

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
SUMQAYIT DÖVLƏT UNIVERSİTETİNİN NƏZDİNDƏ
SUMQAYIT DÖVLƏT TEXNİKİ KOLLECİ

«EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ
VƏ
RİYAZİ STATİSTİKANIN ƏSASLARI»
FƏNNİNDƏN MÜHAZİRƏLƏR

MÜƏLLİM: GÖZƏLOVA MEHRİBAN YAŞAR QIZI

SUMQAYIT - 2020

GİRİŞ

Ehtimal nəzəriyyəsi bütün təbiət elmlərinin təməl daşı, statistika isə insan fəaliyyətinin bütün sahələrinin ayrılmaz hissəsidir”. Məşhur Amerika alimi Kasın bu kəlamı ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın müasir dövrdə oynadığı rolu çox gözəl ifadə edir. Buna görə də bu elmlərin əsasları ilə tanış olmağı riyazi mədəniyyətin zəruri komponenti hesab etmək olar. Ehtimal nəzəriyyəsi – nəzəri və tətbiqi əhəmiyyət kəsb edən riyazi elmdir. İndi elm və texnikanın elə bir sahəsi yoxdur ki, orada ehtimal-statistika üsullarından bu və ya başqa dərəcədə istifadə edilməsin. Bu cəhət həm ehtimal nəzəriyyəsinin, həm də onun tətbiq edildiyi müxtəlif elm sahələrinin (məsələn, riyaziyyat, fizika, kimya, biologiya, iqtisadiyyat, ekonometrika, tibbi elm, hərbi iş, texnika və s.) inkişafına geniş imkan vermişdir. Ehtimal nəzəriyyəsinin mühüm tətbiq sahələrindən biri də iqtisadiyyatdır. Bu gün iqtisadi proseslərin tədqiqi və proqnozlaşdırılmasını ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan ekonometrik proqnozlaşdırma, reqressiya analizi, trend və hamarlaşdırma modelləri və bir sıra digər üsullardan istifadə etmədən təsəvvür etmək mümkün deyildir.

Real gerçəklikdə baş verən hər bir hadisəni öyrənmək üçün insanlar müəyyən müşahidələr, təcrübələr, ölçmə işləri – sınaqlar aparırlar. Mümkün qədər çox aparıla bilən, praktiki olaraq qeyri- məhdud sayda təkrar edilə bilən sınaqların nəticəsinə əsasən həmin hadisənin xassələri və qanuna uyğunluğu aşkar edilir. İnsanlar bu qanunauyğunluğu öyrənməklə müəyyən dərəcədə təsadüfi hadisələri idarə etməyi, onların təsirinin nəticələrini əvvəlcədən söyləməyə və aradan qaldırmağa, hətta onlardan öz praktiki fəaliyyət sahələrində məsədyönlü şəkildə istifadə etmək imkanı əldə edirlər.

Ehtimal nəzəriyyəsində riyaziyyat elminin bir çox sahələrində istifadə olunan üsullardan və alınan nəticələrdən (kombinator analizdə, riyazi analizdə, cəbrdə, məntiqdə və s.) geniş istifadə olunur. Ancaq ehtimal nəzəriyyəsinin sırf özünə məxsus öyrənmə üsulları vardır. Çünki onun öyrəndiyi məsələlərin əksəriyyətində dəqiq riyazi quruluş olmur və belə məsələlərin riyazi modelini qurmaqda nəzəri ehtimal intuisiyadan istifadə oluna bilər.

Ehtimal nəzəriyyəsinin analitik üsullarının işlənilib hazırlanmasında və ümumiləşdirilməsində Muavrın (1667-1754), Laplasın (1749-1827), Qausun (1821-1894), Puassonun (1781-1840), Çebışevin (1821-1894), Markovun (1856-1922), Lyapunovun (1857-1918) böyük xidmətləri olmuşdur.

Müasir ehtimal nəzəriyyəsini aksiomlar sistemi əsasında qurmağa cəhd edən S.N.Bernşteyn (1880-1948), lakin tam quran A.N.Kolmoqorov (1903-1987) olmuşdur. Bu nəzəriyyəyə inkişaf tempi verən bir sıra alimlərin, o cümlədən, Xinçinin (1894-1959), Sluskinin (1880-1948), Levinin (1886-1971) v. s. alimlərin adlarını qeyd etmək olar.

Təsadüfi hadisələr və sınaqlar. Təsadüfi hadisələr üzərində əməllər

- 1. Təsadüfi hadisələr və sınaqlar**
- 2. Sınaqlar seriyası və hadisələrin başvermə tezliyi**
- 3. Elementar hadisələr fəzası**
- 4. Təsadüfi hadisələr üzərində əməllər**

Təsadüfi hadisələr və sınaqlar

Təbiətdə baş verən hər bir hadisəni öyrənmək üçün insanlar müəyyən müşahidələr, təcrübələr və ölçmə işləri aparır. Eyni şəraitdə eyni bir hadisəni öyrənmək üçün ardıcıl olaraq aparılan müşahidə və təcrübələrin nəticəsi eyni olmur. Dəyişməyən şəraitdə eyni bir cihazla aparılan ölçmələrin nəticəsi, ümumiyyətlə müxtəlif olur. Buna görə də aparılan hər bir təcrübənin və yaxud müşahidənin nəticəsini qabaqcadan söyləmək çox zaman mümkün olmur. Hər hansı bir hadisənin qanunauyğunluğunu təcrübi olaraq müəyyən etmək üçün onu eyni şəraitdə təkrarən çoxlu sayda müşahidə etmək lazımdır. Çoxlu sayda müşahidə oluna bilməyən hadisələrin qanunauyğunluğunu müəyyən etmək çətinidir. Buna görə də, ehtimal nəzəriyyəsində, əsasən kütləvi hadisələr, yəni praktiki olaraq eyni şəraitdə istənilən sayda təkrar oluna bilən hadisələr öyrənilir. Ehtimal nəzəriyyəsi ayrı-ayrı təsadüfi hadisə və kəmiyyətlər deyil, onların qanunauyğunluqlarını və ümumi xassələrini öyrənir. Bu məqsədlə uyğun riyazi model qurulur. Ehtimal nəzəriyyəsində qurulan bu riyazi modeldə təcrübə, müşahidə, ölçmə anlayışları əvəzinə “sınaq” anlayışı

işlədilir. Hər bir sınaq müəyyən şərtlər və şərtlər kompleksi daxilində yerinə yetirilir. Sınağın aparılma şərtləri əvvəlcədən müəyyən olunur. Yalnız bu şərtlər ödəndikdə sınaq aparılır. Təkrarən aparılan sınaq zamanı bu şərtlər dəyişməz qalır. Hər bir sınaq öz aparılma şərtləri və nəticələri ilə xarakterizə olunur. Əgər sınağın aparılma şərtləri dəyişdikdə, onda həmin sınaq da dəyişir və başqa sınaq alınır.

Fərz edək ki, S təkrarən aparılan (eyni şərtlər kompleksi daxilində) sınaqdır. S sınağın hər bir icrası zamanı alınan nəticəyə hadisə deyilir. Aparılan sınaq nəticəsində nəzərdə tutulan hadisə baş verə də bilər, baş verməyə də bilər. Sınağın hər bir icrasında hökmən baş verən hadisəyə yəqin hadisə deyilir. Sınağın heç bir icrasında baş verməyən (və ya hökmən baş verə bilməyən) hadisəyə isə mümkün olmayan hadisə deyilir. Sınağın icrası zamanı nəzərdə tutulan hadisə baş versə də, baş verməsə də, yəni, sınaq zamanı hadisənin baş verib-vermədiyi haqda qabaqcadan heç nə demək mümkün deyilsə, onda həmin hadisə təsadüfi hadisə adlanır.

Ehtimal nəzəriyyəsində hadisələr A,B,C,...,və. s hərflərlə işarə olunur. Aparılan sınaq nəticəsində hadisələrin baş verib-verməməsi həmin sınağı keyfiyyətə xarakterizə edir. Sınağın kəmiyyətə xarakteristikasından da danışmaq olar.

Tutaq ki, aparılan sınaqla bağlı olan hər hansı kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətləri müəyyən etmək lazımdır. Bu halda sınağı xarakterizə edən kəmiyyətin mümkün ola bilən qiymətlərin hər hansı birini alması təsadüfi xarakter daşıdığından, həmin kəmiyyətin mümkün qiymətlərin hansını alacağını əvvəlcədən söyləmək mümkün deyildir. Ehtimal nəzəriyyəsində belə kəmiyyətlər təsadüfi kəmiyyətlər adlanır.

Sınaqlar seriyası və hadisələrin başvermə tezliyi

Ehtimal nəzəriyyəsi kütləvi təsadüfi hadisələrin qanunauyğunluqlarını öyrənir. Təsadüfi hadisələri elmi riyazi şəkildə öyrənmək üçün onların müəyyən ədədi xarakteristikaları olmalıdır. Hər bir hadisəyə onun ehtimalı adlanan bir həqiqi ədəd uyğun qoymaq üçün hələllik aşağıdakı kimi hərəkət etmək olar.

Fərz edək ki, S təkrarən aparıla bilən sınaq və A bu sınaqla bağlı olan hadisədir. S sınağını n dəfə aparıldıqda A hadisəsinin baş verməsinin sayı $S_n(A)$ olar. Başqa sözlə, S sınağı n dəfə təkrarən aparıldıqda A hadisəsinin baş verdiyi sınaqların sayı $S_n(A)$ ilə işarə olunur. Bu halda,

$$t_n(A) = \frac{S_n(A)}{n} \quad (1)$$

nisbəti n sınaqdan ibarət olan seriyada A hadisəsinin başvermə tezliyi və ya sadəcə olaraq tezliyi adlanır. Tezliyin statistik dayanıqlıq xassəsi vardır. Bu o deməkdir ki, S sınağının çoxlu sayda aparıldığı müxtəlif seriyalar təkrar olunduqda A hadisəsinin (1) tezliyi bir-birindən çox az fərqlənir. S sınağının uyğun olaraq $n_1, n_2, \dots$ dəfə təkrarən aparıldığı müxtəlif seriyalara baxdıqda

$$\frac{S_{n_1}(A)}{n_1} \approx \frac{S_{n_2}(A)}{n_2} \approx \frac{S_{n_3}(A)}{n_3} \approx \dots (2)$$

olur.

Kifayət qədər böyük sayda sınaqlardan ibarət olan müxtəlif seriyalarda baxılan A hadisəsinin tezlikləri bir-birinə çox yaxın olmaqla bərabər, müəyyən bir sabit $P(A)$ ədədi ətrafında rəqs edir. Seriyalardakı sınaqların sayı artdıqca hadisənin tezliyi həmin ədədə daha çox yaxınlaşır. Baxılan A hadisəsinin, S sınaq nəticəsində baş verməsi imkanının obyektiv ölçüsü olan $P(A)$ ədədi A hadisəsinin ehtimalı (və ya statistik ehtimal) adlanır.

Hadisənin tezliyi və ehtimalı ölçüsüz (adsız) kəmiyyətdir. Təsadüfi hadisənin ehtimalını təyin etmək üçün sınaq nəticələri eyniehtimallı (eyniimkanlı) olmalıdır. Bunun ümumi sxemi belədir:

Fərz edək ki, A sınağının $A_1, A_2, \dots, A_n$ kimi n dənə mümkün nəticəsi vardır və hər bir sınaq nəticəsində bu hadisələrdən yalnız biri və həm də hökmən baş verir. Bu hadisələrdən hər hansı birinin baş verməsinin, digərinin baş verməsinə nəzərən heç bir üstünlüyü (daha artıq imkanı) yoxdursa, həmin hadisələr eyniehtimallı hadisələrdir və onlar tam qrup təşkil edir. Belə hadisələrin hər birinin ehtimalı $1/n$ -ə bərabərdir.

$$P(A_k) = \frac{1}{n}, \quad k=1, 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

Verilmiş sınaq nəticəsində eyni zamanda (birgə) baş verə bilməyən hadisələrə uyuşmayan hadisələr deyilir.

Elementar hadisələr fəzası

Fərz edək ki, təkrarən aparıla bilən hər hansı S sınağının icrasında cüt-cüt uyuşmayan ω_i ($i=1, 2, \dots$) nəticələrindən ancaq biri baş verir. Bu halda ω_i nəticələrinin hər biri S sınağının elementar hadisəsi (və ya elementar nəticəsi) adlanır. Bütün belə elementar hadisələr çoxluğuna S sınağının elementar hadisələr fəzası deyilir və Ω ilə işarə olunur:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \text{ və ya } \Omega = \{\omega\}$$

İxtiyari təbiətli ω elementlərinin Ω çoxluğu elementlər hadisələr fəzası, onu təşkil edən ω elementləri isə elementar hadisələr adlanır.

Hər bir real hadisə və prosesi öyrənmək üçün uyğun elementar hadisələr fəzası təyin edilir. Baxılan sınağın cüt-cüt uyuşmayan, uyğun nəticələri isə elementar hadisələr hesab olunur. Elementar hadisələr fəzasının

hər bir alt çoxluğuna təsadüfi hadisə və ya hadisə deyilir. Aparılan sınaqda müəyyən hadisənin baş verməsi, onu təşkil edən elementar hadisələrin heç olmasa birinin baş verməsi deməkdir. Beləliklə, baxılan sınaq nəticəsində baş verə bilən bütün hadisələr çoxluğu Ω fəzasının bütün alt çoxluqları çoxluğundan ibarətdir. Ω çoxluğundan (fəzanın özündən) ibarət olan hadisə, sınaq nəticəsində baş verən hər bir elementar hadisənin baş verməsi nəticəsində baş verir. Bu o deməkdir ki, Ω hadisəsi hər bir sınaq nəticəsində baş verir. Deməli, Ω fəzası yəqin hadisədir. Boş çoxluq isə sınağın icrası zamanı heç bir elementar hadisənin baş verməsi nəticəsində baş verə bilməz, yəni, boş çoxluğu mümkün olmayan hadisədir. Məlumdur ki, n sayda elementdən ibarət olan sonlu $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ çoxluğunun 2^n sayda altçoxluğu vardır. Buradan aydındır ki, n sayda elementar hadisədən ibarət olan $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ fəzası 2^n sayda hadisə ilə bağlıdır. Bu hadisələrdən biri yəqin hadisə (fəzanın özü), o biri isə mümkün olmayan hadisədir.

Təsadüfi hadisələr üzərində əməllər

Tutaq ki, hər hansı S sınağının elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{\omega\}$ ilə işarə edilir. Burada həmin fəzanın altçoxluqları olan $A, B, C, \dots$, və s. hadisələrinə baxılır. Bu hadisələr bəzən $A_k, B_k, C_k, \dots$, ($k=1, 2, \dots$) və s. kimi işarə olunur. Təsadüfi hadisələr üzərində aşağıdakı əməllər yerinə yetirilir:

1. Hadisələrin bərabərliyi.

Baxılan sınaq nəticəsinə A hadisəsi baş verdikdə B hadisəsi də hökmən baş verirsə, onda deyirlər ki, “ B hadisəsi A hadisəsinin nəticəsidir” və $A \subset B$ (A daxildir B -yə) kimi işarə olunur. Bu daxilolma münasibətinin aşağıdakı xassələri vardır.

- $A \subset A$
- $A \subset B$ və $B \subset C$ olarsa, onda $A \subset C$ olar.

Əgər $A \subset B$ və $B \subset A$ münasibətləri eyni zamanda ödənilərsə, A və B hadisələrinə eynigüclü və ya bərabər hadisələr deyilir və $A=B$ kimi işarə edilir.

Hadisələrin eynigüclülük münasibətinin simmetriklik, refleksivlik və tranzitivlik xassələri vardır:

- Simmetriklik: $A=A$
- Refleksivlik: $A=B$ olduqda, $B=A$ olar.
- Tranzitivlik: $A=B$ və $B=C$ olduqda $A=C$ olar.

2. Hadisələrin cəmi və ya birləşməsi.

A və B hadisələrinin heç olmasa birinin baş verməsindən ibarət olan hadisəyə həmin hadisələrin cəmi və ya birləşməsi deyilir və $A+B$, $A \cup B$ kimi işarə olunur. Buradan aydın olur ki, A və B hadisələrinin cəmi, həmin hadisələrin heç olmasa birinə daxil olan elementar hadisələrdən ibarətdir:

$$A+B=\{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ və ya } \omega \in B\} \quad (1)$$

İstənilən A və B hadisələri üçün aşağıdakı xassələr doğrudur.

- $A+A=A$
- $A+B=B+A$
- $A+\Omega=\Omega$
- $A+\emptyset=A$ və s.

Eyni qayda ilə istənilən sonlu sayda hadisələrin $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin cəmini müəyyən etmək olar:

$$A_1+A_2+\dots+A_n=\bigcup_{k=1}^n A_k \quad (2)$$

(2) düsturunun cəmi $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin heç olmasa birinin baş verməsindən ibarət olan hadisədir. Hadisələrin cəmi anlayışı hesabi sayda çoxluqlar üçün ümumiləşdirilir.

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (3)$$

3. Hadisələrin hasili.

A və B hadisələrinin hər ikisinin eyni zamanda hökmən baş verməsindən ibarət olan hadisəyə həmin hadisələrin hasili deyilir və AB və ya $A \cap B$ kimi işarə olunur. Buradan aydın olur ki, A və B hadisələrinin hasili həmin hadisələrin hər birinə hökmən daxil olan elementar hadisələrdən ibarətdir:

$$AB = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ və } \omega \in B \} \quad (1)$$

İstənilən sonlu sayda və ya hesabi sayda hadisələrin hasilindən də danışmaq olar. Hesabi sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələr üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in A_k, k=1, 2, \dots \} \quad (2)$$

İxtiyari $A, B, C, \dots$ hadisələri üçün aşağıdakı xassələr doğrudur:

- $AA = A$
- $AB = BA$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $A\emptyset = \emptyset$
- $A\Omega = A$

Hadisələrin cəmi və hasili üçün qruplaşdırma xassələri də doğrudur. Yəni A, B, C hadisələri üçün aşağıdakı münasibətlər ödənilir:

$$A+B+C = A+(B+C) = (A+B)+C = (A+C)+B \quad \text{və}$$

$$ABC=A(BC)=(AB)C=(AC)B$$

Ω fəzası yəqin hadisə, boş çoxluq isə mümkün olmayan hadisələrdir. Buna görə də $AB = \emptyset$ olması A və B hadisələrinin uyuşmayan olması deməkdir. Cüt-cüt uyuşmayan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələr sistemi üçün

$$A_k A_m = \emptyset \quad (k, m=1, 2, \dots)$$

münasibətləri ödənilir. Belə sistem üçün əlavə

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$$

münasibəti ödənildikdə, ona cüt-cüt uyuşmayan hadisələrin tam qrupu və ya tam sistemi deyilir. Bu anlayışı hesabi sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələr sistemi üçün də ümumiləşdirmək olar. Əgər $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələr sistemi üçün

1. $A_k = \emptyset \quad (k \geq 1),$
2. $A_k A_m = \emptyset \quad (k, m=1, 2, \dots),$
3. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$

şərtləri ödənilərsə, onda ona hadisələrin “tam sistemi” deyilir.

Əgər A hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin cəmidirsə, yəni

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

münasibəti ödənilərsə, onda deyirlər ki, A hadisəsi $A_1, A_2, \dots, A_n$ xüsusi hallarına ayrılır.

4. Hadisələr fərqi.

A hadisəsinin baş verməsi, B hadisəsinin isə baş verməməsindən ibarət olan

hadisəyə A və B hadisələrinin fərqi deyilir və $A-B$ kimi işarə olunur. $A-B$ fərfini aşağıdakı kimi təyin etmək təyin etmək olar:

$$A-B = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ və } \omega \in \bar{B} \}$$

Ω -A fərqinə A hadisəsinin qarşılıqlı əksi deyilir və belə işarə olunur:

$$\bar{A} = \Omega - A$$

$\bar{A}$ hadisəsi A-nın baş verməsini göstərir. A və $\bar{A}$ hadisələri qarşılıqlı əks hadisələr adlanır. Onların biri baş verdikdə, o biri hökmən baş vermir. Deməli, A və $\bar{A}$ hadisələri uyuşmayandır $\bar{A}A = \emptyset$ və onların cəmi yəqin hadisədir: $A + \bar{A} = \Omega$

Ehtimalın xüsusi və aksiomatik tərifləri.

Ehtimalın xassələri

1. Hadisələr cəbri
2. Hadisələrin ehtimalı və ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları
3. Ehtimalın sadə xassələri
4. Ehtimalın klassik tərfi
5. Həndəsi ehtimal
6. Şərti ehtimal
7. Ehtimalın sadə xassələri

Hadisələr cəbri

Fərz edək ki, $\Omega = \{\omega\}$ ilə hər hansı S sınağının elementar hadisələr fəzası və A, B, C ilə onun altçoxluqları olan hadisələr işarə edilir.

Tutaq ki, Ω fəzasının hər hansı hadisələri (altçoxluqları) sistemi F ilə işarə edilmişdir. Bu sistem üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1. $\Omega \in F$
2. $A \in F$ və $B \in F$ olduqda $AB \in F, A+B \in F, A-B \in F$ olur.

Onda F sisteminə hadisələr cəbri deyilir.

Hadisələr cəbrinin bir sıra xassələri vardır:

1. Ω fəzası F sisteminə daxil olduğundan 2 şərtinə görə $\emptyset = \Omega - \Omega$ boş çoxluğu da F sisteminə daxildir, yəni $\emptyset \in F$.
2. Hadisələrin cəmi və hasili üçün qruplaşdırma xassəsi doğru olduğundan F sisteminə daxil olan sonlu sayda $A_1, \dots, A_n$ hadisələrinin cəmi və hasili də F sisteminə daxildir,

yəni $A_k \in F$ ($k=1, 2, \dots, n$) olduqda

$$\bigcup_{k=1}^n A_k \in F \quad \text{və} \quad \bigcap_{k=1}^n A_k \in F$$

3. $A_k \in F$ ($k=1, 2, \dots$) olduqda

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in F \quad \text{və} \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in F$$

Bu halda, yəni F hadisələr cəbri 3 şərtini ödədikdə, ona σ -cəbri və ya Borel cəbri deyilir.

Hadisələrin ehtimalı və ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları

Fərz edək ki, $\Omega = \{\omega\}$ hər hansı elementar hadisələr fəzası və A, B, C və s. onun hadisələridir. Bu hadisələrin σ -cəbri olan F sisteminə baxaq. F hadisələr sistemində təyin olunmuş və aşağıdakı xassələri (aksiomları) ödəyən həqiqi P funksiyasına “ehtimal” deyilir. Aksiomlar aşağıdakılardır:

1. E_1 : Hər bir $A \in F$ hadisəsinin ehtimalı mənfi olmayan ədəddir. Yəni, $P(A) \geq 0$ olur.
2. E_2 (normallıq aksiomu): Yəqin hadisənin ehtimalı vahidə bərabərdir. Yəni, $P(\Omega) = 1$ olur.
3. E_3 (ehtimalların toplanma aksiomu): Cüt-cüt uyuşmayan $A_k \in F$ ($k=1, 2, \dots$) hadisələri cəminin ehtimalı onların ehtimalları cəminə bərabərdir:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Bu aksiomlar ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları və ya Kolmoqorov aksiomları adlanır. Kolmoqorov aksiomları bir-birindən asılı deyil və onlar ziddiyyət təşkil etmir. Bu o deməkdir ki, elə real hadisələr və obyektlər vardır ki, onlar üçün E_1 - E_2 - E_3 aksiomları ödənilir. Qeyd edək ki, hadisələrin ehtimalı birqiymətli təyin olunmur. Eyni bir F hadisələr cəbrində E_1 - E_2 - E_3

aksiomlarını ödəyən müxtəlif $P(A)$ funksiyalarını təyin etmək olar. Bu baxımdan $E_1-E_2-E_3$ aksiomlar sistemi tam deyildir.

Çoxluqlar funksiyası istənilən sonlu n ədədi üçün

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \quad (1)$$

münasibətini ödədikdə, ona additiv funksiya deyilir. $P(A)$ funksiyası (1) bərabərliyini $n=\infty$ olduqda ödəyirsə, onda ona hesabi-additiv və ya σ -additiv funksiya deyilir. Hər bir hesabi additiv funksiya additivdir, lakin bunun tərsi doğru deyildir, additiv funksiya hesabi-additiv olmaya da bilər. $P(a)$ ehtimalı mənfə olmayan qiymətlər alan hesabi-additiv çoxluq funksiyasıdır.

Ehtimal anlayışını təyin etmək üçün Ω elementar hadisələr fəzası, onun σ -cəbr olan F hadisələr sistemi ilə və bu sistem üzərində təyin olunmuş $P(A)$ funksiyası göstərməlidir. Bunların $\{\Omega, F, P\}$ üçlüyü ehtimal fəzası adlanır.

Ehtimalın klassik tərfi

Fərz edək ki, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ hər hansı S sınağının elementar hadisələr fəzasıdır. Burada ω_k ($k=1, \dots, n$) elementar hadisələri eyni ehtimallıdır, yəni $P(\omega_1) \dots P(\omega_n)$. Onda fəzanı təşkil edən elementar hadisələri cüt-cüt uyuşmayan olmasına və

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} = \{\omega_1\} + \dots + \{\omega_n\}$$

hadisəsinin yəqin hadisə olmasına əsasən və

$$P(\omega_1) + \dots + P(\omega_n) = 1, \quad nP(\omega_n) = 1 \text{ və ya } P(\omega_k) = \frac{1}{n} \quad (1)$$

alınır. İstənilən

$$A = \{\omega_{i1}, \dots, \omega_{im}\} = \{\omega_{i1}\} + \dots + \{\omega_{im}\}$$

hadisəsinin ehtimalı

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (2)$$

düsturu ilə hesablanır. Eyni ehtimallı sonlu sayda elementar hadisədən ibarət olan fəzanın ixtiyari hadisəsinin ehtimalı bu hadisəyə daxil olan elementar hadisələr sayının fəzanın bütün elementar hadisələrinin ümumi sayına olan nisbətində bərabərdir. A hadisəsinin baş verməsi onu təşkil edən ω_{ik} elementar hadisələrinin birinin baş verməsi deməkdir. Buna görə də bəzən A hadisəsinə təşkil edən m dənə ω_{ik} elementar hadisələrinin hər birinə həmin A hadisəsi üçün əlverişli hal deyilir. A hadisəsi üçün əlverişli hal baş verdikdə A hadisəsi də baş verir. Ω fəzasının $\omega_1, \dots, \omega_n$ elementar hadisələri isə mümkün hallar adlanır. A hadisəsi üçün əlverişli halların sayının mümkün hallar sayına olan nisbətində həmin hadisənin ehtimalı deyilir.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{əlverişli hallar sayı}}{\text{mümkün hallar sayı}}$$

Bu ehtimalın klassik tərfi adlanır. Burada m -əlverişli hallar sayı, n -mümkün hallar sayıdır.

Həndəsi ehtimal

Elə hadisələr vardır ki, onlar üçün mümkün və əlverişli hallar sayı sonsuzdur və ya onların sayından danışmaq mümkün deyildir. Belə ehtimal məsələlərini həll etmək üçün həndəsi ehtimal anlayışı verilir.

Tutaq ki, müstəvi üzərində bir σ oblastı və onun daxilində yerləşən Q oblastı verilmişdir (ş:1). σ oblastına atılmış nöqtənin onun hissəsi olan Q oblastının daxilində düşməsi ehtimalını tapmalı. Bu məsələni ehtimalın klassik tərfi vasitəsilə həll etmək mümkün deyildir. Çünki bu halda mümkün hallar σ oblastının nöqtələri çoxluğu, əlverişli hallar isə Q oblastının nöqtələri çoxluğu olar. Onlar isə sonsuz saydadır. Buna görə də göstərilən hadisənin ehtimalını hesablamaq üçün hadisə üçün əlverişli hallar sayının mümkün hallar sayına

nisbətini götürmək olmaz. Belə məsələləri həll etmək üçün ehtimalın həndəsi tərifindən istifadə edilir. Bu tərif vermək üçün qəbul etmək lazımdır ki, σ oblastına atılan nöqtənin Q oblastına düşməsinin $P(Q)$ ehtimalı həmin oblastın ölçüsü (sahəsi) ilə mütənasib olub, onun formasından və tutduğu yerdən asılı deyildir.

$$\text{Onda, } P(Q) = \mu \cdot \text{sahə } Q$$

olar. Burada $Q = \sigma$ qəbul etdikdə, $P(\sigma) = 1$ olmasına əsasən

$$1 = \mu \cdot \text{sahə } \sigma, \quad \mu = \frac{1}{\text{sahə } \sigma}$$

olar və nəticədə

$$P(Q) = \frac{\text{sahə } Q}{\text{sahə } \sigma} \quad (1)$$

münasibəti alınar. Bu düsturla hesablanan ehtimalla həndəsi ehtimal deyilir.

Ehtimalın həndəsi tərif ümumi şəkildə

$$P(Q) = \frac{\text{mes } Q}{\text{mes } \sigma} \quad (2)$$

olur.

Şərti ehtimal

Hər bir təsadüfi prosesi öyrənmək üçün müəyyən $\{\Omega, F, P\}$ ehtimal fəzası qurulur. Bu fəzada hadisələrin ehtimalı heç bir əlavə şərt qoyulmadan hesablanır. Belə hesablanan ehtimallar şərtsiz ehtimallar adlanır. Bəzən bir çox hadisələrin ehtimalını əlavə şərtlər daxilində hesablamaq lazım gəlir. B hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsinin ehtimalına şərti ehtimal deyilir və $P(A/B)$ ilə işarə olunur.

A hadisəsinin, B hadisəsinin baş verməsi şərtində $P(A/B)$ şərti ehtimalı həmin hadisələrin hasilinin ehtimalının B hadisəsinin ehtimalına olan nisbətində deyilir:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Bu tərifin $P(B) > 0$ olduqda mənası var. Ehtimalı 0 olan hadisəyə, yəni $P(B) = 0$ olan B hadisəsinə nəzərən hadisələrin şərti ehtimalına baxılmaz.

Ehtimalın sadə xassələri

Ehtimala Ω elementar hadisələr fəzasının F hadisələr cəbrində təyin olunmuş hesabi-additiv çoxluq funksiyası kimi verilmiş tərifdən bir sıra nəticələr alınır:

1. Verilmiş $A \in F$ hadisəsinin qarşılıqlı əksi olan $\bar{A}$ hadisəsinin ehtimalı

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (1)$$

bərabərliyi ilə hesablanır. Doğrudan da, $A \in F$ və $\Omega \in F$ olduğundan $\bar{A} = \Omega - A$ olur. A və $\bar{A}$ hadisələri uyuşmayandır və onların cəmi yəqin hadisədir:

$A + \bar{A} = \Omega$. Onda $E_2 - E_3$ aksiomlarına görə

$$\begin{aligned} P(A) + P(\bar{A}) &= P(\Omega) = 1 \\ P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \end{aligned} \quad \text{olar.}$$

2. Mümkün olmayan hadisənin ehtimalı sıfıra bərabərdir:

$$P(\emptyset) = 0 \quad (2)$$

Bu nəticəni almaq üçün (1) bərabərliyində $A = \Omega$ götürmək və E_2 aksiomundan istifadə etmək lazımdır.

3. İstənilən $A \in F$ və $B \in F$ hadisələrinin cəminin ehtimalı üçün

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (3)$$

bərabərliyi doğrudur.

4. İstənilən $A \in F$ və $B \in F$ hadisələri üçün

$$P(A+B) \leq P(A) + P(B) \quad (4)$$

5. A hadisəsi B hadisəsini doğrursa, yəni $A \subset B$ münasibəti doğrudursa, onda

$$P(A) \leq P(B) \quad (5)$$

6. İstənilən $A \in F$ hadisəsinin ehtimalı

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (6)$$

bərabərliyini ödəyir.

7. Hadisələr ardıcılığının aşağıdakı kimi xassəsi də vardır:

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots \text{ və } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\text{və ya } A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots \text{ və } A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

olduqda

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

bərabərliyi doğrudur.

Ehtimalın vurma düsturu

1. Hadisələr hasilinin ehtimalı

2. Tam ehtimal və Bayes düsturu

Hadisələr hasilinin ehtimalı

B hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsinin $P(A/B)$ şərti ehtimalı

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1)$$

düsturu ilə hesablanır. Buradan, B hadisəsinin $P(B) > 0$ şərtsiz ehtimalı məlum olduqda A və B hadisələrinin eyni zamanda baş verməsinin ehtimalını təyin etmək olar:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (2)$$

Burada, A və B hadisələrinin yerini dəyişməklə aşağıdakı bərabərlik alınır:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) \quad (3)$$

(2) və (3) bərabərlikləri ehtimalların vurma teoremini ifadə edir.

Həmin bərabərlikdən aşağıdakı münasibəti almış olarıq:

$$P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (4)$$

(3) bərabərliyini istənilən sonlu sayda $A_1, \dots, A_n$ hadisələri üçün ümumiləşdirmək olar.

Teorem (ehtimalların vurma teoremi): $P(A_1) > 0$, $P(A_1 A_2) > 0, \dots$, $P(A_1 \dots A_n) > 0$ şərtlərini ödəyən sonlu sayda $A_1, \dots, A_n$ hadisələri üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$P(A_1, \dots, A_n) = P(A_1) P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1, \dots, A_{n-1})$$

Tam ehtimal və Bayes düsturu

Tutaq ki, cüt-cüt uyuşmayan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri tam qrup təşkil edir və B hadisəsi bu hadisələrin hər hansı biri ilə eyni zamanda baş verir. A_k hadisələrinin $P(A_k)$ ehtimalı və B hadisəsinin $P(B/A_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) şərti ehtimalları məlumdur. B hadisəsinin $P(B)$ ehtimalını tapmaq tələb olunur. Bu məsələni həll etmək üçün qeyd edək ki, cüt-cüt uyuşmayan və tam qrup təşkil edən A_k hadisələrinin cəmi yəqin hadisədir:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$$

Buna görə də B hadisəsinə cüt-cüt uyuşmayan BA_k hadisələrinin

$$B = \bigcup_{k=1}^n (BA_k)$$

cəmi şəklində göstərmək olar. Buradan E_3 aksiomuna görə

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(BA_k)$$

münasibətini və sağ tərəfdəki hədlərə ehtimalların vurma teoremini tətbiq etdikdə

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B/A_k)$$

bərabərliyi alınar.

(2) düsturuna tam ehtimal düsturu deyilir. Bu düsturdan istifadə etməklə aşağıdakı məsələni həll etmək olar:

Tutaq ki, cüt-cüt uyuşmayan və tam qrup təşkil edən A_k ($k=1,2,\dots,n$) hadisələrinin $P(A_k)$ ehtimalları keçirilməli olan müəyyən sınaqdan əvvəl verilmişdir. Sınaq aparıldıqda B hadisəsi baş verir və bu hadisənin A_k hadisələrinə nəzərən $P(B/A_k)$ şərti ehtimalları məlumdur. B hadisəsinin baş verməsi A_k hadisəsinin ehtimalını necə dəyişir?

Bu məsələni həll etmək üçün

$$P(BA_k)=P(B)P(A_k/B)=P(A_k)P(B/A_k)$$

bərabərliklərindən istifadə etmək lazımdır. Buradan

$$P\left(\frac{A_k}{B}\right) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}$$

bərabərliyi və (2) düsturuna əsasən

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k)P(B / A_k)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B / A_k)} \quad (3)$$

Münasibəti alınır. (3) bərabərliyinə Bayes düsturu deyilir.

Asılı olmayan hadisələr

1. Asılı olmayan hadisələr

2. Bir neçə hadisənin asılı olmaması

Asılı olmayan hadisələr

Hadisələrin asılı olmaması ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir. A və B hadisələri üçün

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B) \quad (1)$$

bərabərliyi ödənildikdə onlara asılı olmayan hadisələr deyilir. (1) bərabərliyini əvvəlki paragrafda alınmış

$$P(AB)=P(B) \cdot P(A/B) \quad (2)$$

və

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B/A) \quad (3)$$

bərabərlikləri ilə müqayisə etsək, onda $P(B) \neq 0$ və $P(A) \neq 0$ olduqda, uyğun olaraq

$$P(A/B)=P(A) \quad (4)$$

və

$$P(B/A)=P(B) \quad (5)$$

bərabərlikləri alınar.

$P(B) > 0$ olduqda (4) bərabərliyindən (1) alınır. Deməli, $P(B) > 0$ olduqda A və B hadisələrinin asılı olması üçün (4) bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafi şərtidir. $P(A) > 0$ olduqda isə A və B hadisələrinin asılı olmaması üçün (5) bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafi şərtidir. (4) və (5) bərabərliklərinin hər hansı birinin doğruluğundan o birinin doğruluğu çıxır. Doğrudan da, tutaq ki, (4) bərabərliyi doğrudur. Onda

$$P(A) \cdot P(B/A)=P(B) \cdot P(A/B)$$

bərabərliyindən (5) alınar. Buradan aydın olur ki, asılı A və B hadisələri üçün

$$P(A/B) \neq P(A)$$

$$P(B/A) \neq P(B)$$

olar. Uyuşmayan A və B hadisələri asılı hadisələrdir. Doğrudan da, bu halda A və B hadisələrinin birinin baş verməsi digərinin baş verməməsi deməkdir. Yəni,

$$P(A/B)=P(B/A)=0$$

bərabərlikləri ödənilir. Qeyd edək ki, A və B hadisələri asılı olmadıqda A və $\bar{B}$, $\bar{A}$ və B, $\bar{A}$ və $\bar{B}$ hadisələri də asılı olmur. A və B hadisələri asılı olmadıqda onların cəminin ehtimalını

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

İstənilən sonlu sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin asılı olmamasından da danışmaq olar. Verilmiş $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin ixtiyari biri yerdə qalan hadisələrin hər birindən və onların mümkün ola bilən istənilən hasilindən asılı olmadıqda, onlara qarşılıqlı asılı olmayan və ya sadəcə olaraq asılı olmayan hadisələr deyilir. Asılı olmayan hadisələr cüt-cüt asılı olmayandır, lakin bunun tərsi doğru deyildir.

Tutaq ki, $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri asılı olmayandır. Onda tərifə görə

$$P(A_2/A_1) = P(A_2),$$

$$P(A_3/A_1A_2) = P(A_3),$$

.....

$$P(A_{n-1}/A_1 \dots A_{n-2}) = P(A_{n-1}),$$

$$P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) = P(A_n)$$

münasibətləri ödənilir. Bu halda

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1) \dots P(A_n/A_1A_2 \dots A_{n-1})$$

bərabərliyi

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) \quad (6)$$

kimi yazılır.

Məsələ 1. Metal pul iki dəfə atılır. A ilə qerb üzünün birinci, B ilə ikinci dəfə düşməsi hadisəsini işarə edək. $A \vee B$ hadisələrinin asılı olmadıqlarını göstərin. Həlli. Metal pul iki dəfə atıldıqda elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{GG, GR, RG, RR\}$ olar. Onda $A = \{GG, GR\}; B = \{GG, RG\}; AB = \{GG\}$

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; P(AB) = \frac{1}{4}$ Deməli, $P(AB) = P(A)P(B)$. Beləliklə, $A \vee B$ asılı olmayan hadisələrdir.

Məsələ 2. Bir zər atılmışdır. Aşağıdakı hadisələrə baxaq: a) A -düşən xalın üçə bölünməsi; b) düşən xalın cüt ədəd olması. $A \vee B$ hadisələrinin asılı olmadıqlarını göstərin.

Həlli. Məsələnin şərtinə əsasən $A = \{\omega_3, \omega_6\} = \{3, 6\}; B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{2, 4, 6\}; AB = \{\omega_6\} = \{6\}$

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; P(AB) = \frac{1}{6}$ Şərti ehtimalın düsturuna görə $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Deməli, $P(A/B) = P(A)$. Bu isə $A \vee B$ hadisələrinin asılı olmadıqlarını göstərir.

Məsələ 3. Müstəviyə birinci üz qırmızı, ikinci üz yaşıl, üçüncü üz mavi və dördüncü üz hər üç rənglə rənglənmiş tetraedr atılır. Tetraedrin müstəviyə atılışında qırmızı üzünün düşməsi hadisəsini Q ilə, yaşıl üzünün düşməsini Y ilə və mavi üzünün düşməsini M ilə işarə edək.

Hər bir üz iki rənglə rəngləndiyi üçün

$$P(Q) = P(Y) = P(M) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

olar.

$$P(QY) = P(QM) = P(YM) = \frac{1}{4}$$

Beləliklə, Q,Y və M hadisələri cüt-cüt asılı olmayan hadisələrdir. Ancaq bu hadisələr qarşılıqlı asılı hadisələrdir.

Belə ki,
$$P(QYM) = \frac{1}{4} \neq P(Q)P(Y)P(M) = \frac{1}{8}$$

Bir neçə hadisənin asılı olmaması

$A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrindən istənilən ikisi asılı olmadıqda onlara cüt-cüt asılı olmayan hadisələr deyilir.

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri üçün $1 \leq i < j < k < \dots \leq n$ indekslərinin bütün mümkün kombinasiyaları üçün $2^n - n - 1$ sayda

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}), 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, k = 2, 3, \dots, n, \text{ yəni}$$

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j);$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

.....

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

bərabərlikləri ödənildikdə qarşılıqlı (birgə) asılı olmayan hadisələr adlanır.

Qeyd edək ki, cüt-cüt asılı olmayan hadisələr qarşılıqlı asılı ola bilər. Bu mənada hadisələrin qarşılıqlı asılı olmaması anlayışı cüt-cüt asılı olmamaq anlayışından daha güclüdür. Məsələn, $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ eyniehtimallı elementar hadisələr fəzasında

$$A = (\omega_1, \omega_2), B = (\omega_1, \omega_3), C = (\omega_1, \omega_4)$$

hadisələri buna misal ola bilər. Doğrudan da,

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

bərabərlikləri A, B və C hadisələrinin cüt-cüt asılı olmadığını,

$$P(ABC) = P(\omega_1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

bərabərliyi isə onların qarşılıqlı asılı olduğunu göstərir.

Hadisələrin asılı olmaması haqqında aşağıdakı təklifləri söyləmək olar:

1) n sayda hadisələrin asılı olmaması, bu hadisələrdən istənilən saydasını onların tamamlayıcı hadisələri ilə əvəz etdikdə dəyişmir.

2) $A_1, \dots, A_n$ asılı olmayan hadisələr olarsa, onlardan götürülən ixtiyari r ($r < n$) sayda $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ hadisələri də asılı olmayacaqdır.

3) Asılı olmayan $A_1, \dots, A_n$ hadisələrindən heç olmasa birinin baş vermə ehtimalı

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - [1 - P(A_1)] \cdot [1 - P(A_n)]$$

kimi hesablanılır.

Ardıcıl təkrar sınaqlar

1. Bernulli düsturu və Bernulli teoremi.
2. Binomial paylanma üçün asimptotik düsturlar.
3. Muavr - Lapalasin integral teoreminin tətbiqləri

Bernulli düsturu və Bernulli teoremi

Tutaq ki, müəyyən şərtlər kompleksi daxilində ardıcıl sınaqlar aparılır. Əgər hər bir sınağın nəticəsi digər sınağın nəticəsinə təsir etmirsə, onda belə sınaqlara asılı olmayan sınaqlar deyilir. Aparılan asılı olmayan hər sınağın nəticəsi “uğurlu” və ya “uğursuz” ola bilər, yəni gözlənilən təsadüfi A hadisəsi baş verə, yaxud baş verməyə bilər. Asılı olmayan sınağın iki nəticəsindən birinin baş verməsi halına Y . Bernulli baxmışdır və onu Bernulli sxemi adlandırırlar. **Tərif.** Eyni bir sınağın təkrarından ibarət sınaqlar aşağıdakı iki şərti ödədikdə, Bernulli sınaqları adlanır:

- a) sınaqlar asılı olmayandılar;
- b) hər bir sınağın yalnız iki nəticəsi vardır və bu nəticələrin ehtimalı bütün sınaqlar üçün eynidir;
- c) Bernulli sınağının nəticələrindən birini şərti olaraq “+”, digərini isə “-” adlandırmaq.

Tutaq ki, n sayda asılı olmayan sınaq aparılır və hər bir sınaqda A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı sabit p ədədinə, baş verməməsi ehtimalı isə $q=1-p$ ədədinə bərabərdir. i -ci sınağın nəticəsini $B_i, i = 1, 2, \dots, n$ ilə işarə edək. Bu ardıcılığın m hissəsində A hadisəsi, qalan $n-m$ hissəsində isə $\bar{A}$ olarsa, belə ardıcılıqların sayı C_n^m olar. Sınaqlar asılı olmadıqlarından onların nəticələri – hadisələr də asılı deyillər və ehtimalların vurulması qaydasına görə belə

ardıcılığın ehtimalı $p^m q^{n-m}$ ədədinə bərabər olar. Onda uyuşmayan (birgə olmayan) hadisələrin ehtimalları haqqında qaydaya görə m -qədər A -dan və $n-m$ qədər $\bar{A}$ -dən ibarət ardıcılıqların ehtimalları cəmi $p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ olar. Aparılan n Bernulli sınağında “+” nəticənin baş vermə sayını s_n ilə işarə edək. Beləliklə aşağıdakı nəticəyə gəlirik:

Bernulli düsturu. Tutaq ki, aparılan n Bernulli sınağında müsbət nəticənin baş vermə sayı s_n -dir. Hər sınaqda müsbət nəticənin baş vermə ehtimalı isə p -dir. Bu halda

$$p_n(m) = P(s_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m} (q = 1 - p, m = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$p_n(m)$ ehtimallarına binomial paylanma deyilir. Bu paylanma $m=0, 1, \dots, n$ ədədləri ilə $p_n(m)$ -lər arasında uyğunluq şəklində verilir. (1) ehtimalı $(p x + q)^n$ binomunun ayrılışında x^k -nin əmsalına bərabər olduğuna görə, ona binomial ehtimal deyilirlər. Binomial ehtimalların çoxluğu binomial paylanma, n və p sabitləri isə onun parametrləri adlanır.

Məsələ 1. Hər 100 yeni doğulan uşaqlardan orta hesabla 51-i oğlan, 49-u isə qız olur. Bir ailədə 3 uşaq var. Onlardan heç olmasa ikisinin oğlan olma ehtimalını tapın.

Həlli. Bu məsələdə, $n=3$, $p=0.51$, $q=0.49$ – dur. Bernulli düsturuna əsasən axtarılan ehtimal $P(s_n \geq 2) = p_3(2) + p_3(3) = 3p^2q + p^3 = 3 \times (0.51)^2(0.49) + (0.51)^3 = 0.515$ olacaqdır. Deməli, 3 uşaq 100 ailədən orta hesabla 515-də heç olmasa iki oğlan olacaqdır.

Binomial paylanmanın xassələri:

$$1) \quad p_n(m) > 0, \quad \sum_{m=0}^n p_n(m) = 1$$

Bu münasibətin doğruluğunu iki mülahizədən almaq olar. Birincisi, n ardıcıl asılı olmayan sınaqlar zamanı hadisələr ardıcılıqları tam sistem təşkil

edir və onlardan hər hansının baş verməsi yəqin hadisədir.İkincisi, axırını münasibətin doğruluğu

$$1^n = (p + q)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=0}^n p(m)$$

binomunun açılışından alınır.

2) $p_n(m)$ ehtimalı m -dən asılı funksiya kimi özünün ən böyük qiymətini $(n+1)p$ ədədi kəsr olduqda $(n+1)p$ ədədinin tam qiymətində, tam ədəd olduqda isə $m=(n+1)p$ və $m=(n+1)p-1$ qiymətlərində alır.

Tərif. $p_n(m)$ ehtimal özünün ən böyük qiymətini $m = m_0$ qiymətində alarsa, onda m_0 ədədi binomial paylanmanın modası, $p_n(m_0)$ isə maksimal ehtimal adlanır.

Məsələ 2 . 729 tələbəsi olan fakültədə nə qədər tələbənin yanvarın birində anadan olması ehtimalı ən böyükdür.

Həlli. (702; 1/365) parametrlili binomial paylanmadan istifadə edə bilərik.

$$(n+1)p=(729+1)*1/365=2$$

olduğuna görə, ən böyük ehtimallı ədəd 2 və 1, maksimal ehtimal isə

$$p_{729}(2) = p_{729}(1) = C_{729}^2 \left(\frac{1}{365} \right)^2 \left(\frac{364}{365} \right)^{727}$$

olacaqdır.

4)n sayda Bernulli sınaqlarında müsbət nəticənin r -dən az sayda baş

verməsiehtimalını $B_n(r) = \sum_{m=0}^{r-1} p_n(m)$ kimi hesablamaq olar.

Binomial paylanma üçün asimptotik düsturlar

Ehtimal nəzəriyyəsində $p_n(m)$ ehtimalı üçün müxtəlif asimptotik düsturlar verilmişdir.Burada Puasson və Muavr-Laplas düsturları ilə tanış olacağıq.

Puasson teormi. $n \rightarrow \infty, np \rightarrow \lambda \Rightarrow C_n^k p^k q^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ Bu münasibət hər bir k-ya görə müntəzəm ödənilir. İsbatı. Bu münasibət aşağıdakı bərabərliklərdən alınır:

$$C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \times \frac{(np)^k}{k!} (1-p)^{n-k}$$

$$\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} = 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \rightarrow 1$$

$$\lim (1-p)^{n-k} = \lim (1-p)^n = \lim \left[(1-p)^{\frac{1}{p}} \right]^{np} = e^{-\lambda}$$

$$\lim \frac{(np)^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}$$

Teoremə əsasən n kifayət qədər böyük, p isə kifayət qədər kiçik olduqda $p_n(k) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$ asimptotik bərabərliyi doğrudur. Bu düsturdan adətən $p \leq 0.1, npq \leq 9$ olduqda istifadə edilir.

n-in kifayət qədər böyük qiymətlərində Bernulli düsturundan istifadə texniki cəhətdən çətinlik yaradır. Laplasın lokal teoremi $p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ ehtimalları hesablamaq üçün asimptotik yaxınlaşma düsturudur. ($\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1, x \rightarrow \infty$ olduqda, deyirlər ki, $f(x)$ $\varphi(x)$ -n asimptotik yaxınlaşmasıdır). Qeyd edək ki, xüsusi halda $p=1/2$ üçün asimptotik düstur 1730-cu ildə Muavr tərəfindən alınmışdır. 1783 cü ildə isə Laplas bu düsturu istənilən $0 < p < 1$ üçün isbat etmişdir.

Teorem. Əgər asılı olmayan sınaqlar zamanı müsbət nəticənin baş verməsi ehtimalı, p sabitdirsə, onda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{npq} p_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

doğrudur, burada $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ və x müəyyən sonlu parçada dəyişdikdə bütün $k=0,1,\dots,n$ qiymətlərində yığılma müntəzəmdir.

Teoremə əsasən aparılan n sınaqda hadisənin m dəfə baş verməsi ehtimalı təqribən

$$p_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

bərabərliyi ilə təyin edilir.

x -in müsbət qiymətləri üçün $\varphi(x)$ funksiyasının qiymətləri cədvəli işlənib hazırlanmışdır. $\varphi(x)$ tək funksiya olduğu üçün x -in mənfi qiymətləri üçün də həmin cədvəldən istifadə etmək olar.

Məsələ 3. Qeyri standart detalın hazırlanması ehtimalı 0.004-dür. 1000 detaldan beşinin qeyri standart olması hadisəsinin ehtimalını təyin edin.

Həlli. Bu məsələdə, $n = 1000$, $p = 0.004$, $\lambda = np = 1000 \times 0.004 = 4$

Puasson düsturuna əsasən

$$p_{1000}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0.1563$$

İndi isə bu ehtimalı Muavr-Laplas düsturuna əsasən hesablayaq:

$$x = \frac{5 - 1000 \times 0.004}{\sqrt{1000 \times 0.004 \times 0.996}} \approx \frac{1}{1.9960} \approx 0.501$$

Muavr-Laplas düsturuna əsasən axtarılan ehtimalın təqribi qiyməti

$$p_{1000}(5) \approx f(0.501) \times \frac{1}{1.9960} \approx \frac{0.3519}{1.9960} \approx 0.1763$$

Bu ehtimalın Bernulli düsturuna əsasən tapılmış dəqiq qiyməti isə

$$p_{1000}(5) = C_{1000}^5 \times 0.004 \times 0.996^{995} \approx 0.1552$$

olar.

Beləliklə, $p_{1000}(5)$ ehtimalının Muavr-Laplasın təqribi düsturuna əsasən hesablanmış nisbi xətası $\frac{0.1763 - 0.1552}{0.1552} \approx 0.136$ və ya 13.6%, Puasson düsturuna əsasən isə $\frac{0.1563 - 0.1552}{0.1552} \approx 0.007$ və ya 0.7% təşkil edir.

Aparılan n sayda Bernulli sınağında “ müsbət” nəticənin baş vermə sayının müəyyən parçada yerləşməsi ehtimalını hesablamaq üçün asimptotik düsturu Muavr – Laplasın inteqral troremindən almaq olar.

Teorem.

$$P\left(a \leq \frac{s_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

münasibəti müntəzəm ödənilir.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

funksiyasına Laplas funksiyası deyilir.

Laplas funksiyasının müsbət x -lər üçün qiymətləri cədvəli işlənib hazırlanmışdır. Bu funksiya tək funksiya, yəni

$$\Phi(x) = -\Phi(-x)$$

şərti ödənilir. Bu isə o deməkdir ki, $\Phi(x)$ funksiyasının mənfi x -lər üçün qiymətlərini axırıncı düsturun köməyi ilə hesablamaq olar.

Cədvəldə $\Phi(x)$ funksiyasının qiymətləri $x < 5$ üçün verilmişdir. $x > 5$ olduqda $\Phi(x) = 0.5$ qəbul etmək olar.

Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən istifadə etmək üçün

$P\left(a \leq \frac{s_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ münasibətini aşağıdakı kimi yazaq:

$$P\left(a \leq \frac{s_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Qeyd edək ki, $\{m_1 \leq m \leq m_2\}$ hadisəsi $\left\{ \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} \right\}$ hadisəsi ilə

eynigüclü hadisədir. Ona görə də asılı olmayan n sınaqda hadisənin ən azı m_1 , ən çoxu isə m_2 dəfə başverməsi ehtimalını təqribən $p_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ bərabərliyi ilə hesablamaq olar.

$$\text{Burada } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Məsələ 4. Sığorta şirkətində 10000 avtomobil sığorta edilmişdir. Qəza nəticəsində istənilən avtomobilin sıradan çıxma ehtimalı 0.006-dır. Sığorta edilmiş hər bir avtomobilin sahibi ildə 12 manat sığorta haqqı ödəyir və avtomobilin sıradan çıxması nəticəsində şirkətdən 1000 manat alır. İlin sonunda a) şirkətin bankrot olması hadisəsinin, b) ən azı 40000 manat mənfəət əldə etməsi ehtimalını təyin edin.

Həlli. a) Tutaq ki, il ərzində n sayda avtomobil qəza nəticəsində sıradan çıxmışdır. Şirkətin bankrot olması üçün onun avtomobil sahiblərinə ödədiyi məbləğ il ərzində ödənilmiş sığorta haqqından çox olmalıdır. Bu isə o deməkdir ki,

$$10000n > (10000 - n) \times 12$$

bərabərsizliyi ödənilməlidir. Bu bərabərsizliyi n -ə görə həll etsək və n -in tam ədəd olduğunu nəzərə alsaq $n > 119$ olduğunu alırıq.

Beləliklə, şirkətin bankrot olması üçün il ərzində ən azı 120 avtomobil qəza nəticəsində sıradan çıxmalıdır. Bu isə il ərzində 120, yaxud 121, ..., yaxud da 10000 avtomobilin sıradan çıxması deməkdir. Beləliklə, baxılan halda $n = 10000$, $p = 0.006$, $q = 0.994$, $k_1 = 120$, $k_2 = 10000$

$n = 10000$, $p = 0.006$, $q = 0.994$, $k_1 = 13$, $k_2 = 10000$ qəbul etmək lazımdır.

$$x_1 = \frac{120 - 10000 \times 0.006}{\sqrt{10000 \times 0.006 \times 0.994}} \approx 7.769$$

$$x_2 = \frac{10000 - 10000 \times 0.006}{\sqrt{10000 \times 0.006 \times 0.994}} \approx 1287.116$$

Bu halda axtarılan ehtimal $\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1287.116) - \Phi(7.769) \approx 0.5 - 0.5 = 0$

b) Sığorta şirkətinin il ərzində 40000 manat mənfəət əldə etməsi üçün

$$(10000 - n) \times 12 - 1000n > 40000$$

bərabərsizliyi ödənilməlidir. Buradan isə $n < 79$ olduğunu alırıq.

$$x_1 = \frac{79 - 10000 \times 0.006 \times 0.994}{\sqrt{10000 \times 0.006 \times 0.994}} \approx 2.460$$

$$x_2 = \frac{10000 - 10000 \times 0.006}{\sqrt{10000 \times 0.006 \times 0.994}} \approx 1287.1162$$

Bu halda $\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1287.1162) - \Phi(2.460) \approx 0.5 - 0.4931 = 0.0069$ ədədi ən azı 79 avtomobilin sıradan çıxması hadisəsinin ehtimalıdır. Ən çoxu 78 avtomobil sıradan şıxdıqda şirkət ən azı 40000 manat mənfəət əldə edir. Bu hadisələr qarşılıqlı hadisələr olduğu üçün axtarılan ehtimal $1 - 0.0069 = 0.9931$ olar.

Muavr - Laplasın integral teoreminin tətbiqləri

Asılı olmayan n sayda sınaqların hər birində A hadisəsinin baş vermə ehtimalı p ədədinə bərabərdir.

Muavr – Laplasın integral teoremini $\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon$ bərabərsizliyinin ehtimalının qiymətləndirməsinə tətbiq edək.

Bu məqsədlə $P\left(\left| \frac{\mu}{n} - p \right| \leq \alpha\right) = \beta$ işarə edək. n in böyük qiymətlərində β ehtimalını tapmaq olar:

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon\right) = P\left\{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} < m < \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

Deməli, Muavr – Laplasın integral teoreminə görə

$$P\left\{\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

Beləliklə aşağıdakı teoremin doğruluğunu alırıq.

Bernulli teoremi. Tutaq ki, aparılan n Bernulli sınaqlarında müsbət nəticənin baş vermə sayı s_n , hər bir sınaqda müsbət nəticənin baş vermə ehtimalı isə p -dir. Bu halda

$$\lim P\left\{\left| \frac{s_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

bərabərliyi doğrudur.

A hadisəsinin p baş vermə ehtimalına əsasən əvvəcdən onun həqiqətən baş verməsi və ya baş verməməsi haqqında qəti fikir söyləyə bilmərik. Lakin külli miqdarda təcrübələrdə aşağıdakı faktın doğruluğu aşkar edilmişdir: ehtimalı vahidə yaxın hadisələr sanki hökmən baş verir, ehtimalı sıfıra yaxın olan hadisələr isə çox nadir hallarda baş verir. Birinci növ hadisələri praktiki yəqin, ikinciləri isə praktiki mümkün olmayan hesab edirlər. Hadisənin praktiki mümkün olmaması üçün onun ehtimalı nə dərəcədə kiçik olmalıdır? Bu suala birqiymətli cavab vermək olmaz, çünki burada baxılan hadisənin nə dərəcədə əhəmiyyətli olması nəzərə alınmalıdır. Məsələn, riyazi statistikada ehtimalı 0.001 və 0.005 sərhədləri arasında yerləşən hadisələr praktiki mümkün olmayan hesab edilir.

Bernulli teoremi təsdiq edir ki, külli miqdarda sınaqların seriyasında hadisələrin tezliyi ilə onun ehtimalı arasında fərqin istənilən qədər kiçik olması praktiki yəqin hadisədir. Beləliklə, bu teorem ehtimalın statistik tərifini əsaslandırır.

Bernulli teoremi 1713-cü ildə müəllifin ölümündən 8 il sonra latın dilində nəşr edilmişdir. Mütəxəssislər bu teoremi ehtimal nəzəriyyəsinin inkişafında mühüm kəşf kimi qiymətləndirmişlər.

Akademik B.V. Qnedenko: “Bernulli teoremini mübaliğəsiz ehtimal nəzəriyyəsinin bir elm kimi varlığının başlanğıcı hesab etmək olar”.

Akademik A.A. Markov: Böyük ədədlər qanununun başlanğıcını qoyan teorem, birinci dəfə Bernullinin işində çap və isbat edilmişdir. Y. Bernulli özünün teoremini dəqiq söyləmiş və tam ciddiliklə isbat etmişdir

1.A hadisəsinin baş vermə tezliyinin p ehtimalından kənarlaşmasının α ədədini aşmaması hadisəsinin ehtimalını tapın. Bu ehtimal aşağıdakı kimi hesablanır:

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leq \alpha\right\} = P\left\{-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq \alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\text{Beləliklə, } P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leq \alpha\right\} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Axırıncı bərabərlikdə dörd n, α, p, β parametr var. Onlardan üçü məlum olduqda dördüncüsünü tapmaq olar.

Məsələ 5. Qeyri standart məmumatın hazırlanması ehtimalı 0.2-lir. Seçilmiş 625 məmumat içərisində yararlıların hissəsinin onun ehtimalından kənarlaşmasının mütləq qiymətcə 0.04-ü aşmaması ehtimalını tapın.

Həlli. Bu məsələdə, $n = 625, p = 0.8, q = 0.2, \varepsilon = 0.04$. $P\left(\left|\frac{s_n}{625} - 0.8\right| \leq 0.04\right)$ ehtimalını hesablamaq tələb olunur. Nisbi tezliyin sabit ehtimaldan kənarlaşması düsturundan istifadə edək:

$$P\left(\left|\frac{s_n}{625} - 0.8\right| \leq 0.04\right) = 2\Phi\left(0.04\sqrt{\frac{625}{0.8 \times 0.2}}\right) = 2\Phi(2.5) =$$

$$2 \times 0.4938 = 0.9876$$

2. Tezliyin ehtimaldan kənarlaşmasının α ədədini aşmaması hadisəsinin verilmiş β ədədinədən kiçik olmaması üçün neçə sınaq aparılmalıdır?

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leq \alpha\right\} \geq \beta$$

İnteqral teoremə əsasən

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq \beta$$

olduğunu yaza bilərik. Deməli, $2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geq x_\beta$. Laplas funksiyaının qiymətləri cədvəlindən verilmiş α və β -ya görə n - tapırıq. Bunun üçün Laplas funksiyaının qiymətləri cədvəlindən $\Phi(x_\beta) = \frac{\beta}{2}$ şərtini ödəyən x_β ədədini tapırıq. Bu funksiya monoton artan olduğu üçün $\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}} \geq x_\beta$ olduğunu yaza bilərik. Buradan isə $n \geq pq \frac{x_\beta^2}{\alpha^2}$ olduğunu alırıq.

Məsələ 6. Qutudan neçə detal çıxarmaq lazımdır ki, keyfiyyətsiz detalların nisbi tezliyinin ehtimaldan kənarlaşmasının 0.01 –i aşmamasını 0.95 ehtimalla gözləmək mümkün olsun.

Həlli. Riyazi model olaraq Bernulli sxemini götürək və Müavr – Laplasın inteqral teoremindən istifadə edək.

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq 0.95$$

şərtini ödəyən a ədədinin tapılmasına gətirilir.

$$\Phi(x_\beta) = \frac{\beta}{2} = 0.475, \quad x_\beta = 1.96$$

$$n \geq pq \frac{x_\beta^2}{\alpha^2} = \frac{1}{4} \times \frac{1.96^2}{0.01^2} = 9604$$

3. Sınaqların sayı və β ehtimalı verildikdə $\left|\frac{\mu}{n} - p\right|$ mütləq qiymətinin mümkün sərhədlərini tapın. Başqa sözlə, β və n verildikdə α -nı tapmaq lazımdır.

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \alpha\right\} = \beta \text{ bərabərliyini ödəyən } \alpha \text{-nı}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \beta$$

münasibətindən tapırıq.

Məsələ 7. Texniki nəzarət şöbəsi təsadüfi seçilmiş 800 məmulatın standartlara uyğunluğunu yoxlayır. Məmulatın standart olması ehtimalı 0.7-yə bərabərdir. 0.9625 ehtimalla standart məmulatların hissəsinin həddlərini təyin edin.

Həlli. Məlumdur ki,

$$P\left(\left|\frac{s_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Bu məsələdə $n = 800, p = 0.7, q = 0.3, P = 0.9625$

$$\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{800}{0.7 \times 0.3}}\right) = 0.9625$$

Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən $\Phi(x) = 0.9625$

oduqda $x = 2.08$ olduğunu alırıq. Beləliklə, $\varepsilon \sqrt{\frac{800}{0.21}} = 2.08$. Buradan isə $\varepsilon = 0.034$ olar.

Beləliklə, standart məmulatların hissəsinin $(0.266, 0.334)$ intervalında yerləşdiyini 0.9625 ehtimalla gözləmək olar.

Təsadüfi kəmiyyətlər və onların paylanma funksiyası

- 1. Təsadüfi kəmiyyət və onun paylanma funksiyası**
- 2. Paylanma funksiyasının xassələri**
- 3. Diskret paylanmalar**
- 4. Kəsilməz paylanmalar**

Təsadüfi kəmiyyət və onun paylanma funksiyası

Təsadüfi kəmiyyət anlayışı ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir. Təsadüfi kəmiyyət, baxılan hadisəni kəmiyyətcə xarakterizə edən və təsadüfi amillərin təsiri ilə bu və ya digər şəkildə müxtəlif qiymətlər ala bilən kəmiyyətlərdir. Təsadüfi kəmiyyətin hansı qiyməti alacağını qabaqcadan qəti demək mümkün deyildir. Onun hər bir sınaqda aldığı qiymətlər müxtəlif səbəb və təsadüflərdən asılı olaraq dəyişir. Təsadüfi kəmiyyətləri latın əlifbasının son iri X, Y, Z,... hərfləri və ya yunan əlifbasının kiçik $\mu, \xi, \eta, \dots$ hərfləri, onların ala biləcəyi qiymətləri isə uyğun olaraq kiçik $x, y, z, \dots$ hərfləri ilə işarə edirlər.

Əgər təsadüfi kəmiyyət sonlu və ya hesabi sayda izolə edilmiş $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ qiymətlərini ala bilirsə, ona diskret təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Təsadüfi kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlər hər hansı sonlu və ya sonsuz intervalı təşkil edirsə, ona kəsilməz təsadüfi kəmiyyət deyilir. Təsadüfi kəmiyyətin verilməsi üçün onun ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu və həm də bu qiymətləri hansı ehtimalla aldığı göstərməlidir. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasını təyin etmək üçün əvvəlcə təsadüfi kəmiyyətin ciddi-riəzi tərifini vermək lazımdır.

$\Omega=\{\omega\}$ elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş və istənilən həqiqi x ədədi üçün

$$\Omega_x = \{\omega | X(\omega) < x\} \subset F \quad (1)$$

şərtini ödəyən həqiqi $X=X(\omega)$ funksiyasına təsadüfi kəmiyyət deyilir.

İstənilən həqiqi $x(-\infty < x < \infty)$ ədədi üçün Ω_x çoxluğu σ - cəbr olan F sisteminə daxil olduğundan, onun ehtimalı təyin olunmuşdur. Bu ehtimala, yəni təsadüfi X kəmiyyətinin x -dən kiçik qiymətlər alması hadisəsinin ehtimalına həmin təsadüfi X kəmiyyətinin paylanma funksiyası deyilir və

$$F(x) = |F_x|(x) = |P(X < x)| = P(X(\omega) < x) \quad (2)$$

ilə işarə edilir.

$\{X \geq x\}$ hadisəsinin ehtimalı (2) bərabərliyinə əsasən

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x) \quad (3)$$

bərabərliyi ilə hesablanır. Bundan başqa, $x_1 < x_2$ olduqda $\{X < x_1\}$ və $\{x_1 \leq X < x_2\}$ hadisələri uyuşmayanlardır və

$$\{X < x_2\} = \{X < x_1\} + \{x_1 \leq X < x_2\}$$

bərabərliyi ödənilir. Onda ehtimalların toplanma aksiomuna görə

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2)$$

və ya

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1) \quad (4)$$

olar. Yəni $\{x_1 \leq X < x_2\}$ hadisəsinin ehtimalının paylanma funksiyası vasitəsilə (4) bərabərliyi hesablanır.

Paylanma funksiyasının xassələri

Paylanma funksiyasının bir sıra xassələri vardır:

1. Paylanma funksiyası azalmayıdır. Doğrudan da hadisənin ehtimalı mənfi ədəd olmadığından istənilən $x_1 < x_2$ ədədləri üçün

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad (1)$$

bərabərliyindən

$$F(x_2) - F(x_1) \geq 0, \quad F(x_2) \geq F(x_1) \quad (2) \quad \text{alınır.}$$

2. Paylanma funksiyası üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$F(+\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = 1 \quad (3)$$

$$F(-\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = 0 \quad (4)$$

3. Paylanma funksiyası istənilən nöqtədə soldan kəsilməyəndir, yəni istənilən x nöqtəsində $F(x-0) = f(x)$ (5) bərabərliyi ödənilir.

Nəticə: Həqiqi dəyişənli $f(x)$ funksiyası

$$f(x) \geq 0 (-\infty < x < +\infty), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (6)$$

şərtlərini ödədikdə,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (7)$$

funksiyası paylanma funksiyasıdır.

Diskret paylanmalar

Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri ilə onlara uyğun ehtimallar arasında əlaqə yaradan hər bir münasibətə təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu deyilir. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunları müxtəlif formalarda olsa da, onların hamısından paylanma funksiyasını almaq həmişə mümkün olmalıdır. Təsadüfi kəmiyyətin ehtimalının paylanma qanunu bir sıra hallarda daha aydın və əlverişli şəkillərdə verilir. Bunların 2 əsas növü vardır. Fərz edək ki, diskret təsadüfi X kəmiyyətin aldığı sonlu və ya hesabi sayda $x_1, \dots, x_n$ qiymətləri və bu qiymətlərin alma ehtimalları göstərilmişdir:

$$P(X=x_k) = P_k \geq 0, \quad k=1, 2, \dots, n, \dots \quad (1)$$

Burada cüt-cüt uyuşmayan $\{X=x_1\}, \{X=x_2\}, \dots, \{X=x_n\}, \dots$ (2)

hadisələri tam qrup təşkil etdiyindən

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \quad (3)$$

şərti ödənilir. Diskret təsadüfi X kəmiyyətin aldığı $x_1, \dots, x_n$ qiymətlərinin və bu qiymətləri almasının $P(X = x_k) = p_k$ ehtimallrının göstərilməsi onun paylanma qanununu təyin edir. Paylanma qanununun cədvəli aşağıdakı kimidir. Bu cədvələ diskret təsadüfi kəmiyyətin ehtimalının paylanma cədvəli deyilir.

X-in mümkün qiymətləri	x_1	x_2	...	x_n	...
qiymətləri alma ehtimalları	p_1	p_2	...	p_n	...

Diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu verildikdə onun paylanma funksiyası

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_k < x} p_k \quad (4)$$

kimi tapılır.

Diskret paylanmaların növləri

Ehtimal nəzəriyyəsində ən çox istifadə olunan diskret paylanmalar aşağıdakılardır:

1. Binomial paylanma
2. Puasson paylanma
3. Həndəsi paylanma
4. Hiperhəndəsi paylanma

Binomial paylanma: X təsadüfi kəmiyyəti $m=0,1,2,\dots,n$ mümkün qiymətlərini

$$P(X=m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad 0 < p < 1 \quad (1)$$

ehtimalı ilə aldıqda, ona binomial qanunla paylanmış diskret təsadüfi kəmiyyət deyilir. Burada n və p ədədləri binomial paylanmanın parametrləridir.

Puasson paylanması: X təsadüfi kəmiyyəti tam $m=0,1,2,\dots,n$ mümkün qiymətlərini $P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$ (2) ehtimalı ilə aldıqda, ona λ parametrlə Puasson qanunu ilə paylanmış diskret təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Həndəsi paylanma: X təsadüfi kəmiyyəti $m=0,1,2,\dots,n$ mümkün qiymətlərini $P(X=m)=p(1-p)^m$, $0 < p < 1$ (3) ehtimalları ilə aldıqda, ona p parametrlə həndəsi qanunla paylanmış diskret təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Hiperhəndəsi paylanma: X təsadüfi kəmiyyəti $m=0,1,2,\dots, \min(n,M)$ mümkün qiymətlərini

$$P(X = m) = \frac{C_m^n C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad (4)$$

ehtimalı ilə aldıqda, ona hiperhəndəsi qanunla paylanmış diskret təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Kəsilməz paylanmalar

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin ehtimalının paylanması paylanma funksiyası vasitəsilə təyin edilir. Lakin elə kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər vardır ki, onların $F(x)$ paylanma funksiyası, müəyyən xassəsi olan digər bir

$$p(t) \geq 0, \quad (-\infty < t < +\infty)$$

funksiyası vasitəsilə

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt \quad (1)$$

kimi sadə şəkildə göstərilir. Paylanma funksiyası (1) şəklində göstərilə bilən X təsadüfi kəmiyyətinə mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyət, $p(t)=p_x(t)$

funksiyasına isə onun ehtimalının paylanma sıxlığı və ya sıxlıq funksiyası deyilir.

Sıxlıq funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır.

1. $P(t) \geq 0, \quad -\infty < t < +\infty$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1$
3. $p(t)$ funksiyası $t=x$ nöqtəsində kəsilməz olduqda

$$F'(x) = p(x) \quad (2)$$

bərabərliyi doğrudur.

Ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan kəsilməz paylanmalar aşağıdakılardır:

1. Normal paylanma
2. Üstlü paylanma
3. Müntəzəm paylanma.

Normal paylanma: X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \sigma > 0 \quad (3)$$

şəklində olduqda, ona normal qanunla və ya Qaus qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Üstlü paylanma: X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

olduqda ona üstlü qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir. α ədədi üstlü paylanmanın parametri adlanır. Bu halda, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{olduqda} \quad (5)$$

olar.

Müntəzəm paylanma: X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b], \text{ } a < b \text{ olduqda} \\ 0, & x \notin [a; b] \text{ olduqda} \end{cases} \quad (6)$$

olduqda ona müntəzəm paylanan kəsilməz təsadüfi kəmiyyət deyilir. A və b sabitləri müntəzəm paylanmanın parametrləri adlanır. Bu paylanma üçün paylanma funksiyası aşağıdakı kimi tapılır:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases} \quad (7)$$

Çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətlər

- 1. Təsadüfi vektor (çoxölçülü təsadüfi kəmiyyət) anlayışı.**
- 2. Təsadüfi vektorun paylanma və sıxlıq funksiyası**
- 3. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər.**
- 4. İki ölçülü paylanma funksiyasının xassələri.**

Çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətlər

Eyni bir elementar hadisələr fəzasında iki və daha çox təsadüfi kəmiyyət təyin edilə bilər. Belə zərurət obyekt bir neçə təsadüfi parametrlər ilə xarakterizə edildikdə yaranır. Məsələn, təsadüfi seçilmiş bir ailənin xərclərin quruluşunun ehtimal (stoxastik) modelləşdirilməsində ərzaq , ayaqqabıya, paltara , kommunal xərclərə, nəqliyyata, mədəni tələbata və s. xərclər eyni bir elementar hadisələr fəzasında təyin edilmiş təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Tutaq ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ eyni bir Ω elementar hadisələr fəzasında təyin edilmiş təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu təsadüfi kəmiyyətlərə $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ n -ölçülü vektorunun kordinatları kimi baxmaq olar. Beləliklə, hər bir ω elementar hadisəsinə n sayda təsadüfi kəmiyyətin nizamlanmış $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ yığımını (n ölçülü təsadüfi vektorunu) qarşı qoymaq olar.

Tərif 1. Kordinatları eyni Ω elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ vektoruna n -ölçülü təsadüfi vektor (n - ölçülü təsadüfi kəmiyyət) deyilir.

Bu təsadüfi vektor Ω elementar hadisələr fəzasında təyin olunub və onun qiymətlər oblastı R^n -dir.

Təsadüfi vektorun paylanma və sıxlıq funksiyası

Tərif. $F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$ funksiyasına n -ölçülü paylanma funksiyası və yaxud $X_1, \dots, X_n$ kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası deyilir.

Bu funksiya bütün R^n fəzasında təyin olunub. $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ vektoruna R^n fəzasının nöqtəsi kimi baxdıqda, onun n -ölçülü paylanma funksiyası $(x_1, \dots, x_n)$ nöqtəsinin $(-\infty, x)_n = (t_1 \leq x_1, \dots, t_n \leq x_n)$ n -ölçülü intervalına düşmə ehtimalı olur.

Təsadüfi vektorun paylanma funksiyası onun paylanma qanununu təyin edir.

Təsadüfi vektorun mümkün qiymətlər çoxluğu sonlu və yaxud hesabi çoxluq olduqda ona diskret təsadüfi vektor deyilir. Bu halda

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

Burada, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ n -ölçülü ədədi vektordur.

Diskret təsadüfi vektor mümkün qiymətlərinin - $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorlarının və $p_1 = P(X = x_1), p_2 = P(X = x_2), \dots, p_n = P(X = x_n)$ ehtimallarının verilməsi ilə birqiymətli təyin edilir.

Tərif . $F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$ funksiyası mütləq kəsilməz, yəni

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

olduqda, $(x_1, \dots, x_n)$ vektoruna kəsilməz vektor, $f(x_1, \dots, x_n)$ - nə isə onun sıxlıq funksiyası və yaxud ehtimalların paylanma sıxlığı deyilir.

Sıxlıq funksiyası paylanma funksiyası ilə yanaşı n -ölçülü təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununu təyin edir.

Diskret təsadüfi kəmiyyətlər üçün $A \subset R^n$ n-ölçülü fəzasının hər hansı altçoxlğu olduqda $P(X \in A)$ ehtimalı $P(X = x_i), x_i \in A$ ehtimallarının cəminə bərabərdir:

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} P(X = x_i)$$

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər üçün $\{X \in A\} \in S$ olduqda $P(X \in A)$ ehtimalı n-ölçülü sıxlıq funksiyasının A çoxluğu üzrə n-ölçülü integralına bərabərdir:

$$P(X \in A) = \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Sıxlıq funksiyasının xassələri.

$$1) f(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \int_{R^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

2) $f(x_1, \dots, x_n)$ sıxlıq funksiyasının $(x_1, \dots, x_n)$ kəsilməyənlik nöqtələrində

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər

İstənilən A və B çoxluqları üçün $\{\xi_1 \in A\}$ və $\{\xi_2 \in B\}$ hadisələri asılı olmadıqda, yəni $P(\xi_1 \in A, \xi_2 \in B) = P(\xi_1 \in A) \cdot P(\xi_2 \in B)$ (1) bərabərliyi ödənildikdə ξ_1, ξ_2 kəmiyyətlərinə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər deyilir. Təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmaması şərtini başqa şəkildə də yazmaq olar. Doğrudan da ξ_1, ξ_2 kəmiyyətləri asılı olmadıqda istənilən x_1 və x_2 həqiqi ədədləri üçün $A = \{\xi_1 < x_1\}$ və $B = \{\xi_2 < x_2\}$ hadisələri də asılı olmaz. Onda (1) bərabərliyinə görə $P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2) = P(\xi_1 < x_1) \cdot P(\xi_2 < x_2)$

və ya
$$F(x_1, x_2) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \quad (2)$$

alınır. Deməli, asılı olmayan kəmiyyətlərin birgə paylanma funksiyası onların paylanma funksiyalarının hasilinə bərabərdir. Bu təklifin tərsi də doğrudur:

istənilən x_1 və x_2 üçün (2) bərabərliyi ödənildikdə ξ_1 , və ξ_2 kəmiyyətləri asılı olmur.

Teorem. $P(t_1, t_2)$, $P_{\xi_1}(t_1)$, $P_{\xi_2}(t_2)$ funksiyalarının kəsilməz olduqları bütün nöqtələrdə $P(t_1, t_2) = P_{\xi_1}(t_1) \cdot P_{\xi_2}(t_2)$ (3) bərabərliyinin ödənilməsi ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün zəruri və kafi şərtədir.

Teorem. Tutaq ki, ikiölçülü (ξ_1, ξ_2) diskret təsadüfi kəmiyyətinin paylanması

$$P(\xi_1 = u_1^{(i)}, \xi_2 = u_2^{(j)}) = P_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i,j=1}^{\infty} P_{ij} = 1 \quad (4)$$

şəklində verilmişdir. Onda istənilən i, j ədədləri üçün

$$P_{ij} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} P_{ij} \right) \quad (5)$$

bərabərliyinin ödənilməsi ξ_1, ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün zəruri və kafi şərtədir.

İki ölçülü paylanma funksiyasının xassələri

1. Paylanma funksiyasının qiymətlər oblastı $[0,1]$ parçasıdır:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1$$

Xassənin doğruluğu bilavasitə paylanma funksiyasının tərifindən alınır. Belə ki, ehtimal həmişə mənfi olmayan və vahidi aşmayan ədəddir.

2. $F(x, y)$ paylanma funksiyası hər bir argumentə görə azalmayan funksiyadır, yəni

$$x_1 < x_2 \text{ olduqda } F(x_1, y) \leq F(x_2, y);$$

$$y_1 < y_2 \text{ olduqda } F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$$

$F(x, y)$ - funksiyasının x argumentinə görə azalmayan olduğunu göstərək:

Qeyd edilmiş y üçün $(X < x_2, Y < y)$ hadisəsini uyuşmayan iki

$$(X < x_1, Y < y), (x_1 \leq X < x_2, Y < y)$$

hadisələrinin cəmi şəklində göstərmək olar. Ehtimalların toplama teoreminə əsasən

$$P(X < x_2, Y < y) = P(X < x_1, Y < y) + P(x_1 \leq X < x_2, Y < y)$$

$$\text{Buradan, } F(x_2, y) - F(x_1, y) = P(x_1 \leq X < x_2, Y < y) \geq 0$$

Beləliklə, $x_1 < x_2$ olduqda $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$ olar.

Bu xassə paylanma funksiyasının həndəsi mənasından daha aydın olur. Belə ki, $F(x, y)$, (X, Y) təsadüfi vektorunun təpə nöqtəsi (x, y) olan kvadrantına düşməsi hadisəsinin ehtimalıdır. x -in artması ilə bu kvadrantın sağ sərhədi sağa hərəkət edir. Yəni, $x_1 < x_2$ olduqda təpə nöqtəsi (x_1, y) olan kvadrant təpə nöqtəsi (x_2, y) olan kvadranta daxildir. Ona görə də (X, Y) təsadüfi vektorunun təpə nöqtəsi (x_2, y) olan kvadranta düşməsi hadisəsinin ehtimalı, onun təpə nöqtəsi (x_1, y) olan kvadranta düşməsi hadisəsinin ehtimalından kiçik deyildir.

Eyni qayda ilə $F(x, y)$ funksiyasının ikinci argumentə görə də azalmayan olduğunu göstərmək olar.

3. Aşağıdakı limit münasibətləri doğrudur:

$$1) x \rightarrow -\infty \Rightarrow F(x, y) \rightarrow F(-\infty, y) = 0; y \rightarrow -\infty \Rightarrow F(x, -\infty) = 0$$

$$2) x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty \Rightarrow F(x, y) \rightarrow F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$3) x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty \Rightarrow F(x, y) \rightarrow F(\infty, \infty) = 1$$

$$4) x \rightarrow \infty \Rightarrow F(x, y) \rightarrow F(\infty, y) = F_Y(y) = F_2(y)$$

$$5) y \rightarrow \infty \Rightarrow F(x, y) \rightarrow F(x, \infty) = F_X(x) = F_1(x)$$

$(X < -\infty, Y < y)$ hadisəsi mümkün olmayan hadisədir. Ona görə də

$$F(-\infty, y) = P(X < -\infty, Y < y) = 0$$

$x \rightarrow -\infty$ olduqda təpə nöqtəsi (x, y) olan kvadrantın sağ sərhəddi sonsuz olaraq sola hərəkət edir və (X, Y) təsadüf vektorunun bu kvadranta düşməsi hadisəsinin ehtimalı sıfıra bərabər olur.

Eyni qayda ilə $Y \prec -\infty, (X \prec -\infty, Y \prec -\infty)$ hadisələri mümkün olmayan hadisələr olduğu üçün $F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$

$(Y \prec \infty)$ hadisəsi yəqin hadisədir və $(X \prec x, Y \prec \infty)$ hadisəsi $(X \prec x)$ hadisəsi ilə eynigüclüdür. Ona görə də

$$F(x, \infty) = P(X \prec x) = F_X(x) = F_1(x)$$

Eyni qayda ilə $F(\infty, y) = P(Y \prec y) = F_Y(y) = F_2(y)$

Təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları

- 1.Yerləşmə və səpələnmə xarakterisnikaları.**
- 2. Riyazi gözləmə, moda və median**
- 3.Orta xətti meyl, dispersiya, orta kvadratik meyl, variasiya əmsalı.**
- 4.Təsadüfə kəmiyyətlərin momentləri.**

Yerləşmə və səpələnmə xarakterisnikaları

Təsadüfə kəmiyyətlərin ehtimalının paylanma qanunu onun tam xarakteristikası olduğu məlumdur.Lakin bəzən ehtimalın paylanma qanunu məlum olmur, təsadüfə kəmiyyətin müəyyən ehtimal xassələrini nisbətən az və ya sadə məlumatlar vasitəsilə öyrənmək lazım gəlir.Təsadüfə kəmiyyətin belə sadə xassələri, onun ədədi xarakteristikaları adlanan bir neçə ədədlə ifadə olunur.

Təsadüfə kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları onu müəyyən dəqiqliklə kəmiyyətcə xarakterizə edir.Bu ədədi xarakteristikalar təsadüfə kəmiyyət haqqındakı bəzi ehtimal məsələlərini çox zaman qısa yolla həll etməyə və həm də həmin kəmiyyət haqqında yığcam və ətraflı məlumat almağa imkan verir.

Təsadüfə kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlərin ədəd oxunda necə paylandığını xarakterizə etmək üçün müxtəlif ədədi xarakteristikalardan (riyazi gözləmə, orta xətti meyl, dispersiya , orta kvadratik meyl, momentlər və s.) istifadə olunur.

Tərif .Təsadüfə kəmiyyətin yerləşmə xarakteristikası elə sabitə deyilir ki, bu kəmiyyətin bütün mümkün qiymətləri həmin sabit ətrafında qruplaşmış olsun.

Riyazi gözləmə, moda və median ən çox istifadə olunan yerləşmə xarakteristikalarıdır.

Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi , onun qiymətlərinin ədəd oxu üzərində yerləşmə xarakteristikalarından biridir. Qeyd etdiyimiz kimi, təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri onun riyazi gözləməsi ətrafında qruplaşır. Lakin bu qiymətlərin riyazi gözləmə ətrafında necə paylanmasını və ya səpələnməsini çox zaman bilmək tələb olunur.

Tərif . Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətlərinin onun riyazi gözləməsi ətrafında nə dərəcədə sıx səpələnməsinin ölçüsünü göstərən sabit ədədə bu kəmiyyətin səpələnmə xarakteristikası deyilir.

Bu xarakteristikalara orta xətti meyl, dispersiya, orta kvadratik meyl və variasiya əmsalı aiddir.

Riyazi gözləmə, moda və median

Təsadüfi kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlərin ədəd oxu üzərində necə paylandığını xarakterizə etmək üçün müxtəlif ədədi xarakteristikalardan (riyazi gözləmə, dispersiya, orta kvadratik meyl, momentlər və s.) istifadə olunur. Təsadüfi kəmiyyətlərin ən mühüm ədədi xarakteristikalarından biri riyazi gözləmədir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k \quad (1)$$

sırası mütləq yığılan olduqda, onun cəminə diskret təsadüfi X kəmiyyətinin riyazi gözləməsi deyilir və aşağıdakı kimi işarə olunur:

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k \quad (2)$$

Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinə onun orta qiyməti də deyilir. X təsadüfi kəmiyyəti $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini eyni $P = \frac{1}{n}$ ehtimalı ilə aldıqda onun riyazi gözləməsi üçün

$$M[X] = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

bərabərliyi alınır.

Ehtimalının paylanma sıxlığı $P(x)$ olan təsadüfi X kəmiyyətinin riyazi gözləməsi, mütləq yığılan

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx \quad (3)$$

inteqralına deyilir.

Təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləməsi sabit ədəddir.

Riyazi gözləmənin bir sıra ümumi xassələri vardır:

1. Sabitin riyazi gözləməsi özünə bərabərdir:

$$M[C] = C \quad (1)$$

2. Sabitin vuruğu riyazi gözləmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

$$M[CX] = CM[X] \quad (2)$$

3. İki təsadüfi kəmiyyətin cəminin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələrinin cəminə bərabərdir:

$$M[X + Y] = M[X] + M[Y] \quad (3)$$

Bu xassə istənilən sonlu sayda təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi üçün də doğrudur: $M[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = M[X_1] + M[X_2] + \dots + M[X_n]$ (4)

Nəticə 1. $Y=kX+b$ xətti funksiyası (təsadüfi kəmiyyət) üçün

$$M[Y] = kM[X] + b \quad (5)$$

bərabərliyi doğrudur.

Nəticə 2. İki təsadüfi kəmiyyətin fərqlərinin riyazi gözləməsi, onların riyazi gözləmələrinin fərqlinə bərabərdir:

$$M[X - Y] = M[X] - M[Y] \quad (6)$$

4. Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin hasilinin riyazi gözləməsi, onların riyazi gözləmələrinin hasilinə bərabərdir:

$$M[XY] = M[X]M[Y] \quad (7)$$

Bu xassə istənilən sonlu sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hasili üçün də doğrudur: $M[X_1 X_2 \dots X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \cdot \dots \cdot M[X_n]$ (8)

(8) bərabərliyi riyazi gözləmənin multiplikativlik xassəsi adlanır.

5. İstənilən X təsadüfi kəmiyyəti üçün

$$|M[X]| \leq M[|X|] \quad (9)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyət və $F(x)$ onun paylanma funksiyasıdır. Onda $F(x_M) \leq 0,5 \leq F(x_M + 0)$ (1) münasibətini ödəyən hər bir x_M nöqtəsinə x kəmiyyətinin medianı deyilir. Verilmiş təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi olmaya bilər, lakin hər bir təsadüfi kəmiyyətin heç olmasa bir medianı var. Doğrudan da, paylanma funksiyası 0-dan 1-ə kimi monoton artan olduğundan, elə x_M nöqtəsi vardır ki, funksiya bu nöqtədə $\frac{1}{2}$ qiymətindən keçir. $F(x)$ funksiyası bu nöqtə ətrafında kəsilməz olduqda x_M medianı yeganə olur, həmin nöqtənin müəyyən (α, β) ətrafında yerləşən bütün nöqtələrdə $F(x) = \frac{1}{2}$ bərabərliyi ödənildikdə isə bu ətrafın bütün nöqtələri median olar. Paylanma funksiyası kəsilməyən olduqda (1) münasibəti $F(x_M) = 0,5$ (2) bərabərliyinə çevrilir. Bu halda, X təsadüfi kəmiyyətinin medianı (2) bərabərliyini ödəyən yeganə x_M kökü olar.

(2) münasibətini $P(X < x_M) = P(X > x_M)$ (3) bərabərliyi şəklində yazmaq olar. (3) bərabərsizliyi göstərir ki, həndəsi olaraq median, sıxıq funksiyasının qrafiki ilə əhatə olunmuş sahəni yarıya bölən düz xətt nöqtələrinin absisidir (ş:1). Xüsusi halda, simmetrik paylanmış təsadüfi kəmiyyətin medianı onun riyazi gözləməsi ilə üst-üstə düşür. Paylanmanın (və ya təsadüfi kəmiyyətin) kvantili də mediana analogi olaraq təyin olunur.

$$F(x) = P(0 < P < 1)$$

tənliyinin kökünə P -tərtibli kvantil deyilir. $P=\frac{1}{2}$ tərtibli kvantil paylanmanın medianıdır. Tutaq ki, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası $P(x)$ -dir. Onda $P(x)$ funksiyasının hər bir x_m maksimum nöqtəsinə X kəmiyyətinin modası deyilir. Təsadüfi kəmiyyətin bir modası olduqda ona birmodalı, bir neçə modası olduqda isə ona çoxmodalı kəmiyyət deyilir.

Orta xətti meyl, dispersiya, orta kvadratik meyl, variasiya əmsalı

Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətlərinin onun riyazi gözləməsi ətrafında nə dərəcədə sıx səpələnməsinin ölçüsünü göstərən sabit ədədə bu kəmiyyətin səpələnmə xarakteristikası deyilir. Burada təsadüfi kəmiyyətin dispersiya və orta kvadratik meyl adlanan səpələnmə xarakteristikaları baxılır.

X təsadüfi kəmiyyətinin $M[X]$ riyazi gözləməsi sonlu ədəd olduqda

$$M[(X - M[X])^2]$$

ifadəsinə X kəmiyyətinin dispersiyası deyilir və $D[X]$ kimi işarə edilir:

$$D[X] = M[(X - M[X])^2] \quad (1)$$

Tərifiən aydındır ki, istənilən təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası mənfi olmayan ədəddir:

$$D[X] \geq 0$$

Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətlərinin riyazi gözləmə ətrafında səpələnməsinin xarakteristikalarından biri də orta kvadratik meylidir.

X təsadüfi kəmiyyəti dispersiyanın kvadrat kökünə həmin kəmiyyətin orta kvadratik meyli deyilir və

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} \quad (2)$$

ilə işarə edilir.

Riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə etməklə dispersiyanın aşağıdakı xassələrini isbat etmək olar.

1. Sabitin dispersiyası sıfıra bərabərdir:

$$D[C] = 0 \quad (1)$$

2. İstənilən C sabiti üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$D[CX] = C^2 D[X] \quad (2)$$

3. Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin cəminin dispersiyası onların dispersiyaları cəminə bərabərdir:

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y] \quad (3)$$

Bu xassə istənilən sonlu sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi üçün də doğrudur:

$$D[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = D[X_1] + D[X_2] + \dots + D[X_n] \quad (4)$$

Nəticə: Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyət üçün

$$D[X - Y] = D[X] + D[Y] \quad (5)$$

bərabərliyi doğrudur.

4. Asılı olmayan X və Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$D[XY] = M[X^2]M[Y^2] - (M[X])^2(M[Y])^2 \quad (6)$$

bərabərliyi doğrudur.

Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi $M[X]$ sonlu ədəddir. Onda $X_1 = X - M[X]$ fərqi təsadüfi kəmiyyət olar. Bu kəmiyyətə, yəni $X - M[X]$ fərqinə X kəmiyyətinin meyli,

$$X_2 = \frac{X - M[X]}{\sigma[X]} = \frac{X - M[X]}{\sqrt{D[X]}}$$

nisbətinə isə həmin kəmiyyətin normallaşdırılmış meyl deyilir.

Tərif . Dispersiyanın hesabi kvadrat kökünə orta kvadratik meyl deyilir.

$$\sigma = +\sqrt{DX}$$

Tərif . $v = \frac{\sigma}{EX} 100\%$ ədədinə təsadüfi kəmiyyətin variasiya əmsalı deyilir.

Tərifə görə, variasiya əmsalı orta kvadratik meylin riyazi gözləməyə faiz nisbətidir. Başqa sözlə o, σ -nın EX -in neçə faizi olduğunu göstərir.

Variasiya əmsalı, müxtəlif ölçü vahidləri ilə ifadə edilən bir neçə kəmiyyətin dəyişmə dərəcələrini müqayisə etməyə imkan verir.

TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTİN MOMENTLƏRİ

Təsadüf kəmiyyətin ala bildiyi qiymətləri və bu qiymətləri hansı ehtimalla aldığını göstərən paylanma funksiyası onun ən mükəmməl xarakteristikasıdır. Paylanma funksiyası isə bəzən bir və ya bir neçə parametrdən asılı olur. Məsələn, normal paylanma iki parametrdən asılıdır. Paylanma funksiyasının parametrləri, bir qayda olaraq, təsadüfi kəmiyyətin mühüm ədədi xarakteristikaları olan müxtəlif tərtibli momentlər vasitəsilə ifadə olunur. Təsadüf kəmiyyətin momentlərini hesablamaqla onun paylanma funksiyasını təyin etmək mümkün olur.

Tərif .
$$E(X - c)^n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^n dF(x)$$

ədədinə x təsadüfi kəmiyyətinin c ədədinə görə n -tərtibli momenti deyilir.

Diskret və kəsilməz təsadüf kəmiyyətlər üçün bu düsturu uyğun olaraq

$$E(x - c)^n = \sum_i (x_i - c)^n p_i \quad \text{və} \quad E(x - c)^n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^n f(x) dx$$

bərabərliklərinə çevrilir. Xüsusi halda $c = 0, c = EX$ olarsa

$$b_n = EX^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x)$$

$$m_n = E(X - EX)^n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^n dF(x)$$

alırıq.

Tərif. b_n kəmiyyəti x kəmiyyətinin n tərtibli başlanğıc momenti, m_n isə onun n momenti adlanır.

Təsadüfə kəmiyyətin başlanğıc və mərkəzi momentləri arasında əlaqə vardır:

$$b_n = \sum_{i=0}^n b_i^{n-i} m_i$$

$$m_n = \sum_{i=0}^n C_n^i (-b_1)^{n-i} b_i$$

Doğrudan da, istənilən α, β ədədləri üçün yazı bilərik:

$$E(X - \alpha)^n = E[(X - \beta) + (\beta - \alpha)]^n = \sum_{i=0}^n C_n^i E(X - \beta)^i (\beta - \alpha)^{n-i}$$

Bu düstur α ədədinə görə n tərtibli momenti, β ədədinə görə n -dən kiçik tərtibli momentlərlə ifadə etməyə imkan verir.

Bu düsturlardan xüsusi hallarda aşağıdakı düsturlar alınır:

$$m_2 = b_2 - b_1^2$$

$$m_3 = 2b_1^2 - 3b_1b_2$$

$$m_4 = -3b_1^4 + 6b_1^2b_2 - 4b_1b_3 + b_4$$

$$a_2 = a_1^2 + b_2$$

$$a_3 = a$$

$$a_4 = a_1^4 + 6b_1^2b_2 + 4a_1b_3 + b_4$$

Praktikada 3 və 4 tərtibli momentlərdən istifadə edilir

Böyük ədədlər qanunu

1. Böyük ədədlər qanunun mahiyyəti
2. Böyük ədədlər qanunun statistika təcrübəsində əhəmiyyəti. Praktiki yəqinlik prinsipi.
3. Çebışev bərabərsizliyi
4. Böyük ədədlər qanunu haqqında teoremlər
5. Xarakteristik funksiyalar
6. Mərkəzi limit teoremləri

Böyük ədədlər qanunun mahiyyəti

Ehtimal nəzəriyyəsi və onun tətbiqi sahələrində çoxlu sayda təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi şəklində göstərilən təsadüfi kəmiyyətlərə tez-tez təsadüf edilir. Belə təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin paylanma qanununun bilavasitə tapılması müəyyən çətinliklərlə bağlıdır. Məlumdur ki, riyazi gözləmələri a , dispersiyaları σ^2 olan asılı olmayan eyni paylanmaya malik $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin hesabi ortası böyük n -lər üçün dayanıqlıdır və riyazi gözləmədən az fərqlənir, dispersiyası isə $n \rightarrow \infty$ şərtində sıfıra yaxınlaşır. Deməli, n -in böyük qiymətlərində n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi ortasının müəyyən mənada a -ya bərabər olduğunu qəbul etmək olar. Beləliklə, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hesabi ortasının böyük n -lər üçün dayanıqlıq xassəsinin riyazi ifadəsi böyük ədədlər qanunu vasitəsi ilə verilir.

Böyük ədədlər qanuna aid olan teoremlər təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi ortasının hansı şərtlər daxilində dayanıqlı olması şərtlərini müəyyələşdirir. Mərkəzi limit teoremlərində isə n sayda təsadüfi

kəmiyyətlərin normallaşdırılmış cəminin $n \rightarrow \infty$ şərtində normal paylanmaya malik olması şərtləri ifadə edilir.

Bu mövzuda biz böyük ədədlər qanununun və mərkəzi limit teoremlərinin bəzi teoremləri ilə tanış olacayıq. Bu teoremlərin ehtimal şərhli müşahidələrin sayı kifayət qədər böyük olduqda onların hesabi ortalar ardıcılığının xassəsinin öyrənilməsindən ibarətdir. Hesabi ortalar bir sıra maraqlı xassələrə malikdirlər. Hesabi ortanı formalaşdıran hər bir müşahidənin nəticəsi hər hansı bir təsadüfi kəmiyyətin realizasiyası olduğu üçün onun kəmiyyəti haldan (təsadüfdən) asılı olacaqdır. Ancaq müşahidələrin sayı çox olduqda müxtəlif təsadüfi amillərin təsiri qarşılıqlı silinir, nəticədə müşahidənin nəticələrinin hesabi ortası realizasiyası müşahidə edilən təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsindən cüzi fərqlənir.

Böyük ədədlər qanunu təcrübədə mühüm əhəmiyyətə malikdir. Bu qanun statistik tədqiqatların – uçot və hesabat məlumatlarının toplanmasının, kütləvi hadisələrin qanunu uyğunluqlarının aşkar edilməsinin əsasını təşkil edir. Böyük ədədlər qanununa görə müşahidələrin sayının qeyri-məhdud artması ilə müxtəlif təsadüfi meyillər qarşılıqlı silinir və nəticədə müşahidələrin nəticələrinin hesabi ortası, tədqiq edilən əlamətin statistik yığımdakı orta kəmiyyətindən vahidə kifayət qədər yaxın ehtimalla cüzi sürətdə fərqlənənir.

Kəmiyyətlərin əsil qiymətini təyin edərkən bu və ya başqa dərəcədə xəyata yol verilir. Məsələn, tərəzi çəkinin, termometr temperaturun, ampermetr cərəyan şiddətinin əsil qiymətini dəqiq deyil, təqribi qiymətini göstərir. Hər hansı a kəmiyyətini təyin edərkən, onun $X_1, X_2, \dots, X_n$ təcrübi qiymətləri vasitəsi ilə təyin edilən

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

kəmiyyətindən geniş istifadə olunur. Məhz bu kəmiyyət n -nin kifayət qədər böyük qiymətlərində a -nın əsil qiymətini aşağıda dəqiqləşdiriləcək mənada çox yaxın olur.

Ölçmə prosesində təsadüfi amillər olduğuna görə, onun $X_1, X_2, \dots, X_n$ nəticələrinə təbii olaraq təsadüfi kəmiyyət kimi baxılmalıdır. Ölçmə nəzəriyyəsində aşağıdakı fərziyyə əsas götürülür: aparılan ölçmələrin sayı kifayət qədər böyük olduqda alınan nəticələrin ədədi ortası müəyyən bir a sabitinə olduqca yaxın olur. Belə xassəyə malik olan a sabitini ölçülən kəmiyyətin əsil qiyməti kimi götürmək təbiidir.

Yuxarıda şərh edilən təcrübi fərziyyə, riyazi cəhətdən ehtimal nəzəriyyəsinin böyük bir bölməsini təşkil edən böyük ədədlər qanunu vasitəsi ilə əsaslandırılır. Ehtimal nəzəriyyəsində böyük ədədlər qanunu dedikdə, təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının bu və ya digər mənada müəyyən sabitə yığılması haqqında teoremlər nəzərdə tutulur. Böyük ədədlər qanununun ilk formasını 1713-cü ildə Y. Bernulli kəşf etmişdir. Hadisənin baş vermə tezliyinin onun ehtimalına yığılması haqqında Bernulli teoreminin tarixən fundamental əhəmiyyəti onunla izah olunur ki, bu teorem ehtimalın statistik tərifini riyazi əsaslandırır. Həmin teorem bir çox alimlərin diqqətini cəlb etmiş və müxtəlif istiqamətlərdə gücləndirilmişdir.

Böyük ədədlər qanunu klassik formada belə ifadə olunur.

$\bar{X}_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \rightarrow 0$$

şərtini ödəyərsə, həmin ardıcılıq üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir deyilir.

Bu qanunu ilk dəfə rus riyaziyyatçısı A. Markov ifadə etmişdir.

Burada yığılma ehtimal mənadə başa düşülür. Beləliklə, böyük ədədlər qanunu n sayda təsadüfə kəmiyyətlərin cəminin öz riyazi gözləməsinə ehtimal mənadə yaxınlaşması şərtlərini müəyyən edir.

Böyük ədədlər qanunun statistika təcrübəsində əhəmiyyəti.

Praktiki yəqinlik prinsipi.

Bəşəriyyət tərəfindən uzun əsrlər zamanı əldə edilmiş təcrübəyə görə müəyyən şərtlər daxilində hadisənin başvermə ehtimalı kifayət qədər kiçik olduqda, bu şərtlərin bir dəfə icrasında hadisənin başverməməsinə əmin olmaq olar. İnsan fəaliyyətinin bütün sahələrində bu hadisəni mümkün olmayan hadisə kimi qəbul edirlər. Təcrübədə mümkün olmayan hadisələrin ehtimallarının yuxarı sərhəddini göstərmək mümkün deyildir. Ona görə də hər bir konkret halda praktiki olaraq mümkün olmayan hadisənin başverməsinin əhəmiyyətliyiindən asılı olaraq yuxarı sərhəddi müəyyən etmək lazımdır. Hadisənin ehtimalı kifayət qədər kiçik olduqda o, praktiki olaraq mümkün olmayan hadisə hesab edilir. Bu halda hadisənin tamamlayanın ehtimalı vahidə yaxın olur. Beləliklə, sınaq nəticəsində hadisənin tamamlayanı praktiki olaraq yəqin hadisə hesab edilir. Deməli, biz hadisələrin mümkün olmaması və onların ehtimalının kiçik olması; əksinə onların əksi olan hadisələrin praktiki yəqin olması və yaxud onların ehtimallarının vahidə yaxın olması haqqında danışa bilərik.

Tutaq ki, hər hansı naməlum parametr qiymətləndirilir. Parametrin qiymətləndirməsi böyük ədədlər qanununa tabe olduqda müşahidələrin sayını qeyri-məhdud olaraq artırmaqla vahidə kifayət qədər yaxın ehtimalla xətanın kifayət qədər kiçik olmasını təmin etmək olar. Böyük ədədlər qanunu ayrı-ayrı qiymətləndirmələrin xətalarının kifayət qədər kiçik ədədi aşmamasına təminat vermir. Ancaq bu qanuna görə müşahidələrin sayı qeyri-məhdud artdıqda belə

hal daha az ehtimallı olur. Məsələn, metal pulu 1000000 dəfə atdıqda hər dəfə qerb üzü düşə bilər. Bu halda qerb üzünün düşməsi hadisəsinin tezliyi 1 olar və rəqəm üzünün düşməsi ehtimalı olan $-\frac{1}{2}$ dən əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənər. Ancaq bu nəticənin ehtimalı olan $\left(\frac{1}{2}\right)^{1000000}$ ədədi o qədər kiçikdir ki, onu praktiki olaraq nəzərə almamaq olar. Eyni ilə hər hansı iqtisadi rayonda buğdanın məhsuldarlığı qiymətləndirildikdə təsadüfən məhsuldarlıqları kiçik (böyük) olan təsərrüfatlar seçilə bilər və nəticədə məhsuldarlığın qiymətləndirməsi real orta məhsuldalıqdan kifayət qədər fərqli olar. Ancaq böyük ədədlər qanununa görə müşahidələrin sayı qeyri –məhdud olaraq artdıqca belə bir nəticənin alınması ehtimalı kiçilir.

Böyük ədədlər qanununun statistika təcrübəsində tətbiqinin əsasını praktiki yəqinlik prinsipi təşkil edir. Bu prinsip empirik müşahidəyə əsaslanır: ehtimalları kifayət qədər kiçik olan hadisələr çox nadir hallarda, ehtimalları vahidə yaxın olan hadisələr isə sanki yəqin baş verir. Bu vəziyyət təcrübənin aşkar nəticəsi kimi qəbul edilir. Təsadüfə hadisənin ehtimalı kifayət qədər kiçik olduqda o nadir hallarda baş verir və təcrübədə bu hadisənin baş verməməsini qəbul etmək olar. Bu halda deyirlər ki, hadisəsinin baş verməməsinə əminlik vardır.

Praktiki əminliyə misal olaraq ot tayasında iynənin tapılmasını məsələsini göstərmək olar. Tayadan təsadüfə qaydada çıxarılmış bir çəngə otda axtarılan iynə ola bilər. Ancaq bu hadisənin ehtimalı o qədər kiçikdir ki, praktiki olaraq bu hadisənin baş verməsi qeyri-mümkün hesab edilir. Beləliklə, təsadüfə olaraq çıxarılmış bir çəngə otda iynənin olmaması praktiki yəqin hadisədir.

Biz bilirik ki, hər gün nəqliyyat ilə işə gedərkən qəza baş verə bilər və biz həlak ola bilərik. Ancaq praktiki olaraq biz belə bir ehtimalla razılaşmırıq, yəni qəzanın baş verməsi ehtimalı kifayət qədər kiçik olduğu üçün biz qəza

nəticəsində həlak olmayacağımıza praktiki olaraq əminik. Eyni ilə seçmə yığma əsasən iqtisadi rayonda buğdanın məhsuldarlığını qiymətləndirdikdə müşahidələrin sayı kifayət qədər böyük olduqda biz xətanın əhəmiyyətli olmamasına praktiki olaraq əminik.

Praktiki yəqinlik prinsipinə görə çoxsaylı müşahidələr üçün böyük ədədlər qanuna tabe olan xətaların ehtimalı çox kiçikdir. Təcrübə də bu faktın doğruluğunu təsdiq edir. Bununla belə, hadisənin baş verməməsinə praktiki yəqinlik olduğu haldada o, baş verə bilər. Məsələn, yuxarıda qeyd edildiyi kimi təsadüfi qydada çıxarılmış bir çəngə otda iynənin tapılması mümkündür. Buğdanın məhsuldarlığını müəyyən etdikdə təsadüfi qaydada məhsuldarlıqları böyük və yaxud kiçik olan təsərrüfatlar seçilə bilər. Bu halda hətta müşahidələrin sayı çox olduqda belə məhsuldarlığın qiymətləndirməsinin xətası əhəmiyyətli ola bilər. Beləliklə, böyük ədədlər qanununun təcrübədə tətbiqinin əsası olan praktiki yəqinlik prinsipi çox nadir, ancaq mümkün olan istisnalara yol verir. Baş verməməsinə praktiki yəqinlik olan hadisələr baş verə bilər. Ona görə də mümkün istisnaların tezliklərinin daha dəqiq analizi məsələsi meydana çıxır. Bu məsələ gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu vasitəsi ilə həll edilir. Kolmoqorov göstərmişdir ki, asılı olmayan müşahidələr bircins yığmada aparıldıqda, yəni müşahidənin nəticələri sonlu riyazi gözləməsi olan hər hansı bir təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri olduqda və müşahidələrin sayı qeyri-məhdud artdıqda onların nəticələrinin hesabi ortası riyazi gözləməyə vahid ehtimal ilə yığılır:

$$P(\bar{X}_n \rightarrow EX) = 1$$

Bu halda müşahidələrin sayı kifayət qədər böyük olduqda $|\bar{X}_n - EX| < \varepsilon$ bərabərsizliyinin ödənilməsinə vahid ehtimalla gözləmək olar. Bu isə o deməkdir ki, riyazi gözləmənin qiymətləndirməsində xəta kifayət qədər kiçik müsbət ε -dan böyük deyildir.

Çebişev bərabərsizliyi

Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi $m_x = M[X]$ və dispersiyası $D_x = D[X]$ ilə işarə edilmişdir.

Teorem. Sonlu dispersiyası olan X təsadüfi kəmiyyəti ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$P(|X - m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2} \quad (1)$$

bərabərsizliyi ödəyir.

Doğrudan da, tutaq ki, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətdir və onun sıxlıq funksiyası $P(x)$ -dir. Onda

$$P(|X - m_x| \geq \varepsilon) = \int_{|x - m_x| \geq \varepsilon} P(x) dx$$

münasibətinə əsasən

$$D[X] = M[(X - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 P(x) dx \geq \int_{|x - m_x| \geq \varepsilon} |x - m_x|^2 P(x) dx \geq \varepsilon^2 \int_{|x - m_x| \geq \varepsilon} P(x) dx = \varepsilon^2 P(|X - m_x| \geq \varepsilon)$$

və ya

$$D[X] \geq \varepsilon^2 P(|X - m_x| \geq \varepsilon)$$

olar. Buradan (1) bərabərsizliyi alınır.

Diskret təsadüfi kəmiyyətlər üçün (1) bərabərsizliyini isbatı eyni qayda ilə aparılır.

(1) bərabərsizliyi Çebişev bərabərsizliyi adlanır. Onu

$$P(|X - m_x| \geq \varepsilon) + P(|X - m_x| < \varepsilon) = 1$$

bərabərliyinə əsasən,

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2} \quad (2)$$

kimi də yazmaq olar.

Böyük ədədlər qanunu

Tutaq ki, sonlu riyazi gözləməsi olan $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots (1)$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir. (1) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M[X_k] \right| < \varepsilon \right) = 1 \quad (2)$$

və ya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M[X_k] \right| < \varepsilon \right) = 0 \quad (3)$$

münasibətini ödədikdə, yəni (1) kəmiyyətlərinin

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad (4)$$

ədədi ortası onların riyazi gözləmələrinin

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M[X_k] \quad (5)$$

ortasına ehtimala görə yığıldıqda, deyirlər ki, (1) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir.

Teorem (Markov). Əgər (1) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} D \left[\sum_{k=1}^n X_k \right] = 0 \quad (6)$$

şərtini ödəyirsə, onda həmin ardıcılıq üçün böyük ədədlər qanunu, yəni (2) münasibəti ödənilir.

Markov teoremindən aşağıdakı nəticə alınır:

Nəticə 1. Cüt-cüt asılı olmayan $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ təsadüfi kəmiyyətləri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D[X_k] = 0 \quad (7)$$

(7) şərtini ödədikdə, (1) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir.

Nəticə 2. Cüt-cüt asılı olmayan $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin dispersiyaları $D[X_k] \leq C, \quad k = 1, 2, \dots$ (8) şərtini ödədikdə, (1) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir.

Nəticə 3. Cüt-cüt asılı olmayan eyni cür paylanmış və sonlu dispersiyaları olan $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - a \right| < \varepsilon \right) = 1 \quad (9)$$

münasibətini ödəyir, yəni həmin kəmiyyətlər ardıcılığı üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir.

Nəticə 4. Tutaq ki, asılı olmayan n sınaq nəticəsində A hadisəsinin baş verməsinin sayı μ_n və hər bir sınaqda A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı p ($0 < p < 1$) ədədidir. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1 \quad (10)$$

bərabərliyi doğrudur. Nəticə 5. Tutaq ki, asılı olmayan n sınaq aparılır və k -cı sınaqda A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı P_k —dır. Onda həmin hadisənin baş vermə tezliyi $n \rightarrow \infty$ şərtində ehtimala görə P_k ədədlərinin ədədi ortasına yığılır, yəni istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_k \right| < \varepsilon \right) = 1 \quad (11)$$

bərabərliyi doğrudur.

Xarakteristik funksiyalar və onların xassələri

Xarakteristik funksiyalar üsulunun əsasını kompleks qiymətli təsadüfi kəmiyyət, onun riyazi gözləməsi və xarakteristik funksiya anlayışları təşkil edir.

ξ və η həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər olduqda

$$X = \xi + i\eta, \quad i^2 = -1$$

ifadəsi kompleks qiymətli təsadüfi kəmiyyət və

$$M[X] = M[\xi] + i^2 M[\eta]$$

onun riyazi gözləməsi adlanır.

ξ həqiqi təsadüfi kəmiyyət olduqda

$$\varphi(t) = \varphi_\xi(t) = M[e^{it\xi}], \quad -\infty < t < \infty \quad (1)$$

funksiyasına onun xarakteristik funksiyası deyilir.

Xarakteristik funksiyaların bir sıra xassələri vardır:

Teorem 1. İstənilən ξ təsadüfi kəmiyyətinin $\varphi(t) = \varphi_\xi(t)$ xarakteristik funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur və aşağıdakı xassələri vardır:

- a) $\varphi(0) = 1$ ödənilir.
- b) $|\varphi(t)| \leq 1$ ($-\infty < t < \infty$) bərabərsizliyi ödənilir.
- c) a və b sabit ədəd olduqda $\eta = a\xi + b$ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb} \varphi_\xi(at)$$

olar.

Teorem 2. Asılı olmayan ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri cəminin xarakteristik funksiyası, onların xarakteristik funksiyaları hasilinə bərabərdir, yəni

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t)\varphi_{\eta}(t) \quad (2)$$

münasibəti doğrudur.

Nəticə 1. Asılı olmayan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ cəminin xarakteristik funksiyası

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{\xi_n}(t) \quad (3)$$

münasibətini ödəyir.

Nəticə 2. Asılı olmayan və eyni φ xarakteristik funksiyası olan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin S_n cəminin xarakteristik funksiyası

$$\varphi_{S_n}(t) = [\varphi(t)]^n$$

bərabərliyi ilə hesablanır.

Teorem 3. Xarakteristik funksiyalar çoxluğu ilə paylanma funksiyaları çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır.

Nəticə 3. Tutaq ki, F_1 və F_2 paylanma funksiyaları, φ_1 və φ_2 isə onlara uyğun olan xarakteristik funksiyadır. Onda $\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t)$ eyniliyi $F_1(x) = F_2(x)$ bərabərliyinə ekvivalentdir.

Mərkəzi limit teoremləri

Ehtimal nəzəriyyəsinin mərkəzi limit teoremləri dedikdə, təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının müəyyən şərtlər daxilində normal təsadüfi kəmiyyətə yığılması haqqında olan teoremlər nəzərdə tutulur. Muavr-Laplasın integral teoremi ilk dəfə isbat edilmiş mərkəzi limit teoremidir. Tutaq ki, asılı olmayan n ardıcıl sınaq aparılır və hər sınaqda A hadisəsinin baş verməsi

ehtimalı eyni sabit p ədədidir. Əgər k -cı sınaqda A hadisəsinin baş verməsi sayı X_k ilə işarə edilsə, onda aparılan bütün n sınaq nəticəsində A hadisəsinin baş verməsinin γ_n sayı $\gamma_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ kimi göstərilir. Təsadüfi γ_n kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və dispersiyası hesablanmışdır: $M[\gamma_n] = np$, $D[\gamma_n] = npq$. Bu kəmiyyətlərdən istifadə edərək, Muavr-Laplasın integral teoremini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_1 \leq \frac{\gamma_n - M[\gamma_n]}{\sqrt{D[\gamma_n]}} \leq x_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (1)$$

Burada

$$\gamma_n^* = \frac{\gamma_n - M[\gamma_n]}{\sqrt{D[\gamma_n]}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - M[\sum_{k=1}^n X_k]}{\sqrt{D[\sum_{k=1}^n X_k]}} \quad (2)$$

ifadəsinə $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin n -tərtibli normallaşmış cəmi deyilir. Bu normallaşmış cəm vasitəsilə (1) bərabərliyi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 \leq \gamma_n^* \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (3)$$

kimi yazılır. Verilmiş ixtiyari $\xi_k (k = 1, 2, \dots)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin də normallaşmış cəmlərinə baxmaq olar. Tutaq ki, təsadüfi kəmiyyətlərinin sonlu riyazi gözləməsi və dispersiyası vardır. Onda

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$$

cəmləri vasitəsi ilə düzəlmiş

$$S_n^* = \frac{S_n - M[S_n]}{\sqrt{D[S_n]}} = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - M[\sum_{k=1}^n \xi_k]}{\sqrt{D[\sum_{k=1}^n \xi_k]}} \quad (4)$$

ifadəsinə həmin təsadüfi kəmiyyətlərin n -tərtibli normallaşmış cəmi deyilir. Verilmiş ξ_k təsadüfi kəmiyyətlərinin (4) normallaşmış cəmi istənilən x_1 və x_2 ($x_1 \leq x_2$) ədədləri üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 \leq S_n^* \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (5)$$

bərabərliyini ödədikdə, deyirlər ki, həmin təsadüfi kəmiyyətlər üçün mərkəzi limit teoremi ödənilir.

Çebışev teoremi. Tutaq ki, $\xi_1, \xi_2, \dots$ asılı olmayan, eyni paylanma funksiyasına malik və sonlu dispersiyası olan təsadüfi kəmiyyətdir. Onda həmin kəmiyyətlər üçün mərkəzi limit teoremi ödənilir, yəni $a = M[\xi_k]$ və $\sigma^2 =$

$$M[\xi_k] \text{ olduqda } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(x_1 \leq \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq x_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (6)$$

münasibəti doğrudur.

Lyapunov teoremi. Tutaq ki, $\xi_1, \xi_2, \dots$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətdir və elə $\delta > 0$ ədədi vardır ki,

$$M[|\xi_k - M[\xi_k]|^{2+\delta}] < \infty, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7) \text{ münasibəti ödənilir. Bu halda,}$$

$$J_n(\delta) = \frac{1}{\sqrt{D[S_n]}^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n M[|\xi_k - M[\xi_k]|^{2+\delta}] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (8)$$

şərti ödənildikdə, həmin $\xi_k (k = 1, 2, \dots)$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün mərkəzi limit teoremi doğrudur.

Riyazi statistikanın elementləri

- 1. Riyazi statistikanın elementləri**
- 2. Baş yığım və seçmə anlayışı**
- 3. Empirik paylanma funksiyası**
- 4. Seçmənin ədədi xarakteristikası**
- 5. Seçmənin yerləşmə xarakteristikası**

Riyazi statistikanın elementləri

Ümumiyyətlə qeyd etmək olar ki, riyazi statistika məsələləri, ehtimal nəzəriyyəsi ilə bir vaxtda yaranaraq inkişaf etməyə başlamışdır. Bu nəzəriyyənin yaranıb və inkişaf etdirilməsində bir çox alimlərin böyük xidmətləri olmuşdur. O cümlədən, rus riyaziyyatçıları olan P.L.Çebişevin, K.Qausun, A.A.Markovun, K.Pirsonun və başqa alimlərin riyazi statistikanın inkişafında böyük rolu olmuşdur. Son zamanlar isə bu elmin inkişafında Azərbaycan riyaziyyatçıları da böyük işlər görməyə başlayıblar. Bunlara Ə.Məmmədov, Tamella Nəsirova, Ə.Şahbazov və s. alimləri göstərmək olar. Statistika elmi, aparılan müşahidələrin nəticələrini təhlil etməklə məşğul olan bir elmdir.

Statistika latın sözü olub «Status» sözündən götürülərək mənası vəziyyət, hal deməkdir. Riyazi statistika statistik məlumatların toplanması, toplanılmış məlumatların statistik təhlil edilməsi, statistik müşahidələrin aparılması və məlumatların təhlili üsullarını öyrənən riyazi elmdir.

Eyni zamanda riyazi statistika, müxtəlif məsələləri, statistik məlumatların toplanma və qruplaşdırma, naməlum paylanma funksiyasını və paylanma parametrlərinin qiymətləndirilməsini, bir təsadüfi kəmiyyətin başqa təsadüfi

kəmiyyətlərdən asılılığının qiymətləndirilməsini göstərən bir elmdir. Deməli, kütləvi təsadüfi hadisələr, üzərində aparılan müşahidələrin nəticəsini qeyd etmək onları qruplaşdırmaq və analiz etmək üsulları riyazi statistika elmində müəyyən edilir.

Statistik rəqəmlərin ilkin işlənilib nəticə çıxarıla bilən vəziyyətə gətirilməsinə statistik məlumat deyilir. Bir-birindən fərqlənən eyni keyfiyyət göstəricilərinin bir yerə toplanmasına statistik yığım kəlliyatı deyilir. Məsələn, müəyyən bir ölkədə eyni vaxtda doğulmuş uşaqlar statistik yığımdır.

Tərif. Şəxsi müşahidələr əsasında toplanan yığma empirik statistik yığım; nəzəri mübahizələr əsasında yaradılan yığma isə nəzəri statistik yığım deyilir.

Tərif. Statistik yığımların hər bir elementinə (üzvünə) ayrılıqda variant deyilir. Variantların sayına isə statistik yığımın həcmi deyilir. Ümumiyyətlə eyni növlü obyektlərin yığımını keyfiyyət və kəmiyyət göstəricilərinə görə öyrənilir. Qeyd edək ki, detalın keyfiyyət göstəricisi onun standartlığı, kəmiyyət göstəricisi isə detalın ölçüsüdür. Deməli, analiz aparmaqla, hər hansı prosesi öyrənmək olar. Burada obyektlər yığımının hər biri ayrıca analiz olunur. Əgər baxılan obyektlərin sayı çox olsa, onda obyektlərin hər birini ayrıca analiz etmək olmaz. Ona görə də başqa üsullardan istifadə etmək lazımdır. Çünki obyektlərin sayı çox olduğu halda onları bir-bir analiz etmək, məsələni çətinləşdirir. Ona görə də seçmə üsulundan istifadə olunur, yəni xüsusi yığımlara baxılır.

Baş yığım və seçmə anlayışı

Tutaq ki, sonlu və ya sonsuz sayda eyni növ obyektlər çoxluğuna baxılır və bu çoxluğu təşkil edən elementlərin müəyyən əlaməti ödəməsi tədqiq edilir. Baxılan əlamət təsadüfi kəmiyyətdir və onun qiyməti bir

elementdən başqasına keçdikdə dəyişir. Müşahidə və ya tədqiq olunan çoxluq baş yığım və ondan təsadüfi şəkildə seçilən kiçik həcmli çoxluq (elementlər yığını) isə təsadüfi seçmə və ya qısaca seçmə adlanır. Yığımı təşkil edən elementlərin sayına onun həcmi deyilir. Tutaq ki, paylanma funksiyası $F(x)$ olan X təsadüfi kəmiyyəti müəyyən sınaqlar nəticəsində x qiymətlərini ala bilər. Bu halda, paylanma funksiyası $F(x)$ olan X təsadüfi kəmiyyəti əvəzinə, “ x qiymətlərinin baş yığını” işlədilir. X təsadüfi kəmiyyəti nəticəsində x qiymətini alır əvəzinə “baş yığının x qiymətlərinin təsadüfi birinin seçilməsi” işlədilir. Aparılan n asılı olmayan sınaq nəticəsində X kəmiyyətinin aldığı $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətləri yığım adlanır, n ədədi bu yığının həcmidir. Riyazi statistikanın əsas məsələsi baş yığımdan təsadüfi ayrılan $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçmə yığının xassələrinə əsasən baş yığının uyğun xassələri haqqında düzgün elmi nəticələr almaqdır. Seçmə yığım müxtəlif üsullarla düzəldilə bilər. Tutaq ki, baş yığının elementlərindən biri təsadüfi seçilir, tədqiq edilir və yenidən baş yığma qaytarılır. Bu prosesi n dəfə təkrar etdikdə, həcmi n olan təkrarlı seçmə yığım alınır. Baş yığının təsadüfi seçilən elementləri yenidən baş yığma qaytarılmadıqda isə təkrarsız seçmə yığım alınır. Praktikada əsasən təkrarsız seçmədən istifadə olunur. Bunun səbəbi odur ki, təkrarsız seçmədə daha çox element müşahidə olunur və alınan nəticələr baş yığının uyğun xassələrini daha düzgün ifadə edir.

Empirik paylanma funksiyası

Tutaq ki, paylanma funksiyası $F(x)$ olan baş yığımdan $x_1, x_2, \dots, x_n$ təsadüfi seçmə yığım ayrılıbmışdır. Seçilən bu x_k qiymətlərinə variantlar, həmin qiymətlərin artan ardıcılıq şəklində

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)} \quad (1)$$

yazılışına isə variasiya sırası deyilir:

$$x_{(1)} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad x_{(n)} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Seçmənin əsas xarakteristikalarından biri onun paylanmasıdır. Tutaq ki, seçməni təşkil edən $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini eyni $\frac{1}{n}$ ehtimalı ilə ala bilən köməkçi diskret təsadüfi kəmiyyət X^* ilə işarə edilmişdir:

$$P_k = P(X^* = x_k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Diskret təsadüfi X^* kəmiyyətinin paylanmasına $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçmənin paylanması deyilir. Təsadüfi seçməni təşkil edən $x_1, x_2, \dots, x_n$ ədədlərinin x -dən kiçik olanlarının sayını $\mu_n(x)$ ilə işarə etsək, onda

$$P(X^* < x) = \frac{\mu_n(x)}{n} \quad (2)$$

olar. Bu ifadəyə seçmənin paylanma funksiyası və ya empirik paylanma funksiyası deyilir və $F_n^*(x)$ ilə işarə edilir:

$$F_n^*(x) = \frac{\mu_n(x)}{n} \quad (3)$$

(3) empirik paylanma funksiyasının baş yığımın $F(x)$ paylanma funksiyasının xassələrinə oxşar xassələri vardır:

- azalmayıdır;
- qiymətləri $[0,1]$ parçasında yerləşir;
- $F_n^*(x_{(1)})=0, F_n^*(x) = 1 \quad (X > x_{(n)})$ bərabərliklərini ödəyir.

Bununla belə, $F_n^*(x)$ funksiyası $\{x < x\}$ hadisəsinin ehtimalını yox, onun təsadüfi seçmədə başvermə tezliyini göstərir.

Bernulli teoreminə görə $n \rightarrow \infty$ şərtində seçmənin $F_n^*(x)$ empirik paylanma funksiyası ehtimala görə baş yığımın $F(x)$ paylanma funksiyasına yığılır, yəni istənilən $x (-\infty < x < \infty)$ və $\varepsilon > 0$ ədədləri üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F_n^*(x) - F(x)| < \varepsilon) = 1 \quad (4)$$

münasibəti ödənilir. Bu göstərir ki, seçmənin $F_n^*(x)$ empirik paylanma funksiyasını baş yığımın $F(x)$ paylanma funksiyasının təqribi qiyməti kimi götürmək olar.

Seçmənin ədədi xarakteristikaları

Tutaq ki, paylanma funksiyası $F(x)$ olan baş yığımdan $x_1, x_2, \dots, x_n$ təsadüfi seçmə yığım ayrılmışdır. Bu seçməni təşkil edən $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini eyni $\frac{1}{n}$ ehtimalı ilə ala bilən köməkçi diskret təsadüfi kəmiyyət X^* kəmiyyətinin ədədi xarakteristikalarına seçmənin ədədi xarakteristikaları deyilir. Burada nəzərə almaq lazımdır ki,

$$P_k = P(X^* = x_k) = \frac{1}{n}$$

və xüsusi halda, seçmənin daxilindəki x_k qiyməti m dəfə təkrar olunduqda

$$P_k = P(X^* = x_k) = \frac{m}{n}$$

olar. Diskret təsadüfi X^* kəmiyyətinin riyazi gözləməsi

$$M[X^*] = \sum_{k=1}^n p_k x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (1)$$

kimi təyin olunur. (1) ifadəsinə seçmənin riyazi gözləməsi (orta qiyməti) deyilir və $\bar{x}$ ilə işarə edilir:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (2)$$

X^* kəmiyyətinin dispersiyasına seçmənin dispersiyası deyilir və S^2 ilə işarə edilir:

$$S^2 = D[X^*] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \quad (3)$$

Baş yığımın N həcmi kifayət qədər böyük olduqda seçmə yığımın paylanması və xarakteristikaları əslində N-dən asılı olmur. Buna görə də, baş yığımın həcmi çox zaman sonsuz hesab edirlər. seçmə yığımın həcmi isə həmişə məhdud götürülür. Lakin seçmə yığımın n həcmi qeyri-məhdud artdıqda onun xarakteristik ədədləri baş yığımın uyğun xarakteristik ədədlərinə yaxınlaşır. Buna görə də n-nin böyük qiymətlərində seçmənin xarakteristik ədədlərini baş yığımın (X təsadüfi kəmiyyətinin) uyğun xarakteristik ədədlərinin təqribi qiymətləri hesab edirlər:

$$M[X] \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

$$D[X] \approx S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

Seçmənin yerləşmə xarakteristikası

Seçimin yerləşmə xarakteristikası elə sabitə deyilir ki, seçmənin bütün elementləri bu sabit ətrafında qruplaşmış olsun.

Riyazi gözləmə, moda və median ən çox istifadə edilən yerləşmə xarakteristikalarıdır.

Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini uyğun olaraq $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = \overline{1, n}$ ehtimalları ilə alan X diskret təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i P\{X = x_i\} = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

düsturu ilə hesablanır.

Burada, nəzərə alsaq ki, ixtiyari $i = \overline{1, n}$ üçün $p_i = P\{X = x_i\} = \frac{1}{n}$,

onda $MX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ olduğunu alırıq.

Axıncı düsturun sağ tərəfindəki ifadə seçmə orta adlanır və $\bar{x}$ ilə işarə edilir.

Beləliklə, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Tutaq ki, təsadüfi seçimin $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementləri içərisində k ($k < n$) sayda müxtəlif olan $z_1, z_2, \dots, z_k$ elementləri vardır. Onda $p_i = P\{X = z_i\} = \frac{n_i}{n}$, $i = \overline{1, k}$

və $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i n_i$ olduğunu alırıq.

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ düsturuna seçmə ortanın sadə, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i n_i$ düsturuna isə çəkili düsturu deyilir.

Təcrübədə seçimin bütün elementləri müxtəlif və yaxud eyni tezliklərə malik olduqda sadə, əks halda isə çəkili düsturdan istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Qruplaşdırılmış seçmələr üçün riyazi gözləməni çəkili düstur ilə hesablamaq olar. Belə ki, burada z_i i -ci qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsi, n_i isə seçmənin intervalda yerləşən elementlərinin sayı, yəni intervalın tezliyidir.

Teorem. Seçimin elementlərinin seçmə ortadan kənarlaşmaları cəmi sıfıra bərabərdir. Yəni, $\sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x}) n_i = 0$

İsbatı. Doğrudan da

$$\sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x}) n_i = \sum_{i=1}^k z_i \cdot n_i - \bar{x} \sum_{i=1}^k n_i$$

$\sum_{i=1}^k n_i = n$ olduğunu nəzərə alsaq, $\sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x})n_i = 0$ olduğunu alırıq.

Ehtimal nəzəriyyəsiindən məlumdur ki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini uyğun olaraq $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = \overline{1, n}$ ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyətin həndəsi və harmonik ortaları uyğun olaraq

$$G(X) = e^{\sum_{i=1}^n p_i \ln x_i} ; H(X) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} p_i \right)^{-1}$$

düsturları ilə hesablanır. İxtiyari $i = \overline{1, n}$ üçün $p_i = \frac{1}{n}$ olduğunu nəzərə alsaq

$$G(X) = e^{\sum_{i=1}^n p_i \ln x_i} = e^{\sum_{i=1}^n \ln x_i p_i} = \prod_{i=1}^n e^{\ln x_i p_i} = \prod_{i=1}^n x_i^{p_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

və

$$H(X) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} p_i \right)^{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

olduğunu alırıq. Deməli, təsadüfi seçimin həndəsi ortası

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}$$

harmonik ortası isə

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}}$$

düsturunun köməyi ilə hesablanır.

$$\text{Uyğun çəkili düsturlar } G(x) = \sqrt[n]{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_k^{n_k}} \text{ və } H = \frac{n}{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{z_i}}$$

şəklində olar.

Üstlü ortanın ümumi şəkli aşağıdakı kimidir:

$$\bar{x} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n}}$$

k qüvvətinin dəyişilməsilə, $\bar{x}$ seçmə ortasının müxtəlif növlərini almaq olar:

k=-1 olduqda harmonik orta alınır:

$$\bar{X}_{har} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

Aydındır ki, k=0 olduqda həndəsi orta alınır:

$$\bar{x}_{hən} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{\prod x_i}$$

k=1 olduqda hesabı orta kəmiyyət alınır.

$$\bar{x}_{hes} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

k=2 olduqda isə kvadratik orta kəmiyyət alınır.

$$\bar{x}_{kv} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Aydındır ki, eyni bir seçmə üçün hesablanmış müxtəlif orta kəmiyyətlər də müxtəlif olacaqdır. k qüvvəti artdıqca uyğun orta kəmiyyət artır:

$$\bar{x}_{har} < \bar{x}_{hən} < \bar{x}_{hes} < \bar{x}_{kv}$$

Üstlü ortaların bu xassəsi majorantlıq xassəsi adlanır. Bu münasibəti birinci dəfə A.Y. Boyarski isbat etmişdir.

Orta kəmiyyətin bu və ya digər növünün seçilməsi tədqiqatların məqsədindən, ilkin məlumatların xarakterindən və orta kəmiyyəti hesablanan göstəricinin iqtisadi mahiyyətindən asılıdır. Əlamətin dəyişən qiymətlər yığımını hər hansı bir ədədlə xarakterizə etmək zərurəti yarandıqda əlamətin paylanmada orta qiyməti göstəricisindən istifadə edilir. Bu zaman əlamətin dəyişən qiyməti onların seçmə ortası ilə əvəz edilir. Bu isə o zaman mümkün olar ki, aparılan əməliyyat öyrənilən əlamətə görə yığımın əsas xassəsini dəyişməsin.