortalar tənliyində almaq üçün, fərdi əmək haqları orta əmək haqqı ilə əvəz edilir. Bunu ona görə etmək olar ki, bu cür əvəzləmədə ümumi əmək haqqına təsir etmir.

$$\bar{X} = \frac{\sum X_{\text{ифи}}}{\sum \phi_i} \text{ olar.}$$

Beləliklə, orta kəmiyyətin formasının seçilməsində əlamətin məntiqi mahiyyətinə və onun təyinedici göstərici ilə qraşılıqlı əlaqəsinə əsaslanmalıdır. Orta kəmiyyətlərin statistik yığımların xassələrini saxlamaq xassəsinə təyinedici xassə deyilir.

$$\text{Tutaq ki, təyinedici göstərici} = X_1 X_2 \dots X_n \text{ onda ortanın tənliyi} \\ X_1 X_2 \dots X_n = (\bar{X})^n \text{ olar, buradan } \bar{X} = \sqrt[n]{X_1 X_2 \dots X_n}$$

Deməli, bu halda həndəsi orta kəmiyyət tətbiq edilməlidir.

Misallar

1. Hesabi orta kəmiyyət.

1 tələbə tərəfindən

tələbənin

$X_i$  fi

|                        |           |      |
|------------------------|-----------|------|
| pambıq yığımı, kq (Xi) | sayı (fi) |      |
| 20                     | 10        | 200  |
| 25                     | 40        | 1000 |
| 30                     | 50        | 1500 |
|                        | 100       | 2700 |

$$a) \bar{X} = \frac{\sum X}{n} = 25 \text{ кг}$$

$$b) \bar{X} = \frac{\sum X \phi}{\sum \phi} = 27 \text{ кг}$$

## 2. Harmonik orta kəmiyyət

I sağıcı

II sağıcı

1 inəyin sağımına

$$\text{vaxt sərfi (dəq)} \quad 20 \quad 40 \quad \frac{20 + 40}{2} = \text{дѣг}$$

8 saatlıq iş günündə sağılan inəklərin sayı:

$$8 (66:20) = 24 \quad 8 (60:40) = 42 \quad 24 + 12 = 36 \text{ inək}$$

$$H = \frac{\sum \Gamma}{\sum \Gamma} = \frac{480 + 480}{24 + 12} = \frac{960}{36} = 26 \frac{2}{3} \text{ дѣг} = 26 \text{ дѣг } 40 \text{ сан}$$

$$\bar{X}_H = \frac{n}{\sum \frac{1}{X}} = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{40}} = \frac{80}{3} = 26 \frac{2}{3} \text{ дѣг}$$

## 3. Həndəsi orta kəmiyyət

| İllər | Mənfəət man. | Artım əmsalları | Şerti mənfəət, man. | Şerti mənfəət, man. |
|-------|--------------|-----------------|---------------------|---------------------|
| 2008  | 2            | -               | 2                   | 2                   |
| 2009  | 18           | 9               | 2,6,5=13            | 2 · 6=12            |
| 2010  | 72           | 4               | 13 · 6,5=84,5       | 12 · 6= 72          |

$$\frac{9 + 4}{2} = 6,5 \text{ (doğru deyil)}$$

$$\bar{X} = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \dots X_K} = \sqrt[2]{9 \cdot 4} = 6 \text{ (добрудур)}$$

Antiharmonik orta kəmiyyət:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i^2}{\sum X_i} \text{ (сая)}; \quad \bar{X} = \frac{\sum X_i^2 \phi_i}{\sum X_i \phi_i} \text{ (чякил)}$$

1 - n müəllimin hər biri  $K_i$  sayda şagird hazırlayır. Hər bir şagird isə müəlliminin hazırladığı sayda şagird hazırlayır. Onda müəllim və şagirdlərin orta nisbəti (müəllimin məhsuldarlığı və yaxud biliyin yığılma sürəti) antiharmonik orta kəmiyyətin vasitəsilə müəyyən edilir.

|                   |   |   |    |    |    |   |
|-------------------|---|---|----|----|----|---|
| Müəllim:          | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6 |
| Şagirdlərin sayı: | 8 | 7 | 14 | 23 | 15 |   |

11

$$\bar{X} = \frac{8^2 + 7^2 + 14^2 + 23^2 + 15^2 + 11^2}{8 + 7 + 14 + 23 + 15 + 11} = 15,4$$

2 - n sahə vardır.  $K_i - i - ci$  sahəyə qoyuluşun səmərəliliyidir (yəni, cari ildə qoyulmuş 1 manat növbəti ildə  $K_i$  manat gəlir gətirir)  $K_i$ -lər sabit qaldıq-da qoyuluşun səmərəliliyi antiharmonik ortanın köməyiylə müəyyən edilir.

$$E = \frac{\sum K_{ii}^2}{\sum K_{ii}}$$

3 - İnsanlar yığımına baxaq. Onların içərisində n sayda qadın vardır. Hər bir qadınların uşaqlarının sayı qədər uşağı vardır. Onda

$$T = 2 \cdot \frac{\sum \left( \frac{1}{2 K_{ii}} \right)^2}{\sum \frac{1}{2} K_{ii}} = \frac{\sum K_{ii}^2}{\sum K_{ii}}$$

|                 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Qadınlar:       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Uşaqların sayı: | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 5 | 1 | 1 | 2 | 4  |

$$T = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2}{1 + 2 + 3 + 2 + 3 + 5 + 1 + 1 + 1 + 2 + 4} = 3,083$$

Beləliklə, 1 - ci nəslin hər bir adamına orta hesabla gələcək nəslin 3,083 adamı uyğun gələcəkdir.

### **5. Hesabi orta kəmiyyətin xassələri.**

1. Sabit kəmiyyətin hesabi ortası özünə bərabərdir

$$\bar{A} = A \quad (A = \text{const})$$

$$2. \frac{\sum X(\phi \cdot A)}{\sum (\phi \cdot A)} = \bar{X} \frac{\sum X\phi}{\sum \phi}$$

$$3. \frac{\sum X \left( X \pm A \right) \phi}{\sum \phi} = \bar{X} \pm A$$

$$4. \frac{\sum (KX) \phi}{\sum \phi} = K \bar{X}$$

$$\frac{\sum \left( \frac{1}{k} X \right) \phi}{\sum \phi} = \frac{1}{k} \cdot \bar{X}$$

5.  $\sum (X - \bar{X}) = 0$ ; Mənfi kənarlaşmaların cəmi, müsbət kənarlaşmaların cəminə bərabərdir. Yəni variantların öz orta kəmiyyətlərindən bu və ya digər tərəflərə kənarlaşmaları qarşılıqlı ödəyir.

6.  $\sum (X - \bar{X})^2 < \sum (X - A)^2$   $A$  – istənilən ədəddir.

7. Ayrı-ayrı variantlarının çəkirlərinin mütləq qiyməti əvəzinə orta kəmiyyəti onların xüsusi çəkirləri əsasında hesablasaq orta kəmiyyətin qiyməti dəyişməz.

$$\frac{\phi_{\text{и}}}{\sum \phi_{\text{и}}} = \text{дн}, \quad (\text{хцуси чяки})$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_{\text{и}} \phi_{\text{и}}}{\sum \phi_{\text{и}}} = \sum X_{\text{и}} \text{дн}$$

Xüsusi çəki faizlə ifadə edildikdə

$$\bar{X} = \frac{\sum x \Pi}{\sum \Pi} = \frac{\sum x \Pi}{100} \text{ олар .}$$

1. Orta kəmiyyətin moment (ixtisar) düsturu

$$\bar{X} = \frac{\sum \frac{X - \bar{X}}{\sum \phi}}{\sum \phi} \text{д} + A$$

Sabit  $A$  ədədi kimi, adətən, ortada yerləşən və yüksək çəkiyə malik olan variant götürülür. Bunun nəticəsində orta kəmiyyətin hesablanması daha da sadələşir.

## 6. Hesabı orta kəmiyyətin moment (şərti sıfır, ixtisar) üsulu ilə hesablanması

$$\bar{x} = \frac{\sum \left( \frac{x - x_0}{i} \right) f}{\sum f} \times i + x_0 .$$

Burada:  $x$  - ayrı-ayrı variantlar;

$x_0$  - şərti orta rəqəm;

$i$  - fasilə (interval) kəmiyyəti;

$f$  – çəkirlər;

$\Sigma$  (sıqma) – cəm işarəsidir.

Misal

|                           |                           |                      |                           |                                |                                               |
|---------------------------|---------------------------|----------------------|---------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------|
| Məhsuldarlıq,<br>s/ha (x) | Əkin<br>sahəsi,<br>ha (f) | Orta fasilə<br>$x_i$ | $x_i - x_0$<br>$x_0 = 21$ | $\frac{x_i - x_0}{i}$<br>$i=2$ | $\left( \frac{x_i - x_0}{i} \right) \times f$ |
|---------------------------|---------------------------|----------------------|---------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------|

|       |      |    |    |    |      |
|-------|------|----|----|----|------|
| 16-18 | 150  | 17 | -4 | -2 | -300 |
| 18-20 | 200  | 19 | -2 | -1 | -200 |
| 20-22 | 220  | 21 | 0  | 0  | 0    |
| 22-24 | 260  | 23 | 2  | 1  | 260  |
| 24-26 | 170  | 25 | 4  | 2  | 340  |
| Yekun | 1000 | -  | -  | -  | 100  |

Sabit  $x_0$  ədədi kimi, adətən, ortada yerləşən və yüksək çəkியə malik olan variant götürülür. Bunun nəticəsində orta kəmiyyətin hesablanması daha da sadələşir.

$$\bar{x} = \frac{\sum \left( \frac{x - x_0}{i} \right) f}{\sum f} \times i + x_0 = \frac{100}{1000} \times 2 + 21 = 21,2 \text{ s};$$

## 7. Harmonik orta kəmiyyət

Ayrı-ayrı variantların çəkili məlum olmadıqda harmonik orta kəmiyyətdən istifadə etmək lazımdır. Belə ki, variantların çəkili müəyyən etmək üçün variantla çəkinin hasilinə bərabər olan göstəricini ayrı-ayrı variantlara bölmək lazımdır. Harmonik orta kəmiyyətin hesablanmasını aşağıdakı misalla izah edək. Tutaq ki, bir fermer təsərrüfatının məlumatları əsasında 2007 və 2008-ci ildə orta məhsuldarlığı hesablamaq lazımdır.

| İllər<br>Bitkilər | 2007                  |                    | 2008                    |                   |
|-------------------|-----------------------|--------------------|-------------------------|-------------------|
|                   | Məhsuldarlıq,<br>s/ha | Əkin sahəsi,<br>ha | Məhsuldar-<br>lıq, s/ha | Ümumi<br>yığım, s |
| Payızlıq buğda    | 25                    | 20                 | 22                      | 220               |
| Yazlıq buğda      | 20                    | 15                 | 15                      | 300               |
| Qarğıdalı         | 40                    | 5                  | 35                      | 350               |

Məlumdur ki, orta məhsuldarlığı hesablamaq üçün ümumi məhsul yığımını əkin sahəsinə bölmək lazımdır. 2007-ci ildə ayrı-ayrı variantların çəkili məlum olduğuna görə orta məhsuldarlığı hesabı orta kəmiyyətin çəkili düsturu ilə müəyyən edirik:

$$\bar{x}_{hes} = \frac{x_1 \times f_1 + x_2 \times f_2 + \dots + x_n \times f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{25 \times 20 + 20 \times 15 + 40 \times 5}{20 + 15 + 5} = \frac{500 + 300 + 200}{40} = \frac{1000}{40} = 25 \text{ sentner.}$$

2008-ci ildə isə ayrı-ayrı variantların çəkili, yəni əkin sahəsi haqqında məlumat olmadığına görə orta məhsuldarlığı harmonik orta kəmiyyətin çəkili düsturu ilə müəyyən edirik:

$$\bar{x}_h = \frac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}} = \frac{220 + 300 + 350}{\frac{220}{22} + \frac{300}{15} + \frac{350}{35}} = \frac{870}{10 + 20 + 10} = \frac{870}{40} = 21,7 \text{ s.}$$

Ümumiyyətlə, harmonik orta kəmiyyət hesabı orta kəmiyyətin çevrilmiş formasıdır.

Harmonik orta kəmiyyətin sadə düsturunu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\bar{X}_h = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}.$$

Məsələn, fərz edək ki, eyni işin yerinə yetirilməsinə ayrı-ayrı işçilər aşağıdakı miqdarda vaxt sərf etmişlər (dəqiqə):

5; 4; 10.

Bir əməliyyata orta hesabla sərf edilən vaxtı tapmaq üçün sadə harmonik orta kəmiyyətin düsturundan istifadə etmək lazımdır:

$$\bar{X}_h = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}} = \frac{3}{\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10}} = \frac{3}{\frac{4+5+2}{20}} = \frac{3}{\frac{11}{20}} = \frac{3 \times 20}{11} = 5,4 \text{ dəqiqə}.$$

## 8. Həndəsi orta kəmiyyət

Həndəsi orta kəmiyyətdən artım əmsalını və orta artım tempini hesabladıqda istifadə edilir.

Artım əmsalı (  $k_a$  ) müqayisə edilən dövrün məlumatının (  $M_m$  ) özündən əvvəlki dövrün məlumatına (  $M_{m-1}$  ) olan nisbətinə deyilir. Bunu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$k_a = \frac{M_m}{M_{m-1}}.$$

Artım əmsalı aşağıdakı əlamətə malik ola bilər:

- 1) 1- dən böyük ola bilər (  $k_a > 1$  ). Bu vaxt sıra artır.
- 2) 1- dən kiçik ola bilər (  $k_a < 1$  ). Bu vaxt sıra azalır.
- 3) 1- bərabər ola bilər (  $k_a = 1$  ). Bu vaxt sıra sabit qalır.

Artım sürəti (  $S_a$  ) müqayisə edilən dövrün məlumatının (  $M_m$  ) özündən əvvəlki dövrün məlumatına (  $M_{m-1}$  ) faizlə olan nisbətidir:

$$S_a = \frac{M_m}{M_{m-1}} \times 100.$$

Buradan aydın olur ki, artım sürəti ilə artım əmsalı arasında qarşılıqlı əlaqə vardır. Yəni artım əmsalı artım sürətinin 100-ə bölünməsindən əldə edilən kəmiyyətə bərabərdir:

$$k_a = S_a / 100.$$

Artım sürəti isə artım əmsalının 100-ə vurulmasından əldə edilən kəmiyyətə bərabərdir:

$$S_a = k_a \times 100\%.$$

Artım sürəti aşağıdakı qiymətlərə malik ola bilər:

- 1) 100%-dən böyük ola bilər (  $S_a > 100\%$  );
- 2) 100%-dən az ola bilər (  $S_a < 100\%$  );
- 3) 100%-ə bərabər ola bilər (  $S_a = 100\%$  ).

Artım əmsalları əsasında orta artım əmsalını və orta artım sürətini hesablamaq üçün həndəsi orta kəmiyyət düsturundan istifadə edilir:

$$\bar{X}_h = \sqrt[n]{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n} \quad \text{və ya} \quad \bar{X}_h = \sqrt[n]{\prod X}.$$

Burada x - lərin yerinə artım əmsallarını yazmaqla orta artım əmsalını tapmaq olar.

Əgər artım əmsalları hesablanmamışdırsa, orta artım əmsalı və orta artım sürətini həndəsi orta kəmiyyətin aşağıdakı düsturu ilə hesablamaq olar:

$$\bar{X}_h = \sqrt[n-1]{\frac{M_n}{M_1}}.$$

Orta artım əmsalının hesablanması

| İllər | Mənfəət,<br>mln. man. | Artım əmsalları | Şərti mənfəət,<br>mln. man. | Şərti mənfəət<br>mln. man. |
|-------|-----------------------|-----------------|-----------------------------|----------------------------|
| 2006  | 2                     | -               | 2                           | 2                          |
| 2007  | 18                    | 9               | 2 x 6,5=13                  | 2 x 6=12                   |
| 2008  | 72                    | 4               | 13 x 6,5=84,5               | 12 x 6= 72                 |

$$(9 + 4)/2 = 6,5 \text{ (yalnız nəticə)}$$

## 9. Quruluş orta kəmiyyətləri

### **Moda**

Öyrənilən hadisədə ən çox təsadüf edilən variant **moda** deyilir. Başqa sözlə, ən yüksək xüsusi çəkiyə malik olan variant **moda** deyilir.

Diskret bölgü sıraları üçün moda tezliyi çox olan kəmiyyətdir. Məsələn, fəhlələrin tarif dərəcələrinə görə bölüşdürülməsini götürək:

| Tarif dərəcələri | Fəhlələrin sayı |
|------------------|-----------------|
| 1                | 20              |
| 2                | 24              |
| 3                | 26              |
| <b>4</b>         | <b>80</b>       |
| 5                | 34              |
| 6                | 16              |
| Yekun            | 200             |

Bu misalda moda 4 olacaqdır, çünki bu variant Ən yüksək tezliyə (80) bərabərdir. Burada modanı tapmaq üçün heç bir əlavə hesablama işi lazım gəlmədi.

Bərabər fasiləli variasiya sıraları üçün moda aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$M_0 = x_0 + i \times \frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})} .$$

Burada:  $x_0$  - moda daxil olan fasilədə fasilənin aşağı sərhəddi;

$i$  – fasilənin (intervalın) böyüklüyü;

$f_{m-1}$  - moda daxil olan fasilədən əvvəlki fasilənin tezliyi;

$f_m$  - moda daxil olan fasilənin tezliyi;

$f_{m+1}$  - moda daxil olan fasilədən sonrakı fasilənin tezliyidir.

Fasiləli variasiya sırasında modanın hesablanmasını aşağıdakı misalla izah edək.

| Əmək haqqı, manat | İşçilərin sayı |
|-------------------|----------------|
| 90 - 100          | 3              |
| 100 - 110         | 70             |
| <b>110 - 120</b>  | <b>130</b>     |
| 120 - 130         | 90             |
| 130 - 140         | 87             |
| 140 - 150         | 20             |
| Yekun             | 400            |

Sıraya baxmaqla müəyyən etmək olar ki, moda 110 – 120 arasındadır. Həmin düstura əsasən modanı müəyyən edək:

$$M_0 = x_0 + i \times \frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})} =$$

$$110 + 10 \times \frac{130 - 70}{(130 - 70) + (130 - 90)} = 110 + 10 \times 0,6 = 116\%.$$

Moda böyük təcrübi əhəmiyyətə malikdir. Belə ki, bazarlarda qiymətlərin öyrənilməsində modal qiymətlərdən, yəni ən çox rast gəlinən qiymətdən istifadə olunur. Bu və ya digər kütləvi məhsul istehsalını və satışını (xüsusən, ayaqqabı, paltar) proqnozlaşdırarkən ən çox tələb olunan malların həcmi (modal həcmi) əsas götürülür. Belə hallarda ancaq modadan istifadə edilir.

## Median

Əlamətin qiymətlərinin variasiya sırasını iki bərabər hissəyə bölən ədədə median deyilir.

Median latın sözü olub **medius** sözündən götürülmüş və ortalıq kəmiyyət deməkdir.

Diskret variasiya sırasında medianın kəmiyyəti variantların sayından asılı olaraq müəyyən edilir.

$$M_e = X_{\frac{n+1}{2}}$$

$$M_e = \frac{1}{2} \left( X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n+2}{2}} \right)$$

Verilən düsturlardan birincisi variantların sayı tək olduqda, ikincisi isə cüt olduqda tətbiq edilir.

Məsələn, əgər 9 tələbəni boyuna görə düzsək, 5-ci tələbənin boyu median olar. Əgər tələbələrə sayı 10 nəfər olarsa, o zaman 5-ci və 6-cı tələbələrə boylarının yarısı median olacaqdır.

Bərabər fasiləli variasiya sırası üçün isə median aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$M_e = x_{m_e} + i \times \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{m_e-1}}{f_{m_e}} .$$

Burada:  $x_{m_e}$  - median daxil olan fasilənin aşağı sərhəddini;

$i$  – median daxil olan fasilənin böyüklüyü;

$\sum f$  – sıranın cəkilərinin cəmini;

$S_{m_e-1}$  - median daxil olan fasilədən əvvəl gələn fasilənin artan yekunla cəkilərini;

$f_{m_e}$  - median daxil olan fasilənin cəkilərini göstərir.

Median olan variantı aşkar etmək üçün son variantın artan yekunla cəkilərini 2-yə bölüb, alınmış ədədi artan yekunla cəkilərin sırasında axtarmaq lazımdır. Həmin ədəd hansı variantda olarsa, median da həmin variantdadır.

Misal

| Əmək haqqı,<br>manat | İşçilərin sayı<br>(variantların cəkiləsi) | Artan yekunla<br>cəkiləsi |
|----------------------|-------------------------------------------|---------------------------|
| 90 - 100             | 3                                         | 3                         |
| 100 - 110            | 70                                        | 73                        |
| 110 - 120            | 130                                       | 203                       |
| 120 - 130            | 90                                        | 293                       |
| 130 - 140            | 87                                        | 380                       |
| 140 - 150            | 20                                        | 400                       |
| Yekun                | 400                                       | -                         |

$$M_e = x_{m_e} + i \times \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{m_e-1}}{f_{m_e}} = 110 + 10 \times \frac{\frac{400}{2} - 73}{130} = 110 + 10 \times 0,97 = 119,7 \text{ manat.}$$

Moda və mediandan ən çox variasiya sırasının quruluşunu xarakterizə etmək üçün istifadə edilir. Ona görə də onları quruluş orta kəmiyyətləri adlandırırlar.

Variasiya sırasının quruluşunu xarakterizə etmək üçün mediandan başqa kvartil, desil və sentillərdən də istifadə edilir. Kvartil bölgü sırasını 4, desil – 10, sentil isə 100 bərabər hissəyə bölür.

## 10. Xronoloji orta kəmiyyət

Xronoloji orta kəmiyyətdən mal-qaranın orta illik sayını, orta əmtəə qalığını, bank hesablarındakı orta pul qalığını hesabladıqda istifadə olunur. Bu orta kəmiyyətin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, məlumatlar müəyyən bir tarixə, momentə verilir.

Xronoloji orta kəmiyyətin tətbiqinin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, verilmiş məlumatlardan birinci və axırıncının yarısı, yerdə qalan məlumatlar isə olduğu kimi götürülür, cəm edilir və məlumatların sayından 1 (bir) əskiyinə bölünür. Bunu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\bar{x}_{xr} = \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n}{n-1}.$$

# MÖVZU 18-19. VARIASIYA GÖSTƏRİCİLƏRİ

## PLAN:

1. Variasiya göstəriciləri haqqında anlayış
2. Variasiya göstəricilərinin əhəmiyyəti
3. Variasiya genişliyi
4. Orta xətti meyl
5. Dispersiya
6. Orta kvadratik meyl
7. Variasiya əmsali
8. Ümumi, qrup daxili və qruplararası dispersiya
9. Alternativ əlamətin dispersiyası
10. Dispersiyanın ixtisar (moment və ya şərti sıfır) üsulu ilə hesablanması

## Ə D Ə B İ Y Y A T

1. S.Ö.Ömərov, N.Ə. Cavadov. Riyazi və tətbiqi statistika. Bakı, Azərneşr, 2007.
2. Ə.Ə. Hüseynov, S.Y. Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çapıoğlu,

### **1. Variasiya göstəriciləri haqqında anlayış.**

Sosial – iqtisadi hadisələrin əlamətlərinin variasiyasının həcmnin ölçülməsi və öyrənilməsi mühəzəri və təcrübəvi əhəmiyyətə malikdir.

Eyni cinsli məcmuyun tərkibindəki əlamətin fərdi qiymətlərinin müxtəlifliyi **əlamətin variasiyası** adlanır. Məsələn, hər hansı bir müəssisədə fəhlələrin aylıq əmək haqqı, istehsal tapşırığının yerinə yetirilməsi arasındakı fərq, ayrı-ayrı əkin sahələrindən götürülən məhsul arasındakı fərq və s. əlamətin variasiyasına misal ola bilər.

Əlamətin variasiyası dedikdə, əlamətin dəyişməsinə başa düşmək lazımdır. Əlamətin variasiyası müxtəlif amillərin birgə təsiri nəticəsində baş verir.

Əlamətin variasiyasını ölçmək, onu müəyyən etmək statistik tədqiqatın mühüm vəzifəsidir.

### **2. Variasiya göstəricilərinin əhəmiyyəti.**

- 1) Variasiya göstəriciləri orta kəmiyyətləri tamamlayır. Məlumdur ki, fərdi fərqlər orta kəmiyyətlərdə pərdələnir.
- 2) Variasiya göstəriciləri statistika məcmuyunun (yığımın) verilmiş əlamətə görə eyninövlülük dərəcəsini xarakterizə edir.
- 3) Variasiya göstəriciləri əlamətin tərəddüdünün (variasiyasının) sərhədlərini xarakterizə edir.
- 4) Variasiya göstəricilərinin nisbəti əlamətlər arasındakı qarşılıqlı əlaqəni xarakterizə edir.

Statistikada variasiyanın həcmi ölçmək üçün bir neçə göstəricidən istifadə edilir. Bunlardan ***variasiya genişliyi, orta xətti meyli, dispersiyanı, orta kvadratik meyli və variasiya əmsalını*** göstərmək olar.

### 3. Variasiya genişliyi

Variasiya göstəricilərindən ən sadəsi variasiya genişliyidir. **Variasiya genişliyi** əlamətin maksimum qiymətindən minimum qiymətini çıxmaq yolu ilə hesablanır.

Variasiya genişliyini  $R$  hərfi ilə işarə etsək, onda aşağıdakı düsturla hesablamaq olar:

$$R = X_{max} - X_{min}$$

Buradan aydın olur ki, variasiya genişliyi əlamətin tərəddüd dərəcəsinin ən yüksək həddini göstərir. Variasiya genişliyi variantların hamısının tərəddüdünü əks etdirmir. Bundan başqa o, variantların çəkirlərini də nəzərə almır. Ona görə də əlamətin tərəddüd dərəcəsini ölçmək üçün orta xətti meyli ( $\bar{d}$ ) hesablamaq lazım gəlir.

### 4. Orta xətti meyli

**Variantlar eyni cəkiyə malik olduqda orta xətti meyl aşağıdakı düsturla hesablamaq olar:**

$$\bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$$

Deməli, eyni cəkiyə malik olan variantlar üzrə orta xətti meyl hesablamaq üçün ayrı-ayrı variantların orta kəmiyyətdən meyllərinin mütləq qiymətlərinin  $|x - \bar{x}|$  cəmini variantların sayına bölmək lazımdır.

**Variantların cəkiləri müxtəlif olduqda orta xətti meyl aşağıdakı düsturla hesablanır:**

$$\bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f}$$

**Orta xətti meyl variantın ifadə olunduğu ölçü vahidi ilə ifadə edilir.** Variasiya genişliyi göstəricisinə, nisbətən orta xətti meyl əlamətin tərəddüdünü daha dolğun xarakterizə edir. Buna baxmayaraq **təcrübədə əlamətin tərəddüd dərəcəsini ölçmək üçün, əsasən dispersiyadan və orta kvadratik meyldən istifadə edilir. Ona görə ki, bu göstəricilər əlamətin tərəddüd dərəcəsini riyazi nöqtəyi – nəzərdən daha dəqiq xarakterizə edirlər.**

## **5. Dispersiya.**

Variantların orta kəmiyyətdən meyllərinin kvadratları cəmindən hesablanmış orta kəmiyyət **dispersiya** adlanır.

Dispersiya yunan hərfi – kiçik siqma kvadratı ilə işarə olunur və variantlar təkrara malik olmadıqda aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

Bu halda dispersiyanı hesablamaq üçün variantların orta kəmiyyətdən meyllərini kvadrata yüksəldərək cəmləyib, alınan nəticəni variantların sayına bölmək lazımdır.

Variantların çəkili müxtəlif olduqda dispersiya aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\sigma^2 = \frac{\sum |x - \bar{x}|^2 f}{\sum f}$$

## 6. Orta kvadratik meyl.

Əgər dispersiyanın kvadrat kökü alınarsa, onda dispersiyanın bu formasına **orta kvadratik meyl** deyilir. Orta kvadratik meylin düsturları çəkili eyni olduqda

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

çəkili müxtəlif olduqda isə

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}}$$

formada yazılır.

**Orta kvadratik meyl orta xətti meyl kimi variantın ifadə olunduğu ölçü vahidi ilə ifadə olunur.**

## 7. Variasiya əmsali

Orta xətti meyl, dispersiya və orta kvadratik meyl ilə yanaşı əlamətin variasiyasına xarakteristika vermək üçün variasiya əmsalından da istifadə edilir.

Variasiya əmsalı orta kvadratik meyl ilə hesabı orta kəmiyyət arasındakı nisbəti göstərir və faizlə ifadə edilir.

Variasiya əmsalı  $v$  hərfi ilə işarə edilir və aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$v = \frac{\sigma_x 100}{\bar{x}}$$

Bu faiz nə qədər kiçik olarsa, hesablanmış orta kəmiyyət də məcmuyu bir o qədər yaxşı xarakterizə edir.

Variasiya göstəricilərinin hesablanmasını konkret misallar əsasında izah edək.

Fərz edək ki, iki rayonun fermerləri tərəfindən kartof əkinlərinin hər hektarından aşağıdakı miqdarda kartof götürülmüşdür.

| I rayon   |                           | II rayon  |                           |
|-----------|---------------------------|-----------|---------------------------|
| Fermerlər | Hektardan məhsuldarlıq, s | Fermerlər | Hektardan məhsuldarlıq, s |
| 1         | 150                       | 1         | 124                       |
| 2         | 140                       | 2         | 121                       |
| 3         | 129                       | 3         | 118                       |
| 4         | 125                       | 4         | 115                       |
| 5         | 113                       | 5         | 114                       |
| 6         | 108                       | 6         | 112                       |
| 7         | 105                       | 7         | 110                       |
| 8         | 100                       | 8         | 106                       |
| 9         | 90                        | 9         | 101                       |
| 10        | 60                        | 10        | 99                        |
|           | $\bar{X} = 112$           |           | $\bar{X} = 112$           |

Buradan orta məhsuldarlıq:

$$\text{I rayonda } \bar{x} = \frac{1120}{10} = 112 \text{ s.}$$

$$\text{II rayonda } \bar{x} = \frac{1120}{10} = 112 \text{ s.}$$

Hər iki rayonda məhsuldarlığın eyni olmasına baxmayaraq, ayrı-ayrı fermer təsərrüfatlarında əlamətin tərəddüd dərəcəsi müxtəlifdir:

$$\text{I rayonda } R = 150 - 60 = 90 \text{ s.}$$

$$\text{II rayonda } R = 124 - 99 = 25 \text{ s.}$$

Orta xətti meyli hesablamaq üçün aşağıdakı yardımçı cədvəldən istifadə edək.

| I rayon                       |                              |                             | II rayon                         |                              |                             |
|-------------------------------|------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| Hektardan məhsuldarlı<br>q, s | Orta kəmiyyətdən<br>meyl     | Meylin<br>mütləq<br>qiyməti | Hektardan<br>məhsuldar<br>lıq, s | Orta kəmiyyətdən<br>meyl     | Meylin<br>mütləq<br>qiyməti |
| $x$                           | $x - \bar{x}, \bar{x} = 112$ | $ x - \bar{x} $             | $x$                              | $x - \bar{x}, \bar{x} = 112$ | $ x - \bar{x} $             |
| 150                           | +38                          | 38                          | 124                              | +12                          | 12                          |
| 140                           | +28                          | 28                          | 121                              | +9                           | 9                           |
| 129                           | +17                          | 17                          | 118                              | +6                           | 6                           |
| 125                           | +13                          | 13                          | 115                              | +3                           | 3                           |
| 113                           | +1                           | 1                           | 114                              | +2                           | 2                           |
| 108                           | -4                           | 4                           | 112                              | 0                            | 0                           |
| 105                           | -7                           | 7                           | 110                              | -2                           | 2                           |
| 100                           | -12                          | 12                          | 106                              | -6                           | 6                           |
| 90                            | -22                          | 22                          | 101                              | -11                          | 11                          |
| 60                            | -52                          | 52                          | 99                               | -13                          | 13                          |
| Cəmi                          | -                            | 194                         | Cəmi                             | -                            | 64                          |

Buradan orta xətti meyl:

$$\text{I rayonda } \bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} = \frac{194}{10} = 19,4 \text{ s.}$$

$$\text{II rayonda } \bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} = \frac{64}{10} = 6,4 \text{ s.}$$

Bu o deməkdir ki, variantların orta kəmiyyətdən meylləri orta hesabla birinci rayonda 19,4 s, ikinci rayonda isə 6,4 s-ə bərabərdir. Deməli, birinci rayona nisbətən ikinci rayonun fermer təsərrüfatlarında məhsuldarlıq bir-birinə daha uyğun olmuşdur.

Dispersiya və orta kvadratik meylin hesablanması üçün aşağıdakı cədvəli tərtib edək.

| I rayon                   |                       |                   | II rayon                  |                       |                   |
|---------------------------|-----------------------|-------------------|---------------------------|-----------------------|-------------------|
| Hektardan məhsuldarlıq, s | Orta kəmiyyətdən meyl | Meylin kvadratı   | Hektardan məhsuldarlıq, s | Orta kəmiyyətdən meyl | Meylin kvadratı   |
| $x$                       | $x - \bar{x}$         | $(x - \bar{x})^2$ | $x$                       | $x - \bar{x}$         | $(x - \bar{x})^2$ |
| 150                       | +38                   | 1444              | 124                       | +12                   | 144               |
| 140                       | +28                   | 784               | 121                       | +9                    | 81                |
| 129                       | +17                   | 289               | 118                       | +6                    | 36                |
| 125                       | +13                   | 169               | 115                       | +3                    | 9                 |
| 113                       | +1                    | 1                 | 114                       | +2                    | 4                 |
| 108                       | -4                    | 16                | 112                       | 0                     | 0                 |
| 105                       | -7                    | 49                | 110                       | -2                    | 4                 |
| 100                       | -12                   | 144               | 106                       | -6                    | 36                |
| 90                        | -22                   | 484               | 101                       | -11                   | 121               |
| 60                        | -52                   | 2704              | 99                        | -13                   | 169               |
| Cəmi                      | -                     | 6084              | Cəmi                      | -                     | 604               |

Buradan **dispersiya**:

birinci rayonda

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{6084}{10} = 608,4;$$

ikinci rayonda

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{604}{10} = 60,4.$$

**Orta kvadratik meyl:**

birinci rayonda

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{6084}{10}} = \sqrt{608,4} = 24,66 \text{ s};$$

ikinci rayonda

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{604}{10}} = \sqrt{60,4} = 7,77 \text{ s}.$$

**Variasiya əmsalı:**

birinci rayonda

$$v = \frac{\sigma \times 100}{\bar{x}} = \frac{24,66 \times 100}{112} = 22\%;$$

ikinci rayonda

$$v = \frac{\sigma \times 100}{\bar{x}} = \frac{7,77 \times 100}{112} = 6,9\%.$$

Hesablamalar göstərir ki, 1- ci rayona nisbətən 2- ci rayonda məhsuldarlıq səviyyəsi təsərrüfatlar üzrə bir – birindən az fərqlənir.

İndi də variasiya göstəricilərini variantların çəkilişi müxtəlif olan misal əsasında hesablayaq.

| Məhsuldarlıq,<br>sentner | Əkin sahəsi,<br>hektar | Ümumi yığım,<br>sentner | Meyl          | Meylin<br>kvadratı | Meylin<br>kvadratının öz<br>çəkilişinə hasili |
|--------------------------|------------------------|-------------------------|---------------|--------------------|-----------------------------------------------|
| $x$                      | $f$                    | $x \times f$            | $x - \bar{x}$ | $(x - \bar{x})^2$  | $(x - \bar{x})^2 f$                           |
| 12                       | 10                     | 120                     | -5            | 25                 | 250                                           |
| 14                       | 70                     | 980                     | -3            | 9                  | 630                                           |
| 15                       | 100                    | 1500                    | -2            | 4                  | 400                                           |
| 16                       | 250                    | 4000                    | -1            | 1                  | 250                                           |
| 18                       | 200                    | 3600                    | +1            | 1                  | 200                                           |
| 20                       | 170                    | 3400                    | +3            | 9                  | 1530                                          |

|       |                |                   |   |   |                                 |
|-------|----------------|-------------------|---|---|---------------------------------|
| Yekun | $\sum f = 800$ | $\sum xf = 13600$ | - | - | $\sum (x - \bar{x})^2 f = 3260$ |
|-------|----------------|-------------------|---|---|---------------------------------|

Orta məhsuldarlıq: 
$$\bar{x} = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{13600}{800} = 17 \text{ s.}$$

Dispersiya: 
$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{3260}{800} = 4,075$$

Orta kvadratik meyl:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}} = \sqrt{\frac{3260}{800}} = \sqrt{4,075} = 2,02 \text{ s.}$$

Dispersiya bir neçə xüsusiyyətə malikdir. Dispersiyanı öyrənərkən bu xüsusiyyətləri öyrənmək lazımdır.

- 1) Variasiya edən əlamətin çəkirlərini bərabər dəfə dəyişdirdikdə (ixtisar etdikdə) dispersiya dəyişmir.
- 2) Əlamətin bütün qiymətlərini  $k$  dəfə azaltdıqda və ya artırıqda dispersiya  $k^2$  dəfə azalır və ya artır.

Dispersiyanın bu xüsusiyyətlərindən istifadə etməklə onu moment (şərti sıfır) üsulu ilə də hesablamaq olar. Moment üsulu ilə dispersiyanın hesablanma düsturu:

$$\sigma^2 = \frac{\sum \left( \frac{x_i - a}{k} \right)^2 f}{\sum f} \times k^2 - \left( \bar{x} - a \right)^2.$$

Bu üsulla dispersiyanın hesablanmasını aşağıdakı misalla izah edək.

| Məhsul-<br>darlıq,<br>sentner | Əkin sahəsi,<br>hektar | Şərti orta<br>rəqəm | $x_i - a$<br>$a = 25$ | $\frac{x_i - a}{k}$<br>$k = 2$ | $\left( \frac{x_i - a}{k} \right) f$ | $\left( \frac{x_i - a}{k} \right)^2 f$ |
|-------------------------------|------------------------|---------------------|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------------|
|                               | $f$                    | $x$                 |                       |                                |                                      |                                        |

|       |     |    |    |    |      |      |
|-------|-----|----|----|----|------|------|
| 20-22 | 100 | 21 | -4 | -2 | -200 | 400  |
| 22-24 | 150 | 23 | -2 | -1 | -150 | 150  |
| 24-26 | 250 | 25 | 0  | 0  | 0    | 0    |
| 26-28 | 150 | 27 | +2 | +1 | +150 | 150  |
| 28-30 | 150 | 29 | +4 | +2 | +300 | 600  |
| Yekun | 800 | -  | 0  | 0  | +100 | 1300 |

Buradan orta məhsuldarlıq:

$$\bar{x} = \frac{\sum \left( \frac{x_i - a}{k} \right) f}{\sum f} \times k + a = \frac{100}{800} \times 2 + 25 = 25,25 \text{ s.}$$

Dispersiya:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum \left( \frac{x_i - a}{k} \right)^2 f}{\sum f} \times k^2 - (\bar{x} - a)^2 = \\ &= \frac{1300}{800} \times 4 - (25,25 - 25)^2 = \frac{5200}{800} - 0,06 = 6,5 - 0,06 = 6,44 \text{ s.} \end{aligned}$$

Bu üsuldən məlumatlar bərabər fasilələrlə verildikdə istifadə edilir.

Əgər variantların qiymətləri qeyri-bərabər fasilələrlə verilərsə, o zaman dispersiyanı aşağıdakı düsturla hesablamaq məqsəduyğundur:

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \left( \bar{x} \right)^2.$$

Burada:  $\overline{x^2}$  - variantların kvadratlarının orta kəmiyyətini göstərir və  $\overline{x^2} = \frac{\sum x^2 f}{\sum f}$

düsturu ilə hesablanır.  $\left( \bar{x} \right)^2$  - orta kəmiyyətin kvadratıdır və  $\left( \bar{x} \right)^2 = \left( \frac{\sum x f}{\sum f} \right)^2$

düsturu ilə hesablanır.

Məsələn, fərz edək ki, istehsal kooperativində işçilərin pambıq yığımı aşağıdakı məlumatlarla xarakterizə olunur.

| Gündəlik pambıq<br>yığımı, kq | İşçilərin sayı |
|-------------------------------|----------------|
| 26-28                         | 10             |
| 28-32                         | 15             |
| 32-40                         | 50             |
| 40-50                         | 18             |
| 50-70                         | 8              |

Həmin məlumatlara əsasən dispersiyanı hesablayaq.

| Gündəlik<br>yığım, kq | Şərti orta<br>rəqəm<br>$x$ | İşçilərin sayı<br>$f$ | $xf$ | $x^2$ | $x^2 f$ |
|-----------------------|----------------------------|-----------------------|------|-------|---------|
| 26-28                 | 27                         | 10                    | 270  | 729   | 7290    |
| 28-32                 | 30                         | 15                    | 450  | 900   | 13500   |
| 32-40                 | 36                         | 50                    | 1800 | 1296  | 64800   |
| 40-50                 | 45                         | 18                    | 810  | 2025  | 36450   |
| 50-70                 | 60                         | 8                     | 420  | 3600  | 35200   |
| Yekun                 | -                          | 100                   | 3750 | -     | 147240  |

$$\text{Buradan: } \left(\bar{x}\right)^2 = \left(\frac{\sum xf}{\sum f}\right)^2 = (3750/100)^2 = (37,5)^2 = 1406,25.$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} = 147240/100 = 1472,4.$$

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2 = 1472,4 - 1406,25 = 66,15.$$

Buradan orta kvadratik meyl

$$\sigma = \sqrt{66,15} = 8,1 \text{ kq təşkil edər.}$$

### 8. Ümumi, qrupdaxili və qruplararası dispersiya

Hər bir kənd təsərrüfatı mütəxəssisinin işində elmi təcrübələrin qoyulması mühüm yer tutur. Elmi təcrübənin qoyulması və onun nəticələrinin işlənməsi dispersiya təhlili üsulunun öyrənilməsini tələb edir. Dispersiya təhlili vasitəsilə təcrübənin nəticələrinin nə dərəcədə düzgün olub - olmamasını müəyyən etmək mümkündür. Məsələn, buğdanın səpin müddətinin məhsuldarlığa təsirini müəyyən etmək üçün aparılmış təcrübənin nəticələrini nəzərdən keçirək. Məsələn, dörd müddətdə səpilən dənli bitkilərin məhsuldarlığını müqayisə edək: 10 aprel, 15 aprel, 20 aprel, 25 aprel. Əvvəlcədən qeyd edilməlidir ki, təcrübənin nəticələrini statistik təhlil etmək üçün iki şərtə əməl edilməlidir. Birinci, təcrübənin hər variantı (bizim misalımızda – səpin müddəti) bir neçə sahədə təkrar olunmalıdır. İkinci, sahələrin variantlar arasında bölüşdürülməsi təsadüfi olmalıdır. Bu isə püşk atma ilə müəyyən edilir.

Fərz edək ki, hər bir variant (səpin müddəti) beş sahədə aparılmışdır. Deməli, təcrübə cəmi 20 sahədə aparılmışdır. Həmin təcrübənin nəticələrini aşağıdakı kimi yazmaq olar.

Təcrübənin nəticələri

| Səpin müddəti<br>(təcrübənin variantları) | Təkrarlar üzrə məhsuldarlıq, s/ha ( $X_i$ ) |    |    |    |    | Orta<br>məhsuldarlıq<br>$\overline{X_v}$ |
|-------------------------------------------|---------------------------------------------|----|----|----|----|------------------------------------------|
|                                           | 1                                           | 2  | 3  | 4  | 5  |                                          |
| 10 aprel                                  | 18                                          | 24 | 21 | 22 | 20 | 21                                       |
| 15 aprel                                  | 24                                          | 28 | 25 | 20 | 28 | 25                                       |
| 20 aprel                                  | 27                                          | 26 | 25 | 29 | 23 | 26                                       |
| 25 aprel                                  | 19                                          | 26 | 26 | 21 | 28 | 24                                       |

Buradan görünür ki, müxtəlif müddətlərdə aparılan səpinin nəticələri də müxtəlifdir. Yəni, orta məhsuldarlıq müxtəlifdir.

Ancaq qeyd edilməlidir ki, eyni vaxtda səpilmiş sahələrin məhsuldarlığı da müxtəlifdir. Ona görə də yoxlamaq lazımdır ki, görək bu müxtəliflik hansı amillərin təsiri nəticəsində olmuşdur. Bunu aşağıdakı kimi müəyyən etmək olar.

1) Məhsuldarlığın dispersiyasının ümumi həcmi hesablayırlar:

$$D_{\text{ümumi}} = \sum (x_i - \bar{x}_{\text{ümumi}})^2.$$

Yəni dispersiyanın ümumi həcmi ayrı-ayrı sahələrin məhsuldarlığının ümumi orta məhsuldarlıqdan meyllərinin kvadratlarının cəminə bərabərdir.

Ümumi dispersiya məhsuldarlığa bütün amillərin təsirini göstərir (səpin müddətinin və sahələrin müxtəlif olmasının). Ümumi orta məhsuldarlıq aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\bar{x}_{\text{ümumi}} = \frac{\sum x_v}{n} = \frac{21 + 25 + 26 + 24}{4} = 24 \text{ s/ha.}$$

Ümumi dispersiya isə:

$$D_{\text{ümumi}} = (18-24)^2 + (24-24)^2 + \dots + (21-24)^2 + (28-24)^2 = 36 + 0 + \dots + 9 + 16 = 212.$$

2) Qruplararası dispersiyanın həcmi müəyyən edirlər:

$$D_{\text{qruplararası}} = \sum (\bar{x}_v - \bar{x}_{\text{ümumi}})^2 \times m.$$

Burada:  $\bar{x}_v$  - variantlar üzrə orta məhsuldarlıq;

$\bar{x}_{\text{ümumi}}$  - ümumi məhsuldarlıq;

m – təkrarların sayıdır.

Qruplararası dispersiya öyrənilən amilin, yəni, səpin müddətinin məhsuldarlığa olan təsirini göstərir.

$$D_{\text{qruplararası}} = [(21-24)^2 + (25-24)^2 + (26-24)^2 + (24-24)^2] \times 5 = (9 + 1 + 4 + 0) = 70.$$

3) Qrupdaxili dispersiya ( $D_{\text{qrupdaxili}}$ ) hesablanır.

Riyazi statistikada sübut edilmişdir ki, ümumi dispersiya ( $D_{\text{ümumi}}$ ) qrupdaxili dispersiya ( $D_{\text{qrupdaxili}}$ ) və qruplararası dispersiyanın ( $D_{\text{qruplararası}}$ ) cəminə bərabərdir:

$$D_{\text{ümumi}} = D_{\text{grupdaxili}} + D_{\text{qruplararası}} = 70 + 142 = 212.$$

Buna dispersiyanın cəmlənməsi deyilir.

Grupdaxili dispersiya ümumi və qruplararası dispersiyanın fərqinə bərabərdir:

$$D_{\text{grupdaxili}} = D_{\text{ümumi}} - D_{\text{qruplararası}} = 212 - 70 = 142.$$

Buradan aydın olur ki, dənli bitkilərin məhsuldarlığı 33% səpin müddətindən asılıdır ( $70 : 212 = 0,33$  və ya 33%).

### 9. Alternativ əlamətin dispersiyası

$$p + q \Rightarrow q = 1 - p$$

$$p = \frac{M}{N}; \quad q = \frac{N - M}{N};$$

$N$  – statistik məcmunun həcmidir (vahidlərin ümumi sayıdır);  
 $M$  - müəyyən əlamətə malik olan vahidlərin sayıdır.

$p$  - müəyyən əlamətə malik olan vahidlərin hissəsidir (payıdır).

$q$  - əlamətə malik olmayan vahidlərin hissəsidir (payıdır).

$$q = 1 - p;$$

$$p + q = 1.$$

Alternativ əlamətin orta kəmiyyəti:

$$\bar{X} = \frac{(1 \times p) + (0 \times q)}{p + q} = p; \quad \bar{X} = p$$

Alternativ əlamətin dispersiyası:

$$\sigma^2 = \frac{(1-p)^2 p + (0-p)^2 q}{p+q} = \frac{q^2 p + p^2 q}{p+q} = pq$$

$$\sigma^2 = pq$$

Alternativ əlamətin ən böyük qiyməti:

$$\sigma^2 = pq = 0.25$$

İsbatı.

$$f(p) = p(1-p) = p - p^2 = -(p^2 - p) = \left[ \left( p - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} - \left( p - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$f(p) = \frac{1}{4} - \left( p - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$p - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

$$f(p) = \frac{1}{4} = 0,25$$

p = 0,5 olduqda alınır.

### **10. Dispersiyanın ixtisar (moment və ya şərti sıfır) üsulu ilə hesablanması**

Orta kəmiyyətin və dispersiyanın xassələrindən istifadə etməklə dispersiyanı asan üsulla hesablamaq mümkündür.

$$1) \quad x - A = x^* \quad \sigma_{x^*}^2 = \sigma_x^2$$

$$\sigma_{x^*}^2 = \frac{1}{n} \sum (x^* - \overline{x^*})^2 \quad \overline{x^*} = \overline{x - A}$$

Orta kəmiyyətin xassəsinə görə  $\overline{x - A} = \overline{x} - A$ . Deməli,

$$\sigma_{x^*}^2 = \frac{1}{n} \sum \left[ (x - A) - (\overline{x - A}) \right]^2 = \frac{1}{n} \sum (x - \overline{x})^2.$$

$$2) \quad \frac{x}{d} = x^* \quad \sigma_d^2 = \frac{1}{n} \sum \left[ \frac{1}{d} x - \left( \overline{\frac{1}{d} x} \right) \right]^2$$

Orta kəmiyyətin xassəsinə görə

$$\left( \overline{\frac{1}{d} x} \right) = \frac{1}{d} \overline{x}. \text{ Deməli,}$$

$$\sigma_d^2 = \frac{1}{n} \sum \left( \frac{1}{d} x - \frac{1}{d} \bar{x} \right)^2 = \frac{1}{d^2 n} \sum (x - \bar{x})^2$$

$$\sigma^2 = d^2 \sigma_d^2$$

$$3) \frac{\sum (x-A)^2 f}{\sum f} = \frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f} + (\bar{x}-A)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum \left( \frac{x-A}{d} \right)^2 f}{\sum f} \times d^2 - (\bar{x}-A)^2.$$

## MÖVZU 20 -21. DİNAMİKA SİRALARI

### PLAN:

1. Dinamika sıraları haqqında anlayış və onların növləri
2. Dinamika sıralarının qurulması prinsipləri
3. Dinamika sırasının təhlili göstəriciləri
4. Dinamika sıralarının orta xarakteristikaları
5. Əsas inkişaf meylinin aşkar edilməsi üsulları
6. Dinamika sıralarının interpolasiyası və ekstrapolyasiyası

### ƏDƏBİYYAT SİYAHISI.

- 1.Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, "Maarif nəşriyyatı", 1973.
2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çarşıoğlu, 2006.

#### 1. Dinamika sıraları haqqında anlayış və onların növləri

Statistikanın mühüm vəzifələrindən biri tədqiq edilən göstəricilərin zaman etibarı ilə dəyişməsinə öyrənməkdən ibarətdir. Dinamika yunan sözü olub, "qüvvə", «xronos» isə «vaxt» deməkdir.

Statistik göstəricilərin qiymətlərinin xronoloji ardıcılıqla düzülüşünə dinamika (zaman) sıraları deyilir. Dinamika sıralarının statistik işlənməsi üsulları XX əsrin iyirminci illərində intensiv inkişaf etməyə başlamışdır. Çünki bu dövrdən başlayaraq ayrı-ayrı ölkələrin iqtisadi inkişafında ciddi dəyişikliklər baş verməyə başlamışdır. Dünya sosializm sisteminin süquta uğraması ilə əlaqədar olaraq bir sıra ölkələrin, o cümlədən postsovet məkanında yaranmış müstəqil dövlətlərin iqtisadi inkişafında da ciddi dəyişikliklər baş vermişdir. Bu hadisə və proseslərin zaman etibarı ilə dəyişməsinə xarakterizə etmək üçün dinamika sıraları qurulmalıdır. Çünki onların inkişaf istiqamətlərini və qanunauyğunluqlarını aşkar etmək üçün müşahidə nəticəsində toplanmış məlumatları dinamika sıraları şəklində göstərmək mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Hər bir dinamika sırası iki elementdən ibarətdir: birincisi statistika məlumatlarının aid olduğu vaxt anı (tarix və ya dövr), gün, ay, il göstərilir; ikincisi müəyyən vaxt anında öyrənilən obyektə xarakterizə edən statistik göstəricilər verilir.

Öyrənilən obyektə xarakterizə edən statistik göstəricilərə sıranın səviyyəsi deyilir. Hər iki element – vaxt və səviyyə dinamika sırasının üzvləri adlanır. Dinamika sıralarını düzgün tətbiq etmək üçün onların növlərini bilmək lazımdır. Vaxt əlamətinə görə dinamika sıraları an və fasilə dinamika sıralarına ayrılır. Müəyyən vaxt anına görə sosial - iqtisadi hadisənin həcmi, səviyyəsinin dəyişməsinə xarakterizə edən göstəricilər sırasına an dinamika sırası deyilir. Göründüyü kimi an dinamika sırasında sıranın səviyyəsi müəyyən tarixə verilir. Məsələn, statistika müşahidəsi nəticəsində əhalinin sayı, kənd təsərrüfatı məhsullarının sayı və gücü, mal-qaranın sayı, ticarətdə əmtəə qalığı və s. haqqında toplanılan məlumat an dinamika sıraları şəklində sistemləşdirilir.

An dinamika sıralarının səviyyələrini cəmləməyin mənası yoxdur, çünki eyni bir kəmiyyət bir neçə dəfə müxtəlif səviyyələrdə təkrar iştirak edir.

Müəyyən vaxt fasiləsində sosial-iqtisadi hadisələrin həcmi, səviyyəsinin dəyişməsinə ifadə edən göstəricilər sırasına fasilə dinamika sırası deyilir. Tərifdən göründüyü kimi, fasilə dinamika sırasında sıranın hər bir səviyyəsi müəyyən dövr ərzində hadisənin həcmi, səviyyəsini xarakterizə edir. An dinamika sıralarından fərqli olaraq fasiləli dinamika sıralarının səviyyələrini cəmləmək olar və cəmləmə nəticəsində iqtisadi mənası olan göstərici alınacaqdır. Belə ki, cəmləmənin nəticəsində alınan göstərici daha iri dövr ərzində hadisənin həcmi xarakterizə edir. Məsələn, sıranın günlük səviyyəsini cəmləmək nəticəsində 10 günlük, yarımaylıq, aylıq səviyyəni cəmləməklə rüblük və illik səviyyəni, illik səviyyə əsasında isə beş illik, onillik və s. səviyyəni almaq mümkündür.

Fasiləli dinamika sırasının səviyyəsini ardıcıl olaraq toplamaq yolu ilə artan yekunlarla dinamika sırası qurmaq olar.

Dinamika sırasında öz əksini tapan vaxtın tamlığına görə, onları tam və tam olmayan dinamika sırasına ayırırlar. Dinamika sırasında dövrlər ardıcıl bərabər fasilələrlə verilsə, belə sıraya tam dinamika sırası deyilir.

Tam olmayan dinamika sıralarında isə ardıcıl bərabər fasiləli dövrlər verilmir.

Dinamika sıralarının səviyyələrinin ifadə olunma üsuluna görə onları mütləq, orta və nisbi göstəricilərlə ifadə olunan dinamika sıralarına ayırırlar.

## ***2. Dinamika sıralarının qurulması prinsipləri***

Məlumdur ki, statistika müşahidəsi nəticəsində toplanmış məlumatlar dinamika sıraları şəklində sistemləşdirilir. Dinamika sıralarının qurulmasında elmi prinsiplərə ciddi riayət edilməlidir. Belə ki, dinamika sıralarının təhlili onların düzgün qurulmasından asılıdır.

Dinamika sıralarının düzgün qurulmasının mühüm tələblərindən biri hər bir sıranın bütün səviyyələrinin müqayisəli şəkildə olmasıdır. Müqayisəli verilməyən məlumatın dinamika sırasını təhlil etmək olmaz. Müqayisəlilik prinsipinin

pozulmasının əsas səbəbləri və sıranın səviyyələrinin müqayisəli şəkllə salınması üsulları ilə tanış olaq.

1. Təcrübədə çox tez-tez inzibati - ərazi dəyişiklikləri baş verir. Bunun nəticəsində məlumatların müqayisəliliyi pozulur. Bu halda dinamika sıralarının səviyyələrini müqayisəli şəkllə salmaq üçün əvvəlki səviyyələr müvafiq hesablama əsasında müasir sərhəddə ifadə etmək lazımdır.

2. Dinamika sırasının səviyyələrini əhatə olunan obyektlərin dairəsi üzrə müqayisəli olmalıdır.

Obyektin bir hissəsinin bir tabeçilikdən digər tabeçiliyə keçməsi nəticəsində sıranın səviyyələrinin müqayisəliliyi pozulur. Həmin obyekt daxilində yeni tikilmiş sex, müəssisə əmələ gələrsə, yaxud sıradan çıxmış müəssisə fəaliyyətini dayandırarsa, dinamika sırasının səviyyələrinin müqayisəliliyi pozulmaz.

3. Bütün dövrlər üçün böhran anı eyni olmalıdır. Məsələn, mal-qaranın illər üzrə sayının dinamikasını qurarkən sıranın bütün səviyyələrini üçün böhran anı 1- i yanvar vəziyyəti götürülməlidir. Müxtəlif böhran anına qurulmuş dinamika sırasını müqayisəli sıra hesab etmək olmaz.

4. Sıranın səviyyələrini eyni ölçü vahidi ilə ifadə olunmalıdır. Bu həm natural, həm də dəyər və əmək ölçü vahidlərinə aiddir. Məsələn, kənd təsərrüfatı bitkilərinin məhsuldarlığını və ümumi yığımını bir dövrdə pulla, digər dövrdə isə sentlərlə, yaxud tonla ifadə etməklə qurulan dinamika sırası müqayisəli ola bilməz. Eləcə də müxtəlif pul ölçü vahidlərində düzülmüş dinamika sırası müqayisəli ola bilməz.

5. Sıranın səviyyələrinin hesablanması metodologiyası eyni olmalıdır. Məsələn, əmək məhsuldarlığının səviyyəsinin dinamikası bir dövrdə adam saata düşən hasilat, digər dövrdə isə bir nəfərə düşən hasilat əsasında qurula bilməz. Ancaq eyni metod əsasında hesablanmış göstərici üzrə qurulmuş dinamika sırasının səviyyələrini müqayisəli ola bilər.

6. Müxtəlif dövrlərdə müşahidə vahidlərinin eyni şəkildə başa düşülməsi təmin edilməlidir. Müşahidə vahidlərinin müxtəlif mənada başa düşülməsi dinamika sırasının səviyyələrinin müqayisəli olmasını təmin edə bilməz. Məsələn, sənaye müəssisələrinin sayının dinamikasını tərtib edərkən bir dövrdə kiçik və iri müəssisələri, digər dövrdə isə ancaq iri müəssisələri götürsək belə dinamika sırasının səviyyələrini müqayisəli ola bilməz.

7. Uzun vaxt dövrünü əhatə edən, eyni inkişaf qanunu ilə xarakterizə olunan məcmunun inkişafını əks etdirən sıranın eyni keyfiyyətli dövrləri birləşdirilməlidir. Belə ki, sosial - iqtisadi hadisələrin müəyyən dövr ərzində inkişafında, hər şeydən əvvəl kəmiyyət dəyişiklikləri, müəyyən mərhələlərdə isə hadisənin qanunauyğun dəyişilməsinə gətirib çıxaran sıçrayışlı keyfiyyət dəyişiklikləri baş verir. Məsələn, Azərbaycanda milli gəlirin, əsas istehsal fondlarının və digər göstəricilərin 1941 - 1950 - ci illərdə və sonrakı illərdə dəyişilməsini xarakterizə edən dinamika sırasını qurmaq və onu təhlil etmək mənasız nəticəyə gətirib çıxarar. Belə ki, 1941 - 1945, 1946 - 1950 və 1950 - ci ildən sonrakı dövrlərdə mövcud olan qanunauyğunluqlar bir - birindən ciddi fərqlənirlər. Məlum olduğu kimi 1941 - 1945 illərdə respublika müharibə dövründə, 1946 - 1950-ci illərdə iqtisadiyyatın bərpası, sonrakı illərdə isə iqtisadi inkişaf dövründə olmuşdur. Həmin dövrlərdə mövcud olmuş

qanunauyğunluqlar isə fərqli xarakterə malikdir. Deməli, ancaq eyni keyfiyyətli dövrlər əsasında dinamika sırasının elmi xarakteristikası verilə bilər.

### 3. *Dinamika sırasının təhlili göstəriciləri*

Dinamika sırasının təhlili zamanı istifadə edilən göstəricilərə mütləq artım, artım sürəti, nisbi artım sürəti, 1% nisbi artımın mütləq qiyməti aiddir.

Dinamika sırasının sonrakı səviyyəsi ilə müqayisə üçün əsas götürülmüş səviyyə arasındakı fərqə mütləq artım deyilir. Mütləq artım sıranın sonrakı səviyyəsinin müqayisə üçün əsas götürülmüş səviyyədən nə qədər çox və ya az olduğunu göstərir.

Mütləq artımı silsiləvi qaydada hesablamaq üçün sıranın hər bir sonrakı səviyyəsindən əvvəlki səviyyəni çıxmaq lazımdır.

Dinamika sırasının ilk səviyyəsini  $Y_1$ , son səviyyəsini  $Y_n$ , sıranın cari səviyyəsini  $Y_i$ , özündən əvvəlki səviyyəni  $Y_{i-1}$ , mütləq artımı isə  $\Delta$  ilə işarə etsək, onda mütləq artımı aşağıdakı düsturlarla hesablamaq olar:

$$\Delta_o = Y_i - Y_1 \text{ (əsas qayda);}$$

$$\Delta_s = Y_i - Y_{i-1} \text{ (silsiləvi qayda).}$$

**Artım sürəti** sıranın sonrakı səviyyəsinin əvvəlki səviyyədən neçə dəfə (faiz) az və ya çox artdığını göstərir. Artım sürəti əmsal və ya faizlə hesablanır. Mütləq artım kimi o da tədqiqatın vəzifəsindən asılı olaraq əsas və ya silsiləvi qaydada hesablanır. Faiz ifadəsində artım sürətini aşağıdakı düsturlarla hesablamaq olar:

$$S_o = S_i / S_1 \times 100 \text{ (əsas qayda);}$$

$$S_s = S_i / S_{i-1} \times 100 \text{ (silsiləvi qayda).}$$

Mütləq artımın müqayisə üçün əsas götürülmüş səviyyəyə nisbəti **nisbi artım** adlanır. Nisbi artımı artım sürətindən 100-ü çıxmaqla da hesablamaq olar (artım sürəti əmsalla ifadə olunarsa 1-i çıxmaq lazımdır). Artım sürəti faizlə ifadə olunarsa nisbi artımı aşağıdakı kimi hesablamaq olar:

a) əsas qaydada

$$N_o = S_o - 100 = S_i / S_1 \times 100 - 100;$$

b) silsiləvi qaydada

$$N_s = S_s - 100 = S_i / S_{i-1} \times 100 - 100.$$

**Bir faiz nisbi artımın mütləq qiyməti**ni hesablamaq üçün mütləq artımı nisbi artım sürətinə bölmək lazımdır. Bu göstərici yalnız silsiləvi qaydada hesablanır. Əsas qaydada o iqtisad məzmununa malik deyil. 1% nisbi artımın mütləq qiymətini  $\Delta\%$  ilə işarə etsək, onda onu aşağıdakı düsturla hesablamaq olar:

$$\Delta\% = \Delta_s / N_s.$$

#### 4. Dinamika sıralarının orta xarakteristikaları

Sıranın səviyyələri əsasında hesablanmış dinamika göstəriciləri vaxta görə dəyişirlər. İllər üzrə dəyişən dinamika göstəricilərini ümumiləşdirmək üçün orta kəmiyyət hesablamaq lazımdır. Məlumdur ki, kənd təsərrüfatı istehsalı üçün bir il əlverişli olduğu halda, digər halda əlverişli olmaya bilər. Ona görə də, kənd təsərrüfatının inkişafının ümumi meylini aşkar etmək üçün orta səviyyə göstəricisindən istifadə etmək lazımdır.

Orta səviyyənin hesablanma metodu dinamika sırasının növündən asılı olaraq müəyyən edilir.

Fasiləli dinamika sırasında orta səviyyə

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$$

düsturu ilə hesablanır. Burada  $y$  - sıranın səviyyəsi,  $n$  - isə səviyyələrin sayıdır.

Dinamika sırasının səviyyələri tam olmayan sıralar, yəni ardıcıl olmayan dövrlər şəklində ifadə olunarsa, onların orta səviyyəsi hesabı orta kəmiyyətin çəkili düsturu ilə hesablanmalıdır:

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{\sum t}$$

burada  $t$ -onlar arasındakı vaxtdır.

Bərabər fasiləli an dinamika sırasında orta səviyyə xronoloji orta kəmiyyətin düsturu ilə hesablanır:

$$\bar{y}_{xr} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \dots + \frac{1}{2}y_n}{n-1}$$

An dinamika sırasında fasilələr qeyri - bərabər olduqda, orta kəmiyyət aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\bar{y} = \frac{(y_1 + y_2)t_1 + (y_2 + y_3)t_2 + \dots + (y_{n-1} + y_n)t_{n-1}}{2(t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1})}$$

Burada  $t_i$   $y_i$  və  $y_{i+1}$  qeydiyyat anları arasındakı vaxtdır. Dinamika sırasının təhlilində mühüm əhəmiyyətə malik olan orta göstəricilərdən biri orta mütləq artımdır. O müəyyən dövr ərzində sıranın səviyyəsinin orta hesabla nə qədər artdığı və ya azaldığını göstərir. Orta mütləq artımın hesablanması:

a) silsiləli mütləq artımlar əsasında

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_i}{n-1};$$

b) sıranın səviyyələri əsasında

$$\bar{\Delta} = \frac{y_n - y_1}{n-1}.$$

Sosial iqtisadi hadisələrin inkişafının intensivliyinin ümumiləşdirici göstəricisi kimi təhlil prosesində orta artım sürəti və orta nisbi artım sürəti göstəricilərinin mühüm əhəmiyyəti vardır. Əmsal ifadəsində orta artım sürətini aşağıdakı düsturlarla hesablamaq olar:

Silsiləli artım sürəti əsasında

$$\bar{s} = \sqrt[n]{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n}$$

Burada,  $\bar{s}$  orta illik artım sürəti,  $S_1, S_2, \dots, S_n$  silsiləvi artım sürəti əmsalları,  $n$  isə silsiləvi artım sürəti əmsallarının sayıdır.

Dinamika sırasının səviyyələrinin nisbəti əsasında

$$\bar{s} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$$

Orta illik nisbi artımı hesablamaq üçün orta illik artım sürətindən əmsal şəklində verildikdə 1- i faiz şəklində verildikdə isə 100 - ü çıxmaq lazımdır. Qeyri - bərabər dövrlər üzrə orta illik artım sürətinin hesablanması aşağıdakı düstur tətbiq edilə bilər:

$$\bar{s} = \sqrt[t]{S_1^{t_1} \times S_2^{t_2} \times \dots \times S_n^{t_n}}$$

Burada  $t$ -vaxt fasiləsidir.

Orta illik artım sürəti və orta illik nisbi artım sosial-iqtisadi hadisələrin inkişafının intensivliyini xarakterizə edən mühüm göstəricilərdir. Respublikanın mühüm iqtisadi göstəricilərinin orta illik artım sürəti və nisbi artımını digər ölkələrin göstəriciləri ilə müqayisə etdikdə iqtisadi inkişafımızın intensivlik səviyyəsini xarakterizə etmiş olarıq. Bu baxımdan respublikanın ayrı-ayrı rayonlarının iqtisadi göstəricilərinin də bu göstəricilər əsasında müqayisəsi mühüm əhəmiyyətə malikdir.

## **5. Əsas inkişaf meylinin aşkar edilməsi üsulları**

### **A) Sürüşkən orta kəmiyyət**

Sosial-iqtisadi hadisələrin inkişaf qanunauyğunluğunu müəyyən etmək üçün ən çox istifadə olunan üsullardan biri sürüşkən orta kəmiyyətlər üsuludur. Sürüşkən orta kəmiyyətlər dinamika sıralarındakı təsadüfi kənarlaşmanı aradan qaldırmağa və sıranın əsas meylini aşkar etməyə imkan yaradır. Dinamika sırasında ardıcıl sürüşdürülən dövrlər üzrə hesablanan orta kəmiyyətə sürüşkən orta kəmiyyət deyilir. Onlar sıranın üç, beş, yeddi və daha çox səviyyələri əsasında hesablanı bilər. Üç səviyyə əsasında sürüşkən orta kəmiyyəti hesablamaq üçün birinci üç səviyyənin cəmini üçə bölüb sıranın ikinci səviyyəsini, sıranın ikinci, üçüncü, dördüncü səviyyələrinin cəmini üçə bölüb sıranın üçüncü səviyyəsini və s. alırıq. Beş səviyyə əsasında hesablama apardıqda sıranın birinci beş səviyyələrinin

cəmini beşə bölüb sıranın üçüncü səviyyəsini və s. alırıq. Sürüşkən orta kəmiyyət sıranın üç üzvü əsasında hesablandıqda sıranın birinci və axıncı səviyyələri, beş səviyyə əsasında hesablandıqda isə sıranın əvvəlki iki və axıncı iki səviyyələri olmur. Yəni sıranın səviyyələri müvafiq miqdarda azalır.

Sürüşkən orta kəmiyyət tədqiq olunan hadisənin dinamikasının xüsusiyyətlərinə uyğun olaraq hesablanmalıdır. Əgər sırada dövrü tərəddüdlər mövcuddursa, o zaman sürüşkən orta kəmiyyətli dövrlərdə tərəddüd dövrləri uyğun, yaxud ondan 2 dəfə çox olmalıdır. Sırada dövrü tərəddüdlər olmadıqda hadisənin inkişaf meyli aydın müşahidə olunana qədər sürüşkən orta kəmiyyətlərə daxil olan dövrlərin sayı tədricən artırıla bilər. Yəni sürüşkən orta kəmiyyətlər dinamika sırasının iki, üç, dörd, beş və daha çox üzvləri əsasında hesablanıla bilər.

Dinamika sırasının əsas inkişaf meylini sıranın cüt üzvləri əsasında sürüşkən orta kəmiyyətlərlə müəyyən edilməsinin özünəməxsus xüsusiyyəti vardır. Sıranın dörd üzvi əsasında hesablanmış sürüşkən orta kəmiyyət ikinci, üçüncü dövrlərin arasına və s. aid edilir. Belə dəyişməni ləğv etmək üçün səviyyələri dəyişmək və mərkəzləşdirmə aparmaq lazımdır.

Səviyyələrin dörd üzv əsasında dəyişilməsi aşağıdakı kimi aparılır:

$$\bar{y}_1 = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2}}{4} \quad \text{və ya} \quad \bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\frac{y_2}{2} + y_3 + y_4 + y_5 + \frac{y_6}{2}}{4} \quad \text{və ya} \quad \bar{y}_2 = \frac{y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{4}$$

$$\bar{y}_3 = \frac{\frac{y_3}{2} + y_4 + y_5 + y_6 + \frac{y_7}{2}}{4} \quad \text{və ya} \quad \bar{y}_3 = \frac{y_3 + y_4 + y_5 + y_6}{4} \quad \text{və s.}$$

Bu halda  $\bar{y}_1$  üçüncü,  $\bar{y}_2$  dördüncü,  $\bar{y}_3$  beşinci dövrə və s. aid edilir. Bundan sonra müəyyən tarixə aid etmək üçün orta kəmiyyətin mərkəzləşdirilməsi aparılır. Mərkəzləşdirməni aparmaq üçün sürüşkən məbləği, bu məbləğin sürüşkən orta kəmiyyəti və orta kəmiyyətdən ortanı müəyyən etmək lazımdır. Bu prosesi aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\bar{y} = \frac{1}{16}(y_1 + 4y_2 + 6y_3 + 4y_4 + y_5) \quad \text{və ya} \quad \bar{y} = \frac{1}{8}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$

### ***B) Dövrələrin iriləşdirilməsi***

Bu üsulun mahiyyəti günlük səviyyələrdən ongünlük yaxud aylıq səviyyələrə, aylıq səviyyələrdən rüblük yaxud illik səviyyələrə, illik səviyyələrdən

3 illik, 5 illik, 10 illik səviyyələrə keçməkdən ibarətdir. Dövlərin ardıcıl olaraq iriləşdirilməsi nəticəsində sosial-iqtisadi hadisənin inkişaf meyli aydın görünür.

Bu üsuldən xüsusilə kənd təsərrüfatında daha çox istifadə olunur. Çünki, kənd təsərrüfatı istehsalı üçün bir il əlverişli olduğu halda, digər il əlverişsiz olur. Ona görə də kənd təsərrüfatında səviyyələrdən ibarət olan dinamika sırasından üçillik, beşillik dinamika sıralarına keçdikdə hadisələrin əsas inkişaf meylini daha aydın aşkar etmək mümkün olur.

## 6. *Dinamika sıralarının interpolasiyası və ekstrapolyasiyası*

Sosial-iqtisadi hadisələrin dinamikasının tədqiqində müəyyən dövr daxilində naməlum səviyyənin tapılması dinamika sırasının interpolasiyası adlanır. Dinamika sırasının səviyyələri sabit dəyişərsə sıranın interpolasiyasını orta mütləq artım və orta illik artım sürəti əsasında aparmaq olar. Bu göstəricilər eyni keyfiyyətli dövr üçün hadisənin inkişaf qanunauyğunluğunu düzgün xarakterizə etmək imkanına malikdirlər.

Sosial - iqtisadi hadisələrin dinamikasının tədqiqi və keçmiş sırada onların əsas xüsusiyyətlərinin aşkar edilməsi sıranın proqnozlaşdırılması üçün əsas verir. Proqnozlaşdırma sıranın məlum olmayan gələcək səviyyələrinin müəyyənəndirilməsi əsasında aparılır. Məlum olmayan keçmiş və gələcək səviyyələrin müəyyən edilməsi dinamika sıralarının ekstrapolyasiyası adlanır.

Dinamika sıralarının interpolasiyası və ekstrapolyasiyası keyfiyyətə eyni dövrlər əsasında aparılarsa, düzgün nəticə verə bilər. Uzun müddətə və müxtəlif inkişaf qanunauyğunluqlarına malik olan dövrlər üçün dinamika sıralarının ekstrapolyasiyası həqiqi vəziyyəti düzgün xarakterizə edə bilməz. Çünki hadisələrin dəyişməsinə bütün amillərin təsirini uzun müddət üçün əvvəlcədən nəzərə almaq qeyri - mümkündür. Ona görə də proqnozlaşdırma üçün istifadə edilən dinamika sıralarının ekstrapolyasiyasını qısa müddətə aparmaq məqsədəuyğundur.

Dinamika sıralarının interpolasiyası və ekstrapolyasiyası sıranın analitik metodla işlənilməsi əsasında aparıldıqda daha düzgün nəticə verir. Dinamika sıralarının ekstrapolyasiyası orta illik mütləq artım və orta illik artım sürəti əsasında da aparıla bilər.

Azərbaycanda 2000-2008-ci illərdə İBMQ sayının dinamikası üzrə mütləq artım

| İllər | İlin əvvəlinə mal-qaranın sayı, baş $Y_i$ | Mütləq artım                |                                      |
|-------|-------------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|
|       |                                           | Əsas $\Delta_o = Y_i - Y_1$ | Silsiləvi $\Delta_s = Y_i - Y_{i-1}$ |
| 2000  | 1961                                      | 355                         |                                      |

|      |      |     |    |
|------|------|-----|----|
| 2001 | 2027 | 66  | 66 |
| 2002 | 2098 | 137 | 71 |
| 2003 | 2179 | 218 | 81 |
| 2004 | 2242 | 281 | 63 |
| 2005 | 2316 | 355 | 74 |
| 2006 | 2380 | 419 | 64 |
| 2007 | 2445 | 484 | 65 |
| 2008 | 2512 | 551 | 67 |

Azərbaycanda 2000-2008-ci illərdə İBMQ sayının dinamikası üzrə artım sürəti (faizlə)

| İllər | İlin əvvəlinə mal-qaranın sayı, baş $Y_i$ | Artım sürəti (faizlə)                |                                               |
|-------|-------------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------------|
|       |                                           | Əsas<br>$S_o = S_i / S_1 \times 100$ | Silsiləvi<br>$S_s = S_i / S_{i-1} \times 100$ |
| 2000  | 1961                                      | -                                    | -                                             |
| 2001  | 2027                                      | 103.4                                | 103.4                                         |
| 2002  | 2098                                      | 107.0                                | 103.5                                         |
| 2003  | 2179                                      | 111.1                                | 103.9                                         |
| 2004  | 2242                                      | 114.3                                | 102.9                                         |
| 2005  | 2316                                      | 118.1                                | 103.3                                         |
| 2006  | 2380                                      | 121.4                                | 102.8                                         |
| 2007  | 2445                                      | 124.7                                | 102.7                                         |
| 2008  | 2512                                      | 128.1                                | 102.7                                         |

Azərbaycanda 2000-2008-ci illərdə İBMQ sayının dinamikası üzrə nisbi artım (faizlə)

| İllər | İlin əvvəlinə mal-qaranın sayı, baş $Y_i$ | Nisbi artım (faizlə)                                   |                                                                 |
|-------|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
|       |                                           | Əsas<br>$N_o = S_o - 100 = S_i / S_1 \times 100 - 100$ | Silsiləvi<br>$N_s = S_s - 100 = S_i / S_{i-1} \times 100 - 100$ |
| 2000  | 1961                                      | -                                                      | -                                                               |
| 2001  | 2027                                      | 3.4                                                    | 3.4                                                             |
| 2002  | 2098                                      | 7.0                                                    | 3.5                                                             |
| 2003  | 2179                                      | 11.1                                                   | 3.9                                                             |
| 2004  | 2242                                      | 14.3                                                   | 2.9                                                             |

|      |      |      |     |
|------|------|------|-----|
| 2005 | 2316 | 18.1 | 3.3 |
| 2006 | 2380 | 21.4 | 2.8 |
| 2007 | 2445 | 24.7 | 2.7 |
| 2008 | 2512 | 28.1 | 2.7 |

Azərbaycanda 2000-2008-ci illərdə İBMQ sayının dinamikası üzrə  
1% nisbi artımın mütləq qiyməti

| İllər | İlin əvvəlinə mal-qaranın sayı, baş $Y_i$ | Silsiləvi mütləq artım $\Delta_s = Y_i - Y_{i-1}$ | Silsiləvi nisbi artım $N_s = \frac{S_i - 100}{S_{i-1} \times 100 - 100}$ | 1% nisbi artımın mütləq qiyməti $\Delta\% = \Delta_s / N_s$ |
|-------|-------------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 2000  | 1961                                      | -                                                 | -                                                                        | -                                                           |
| 2001  | 2027                                      | 66                                                | 3.4                                                                      | 19.4                                                        |
| 2002  | 2098                                      | 71                                                | 3.5                                                                      | 20.3                                                        |
| 2003  | 2179                                      | 81                                                | 3.9                                                                      | 20.8                                                        |
| 2004  | 2242                                      | 63                                                | 2.9                                                                      | 21.7                                                        |
| 2005  | 2316                                      | 74                                                | 3.3                                                                      | 22.4                                                        |
| 2006  | 2380                                      | 64                                                | 2.8                                                                      | 22.9                                                        |
| 2007  | 2445                                      | 65                                                | 2.7                                                                      | 24.1                                                        |
| 2008  | 2512                                      | 67                                                | 2.7                                                                      | 24.8                                                        |

## MÖVZU 22-23. İNDEKSLƏR

### Plan:

1. İndekslər haqqında anlayış
2. İndekslərin növləri
3. İndekslərin hesablanması üsulları
4. Aqreqat indeks ümumi indeksin əsas forması kimi
5. Həcm və keyfiyyət indeksləri
6. Ərazi indeksləri
7. İndekslərin qarşılıqlı əlaqələri
8. Orta səviyyə dinamikasının indeks metodu ilə təhlili

### Ə D Ə B İ Y Y T S İ Y A H I S I .

- 1.Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, "Maarif nəşriyyatı", 1973.
2. Ə.Ə.Hüseynov, S.Y.Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çarşıoğlu, 2006.

### 1. İndekslər haqqında anlayış

İndekslər statistikada mühüm ümumiləşdirici göstəricilərdəndir. İndekslər statistikanın göstəriciləri sistemində mühüm yer tutur.

İctimai-iqtisadi hadisələrin dinamikasını öyrənmək və ona ayrı-ayrı amillərin təsirini müəyyən etmək, hadisələr arasında qarşılıqlı əlaqələri təhlil etmək, müxtəlif ölkələrin, iqtisadi rayonların və s. iqtisadi inkişafını müqayisə etmək üçün indekslərdən geniş istifadə olunur.

Statistikada bilavasitə cəmlənə bilməyən elementlərdən ibarət olan mürəkkəb ictimai-iqtisadi hadisələrin zaman və məkana görə dəyişilməsini ifadə edən nisbi göstəricilərə indeks deyilir. İndekslər vasitəsilə məhsulun həcmının dəyişilməsini, qiymətlərin dəyişilməsini, əmək məhsuldarlığının və məhsulun maya dəyərinin dəyişilməsini öyrənmək mümkündür.

Statistikanın öyrəndiyi bir çox iqtisadi hadisələr bilavasitə cəmlənə bilməyən elementlərdən ibarətdir. Məsələn, məcmu ictimai məhsul ayrı-ayrı maddi istehsal sahələrində-sənayedə, kənd təsərrüfatında, tikintidə, maddi-texniki təchizatda, yük nəqliyyatında və s. sahələrdə istehsal olunan ümumi məhsuldan əmələ gəlir. Maddi istehsal sahələrinin hər birində də ayrılıqda çoxlu müxtəlif növ məhsul istehsal olunur. Məsələn, kənd təsərrüfatında buğda, qarğıdalı, arpa, düyü, pambıq, çay, meyvə-tərəvəz və bostan bitkiləri, süd, yun, yumurta və s. istehsal olunur. Bunlar natura şəklində cəmlənə bilməz, çünki onlar müxtəlif istehlak dəyərlərinə malikdir və müxtəlif ölçü vahidləri ilə ifadə olunur.

Belə mürəkkəb hadisələrin dəyişilməsi indekslərin köməyi ilə öyrənilir. Sovet statistikasında indekslərdən hadisələrin dinamikasının təhlilində, ərazi üzrə göstəricilərin səviyyəsinin müqayisəsində iqtisadi hadisələrin zaman və məkana görə dəyişilməsinə təsir edən amillərin təhlilində geniş miqyasda istifadə edilir. Yetkin sosializm şəraitində indekslər planlaşdırmanın mühüm vasitələrindən birinə çevrilmişdir. Bir çox plan tapşırıqları indekslər şəklində ifadə olunur. İndeksler planların yerinə yetirilməsinin təhlilində mühüm yer tutur.

## **2. İndekslerin növləri**

Mürəkkəb ictimai-iqtisadi hadisələrin elementlərinin əhatə olunması nöqtəyi-nəzərindən indekslər fərdi indekslərə, qrup indekslərinə və ümumi indekslərə ayrılır.

Mürəkkəb hadisənin ayrı-ayrı tərkib elementlərinin dəyişilməsini xarakterizə edən göstəricilərə fərdi indekslər deyilir. Fərdi indekslər mahiyyətə nisbi kəmiyyətlərdən (müqavilə öhdəliyi, dinamika və müqayisə nisbi kəmiyyətlərindən) fərqlənir. Ona görə də nisbi kəmiyyətlərin düzgün hesablanmasına aid olan bütün tələbləri indekslərə də aid etmək lazımdır. Bu tələblərdən ən başlıcası öyrənilən kəmiyyətlərin yekcins, müqayisəli olmasıdır. İndeksler ancaq müqayisəli şəkildə olan məlumat əsasında hesablanmalıdır.

### 3. İndekslərin hesablanması üsulları

Yuxarıda göstərilmişdir ki, nisbi kəmiyyət kimi, indeks də öyrənilən hadisənin iki mütləq, nisbi və ya orta səviyyəsinin müqayisəsi nəticəsindən alınır. Dəyişilməsi öyrənilən hadisə, adətən, indeksləşdirilən hadisə adlanır. İndekslərdə iki dövrün məlumatı müqayisə edilir. Səviyyəsi müqayisə edilən dövr hesabat və ya cari dövr, səviyyəsi ilə müqayisə edilən dövr əsas dövr adlanır. Hesabat dövrü sətiraltı “1”(vahid)-lə əsas dövr isə sətiraltı “0”(sıfır)-la işarə olunur. Deməli zaman indeksləri əsas dövrə nisbətən hesabat dövründə hadisənin dəyişilməsini xarakterizə edir. Bu indekslər hesablanarkən hesabat dövrünün kəmiyyəti əsas dövrün kəmiyyətinə bölünür.

Bilavasitə tədqiqat obyektini təşkil edən dövr hesabat dövrü adlanır. Məsələn, əgər cari 2009-cu ildə hər hansı neft mədəninin işi neft hasilatına görə təhlil edilərsə, həmin ildəki məlumat hesabat kəmiyyəti olacaqdır. İndekslərin hesablanmasında plan tapşırığı, hesabat dövründən qabaqkı dövrün məlumatı və müvafiq başqa obyektin məlumatı əsas kəmiyyət kimi götürülə bilər. Əgər planın yerinə yetirilməsini xarakterizə etmək lazım gələrsə, onda, plan məlumatı əsas həqiqi məlumat isə hesabat kəmiyyəti olacaqdır. İctimai hadisənin dinamikası təhlil edilərkən qabaqkı dövrün məlumatı əsas, sonrakı dövrün (cari dövrün) məlumatı isə hesabat kəmiyyəti kimi götürülür.

Fərdi indekslər “i” hərfi ilə işarə edilir. Əgər məhsulun miqdarının (fiziki həcmi) “q” hərfi ilə işarə etsək, o zaman fərdi fiziki həcm indeksinin düsturunu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}$$

Burada:  $q_0$  – əsas dövrdə,  $q_1$  – hesabat dövründəki istehsal edilmiş məhsulun fiziki həcmi göstərir.

Məhsul vahidinin qiymətini “p” ilə işarə etsək, fərdi qiymət indeksinin düsturu aşağıdakı kimi olar:

$$i_p = \frac{p_1}{p_0}$$

Burada:  $p_0$  – əsas dövrdə,  $p_1$  – hesabat dövründə məhsul vahidinin qiymətidir.

Məhsul vahidinin maya dəyərini “z” ilə işarə etsək, onda fərdi maya dəyəri indeksinin düsturunu belə yazmaq olar:

$$i_z = \frac{z_1}{z_0}$$

Burada:  $z_0$  – əsas dövrdə,  $z_1$  – hesabat dövründə məhsul vahidinin maya dəyərini göstərir.

Fərdi indekslərə nisbətən müxtəlif məhsulların birlikdə səviyyəsinin dəyişilməsini xarakterizə edən ümumi indekslərin hesablanması mürəkkəbdir. Belə ki, ümumi indeks bilavasitə toplana bilməyən müxtəlif hadisənin həcmnin, qiymətinin və s. birlikdə dəyişilməsini göstərməlidir. Ona görə də, bilavasitə cəmlənə bilməyən göstəricidən cəmlənə bilən göstəriciyə keçmək lazım gəlir. Məlumdur ki, müxtəlif məhsul növləri müxtəlif istehlak dəyərinə malikdir. Bundan başqa onların istehsalı üçün müxtəlif miqdarda əmək sərf olunur. Bununla əlaqədar olaraq müxtəlif məhsul növləri bilavasitə cəmlənə bilməz. Bizim misalımızda kələmi, kartofu və südü bilavasitə cəmləmək olmaz, çünki onlar müxtəlif istehlak dəyərinə malik olmaqla bərabər, onların istehsalına müxtəlif miqdarda əmək sərf olunur. Hətta eyni ölçü vahidləri ilə ifadə olunan bir çox həcm göstəricilərini də bilavasitə cəmləmək olmaz. Məsələn, əkinçilikdə bir çox becərmə işləri (alaq etmək, suvarma və s.) eyni ölçü vahidi-hektarla ifadə olunur. Lakin o işlər bir-birindən ciddi surətdə fərqlənir. Onları cəmləmək və müqayisəli vəziyyətə salmaq üçün ümumi ölçü vahidi tapmaq lazımdır.

Müxtəlif məhsul növlərini müqayisəli şəkllə salmaq üçün onları dəyər (pulla) ifadə etmək lazımdır. Pulla ifadə olunan məhsulun həcmi toplamaq və onu müqayisə etmək olar. Bunun üçün ayrı-ayrı məhsulun miqdarını qiymətinə vurmaq lazımdır. Nəticədə satış üzrə müvafiq dövrün qiymətlərində mal

dövriyyəsinin alarlıq. Hesabat dövrünün mal dövriyyəsinin əsas dövrün mal dövriyyəsinə olan nisbəti mal dövriyyəsi indeksini verir.

Ümumi indeksləri “J” hərfi ilə işarə edib, yuxarıda qəbul olunmuş şərti işarələrə əməl etsək, o zaman mal dövriyyəsi indeksinin düsturu aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$J_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

Burada  $p_0 q_0$  hesabat dövründə mal dövriyyəsinin həzmi,  $p_1 q_1$ - əsas dövrdə mal dövriyyəsinin həcmi göstərir.

Satılmış malların fiziki həcmnin dəyişilməsinin müəyyən etmək üçün mal dövriyyəsi indeksinə qiymətlərin təsirini aradan qaldırmaq lazımdır. Əgər qiymətlərin dəyişilməsini müəyyənləşdirmək lazım gələrsə, o zaman satılmış malların həcmnin dəyişilməsinin mal dövriyyəsi indeksinə təsirini aradan qaldırmaq lazımdır. Bu o deməkdir ki, fiziki həcm indeksi hesablanarkən indeksləşdirilən kəmiyyət məhsulun fiziki həzmi olduğuna görə, qiymətlər sabit götürülməlidir, yəni, kəsin sürətində və məxrəcində bir dövrün qiymətləri olmalıdır. Deməli, fiziki həcm indeksində indeksləşdirilən kəmiyyət satılmış malların miqdarıdır, qiymətlər isə, şəki rolunu ifadə edir. Ümumi qiymət indeksini hesablayarkən indeksləşdirilən kəmiyyət qiymət olduğu üçün satılmış məhsulun miqdarı sabit götürülməlidir. Fiziki həcmi indeksini hesablayanda çəki olaraq əsas dövrün qiymətləri və yaxud müqayisəli qiymətlər, qiymət indeksini hesablayanda isə, çəki olaraq hesabat dövründəki hesabat miqdarı götürülür. Məhsulun fiziki həcm indeksini hesablanmasında çəki rolunda əsas dövrün qiymətləri götürülür, çünki o, ancaq belə hesablandıqda məhsulun həcmi dəyişilməsinə qiymətlərin təsirini aradan qaldırmaq mümkün olur. Məhsulun mal dövriyyəsinin fiziki həcmdəki cari dövrün qiymətləri əsasında da, hesablanı bilər, lakin belə hesablama metoduna məhsulun həcmnin dəyişilməsinə əsas dövrə nisbətən hesabat dövründə qiymətlər dəyişilməsi də təsir göstərəcəkdir. Deməli, məhsulun (mal

dövriyyəsinin) fiziki həcmnin indeksinin əsas dövrün qiymətləri əsasında hesablamaq məqsədəuyğundur, çünki, ancaq belə hesablama əsas dövrə nisbətən hesabat dövründə məhsulun (mal dövriyyəsinin) həcmnin mütləq artımını düzgün xarakterizə edə bilər. Qiymətlər indeksinin hesablanması çəki kimi hesabat dövründə satılmış malların miqdarı götürülür. Ona görə ki, ancaq belə hesablama metod əsasında hesabat dövründə satılmış malların qiymətlərinin dəyişməsi nəticəsində əhalinin qənaətinin və ya artıq xərcinin mütləq məbləğini müəyyən etmək mümkündür. Qiymətlər indeksi əsas dövrdə satılmış malların həcmi əsasında hesablandıqda qiymətlərin dəyişdirilməsi nəticəsində əldə edilən qənaətin və ya artıq xərcin mütləq həcmnin müəyyən etmək mümkün deyildir. Belə indeks başqa iqtisadi mənaya malikdir. Əsas dövrdə satılmış malların həcmi əsasında hesablanan ümumi qiymətlər indeksi əsas dövrdə satılmış əmtəə kütləsinin orta qiymətinin dəyişməsini göstərir.

#### **4. Aqreqat indeks ümumi indeksin əsas forması kimi**

Ümumi indekslərin əsas forması aqreqat indekslərdir. İndeksləşdirilən kəmiyyətlər və onların çəkirləri haqqındakı məlumat əsasında hesablanan ümumi indeksə aqreqat indeks deyilir. Aqreqat latın sözü olub, birləşdirirəm deməkdir. Öyrənilən hadisələrin səviyyələrinin hasili məbləğindən ibarət olan indekslər aqreqat indeks adlanır. İndeksləşdirilən kəmiyyətlərin bilavasitə cəmlənə bilməməsi aqreqat indekslərin qurulması və istifadəsi zərurətinə gətirib çıxarır. Məhsulun fiziki həcm indeksinin aqreqat düsturundan aydın görünür ki, bu indeks hesablamaq üçün əsas dövrdə və hesabat dövründə ayrı-ayrı məhsul növlərinin miqdarı və əsas dövrdə onların qiyməti haqqında məlumat olmalıdır.

Qiymət indeksinin aqreqat düsturundan  $\left( J_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \right)$  aydındır ki, bu

indeksin hesablanması üçün əsas dövrdə və hesabat dövründə ayrı-ayrı əmtəə növlərinin qiyməti və hesabat dövründə əmtəələrin miqdarı haqqında məlumat lazımdır. Belə məlumat, məsələn, fiziki həcm indeksinin surəti, qiymət indeksinin

məxrəci olmadıqda aqreqat indeksini hesabı orta və yaxud harmonik orta indeksə çevirmək lazım gəlir.

Yuxarıda göstərdik ki, ümumi indekslərin əsas forması aqreqat indeksidir. Bu o deməkdir ki, orta indekslər hadisənin dəyişilməsini o vaxt düzgün xarakterizə edə bilər ki, onların nəticəsi aqreqat indeksi eyni olsun. Orta indekslər fərdi indekslərdən çəkili hesabi və harmonik orta kəmiyyət kimi hesablanır.

Ümumi indeksin formaları olan orta indeksləri qiymət və həcm indekslərinin misalında izah edək.

Əgər fərdi qiymət indeksində ( $i_p = \frac{p_1}{p_0}$ ) -in qiymətini tapıb ( $p_1 = i_p \cdot p_0$ ), onu ümumi qiymət indeksinin aqreqat düsturunda ( $J_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$ ) yerinə qoysaq hesabı orta qiymət indeksini alarıq:

$$J_p = \frac{\sum i_p \times p_0 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

Düsturdan aydındır ki, çəki rolunu əsas dövrün qiymətləri ilə hesabat dövründəki mal dövriyyəsi, indeksləşən kəmiyyət rolunu isə fərdi qiymət indeksləri ifadə edir.

Yuxarıdakı misal əsasında hesabı orta qiymət indeksini hesablayaq:

İndi də fərdi qiymət indeksindən ( $i_p = \frac{p_1}{p_0}$ )  $p_0$  -ı tapıb ( $p_0 = \frac{1}{i_p} \cdot p_1$ ) onu ümumi qiymət indeksinin aqreqat düsturunda yerinə yazsaq, harmonik orta qiymət indeksinin düsturunu alarıq:

$$J_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \frac{1}{i_p} \cdot p_1 q_1}$$

Bu indeksdə çəki rolunu hesabat dövründəki mal dövriyyəsi ifadə edir. Kəsrin məxrəcində hesabat dövründəki ayrı-ayrı əmtəə növü üzrə mal dövriyyəsini həmin əmtəənin fərdi qiymət indeksinə böldükdə, əsas dövrün qiymətləri ilə hesabat dövründəki mal dövriyyəsi ( $p_0 q_1$ ) alınır ki, bu da orta harmonik indeksin aqreqat indeksə uyğun olduğunu göstərir.

Harmonik orta qiymət indeksini yuxarıdakı misal əsasında hesablayaq:

Gözləndiyi kimi, hər iki orta indeksin cavabı aqreqat qiymət indeksinin cavabının eynidir.

Müəssisə və təşkilatların mövcud hesabat məlumatlarına müvafiq olaraq, ümumi qiymət indeksini hesablamaq üçün təcrübədə harmonik qiymət indeksinin düsturundan daha geniş istifadə edilir.

İndi də mal dövriyyəsinin fiziki həcm (məhsulun fiziki həcm) indeksini hesabı orta və harmonik orta indekslərə çevirək. Məlumdur ki, fərdi fiziki həcm indeksi aşağıdakı nisbətlə  $i_q = \frac{q_1}{q_0}$  ifadə olunur.

Buradan  $q_1 = i_q \cdot q_0$  əgər  $q_1$ -in qiymətini aqreqat fiziki həcm indeksində ( $J_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}$ ) yerinə yazsaq, hesabı orta fiziki həcm indeksinin düsturunu alarıq:

$$J_q = \frac{\sum i_q p_0 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

Fərdi fiziki həcm indeksindən  $q_0$ -ın qiymətini tapıb ( $q_0 = \frac{q_1}{i_q}$ ) aqreqat fiziki həcm indeksində yerinə yazsaq harmonik orta fiziki həcm indeksinin düsturunu alarıq:

$$J_q = \frac{\sum p_0 \cdot q_1}{\sum \frac{1}{i_q} \cdot p_0 q_1}$$

Bu indekslərin nəticələri aqreqat indeksin nəticəsinin eyni olmalıdır. Ancaq aqreqat indeksi hesablamaq üçün məlumat olmadıqda, orta indeksləri hesablamaq lazımdır. Əgər göstəricini ümumi indeksin bütün formaları üzrə hesablamaq üçün məlumat varsa, bu zaman üstünlüyü aqreqat indeksə vermək məqsəduyğundur.

Qeyd etmək lazımdır ki, təcrübədə dövlət və kooperativ ticarətində qiymətlərin dəyişilməsi harmonik qiymətlərin indeksi əsasında, bazar iqtisadiyyatında isə aqreqat qiymətlər indeksi vasitəsilə öyrənilir. Məhsulların fiziki həcmnin dəyişilməsi məhsulun aqreqat fiziki həcm indeksi və hesabı orta fiziki həcm indeksi əsasında öyrənilə bilər.

## **5. Həcm və keyfiyyət indeksləri**

Burada həcm indekslərindən məhsulun həcm indeksi, keyfiyyət indekslərindən isə qiymətlər, məhsulun maya dəyəri və əmək məhsuldarlığı indekslərindən bəhs olunacaqdır.

### **Məhsulun həcm indeksinin qurulması**

Məhsulun həcm indeksləri xalq təsərrüfatı əhəmiyyəti nöqteyi-nəzərindən mühüm indekslərdəndir. Məhsul buraxılışı planının yerinə yetirilmə dərəcəsini və məhsulun dinamikasını xarakterizə etmək üçün həcm indekslərindən geniş istifadə olunur.

Məlumdur ki, hazırda məhsulun həcmnin dəyişilməsində orta ölçü, yəni çəki əsas dövrün qiymətləri götürülür. Sözsüz ki, ən əlverişli orta ölçü əsas dövrdə məhsul vahidinə sərf edilən vaxtdır ( $t_0$ ). Lakin bu xərclərin bütün məhsullar üzrə müəyyən edilməsinin çətinlikləri məhsulun fiziki həcm indeksini bu göstərici əsasında hesablamağa hələllik imkan vermir. İndeks nəzəriyyəsi və təcrübəsinin gələcək inkişafı buna imkan verəcəkdir.

Kənd təsərrüfatında da məhsulların fiziki həcm indeksinin hesablanması yuxarıdakı prinsip əsasında həyata keçirilir. Məlumdur ki, sənayeyə nisbətən kənd təsərrüfatında istehsal olunan məhsulların çeşidləri məhduddur. Ona görə də kənd təsərrüfatı məhsullarının müqayisəli qiymətlərlə qiymətləndirilməsi və həcm

indeksinin hesablanması mərkəzləşdirilmiş qaydada mərkəzi statistika idarəsində həyata keçirilir.

Yuxarıda göstəriləyi kimi, məhsulun fiziki həcm indeksinin düsturu belə yazılır:

$$J_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

Burada  $p_0$  – müqayisəli qiymətdir. Məhsulun fiziki həcmində dəyişməsi, adətən, müqayisəli qiymətlər əsasında öyrənilir. Məhsulun fiziki həcm indeksinin aqreqat düsturu müqayisəli qiymətlərdə məhsulun həcmində dəyişməsini faizlə ifadə etməklə bərabər, məhsulun mütləq artımını da müəyyən etməyə imkan verir. Bunun üçün məhsulun fiziki həcm indeksinin sürətindən məxrəcini çıxmaq lazımdır.

$$\text{Mütləq artım və ya azalma} = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0$$

Yuxarıda deyildiyi kimi, məhsulun fiziki həcm indeksindən planın yerinə yetirilmə dərəcəsini xarakterizə etmək üçün də istifadə edilir. Planın yerinə yetirilmə dərəcəsini xarakterizə edən fiziki həcm indeksinin düsturu belədir:

$$J_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_{pe}}$$

Burada  $q_{pe}$  - plan üzrə məhsul buraxılışıdır.

Təcrübədə əsas dövrə nisbətən plan üzrə məhsulun fiziki həcmində dəyişməsini xarakterizə edən indeks də hesablanır. Buna sadəcə olaraq məhsulun fiziki həcmində plan tapşırığı indeksi deyilir.

### **Keyfiyyət göstəriciləri indekslərinin qurulması**

Mühüm keyfiyyət göstəriciləri indekslərinə qiymətlər, məhsulun maya dəyəri və əmək məhsuldarlığı indeksləri daxildir. Məlumdur ki, xalqın maddi rifahının yaxşılaşması qiymətlərin dəyişməsi ilə sıx əlaqədardır. Məhz buna görə də qiymətlərin dəyişməsini öyrənmək statistikanın mühüm vəzifələrindən biridir.

Qiymətlər indeksinin qurulması prinsipləri yuxarıda izah edilmişdir. Burada qeyd etmək lazımdır ki, dövlət-kooperativ ticarətində qiymətlərin dəyişməsi harmonik orta qiymətlər indeksinin düsturu ilə hesablanır. Ona görə də dövlət və

kooperativ ticarətində satılmış malların miqdar uçuotu aparılmır. Deməli, əsas və hesabat dövrlərində mal dövriyyəsi haqqında, həmçinin ayrı-ayrı mal qruplarının dəyişilməsini xarakterizə edən fərdi indekslər haqqında məlumat olduqda qiymətlərin dəyişilməsini harmonik orta qiymətlər indeksinin düsturu ilə müəyyən etmək lazımdır.

Mühüm keyfiyyət göstəriciləri indekslərindən biri də məhsulun maya dəyəri indeksidir. Məhsulun maya dəyəri göstəricisi istehsal fəaliyyətini xarakterizə edən göstəricidir. Məhsulun maya dəyərinin aşağı düşməsi əmtənin həm topdan satış, həm də pərakəndə satış qiymətlərinin aşağı düşməsinin mənbəyidir. Ona görə də məhsulun maya dəyərinin səviyyəsini və dinamikasını öyrənmək statistikanın mühüm vəzifələrindən biri hesab olunur.

Maya dəyərinin dinamikası indeks metodu ilə öyrənilir. Məhsulun maya dəyəri indeksləri qiymətlər indeksi kimi qurulur. Belə ki, yuxarıda göstərilmiş şərti işarələri qəbul etsək, məhsulun maya dəyəri indeksinin aqreqat düsturunu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$J_z = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_1}$$

Burada,  $z_0$  – əsas dövrdə məhsul vahidinin maya dəyərini,

$z_1$  – hesabat dövründə məhsul vahidinin maya dəyərini,

$q_1$  – hesabat dövründə istehsal edilmiş məhsulun miqdarını göstərir.

Deməli, qiymət indeksində olduğu kimi, maya dəyəri indeksində də çəki hesabat dövründə istehsal olunmuş məhsulun miqdarı götürülür. Məhsulun miqdarını sabit götürmək nəticəsində maya dəyərinin dəyişilməsini müəyyən etmək mümkün olur.

Maya dəyəri indeksinin aqreqat düsturu maya dəyərinin aşağı düşməsi nəticəsində məhsul istehsalına çəkilən xərc üzrə qənaətin və ya israfın mütləq məbləğini müəyyən etməyə imkan verir. Həmin qənaətin və ya israfın mütləq məbləğini hesablamaq üçün maya dəyəri indeksinin məxrəcindən surətini çıxmaq lazımdır:

Fərq mənfi ədəd alınarsa, israfın (artıq xərcin), müsbət ədəd alınarsa, qənaətin məbləğini göstərir.

Plan tapşırığı maya dəyəri indeksinin düsturu

$$J_z = \frac{\sum Z_{pe} \cdot q_{pe}}{\sum Z_0 q_{pe}} \quad \text{kimi,}$$

planın yerinə yetirilməsini xarakterizə edən maya dəyəri indeksi

$$J_z = \frac{\sum Z_1 q_1}{\sum Z_{pe} \cdot q_1} \quad \text{kimi yazılır.}$$

Burada  $Z_{pe}$  – məhsulun plan maya dəyərini göstərir.

Çeşid dəyişilməsinin maya dəyəri indeksinə təsirini aradan qaldırmaq üçün maya dəyəri üzrə planın yerinə yetirilməsi indeksini plan çəkili ilə hesablamaq məqsəduyğundur:

$$J_z = \frac{\sum Z_1 q_{pe}}{\sum Z_{pe} \cdot q_{pe}}$$

Maya dəyəri indeksinin aqreqat düsturu da orta indekslərə çevrilə bilər. Əgər fərdi maya dəyəri indeksindən  $Z_1$ -in qiymətini tapıb aqreqat maya dəyəri indeksində yerinə yazmaq, hesabi orta maya dəyəri indeksini

$$J_z = \frac{\sum i_z Z_0 q_1}{\sum Z_0 q_1}$$

Fərdi maya dəyəri indeksində qiymətini tapıb aqreqat maya dəyəri indeksində yerinə yazsaq, harmonik orta maya dəyəri indeksini alırıq:

$$J_z = \frac{\sum Z_1 q_1}{\sum \frac{1}{i_z}}$$

Məlumatın verilməsindən asılı olaraq, maya dəyəri indeksinin müvafiq düsturlarından istifadə etmək lazımdır.

İndekslərin mühüm növlərindən biri də əmək məhsuldarlığı indeksləridir. Əmək məhsuldarlığı indeksləri məhsul istehsalına sərf edilmiş əmək məsrəflərinin səviyyəsinin dəyişilməsini xarakterizə edir.

Əmək məhsuldarlığı vaxt vahidində istehsal olunmuş məhsulun miqdarı, yaxud məhsul vahidinin istehsalına sərf edilmiş vaxtın miqdarı ilə ölçülür. Deməli,

vaxt vahidində istehsal olunan məhsulun miqdarı artdıqca, əmək məhsuldarlığının səviyyəsi də yüksəlir. Burada əmək məhsuldarlığı ilə istehsal olunan məhsulun miqdarı arasında düz mütənasiblik vardır. İkinci halda isə əmək məhsuldarlığı ilə sərf edilən vaxt arasında tərs mütənasiblik mövcuddur. Belə ki, məhsul vahidinə sərf edilmiş vaxt azaldıqca, əmək məhsuldarlığının səviyyəsi yüksəlir.

Yuxarıda deyildiyi kimi, eyni növ məhsul istehsalı üzrə əmək məhsuldarlığının səviyyəsinin dəyişilməsi fərdi indekslərlə müəyyən edilir.

Əmək məhsuldarlığının səviyyəsi vaxt vahidində istehsal olunmuş məhsulun miqdarı ilə ölçülərsə, fərdi əmək məhsuldarlığı indeksinin düsturunu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$i_{\frac{q}{T}} = \frac{q_1}{T_1} : \frac{q_0}{T_0}$$

Burada  $T_1$  – hesabat dövründə,

$T_0$  – isə əsas dövrdə məhsul istehsalına sərf edilmiş ümumi vaxtı və ya işçilərin orta siyahı sayını göstərir.

Fərdi əmək tutumu indeksinə ( $i_t = \frac{t_1}{t_0}$ ), yəni məhsul vahidinə sərf edilən vaxt indeksinə əsasən fərdi əmək məhsuldarlığı indeksinin düsturunu belə yazmaq olar:

$$i_t = \frac{t_0}{t_1} \text{ və ya } i_t = \frac{T_0}{q_0} : \frac{T_1}{q_1}$$

Burada:  $t_0$  – əsas dövrdə,

$t_1$  – hesabat dövründə məhsul vahidinə sərf edilən vaxtdır.

Vaxta görə əmək məhsuldarlığının aqreqat indeksi də aqreqat əmək tutumu indeksinin tərsi kimi hesablanır. Aqreqat əmək tutumu indeksinin düsturu belədir:

$$J_t = \frac{\sum t_1 q_1}{\sum t_0 q_1}$$

Bu indeksin tərsi vaxta görə əmək məhsuldarlığı indeksinin aqreqat düsturudur:

$$J_t = \frac{\sum t_0 q_1}{\sum t_1 q_1}$$

Bu indeksin surətlə məxrəci arasında olan fərq əmək məhsuldarlığının yüksəlməsi nəticəsində qənaət edilmiş vaxtın mütləq miqdarını göstərir. Təcrübədə ən çox əmək məhsuldarlığı indeksinin qiymətlə ifadə olunan düsturundan istifadə olunur:

$$J_T = \frac{\Sigma q_1 p}{\Sigma T_1} : \frac{\Sigma q_0 p}{\Sigma T_0}$$

Burada birinci kəsir hesabat dövründə, ikinci kəsir isə əsas dövrdə müqayisəli qiymətlə hər adam-saata, adam-günə və yaxud hər işçiyə düşən ümumi məhsulu xarakterizə edir.

## 7. Ərazi indeksləri

Mürəkkəb iqtisadi hadisələrin məkanda (şəhərlər, rayonlar, vilayətlər, respublikalar və i.a.) üzrə nisbətini ifadə edən indekslərə ərazi indeksləri deyilir.

Ərazi indeksləri mahiyyətcə, hadisələrin vaxt etibarilə dəyişilməsini xarakterizə edən dinamika indeksləri kimi hesablanır.

Ərazi indekslərinin hesablanmasında çəkinin seçilməsi mühüm yer tutur. Çəkinin seçilməsi tədqiqat qarşısında duran məqsəd və vəzifədən asılı olaraq həll edilməlidir. Təcrübədə qəbul edilmişdir ki, birinci əlamətlər indeksləşdirilərkən müqayisə üçün əsas götürülən obyektin məlumatından (əsas çəki) ikinci əlamətlər indeksləşdirilərkən təhlil edilən obyektin məlumatından (cari çəki) çəki kimi istifadə oluna bilər. Ərazi indeksləri belə hesablandıqda, indeks sistemləri almaq və göstəricinin dəyişilməsində ayrı-ayrı amillərin rolunu müəyyən etmək mümkün olur. Bir cəhəti nəzərə almaq lazımdır ki, ərazi indekslərində müxtəlif quruluşa malik hadisələr müqayisə edilir. Ona görə bu quruluş fərqlərini bitərəfləşdirə bilən çəki götürülməlidir. Bununla əlaqədar olaraq ərazi indeksləri üçün vilayət, respublika, sahə xalq təsərrüfatı quruluşu əsasında hesablanmış standartlaşdırılmış çəkilərdən istifadə edilir.

## 8. İndekslərin qarşılıqlı əlaqələri

İctimai-iqtisadi hadisələr bir-biri ilə sıx əlaqədardır. Aydındır ki, həmin hadisələrin müvafiq göstəriciləri arasında da qarşılıqlı əlaqə vardır. Məsələn, məhsulun həcmi, işlənmiş vaxt və əmək məhsuldarlığı göstəriciləri arasında sıx əlaqə vardır. Belə əlaqə mal dövriyyəsi, qiymət və mal dövriyyəsinin fiziki həcmi göstəriciləri arasında və digər göstəricilər arasında da vardır. Belə ki, işlənmiş vaxtı əmək məhsuldarlığının səviyyəsinə vursaq, məhsulun həcm göstəricisini alarıq. Satılmış malların miqdarını onların qiymətlərinə vursaq, mal dövriyyəsini alarıq.

Buradan aydın olur ki, mürəkkəb hadisələrin göstəriciləri arasında əlaqə olduğu kimi, həmin göstəricilərin dəyişilməsini xarakterizə edən indekslər arasında da əlaqə vardır. Belə ki, məhsulun həcm indeksi, əmək məhsuldarlığı indeksi ilə iş vaxtı indeksinin hasilinə bərabərdir. Buradan əmək məhsuldarlığı indeksi məhsulun həcm indeksinin iş vaxtı indeksinə olan nisbətinə bərabərdir.

Məhsulun fiziki həcm indeksi nəticə əlamətinin dəyişilməsini, fəhlələrin sayı və əmək məhsuldarlığı indeksləri isə amil əlamətlərinin dəyişilməsini xarakterizə edir.

Qiymət indeksini mal dövriyyəsinin fiziki həcm indeksinə vursaq, mal dövriyyəsi indeksini alarıq:

$$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \cdot \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = J_{pq}$$

Əgər mal dövriyyəsi indeksini qiymətlər indeksinə bölsək mal dövriyyəsinin həcm indeksini alarıq:

$$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 \cdot q_0} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

Əgər qiymətlər indeksində çəki hesabat dövründə satılmış məhsulun miqdarı, mal dövriyyəsinin fiziki həcm indeksində isə çəki əsas dövrün qiymətləri götürülsə, yuxarıda deyilən indekslər arasında qarşılıqlı əlaqə mümkündür.

Məhsulun maya dəyəri, məhsulun fiziki həcm (burada çəki olaraq əsas dövrün maya dəyəri götürülür) və ümumi məsrəf indeksləri arasında da aşağıdakı kimi əlaqə vardır:

$$\frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_1} \cdot \frac{\sum z_0 q_1}{\sum z_0 q_0} = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_0} = J_{zq}$$

Burada birinci kəsr maya dəyəri indeksini, ikinci kəsr məhsulun həcm indeksini, üçüncü kəsr isə məsrəf indeksini göstərir.

Deməli, məhsulun maya dəyəri indeksini məhsulun fiziki həcm indeksinə vursaq, ümumi məsrəf indeksini alarıq.

## 9. Orta səviyyə dinamikasının indeks metodu ilə təhlili

Bir çox ictimai-iqtisadi hadisələr orta kəmiyyət şəklində ifadə olunur. Məsələn, orta əmək haqqı, orta məhsuldarlıq, məhsul vahidinin orta maya dəyəri, orta hasilat və s. Belə ictimai hadisələrin dinamikası iki dövrdəki orta səviyyələrin müqayisəsi nəticəsində xarakterizə olunur. Hesabat dövründəki orta məhsuldarlığı əsas dövrdəki orta məhsuldarlıqla müqayisə etdikdə, məhsuldarlığın orta səviyyəsinin neçə faiz artdığı və ya azaldığı müəyyən olunur.

Orta kəmiyyətlər mövzusunda deyilir ki, orta kəmiyyətə həm əlamətin qiymətləri, həm də əlamətin çəkili təsir edir. Orta məhsuldarlığın dinamikasına ayrı-ayrı bitkilərin məhsuldarlığı və eyni zamanda əkin sahəsinin quruluşu, yəni daha çox məhsuldar bitkinin əkin sahəsinin artması və buna müvafiq olaraq, az məhsuldar bitkinin əkin sahəsinin azalması təsir edə bilər. Orta yun qırımının dinamikasına həm ayrı-ayrı qoyunlardan qırılan yunun artması, həm də daha çox yun verən qoyunların xüsusi çəkisinin artması təsir edir. Başqa bir misal, fəhlələrin orta əmək haqqı həm ayrı-ayrı fəhlələrin əmək haqqının, həm də daha yüksək əmək haqqı alan fəhlələrin xüsusi çəkisinin artması nəticəsində yüksələ bilər.

Beləliklə, orta səviyyənin dinamikasına iki amil: indeksləşdirilən göstəricinin səviyyəsinin dəyişməsi və çəkili quruluşunun, yəni ümumi

məcmunun ayrı-ayrı qruplarının xüsusi çəkisinin dəyişilməsi təsir edir. Bununla əlaqədar olaraq, qarşıda duran vəzifə bu amillərin hər birinin ayrılıqda orta səviyyə dinamikasına təsirini müəyyən etməkdir. Bunun üçün qarşılıqlı əlaqədə olan indekslər sistemini qurmaq lazımdır. Belə indekslərdən biri orta səviyyələrin dəyişilməsini xarakterizə edən indeksdir. Bu indeksə həm orta səviyyə indeksi, həm də dəyişən tərkibli indeks deyilir. Bu indeksin qiyməti hər iki amilin təsiri altında dəyişir.

Orta səviyyə indeksi, yaxud dəyişən tərkibli indeks onlara təsir edən amillərə müvafiq olaraq, sabit tərkibli indeksə və quruluş dəyişikliyi indeksinə parçalanır. Sabit tərkibli indeksin qiyməti ancaq bir amilin – indeksləşdirilən göstəricinin dəyişilməsindən asılıdır, burada hadisənin quruluşu sabit qalır. Quruluş dəyişikliyi indeksində hadisənin quruluşunun dəyişilməsi öz əksini tapır, indeksləşdirilən göstəricinin səviyyələri isə sabit qalır. Bu zaman indeksləşdirilən göstərici əsas dövrün səviyyəsi ilə ifadə olunur.

## MÖVZU 24. SEÇMƏ METODU

### PLAN:

1. Seçmə müşahidəsi haqqında anlayış və onun tətbiqi səbəbləri
2. Seçmə müşahidəsi haqqında anlayış və onun tətbiqinin zəruriliyi
3. Baş və seçmə məcmu, onların ümumi xarakteristikaları
4. Müşahidə xətası
5. Seçmə müşahidəsi xətasının hesablanması qaydası
6. Reprezentativ xəta
7. Seçmənin orta xətasının son həddinin hesablanması
8. Seçmə üsulları
9. Təsadüfi seçmə
10. Mexaniki seçmə
11. Tipik seçmə
12. Seriyalı seçmə
13. Kombinəlaşdırılmış seçmə
14. Seçilənlərin zəruri sayının hesablanması
15. Kiçik seçmə

### Ə D Ə B İ Y Y T S İ Y A H I S I .

1. Ə. Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, "Maarif nəşriyyatı", 1973.
2. Ə.Ə. Hüseynov, S.Y. Qasımov. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çarşıoğlu, 2006.

#### 1. Seçmə müşahidəsi haqqında anlayış və onun tətbiqi səbəbləri

Öyrənilən məcmunun vahidlərinin əhatə olunmasına görə statistika müşahidəsi ümumi və qeyri-ümumi müşahidəyə ayrılır. Qeyri-ümumi müşahidənin ən geniş yayılmış növü seçmə müşahidəsidir.

Məcmu vahidlərinin bir hissəsinin elmi prinsiplər əsasında seçilib öyrənilməsindən alınmış nəticə bütün məcmuya aid edilərsə, belə müşahidəyə seçmə müşahidəsi deyilir.

Seçmə müşahidəsinin əsas prinsiplərindən biri qərəzsiz seçmə prinsipidir.

Seçmə müşahidəsinin tətbiqi səbəbləri aşağıdakılardır:

a) seçmə müşahidəsinin tətbiqi nəticəsində, məlumatın həm toplanması, həm də işlənməsi prosesində vaxta və vəsaitə xeyli qənaət edilir. Deməli, ümumi

müşahidəyə nisbətən seçmə müşahidəsinin tətbiqi iqtisadi cəhətdən faydalıdır.

b) seçmə müşahidəsində məcmu vahidlərinin az bir hissəsi tədqiq olunduğuna görə, onu daha geniş proqram əsasında öyrənmək mümkündür. Deməli, hadisəni daha ətraflı öyrənmək üçün seçmə müşahidəsindən istifadə edilir.

c) ümumi müşahidənin aparılması mümkün olmadıqda seçmə müşahidəsi aparılır. Məsələn, məhsulların keyfiyyətinin öyrənilməsi çox zaman onların ya qismən, ya da tamamilə məhv edilməsilə əlaqədar olduğuna görə ümumi müşahidə aparmaq olmaz. Belə ki, elektrik lampalarının keyfiyyətini yanma müddətinə görə yoxlamaq üçün onları laboratoriyada sıradan çıxana qədər yandırmaq lazımdır. Südün yağlılıq dərəcəsinin, taxılın təmizliyinin və s. hadisələrin keyfiyyətinin tədqiqində də seçmə müşahidəsindən istifadə etmək daha faydalıdır. Buradan aydındır ki, belə tədqiqat işlərində ümumi müşahidəni tətbiq etmək olmaz. Məhsulların keyfiyyətinin öyrənilməsində ancaq seçmə müşahidəsindən istifadə etmək lazımdır;

ç) bəzən ümumi müşahidənin nəticəsini dəqiqləşdirmək üçün seçmə müşahidəsi aparılır. Məsələn, müəssisə, idarə və təşkilatların statistika hesabatlarında verilən məlumatın dəqiqliyini yoxlamaq üçün seçmə müşahidəsindən istifadə edilir.

## **2. Seçmə müşahidəsi haqqında anlayış və onun tətbiqinin zəruriliyi**

Çox saylı vahidlərdən təşkil olunmuş statistik məcmunun tədqiq edilməsi çox zəhmət tələb edən ağır bir işdir. Ona görə də statistik tədqiqatda başdan-başa müşahidəni çox vaxt müvəffəqiyyətlə əvəz edən seçmə metodunun tətbiqinə geniş yer verilir. Bu metodun tətbiqi bazar iqtisadiyyatına keçid şəraitində xüsusilə artmışdır.

Seçmə metodunun tətbiqi nəticəsində məcmu vahidlərinin hamısı deyil, yalnız bir hissəsi tədqiqata cəlb edilir. Tədqiqat üçün vahidlər kortəbii qaydada deyil, müəyyən elmi prinsiplər əsasında seçilir və tədqiqat nəticəsində alınmış nəticələr bütün məcmuya şamil edilir.

Beləliklə, öyrənilən məcmu vahidlərinin bir hissəsinin elmi qaydada seçilib

tədqiq edilməsindən alınmış nəticələr bütün məcmuya şamil edilərsə, belə müşahidə növünə seçmə müşahidəsi deyilir.

Tədqiqatın seçmə metodunun və ya çox vaxt deyildiyi kimi seçmənin tətbiqinin zəruriliyi bir sıra səbəblərlə bağlıdır.

Əvvəla, seçmə o halda tətbiq edilir ki, başdan-başa müşahidəni aparmaq ümumiyyətlə mümkün deyil. Belə ki, tədqiqat öyrənilən vahidlərin tamamilə və ya qismən məhv edilməsi ilə bağlı ola bilər. Məsələn, məhsulun keyfiyyətinə nəzarət həyata keçirilərkən nəzarət əməliyyatı nəticəsində məhsul satış üçün yararsız hala düşdüyündən başdan - başa nəzarət aparmaq mümkün deyil.

İkincisi, tədqiq edilən məcmu çox böyük həcmə malik olduqda və ya müşahidə vahidləri praktiki olaraq sonsuz sayda olduqda, başdan-başa müşahidəni aparmaq mümkün olmur. Məsələn, taxıl sahəsində sünbüllərin sayı praktiki olaraq sonsuz saydadır. Ona görə də taxılın yetişkənlik dərəcəsini müəyyən etmək üçün seçmədən istifadə edilməlidir.

Nəhayət, seçmənin tez aparılması, sadə və ucuz olması başdan-başa müşahidəyə nisbətən ona daha böyük üstünlük verir.

Seçmə metodunun tətbiqi məlumatların toplanması və təhlili prosesində əmək və vəsait sərfinə qənaət etməyə imkan verir. Bu səbəbə görə də onun tətbiqi iqtisadi cəhətdən sərfəlidir. Ona görə də öyrənilən hadisəni daha geniş proqram üzrə tədqiq etmək üçün seçmə müşahidəsindən istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Qeyd etmək lazımdır ki, böyük həcmli məcmunun öyrənilməsi zamanı seçmənin tətbiqi başdan-başa müşahidəyə nisbətən daha dəqiq nəticələr verə bilər. Bu istənilən müşahidənin praktiki olaraq xəyata yol verilmədən aparılmasının mümkün olmaması ilə bağlıdır.

### **3. Baş və seçmə məcmu, onların ümumi xarakteristikaları**

Öyrənilən hadisənin bütün məcmu vahidlərinin cəminə baş məcmu deyilir. Baş məcmuda əlamətin ümumiləşdirici göstəricisi olan orta kəmiyyət baş orta

kəmiyyət adlanır və özü də  $\bar{X}$  -lə işarə olunur. Bu, məcmuda əlamətin dispersiyası  $\sigma^2$  -lə işarə olunur. Baş məcmuda müəyyən əlamətə malik olan vahidlərin hissəsi baş hissə adlanır və "p" hərflə, əlamətə malik olmayan vahidlərin hissəsi isə "q" hərfi ilə işarə olunur. Əgər baş məcmuda əlamətə malik olan vahidlərin sayını "M"-lə, baş məcmudakı bütün vahidlərin sayını "N"-lə işarə etsək, onda əlamətə malik olanların hissəsini

$$P = \frac{M}{N}$$

düsturu ilə, əlamətə malik olmayanların hissəsini isə

$$q = \frac{N - M}{N}$$

düsturu ilə hesablamaq olar. Buradan aydındır ki, (p+q) həmişə vahidə bərabər olur. Deməli, p+q=1 olduğunu bilərək q=1-p yazmaq olar.

Tədqiq etmək üçün baş məcmudan seçilmiş vahidlərin məcmusu seçmə məcmu adlanır. Seçmə məcmusunda əlamətin orta kəmiyyəti seçmə ona kəmiyyət

adlanır və  $\tilde{X}$  -lə, dispersiyası isə seçmə dispersiya adlanır və  $\sigma_0^2$  -lə işarə edilir.

Seçmə məcmusunda əlamətə malik olan vahidlərin sayı "m"-lə. əlamətə malik olan vahidlərin seçmə məcmusuna olan nisbəti nisbi tezlik adlanır və "W"-lə işarə edilir.

Əgər seçmə məcmusundakı vahidlərin sayını "n" hərfi ilə işarə etsək, o zaman əlamətə malik olan vahidlərin nisbi tezliyi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$w = \frac{m}{n}$$

#### **4. Müşahidə xətası**

Müşahidə həyata keçirilərkən faktların qeydə alınması zamanı xəyata (səhvə) yol verilə bilər. Xəta müşahidənin obyektindən, subyektindən və aparılma üsulundan asılı olaraq baş verə bilər. Belə ki, obyekt səhv məlumatlar verdikdə, müşahidə zamanı qeyd edilən əlamətlərin hesablanması və ölçülməsi dəqiq olmadıqda xəta meydana gələ bilər. Bu cür xətlər qeyd xətası adlanır. Qeyd xətası təsadüfi və müntəzəm ola bilər.

Təsadüfi qeyd xətası əlamətin qeydə alınması zamanı qəsdlə deyil, təsadüfən səhvə yol verilməsi zamanı yaranır. Bu xəta həm əlamətin artması, həm də azalması istiqamətində yönələ bilər. Ona görə də böyük saylı məlumatların ümumiləşdirilməsi zamanı təsadüfi qeyd xətası qarşılıqlı ödənilir və ümumiləşdirici xarakteristikalarda ciddi təhriflərə səbəb olur.

Təsadüfi qeyd xətasından fərqli olaraq müntəzəm qeyd xətası isə təhlükəli hesab edilir. Bu xəta qəsdən edilən və qəsdən edilməyən müntəzəm qeyd xətlərinə ayrılır. Məcmunun ümumi xarakteristikalarının hesablanması zamanı bu cür xətlər qarşılıqlı ödənilir, toplanaraq cəmlənir və onların əhəmiyyətli dərəcədə artmasına və ya azalmasına səbəb olur.

Müşahidəni aparan subyekt nə qədər səriştəlidirsə və yüksək ixtisasa malikdirsə, müşahidə obyektini və müntəzəm xətanın mümkün mənbələri ilə nə qədər yaxşı tanışdırsa, müntəzəm qeyd xətası bir o qədər az olar.

Başdan - başa olmayan müşahidədə, o cümlədən seçmədə qeyd xətasından başqa representativ adlandırılan xətəyə də yol verilə bilər. Representativ sözü fransız dilindən alınma söz olub hərfi tərcümədə “təmsil etmə” deməkdir. Representativ xətanın yaranmasına səbəb tədqiqat üçün götürülən məcmu hissəsinin öyrənilən əlamətə görə quruluşunun bütövlükdə məcmunun quruluşundan fərqlənməsidir. Bununla bağlı olaraq seçilmiş hissəsinin ümumiləşdirici xarakteristikaları bütövlükdə məcmunun ümumiləşdirici xarakteristikalarından az və ya çox dərəcədə fərqlənir. Representativ xəta da təsadüfi və müntəzəm ola bilər. Müntəzəm xəta seçmənin aparılma prinsipi pozulduqda yaranır. Seçmə tədqiqatında onun yaranma mənbəyi seçmənin

təsadüfiliyi prinsipinin pozulmasıdır. Təsadüfi xəta isə tamamilə düzgün təşkil edilmiş seçmə zamanı da mümkündür. Belə ki, vahidlər təsadüfi seçilə bilər, lakin onlar bütövlükdə məcmunu dolğun təmsil etməz. Beləliklə, seçmə müşahidəsi

zamanı müşahidə xətası ( $\delta_m^s$ ) qeyd xətası ( $\delta_q^s$ ) ilə representativ xətanın ( $\delta_r^s$ ) cəminə bərabərdir:

$$\delta_m^s = \delta_q^s + \delta_r^s.$$

Başdan-başa müşahidədə isə müşahidə xətası ( $\delta_m^b$ ) qeyd xətasına ( $\delta_q^b$ ) bərabərdir:

$$\delta_m^b = \delta_q^b.$$

Seçmə tədqiqatı zamanı yerinə yetirilən işlərin həcmi az olduğuna görə qeyd xətası başdan-başa seçmədəkinə nisbətən xeyli az olur. Yəni  $\delta_q^s < \delta_q^b$ . Əksər hallarda onlar arasındakı fərq mümkün representativ xətadan böyük olur. Onda:

$$\delta_q^s + \delta_r^s < \delta_q^b, \text{ yəni } \delta_m^s < \delta_m^b.$$

Deməli, seçmə tədqiqatı zamanı müşahidə xətası başdan-başa tədqiqatdakı müşahidə xətasından kiçikdir. Buradan məlum olur ki, seçmə müşahidəsinin başdan-başa müşahidəyə nisbətən üstünlüyü təkcə onun iqtisadi cəhətdən sərfəli olmasında deyil, həm də onun nisbətən dəqiq olmasındadır.

### **5. Seçmə müşahidəsi xətasının hesablanması qaydası**

Seçmə məcmusunun ümumiləşdirici göstəriciləri (seçmə orta kəmiyyət, seçmə dispersiya və nisbi tezlik) dəyişən kəmiyyətlərdir. Seçmə məcmunun göstəriciləri baş məcmunun müvafiq göstəriciləri ətrafında müxtəlif qiymətlərlə tərəddüd edə bilər. Tərəddüd dərəcəsi yüksək olduqda seçmə müşahidəsinin nəticələrini baş məcmuya yaymaq olmaz, yəni seçmənin nəticələri real hesab edilə bilməz. Seçmə göstəricilərinin baş məcmunun göstəricilərindən tərəddüd dərəcəsi

seçmənin orta xətası göstəricisi ilə xarakterizə olunur.

Seçmə orta kəmiyyətin ( $\tilde{x}$ ) baş orta kəmiyyətdən, seçmə hissənin isə baş hissədən mümkün tərəddüdlərini ölçmək üçün dispersiya, yəni orta kvadrat uzaqlaşma hesablanır. Bu kəmiyyəti yunan hərfi "mi" kvadratı ( $\mu^2$ ) ilə işarə etsək, onda düsturları müvafiq surətdə orta üçün

$$\mu_{\tilde{x}}^2 = \frac{\sum (\tilde{x}_i - \bar{x})^2}{n}$$

və hissə üçün

$$\mu_p^2 = \frac{\sum (w_i - p)^2}{n}$$

yazmaq olar.

Böyük ədədlər qanununun riyazi teoremlərində sübut edilmişdir ki, seçmə orta kəmiyyətin (hissənin) dispersiyası ilə baş dispersiyanın və seçilənlərin sayı arasında aşağıdakı münasibət mövcuddur: seçmə orta kəmiyyətin (hissənin) dispersiyası ( $\mu^2$ ) baş məcmuda əlamətin dispersiyasının ( $\sigma^2$ ) seçilənlərin sayına (n) olan nisbətində bərabərdir, yəni

$$\mu^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Bu ifadənin kvadrat kökü, yəni

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

seçmənin orta xətası adlanır. Bu düstur belə də yazıla bilər

$$\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Məlum olduğu kimi, seçmə müşahidəsini apararkən baş dispersiya haqqında məlumat olmur. Ona görə seçmə dispersiyadan istifadə edilir. Bu zaman düstur aşağıdakı kimi yazılır:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}$$

Seçmənin orta xətası hissə üçün aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\mu_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Burada  $pq$  - alternativ əlamətin dispersiyasıdır. Lakin bilmək lazımdır ki, seçmə müşahidəsini apararkən baş məcmuda alternativ əlamətin dispersiyası haqqında məlumat verilmir, bu zaman alternativ əlamətin dispersiyası kimi  $W(1-W)$  götürülür. Onda seçmənin orta xətası hissə üçün aşağıdakı düsturla müəyyən edilir:

$$\mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$$

## **6. Reprəzentativ xəta**

Seçmə müşahidəsi elmi əsasda təşkil edildikdə onun ümumiləşdirici göstəriciləri baş məcmunun ümumiləşdirici göstəricilərinə çox yaxın ola bilər, yəni seçmə məcmusunun göstəriciləri baş məcmunun göstəricilərini düzgün təmsil edə bilər. Buna seçmə müşahidəsinin reprəzentativliyi deyilir. "Reprəzentativ" fransız sözü olub, təmsil etmək deməkdir. Seçmə məcmusu göstəricilərinin baş məcmu göstəricilərinə yaxınlıq dərəcəsini öyrənmək üçün, başqa sözlə, seçmə müşahidəsi nəticəsində alınmış statistika materiallarının dəqiqliyini müəyyən etmək üçün baş məcmu ilə seçmə məcmusunun göstəriciləri arasındakı fərqi müəyyənləşdirmək lazımdır.

Qeyd etmək lazımdır ki, ümumi müşahidədə olduğu kimi, seçmə müşahidəsində də qeyd xətası baş verə bilər. Lakin sübut olunmuşdur ki, ümumi müşahidəyə nisbətən seçmə müşahidəsində qeyd xətası xeyli az olur.

Bununla bərabər, ümumi müşahidədə baş verməyən və ancaq seçmə müşahidəsinə xas olan reprəzentativ xəta da mövcuddur.

Seçmə məcmunun göstəriciləri ilə baş məcmunun göstəriciləri arasındakı fərqi reprəzentativ xəta deyilir.

Qeyd xətasında olduğu kimi, representativ xəta da müntəzəm və təsadüfi xətaya ayrılır. Seçmə müşahidəsinin aparılması prinsipi pozulduqda əmələ gələn xəta müntəzəm representativ xəta adlanır.

Seçmə müşahidəsi obyektiv, qərəzsiz aparılıb, bütün vahidlərin elmi qaydada seçilməsi təmin edilərsə, müntəzəm representativ xəta baş verməz. Lakin seçmə müşahidəsi düzgün aparıldıqda belə, seçmə məcmusu ilə baş məcmu göstəriciləri arasında fərq əmələ gəlir. Bu fərq seçmə məcmusunun baş məcmunun bütün vahidlərini əhatə etməməsindən irəli gəlir.

Seçmə müşahidəsinin aparılması prinsiplərinə əməl edildikdə belə, seçmə məcmusu ilə baş məcmu arasında əmələ gələn fərq təsadüfi representativ xəta adlanır.

Təsadüfi representativ xəta ancaq seçmə müşahidəsinə xasdır. Statistikanın vəzifəsi ehtimal nəzəriyyəsinin teoremləri əsasında representativ xətanın həcmi və onun mümkün hədudlarını müəyyən etməkdir.

### **7. Seçmənin orta xətasının son həddinin hesablanması**

Seçmə xətasının son həddini yunan hərfi " $\Delta$ " (delta) ilə, ehtimaldan asılı olan əmsali " $t$ " ilə işarə etməklə, seçmə xətasının son həddinin düsturunu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\Delta = t \cdot \mu$$

və yaxud

$$\Delta = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

Ədəbiyyatda " $t$ " etibarlılıq əmsali da adlanır. Düsturdan göründüyü kimi, seçmə xətasının son həddi seçmənin orta xətası və ehtimaldan asılıdır. Özünün mütləq kəmiyyətinə görə seçmə və baş məcmunun ümumiləşdirici göstəriciləri arasındakı fərq müəyyən ehtimalda, müəyyən bir kəmiyyətdən yüksək olmamaqla seçmə xətasının son həddindən kənara çıxa bilməz.

Seçmə xətasının son həddi düsturunun nəzəri cəhətdən əsaslandırılması

P.L.Çebişevin teoremində verilmişdir. P.L.Çebişevin teoremi, A.M.Lyapunovun həmin teoremə etdiyi düzəlişi nəzərə almaqla, əlamətin orta qiymətinin müəyyən edilməsinə tətbiq edildikdə aşağıdakı kimi:

$$P\left[|\tilde{x} - \bar{x}| \leq t\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = \phi(t)$$

hissə üçün isə belə:

$$P\left[|w - p| \leq t\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] = F(t)$$

yazıla bilər.

Burada,

$$F(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$$

$F(t)$  funksiyasının qiyməti xüsusi tərtib edilmiş cədvəl əsasında müəyyən edilir. Həmin cədvəldən aydın görünür ki,  $t$ -nin qiyməti artdıqca, ehtimal ( $P$ ) sürətlə vahidə yaxınlaşır.

Beləliklə, seçmə xətasının son həddi müəyyən ehtimalla seçmə tədqiqatının dəqiqliyini xarakterizə edir. Məsələn, 0,997 ehtimalla təsdiq etmək olar ki, seçmə məcmusu göstəriciləri baş məcmunun göstəricilərindən 3 vahiddən çox uzaqlaşmayacaqdır. Deməli, 1000-dən ancaq üç halda 3 qədər uzaqlaşma ola bilər.

### **8. Seçmə üsulları**

Seçmə müşahidəsi müxtəlif üsullarla aparıla bilər. Vahidləri baş məcmudan fərdi və qrup halında seçmək olar. Əgər ayrı-ayrı vahidləri baş məcmudan seçmək yolu ilə seçmə məcmu təşkil olunarsa, buna fərdi seçmə deyilir. Baş məcmudan tam qrupları (seriya ları) seçmək yolu ilə seçmə məcmu təşkil olunarsa, bu qrup halında seçmə adlanır. Bu o deməkdir ki, əvvəlcə baş məcmu yekcins qruplara (seriyalara) ayrılır, sonra təsadüfi qaydada tam qruplar (seriyalar) seçilir. Seçilmiş qruplar (seriyalar) müşahidədən keçirilir.

Baş məcmudan vahidlər təsadüfi, mexaniki, tipik və yaxud seriyalı seçmə üsulları ilə seçilə bilər. Təsadüfi, tipik və seriyalı seçmə üsulları həm təkrar, həm də təkrar olmayan seçmə qaydasında aparıla bilər.

Təkrar seçmə qaydasında baş məcmunun hər bir vahidinin seçmə məcmusuna bir neçə dəfə düşmək imkanı vardır. Bu ona görə belə olur ki, təkrar seçmədə baş məcmudan seçilmiş vahidlər yenidən baş məcmuya qaytarılır.

Təkrar olmayan seçmə qaydasında baş məcmunun hər bir vahidi seçmə məcmusuna ancaq bir dəfə düşə bilər. Bu o deməkdir ki, seçilən vahidlər yenidən baş məcmuya qaytarılmır.

Statistika işlərində ən çox təkrar olmayan seçmə qaydasından istifadə edilir. Xüsusən mexaniki seçmə ancaq təkrar olmayan seçmə qaydasında aparılır.

### **9. Təsadüfi seçmə**

Seçmə üsulunun bir növü təsadüfi seçmədir. Baş məcmudan vahidlərin qərəzsiz, təsadüfi qaydada seçilməsinə təsadüfi seçmə deyilir. Təsadüfi seçmə, adətən püşk alma qaydasında aparılır. Təsadüfi seçməni həyata keçirmək üçün adətən aşağıdakı əməliyyatları yerinə yetirmək lazımdır:

a) baş məcmunun siyahısı bütün vahidlərin sıra nömrəsi göstərilməklə tərtib edilir;

b) eyni keyfiyyətli kağızdan eyni həcmli biletlər hazırlanır. Həmin biletlərdə müvafiq sıra nömrələri yazılır:

c) biletləri büküb xüsusi gilizlərə qoymaqla həmin biletləli gilizləri qutuya töküb möhkəm qarışdırırlar;

qutudan təsadüfi qaydada hər dəfə bir biletdən çıxarılıb nömrəsini yazırlar.

Seçmə tədqiqatı üçün tələb olunan vahidlər təsadüfi qaydada belə seçilir.

Baş məcmunun göstəriciləri məlum olduqda təsadüfi seçmənin dəqiqliyi aşağıdakı düsturlarla müəyyən edilir:

|                |                           |
|----------------|---------------------------|
| Seçmə üsulları | Seçmə xətasının son həddi |
|----------------|---------------------------|

|                        | Əlamətin orta qiymətini müəyyən edərkən                    | Əlamətin hissəsini müəyyən edərkən                 |
|------------------------|------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Təkrar seçmədə         | $\Delta_x = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$                   | $\Delta p = t \sqrt{\frac{pq}{n}}$                 |
| Təkrar olmayan seçmədə | $\Delta_x = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} (1 - \frac{n}{N})}$ | $\Delta p = \sqrt{\frac{pq}{n} (1 - \frac{n}{N})}$ |

### **10. Mexaniki seçmə**

Təcrübədə ən çox mexaniki seçmədən istifadə edilir. Vahidlər müəyyən fasilə əsasında mexaniki qaydada seçilərsə, buna mexaniki seçmə deyilir.

Mexaniki seçməni aparmaq üçün əvvəlcə baş məcmunun vahidlərinin siyahısı tərtib edilir. Bu siyahı əlifba sırası, coğrafi prinsip üzrə, hər hansı bir göstəricinin artan, yaxud azalan qiyməti üzrə və s. tərtib edilə bilər. Statistika işlərinin təcrübəsində çox vaxt baş məcmunun vahidləri hər hansı bir əlamətin qiyməti üzrə artan və yaxud azalan qaydada düzülür. Sonra həmin siyahıdan müəyyən fasilə əsasında vahidlər seçilir. Fasilə baş məcmu vahidlərinin seçiləcək vahidlərin sayına bölünməsi yolu ilə müəyyən edilir.

Mexaniki seçmədə seçmənin orta xətasını qruplar üzrə orta qrup daxili dispersiya əsasında hesablamaq daha düzgün nəticə verə bilər. Qruplar üzrə hesablanmış orta qrup daxili dispersiya ümumi dispersiyadan kiçik olur. Qruplar üzrə orta qrup daxili dispersiya əsasında seçmənin orta xətası aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma_i^2}{n} (1 - \frac{n}{N})}$$

Qruplar üzrə orta qrup daxili dispersiyanı hesablamaq üçün bütün məcmu vahidlərinin miqdarı haqqında məlumat olmalıdır. Lakin belə məlumat olmadığına görə seçmə məcmu əsasında hesablanmış ümumi seçmə dispersiyadan istifadə edilir.

Mexaniki seçmə bütün hallarda təkrar olmayan qaydada aparıldığına görə seçmənin orta xətası təkrar olmayan düsturlarla hesablanır. Burada təsadüfi

seçmədə istifadə edilən müvafiq düsturlardan istifadə edilir.

Mexaniki seçmənin nəticəsi adətən təsadüfi seçməyə nisbətən daha dəqiq olur.

### **11. Tipik seçmə**

Baş məcmu yekcins olmadıqda, əvvəlcə onu eyni tipli qruplara ayırmaq lazımdır. Qruplaşdırma öyrənilən əlamət üzrə aparılır. Sonra həmin qruplardan vahidlər təsadüfi və yaxud mexaniki qaydada seçilir. Məsələn, əhalinin büdcə tədqiqatında, hər şeydən əvvəl, əhali sosial - ictimai qruplara ayrılır; kəndli (fermer) ailələrinin büdcə tədqiqatını aparmaq üçün əvvəlcə onlar istehsal istiqamətlərinə görə qruplaşdırılır.

Təsadüfi və mexaniki seçmə üsullarına nisbətən tipik seçmənin nəticəsi daha dəqiq olur, çünki tipik seçmədə baş məcmunun hər bir qrupundan vahidlərin seçmə məcmusuna düşmə imkanı təmin edilir.

Tipik seçmədə baş məcmu üzrə seçmə xətasının son həddini hesablayarkən, ümumi və ya seçmə dispersiyaları ( $\sigma_0^2$ ) əvəzinə orta qrup daxili dispersiya ( $\overline{\sigma_i^2}$ ),  $pq$  əvəzinə isə onların orta kəmiyyəti ( $\overline{pq}$ ) götürülür.

Tipik seçmədə seçmə xətasının son həddini hesablayarkən aşağıdakı düsturlardan:

təkrar seçmədə əlamətin orta kəmiyyətini müəyyən edərkən:

$$\Delta_x = t \sqrt{\frac{\overline{\sigma_i^2}}{n}}$$

əlamətin hissəsini müəyyən edərkən:

$$\Delta_p = t \sqrt{\frac{\overline{pq}}{n}}$$

təkrar olmayan seçmədə əlamətin orta kəmiyyətini müəyyən edərkən:

$$\Delta_x = t \sqrt{\frac{\sigma_i^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

əlamətin hissəsini müəyyən edərkən:

$$\Delta_p = t \sqrt{\frac{pq}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

düsturundan istifadə olunur.

## **12. Seriyalı seçmə**

Seriyalı seçmədə baş məcmudan ayrı-ayrı vahidlər deyil, qruplar (seriyalar) seçilir və seçilmiş qruplarda ümumi müşahidə aparılır. Qruplar (seriyalar) təsadüfə təkrar yaxud təkrar olmayan qaydada seçilə bilər. Məsələn, mal-qaranın uçota alınması zamanı əldə edilmiş məlumata düzəliş vermək məqsədilə aparılan nəzarət gəzintisində yaşayış məntəqələri seçilir, sonra seçilmiş yaşayış məntəqələrində mal-qaranın ümumi uçotu aparılır. Seriyalar bərabər və qeyri-bərabər böyüklükdə ola bilər. Seriyalı seçmədə hər bir seriya məcmu vahidi kimi götürülür və əlamətin tərəddüd dərəcəsinin ölçüsü seriyalararası seçmə dispersiya ( $\overline{\delta^2}$ ) olur. Seriyalararası seçmə dispersiyasının düsturu aşağıdakı kimi yazılır:

$$\overline{\delta^2} = \frac{\sum (\tilde{x}_i - \tilde{\bar{x}})^2}{s}$$

Burada,  $s$  - seçilmiş seriyaların sayıdır,

$\tilde{x}_i$  - ayrı-ayrı seriyalardakı orta kəmiyyətdir,

$\tilde{\bar{x}}$  - bütün seçilmiş seriyalar üçün seçmə orta kəmiyyətidir.

Baş məcmudakı seriyaların sayını böyük " $S$ " hərflə işarə etsək. o zaman təkrar seriyalı seçmədə seçmə xətasının son həddini hesablayarkən: əlamətin orta qiyməti üçün:

$$\Delta_x = t \sqrt{\frac{\delta^2}{S}}$$

əlamətin hissəsi üçün:

$$\Delta_p = t \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{S}}$$

təkrar olmayan seriyalı seçmədə isə əlamətin orta qiyməti müəyyən edilərkən:

$$\Delta_x = t \sqrt{\frac{\delta^2}{S} \left(1 - \frac{s}{S}\right)};$$

əlamətin hissəsi müəyyən edilərkən:

$$\Delta_p = t \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{S} \left(1 - \frac{s}{S}\right)}$$

düsturlarından istifadə edilir.

Qeyd etmək lazımdır ki, digər seçmə üsullarına nisbətən seriya seçmə üsulunda seçmənin orta xətası yüksək olur. Ayrı-ayrı seriyaların orta kəmiyyəti baş orta kəmiyyətdən çox fərqləndikcə xətanın həcmi də yüksək olur, əksinə fərq azaldıqca xətanın həcmi də azalır. Seriyalı seçmə üsulunun üstünlüyü onun asan təşkil olunmasındadır.

### **13. Kombinəlaşdırılmış seçmə**

Kombinəlaşdırılmış seçmədə bir neçə seçmə üsullarından birlikdə istifadə olunur. Məsələn, seriyalı seçməni təsadüfi seçmə ilə kombinəlaşdırmaq olar. Bu zaman əvvəlcə baş məcmunu (N) seriyalara, qruplara ayıraraq, lazım olan seriyalar seçilir, sonra seçilmiş seriyalardan təsadüfi seçmə üsulu ilə vahidlər seçilir. Kombinəlaşdırılmış seçmədə seçmə təkrar və təkrar olmayan qaydada aparılır. Belə kombinəlaşdırılmış seçmədə seçmənin orta xətasının kvadratı ( $\mu^2$ ) aşağıdakı düsturlarla:

təkrar seçmədə:

$$\mu^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\delta^2}{s}$$

təkrar olmayan seçmədə:

$$\mu^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right) + \frac{\delta^2}{s} \left(1 - \frac{s}{S}\right)$$

hesablanır.

Təcrübədə seçmə tədqiqatı ilə ümumi müşahidənin kombinəlaşdırilməsindən də çox tez-tez istifadə edilir. Seçmə müşahidəsi ilə ümumi müşahidənin kombinəlaşdırılması seçmə məlumatının dəqiqliyini daha yaxşı yoxlamağa imkan verir. Ona görə ki, belə halda seçmə müşahidəsinin göstəricilərini ümumi müşahidənin göstəriciləri ilə müqayisə etmək imkanı yaranır.

Məlum olduğu kimi, ümumi müşahidə zamanı ən mühüm əlamətlər üzrə məlumat toplanılır. Ümumi müşahidənin məlumatını tamamlamaq üçün əlavə seçmə müşahidəsi aparılır. Əsas proqram üzrə baş məcmunun bütün vahidləri, geniş proqram üzrə isə bir hissə tədqiq edilir.

#### **14. Seçilənlərin zəruri sayının hesablanması**

Müxtəlif seçmə üsullarında seçmə xətasının son həddini müəyyən etmək üçün istifadə edilən düsturlar nəinki xətanın həcmnin, həmçinin seçilənlərin zəruri sayını əvvəlcədən müəyyən etməyə imkan verir. Seçilənlərin zəruri sayının müəyyən edilməsi seçmə xətasının müəyyən həcmdən yuxarı olmamasını təmin etməyə imkan verir. Ona görə də təcrübədə çox vaxt seçmə müşahidəsini aparmaq üçün seçilənlərin zəruri sayı əvvəlcədən müəyyən edilir.

Seçilənlərin zəruri sayı seçmə xətasının son həddi düsturlarında müvafiq hesablamalar aparmaq nəticəsində müəyyən edilir.

Əgər əlamətin ona qiyməti üçün seçmə xətasının son həddi düsturunda (təkrar seçmədə) müvafiq hesablama aparsaq seçilənlərin zəruri sayını müəyyən etmiş olarıq.

Məlumdur ki, əlamətin orta qiyməti üçün seçmə xətasının son həddi

aşağıdakı düsturla  $\Delta_x = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$  hesablanır. Bərabərliyin hər iki tərəfini