AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI BİZNES UNİVERSİTETİ

G.M. NOVRUZOV, H.P. VƏLİYEV

ALİ RİYAZİYYATDAN (CƏBR, ANALİTİK HƏNDƏSƏ) MƏSƏLƏ VƏ MİSAL HƏLLİNƏ RƏHBƏRLİK

(metodik vəsait)

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi Elmi-Metodik Şurasının «Riyaziyyat» bölməsinin 12.09.2006-cı il tarixli iclasının qərarı ilə təsdiq edilmişdir (protokol №54).

BAKI - 2007

Redaktor: Dos. İ.M.Xəlilov

Rəyçilər: N.C. Musayev - ADİU-nin «Riyaziyyat» kafedrasının müdiri, professor

Z.F. Xankişiyev - BDU-nin «Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika» fakültəsi, «Riyazi fizika tənlikləri» kafedrasının dosenti

Korrektor: t.e.n. R.Ə. Rzaquliyev

G.M. Novruzov, H.P. Vəliyev

ALİ RİYAZİYYATDAN (CƏBR, ANALİTİK HƏNDƏSƏ) MƏSƏLƏ VƏ MİSAL HƏLLİNƏ RƏHBƏRLİK

(Metodik vəsait)

Bakı Biznes Universiteti, 2006, 122 s.

Metodik vəsait universitetlərdə tədris olunan «Ali riyaziyyat» fənninin cəbr və analitik həndəsə bölmələrini əhatə edir. Vəsaitdə hər bir mövzu ilə bağlı qısa nəzəri məlumat, misal və məsələlərin həlli nümunələri və bu mövzu ilə bağlı tapşırıqlar verilir.

Vəsait universitetin birinci kurs tələbələri üçün nəzərdə tutulur.

Müəlliflər kitabın nəşr olunmasına şərait yaratdığına görə Bakı Biznes Universitetinin rektoru i.e.d., prof. İ.M. Abbasova öz minnətdarlığını bildirirlər.

$\frac{1702010000-02}{091-2007}$ Qrifli nəşr

GİRİŞ

Təqdim edilən metodik vəsait universitetin bakalavr pilləsində təhsil alan I kurs tələbələri üçün «Ali riyaziyyat» proqramı üzrə nəzərdə tutulan: «Matrislər və determinantlar», «Xətti tənliklər sistemi», «Vektorlar cəbri», «Müstəvi üzərində analitik həndəsə» və «Fəzada analitik həndəsə» bölmələrini əhatə edərək, beş fəsildən ibarətdir.

Vəsaitdə hər bir mövzu ilə bağlı yığcam tam nəzəri material verilir, əsas qaydalar, düsturlar göstərilir, misal və ya məsələlərin həlli nümunələri və bu istiqamətlə bağlı tapşırıqlar verilir.

Ona görə də tələbələr vəsaitdən lazım olan bölmələrə aid sorğu kitabçası kimi də istifadə edə bilərlər.

Vəsaitdə həll edilmiş nümunələr və tapşırıqların sayı 400-ə yaxındır.

I FƏSİL
MATRİSLƏR VƏ DETERMİNANTLAR

§1. Matrislər və onlar üzərində əməllər.

$i = 1,2,...,m$; $j = 1,2,...,n$ olmaqla a_{ij} ədədlərindən və ya başqa riyazi ifadələrindən düzəldilmiş m sayda sətirdən, n sayda sütundan ibarət düzbucaqlı cədvəl $m \times n$ $(m \neq n)$ ölçülü düzbucaqlı matris adlanır.

Matrislər $A, B, C, ...$ və ya $(a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ij})...$ kimi işarə edilir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} – lar matrisin elementləri adlanır.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4x & 0 \\ y & x+1 & y^2 & 5 \end{pmatrix}$ matrisi 2×4 ölçülüdür və

$a_{11} = 2, a_{12} = 3, a_{13} = 4x, a_{14} = 0, a_{21} = y, a_{22} = x+1, a_{23} = y^2, a_{24} = 5$ onun elementləridir.

Əgər A matrisində $m = n$ olarsa, onda bu matris n tərtibli kvadrat matris adlanır. Kvadrat matrisin baş diaqonalı üzərində olmayan (yəni $i \neq j$) elementlərinin hamısı sıfra bərabərdirsə, onda belə matris diaqonal matris adlanır. Diaqonal matrisin bütün elementləri 1-ə bərabərdirsə, bu matris vahid matris adlanır və E ilə işarə edilir. Bütün elementləri sıfır olan matris sıfır matris adlanır və «0»- ilə işarə olunur.

Tərifə əsasən

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & x+y \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$-kvadrat matris;

2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$-diaqonal matris;

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$-vahid matris;

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$-sıfır matris

olacaqdır.

Eyni ölçülü $A = (a_{ij})$ və $B = (b_{ij})$ matrislərinin cəmi elə $C = (c_{ij})$ matrisinə deyilir ki, $\forall\ i, j$ üçün $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ olsun.

$A = (a_{ij})$ matrisinin λ ədədinə hasili ölçüsü A-nın ölçüsünə bərabər olan elə $B = (b_{ij})$ matrisinə deyilir ki, ixtiyari i, j üçün $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ olsun.

Tutaq ki, ixtiyari eyni ölçülü A, B, C matrisləri verilmişdir. Onda aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

1) $A + B = B + A$ (kommutativlik);
2) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (assosiativlik);
3) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ (assosiativlik);
4) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ (Matrislərin toplanmasına nəzərən distributivlik);
5) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (ədədlərin toplanmasına nəzərən distributivlik).

$\alpha \cdot A + \beta \cdot B$ şəklində ifadə (α, β ixtiyari ədədlərdir) eyni ölçülü A və B matrislərinin xətti kombinasiyası adlanır.

$m \times n$ ölçülü A matrisi ilə $n \times r$ ölçülü B matrisinin $A \cdot B$ hasili ölçüsü $m \times r$ olan elə $C = (c_{ij})$ matrisinə deyilir ki,

$$c_{ij} = a_{i1}b_1 j + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

olsun.

Göründüyü kimi, $A \cdot B$ hasili ancaq o zaman var ki, A matrisinin sütunlarının sayı B matrisinin sətirlərinin sayına bərabər olsun.

Matrislərin vurulması əməlinin aşağıdakı xassələri var:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$ (assosiativlik);

2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (distributivlik);

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot C + B \cdot C$ (distributivlik);

4) Ümumiyyətlə, $A \cdot B \neq B \cdot A$ (kommutativlik doğru deyil)

Tutaq ki,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

çoxhədlisi verilmişdir.

$a_n \cdot A_n + a_{n-l} \cdot A^{n-l} + ... a_l \cdot A + a_0 \cdot E$ ifadəsi matris çoxhədlisi adlanır və $f(A)$ ilə işarə edilir (burada $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{n\ dəfə}$). Verilmiş A matrisi üçün $f(A)$ matris çoxhədlisinin qiyməti matrisdir.

Əgər A matrisinin bütün sətirləri uyğun sütunları ilə əvəz edilərsə, onda alınmış və A^T kimi işarə olunmuş matrisə, A matrisinin transponirə edilmişi deyilir.

Matrislər üzərində aparılan aşağıdakı çevirmələr elementar çevirmələr adlanır.

1. İxtiyari iki sətrin (sütunun) yerini dəyişmək;

2. İxtiyari sətri (sütunu) ixtiyari $\lambda \neq 0$ ədədinə vurmaq;
3. İxtiyari sətrin (sütunun) elementlərini başqa sətrin (sütunun) uyğun elementlərinə əlavə etmək.

A və B matrislərindən biri digərindən elementar çevirmələrin köməyi ilə alınarsa, onda bu matrislər ekvivalent matrislər adlanır və $A \sim B$ kimi işarə olunur.

Əgər matrisin hər hansı sətrinin elementi sıfırdan fərqli, ondan soldakı elementlərin hamısı sıfra bərabərdirsə, onda bu element həmin sətrin kənar elementi adlanır.

Əgər matrisin ikincidən başlayaraq hər bir sətrinin kənar elementi özündən əvvəlki sətrin kənar elementindən sağda yerləşərsə, belə matris pilləvari matris adlanır.

İxtiyari matrisi elementar çevirmələrin köməyi ilə pilləvari şəklə gətirmək olar.

Misal.

A, B və C matrisləri verildikdə $5A+3B-2C$ xətti kombinasiyasını hesablayın.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Həlli:

$$5A-3B+2C=$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 15 & 25 & 5 \\ -5 & 10 & 20 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 15 & 3 & -6 \\ -9 & 6 & 21 \\ 12 & 0 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -10 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 10 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -20 & -7 & 8 \\ 28 & 19 & -6 \\ -5 & 18 & 27 \end{pmatrix}.$$

Misal.

A və B matrisləri üçün $A \cdot B = B \cdot A$ bərabərliyinin doğru olub-olmadığını göstərin:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Həlli:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deməli

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

olur.

Misal.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

matrisi verildikdə $(A \cdot B) \cdot C$ – ni hesablayın.

Həlli:

Əvvəlcə

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -15+0+12 & 0+0+9 \\ 12-2-4 & 0+1-3 \\ 6+6+8 & 0-3+6 \\ 3-10+12 & 0+5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & -2 \\ 20 & 3 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}.$$

Onda

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & -2 \\ 20 & 3 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+27 \\ -12-6 \\ -40+9 \\ -10+42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}$$

olar.

İndi isə $B \cdot C$-ni hesablayaq.

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+0 \\ 4+3 \\ -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Onda

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30+0+3 \\ -24+7-1 \\ -12-21+2 \\ -6+35+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Deməli, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 33 \\ -12 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}.$

Misal.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ olduqda, $f(x) = x^3 - x^2 + 5$ matris çoxhədlisi üçün $f(A)$-nı hesablayın.

Həlli:

Matrislərin vurulması qaydasına əsasən A^2 və A^3-nu hesablayaq:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot1+0\cdot3+1\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot(-1)+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot2 \\ 3\cdot1+(-1)\cdot3+0\cdot0 & 3\cdot0+(-1)(-1)+0\cdot0 & 3\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot2 \\ 0\cdot1+0\cdot3+2\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot(-1)+2\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+2\cdot2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Onda, $5 = 5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ olduğunu nəzərə alsaq:

$$f(A) = A^3 - A^2 + 5\cdot E =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Beləliklə,

$$f(A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Misal.

Verilmiş matrisi pilləvari şəklə gətirin.

Həlli:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7\\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23\\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12\end{pmatrix}^{\substack{\mathrm{I}\cdot(-3)+\mathrm{II}\\ \mathrm{I}\cdot(-5)+\mathrm{IV}}} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7\\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23\\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23\end{pmatrix}^{\substack{\mathrm{II}+\mathrm{III}\\ \mathrm{II}\cdot(-1)+\mathrm{IV}}} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7\\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

İxtisarla verilmiş izahlardan birini açıqlayaq. Məsələn, $\mathrm{I}\cdot(-3)+\mathrm{II}$ izahı o deməkdir ki, «birinci sətri (-1)-ə vurub və nəticəni ikinci sətrin üzərinə əlavə edək».

Tapşırıqlar:

Verilmiş matrislərin xətti kombinasiyalarını tapın.

1.1.1. $A-\lambda E$, $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

1.1.2. $4A-5B$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 4 & -2\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}.$$

1.1.3. $3A+4B$,

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.1.4. $3A-2B,\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$

1.1.5. $2B-5A,\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -15 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$

1.1.6. $A-\lambda E,\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$

1.1.7. $4A-7B, A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -5 \\ -8 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

1.1.8. $5A-3B+2C,\ A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mümkün olan hallarda matrislərin $A\cdot B$ və $B\cdot A$ hasillərini tapın.

1.1.9. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

1.1.10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$

1.1.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$

1.1.12. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$

1.1.13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.1.14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

1.1.15. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

1.1.16. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$

1.1.17. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$

1.1.18. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 5 & 4 & 0\\ 2 & -1 & -5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -3 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

Matrislərin $(A\cdot B)\cdot C$ və $A\cdot(B\cdot C)$ hasillərini hesablayın.

1.1.19. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

1.1.20. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

1.1.21. $A=\begin{pmatrix}1 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix},$

$C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

Matris çoxhədlisinin $f(A)$ qiymətini tapın

1.1.22. $f(x)=3x^3+x^2+2,\quad A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.

1.1.23. $f(x)=2x^3-3x^2+5,\quad A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

1.1.24. $f(x)=3x^2-5x+2,\quad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

1.1.25. $f(x)=3x^2-5x+2,\quad A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

1.1.26. $f(x)=2x^2-3x+1, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

1.1.27. $f(x)=3x^2+2x+5, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$

1.1.28. $f(x)=2x^3-x^2+3, \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

1.1.29. $f(x)=4x^3-2x^2+3x-2, \quad A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.1.30. $f(x)=x^2-3x+2, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

Verilmiş A matrisini pilləvari şəklə gətirin.

1.1.31. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

1.1.32. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$

1.1.33. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.1.34. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$

1.1.35. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.36. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & -7 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

1.1.37. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -18 \\ 5 & 0 & -1 & -13 \end{pmatrix}$. **1.1.38.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

1.1.39. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. **1.1.40.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.41. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.1.42. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

§2.Determinantlar.

Tərif: İstənilən n tərtibli kvadrat

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinə determinant adlanan bir $\det A$ ədədini qarşı qoymaq olar.

$$1)\, n=1,\quad A=(a_1);\quad \det A=a_1$$

$$2)\, n=2,\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};\quad \det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},$$

$$3)\, n=3,\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad \det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{31}a_{22}a_{13}-$$
$$-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}.$$

İxtiyari n tərtibli matrisin determinantının hesablamaq qaydası həm qavramaq, həm də tətbiq baxımından kifayət qədər mürəkkəbdir. Buna baxmayaraq yüksək tərtibli determinantların, aşağı tərtibli determinantların köməyi ilə hesablanması üsulları mövcuddur. n tərtibli determinantın hər hansı a_{ij} elementinin durduğu sətir və sütun elementlərini pozduqda alınan $n-1$ tərtibli determinant, bu elementin minoru adlanır və M_{ij} – la işarə edilir. Məsələn:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ determinantı üçün

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \text{ və s.}$$

Determinantın a_{ij} elementinin M_{ij} minorunun $(-1)^{i+j}$ ədədinə hasili həmin elementin cəbri tamamlayıcısı adlanır və A_{ij} kimi işarə edilir:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

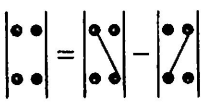
Onda,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11};$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} \text{ və s.}$$

Determinantın hesablanması zamanı onun xassələrindən istifadə etmək faydalı olur.

İki tərtibli determinantın hasablanması aşağıdakı sxem əsasında yerinə yetirilir.

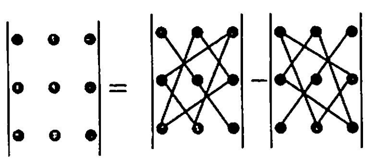


Misal.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-6) - 3 \cdot (-2) = -30 + 6 = -24,$$

$$\Delta = -24.$$

Üç tərtibli determinant isə



sxemi ilə hesablanır.

Misal.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot2\cdot5+1\cdot1\cdot3+0\cdot4\cdot3-3\cdot2\cdot3-1\cdot4\cdot2-0\cdot1\cdot5 =$$

$$= 20+3+0-18-8-0 = 23-26 = -3,$$

$$\Delta = -3.$$

Determinantın cəbri tamamlayıcı ilə bağlı belə bir xassəsi var. Determinantın hər hansı sətir (və ya sütun) elementlərinin öz cəbri tamamlayıcılarına hasilləri cəmi həmin determinanta bərabərdir.

Bu xassə determinantın sətir (sütun) elementləri üzrə ayrılışı adlanır.

Misal.

Yuxarıda baxdığımız determinantı götürək və onun üçüncü sətir elementləri üzrə ayrılışını yazaq:

Həlli:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(0-6)-1(8-3)+5(4-0) = -18-5+20 = -3.$$

Deməli, yenə də $\Delta = -3$ alırıq.

Tapşırıqlar:

İki tərtibli determinantı hesablayın.

1.2.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$. **1.2.2.** $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$. **1.2.3.** $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$.

1.2.4. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. **1.2.5.** $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$. **1.2.6.** $\begin{vmatrix} tg\varphi & 1 \\ -1 & tg\varphi \end{vmatrix}$.

Üç tərtibli determinantı hesablayın.

1.2.7. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. **1.2.8.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **1.2.9.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

1.2.10. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. **1.2.11.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

1.2.12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$. **1.2.13.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 25 & 49 & 64 \end{vmatrix}$.

1.2.14. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **1.2.15.** $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$.

1.2.16. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$. **1.2.17.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.18. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. **1.2.19.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.20. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$. **1.2.21.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

1.2.22. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.   **1.2.23.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

§3. Matrisin ranqı. Bazis minoru.

İxtiyari A matrisinin hər hansı k sayda sətirləri ilə k sayda sütunlarının kəsişməsində yerləşən elementlərdən düzəldilmiş k tərtibli determinant həmin matrisin k tərtibli minoru adlanır. **Məsələn:**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ matrisinin bir tərtibli;

$$|5| \ \left(|a_{31}|=5\right), |4| \ \left(|a_{23}|=4\right), \text{ və s.}$$

İki tərtibli; $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \ \left(\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right); \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \ \left(\begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35} \end{vmatrix}\right)$, və s.

Üç tərtibli;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \ \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right), \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} \ \begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} \quad \text{və s.}$$

minorlarını göstərmək olar.

Aydındır ki, A matrisi $m \times n$ ölçülüdürsə, onda $k \le \min(m,n)$ olmalıdır.

A matrisinin sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunun tərtibinə həmin matrisin **ranqı** deyilir və $r(A)$ ilə işarə edilir. Aydındır ki, $0 \le r(A) \le \min(m,n)$.

Tərtibi matrisin ranqını müəyyən edən minor bazis minoru adlanır. Matrisin bir neçə bazis minoru ola bilər. Matrisin bazis minorunun sətirlərinə (sütunlarına) uyğun sətirləri (sütunları) bazis sətirləri (bazis sütunları) adlanır.

Bazis minoru haqqındakı teoremə əsasən matrisin bazis sətirləri (bazis sütunları) xətti asılı deyillər və matrisin ixtiyari sətrini (sütununu) bazis sətirlərinin (bazis sütunlarının) xətti kombinasiyası kimi göstərmək olar.

Elementar çevirmələr nəticəsində matrisin ranqı dəyişmir. Pilləvari matrisin ranqı onun sıfırdan fərqli sətirlərinin sayına bərabərdir. Matrisin ranqını iki qayda ilə tapacağıq:

1)Elementar çevirmələrin köməyi ilə matris pilləvari şəklə gətirilir. Alınmış pilləvari matrisin sıfırdan fərqli sətirlərinin sayı, elə verilmiş matrisin ranqı olacaqdır.

2)Əvvəlcə ixtiyari bir tərtibli sıfırdan fərqli M_1 minoru (yəni matrisin sıfırdan fərqli elementi) axtarılır. Əgər belə minor yoxdursa, onda verilmiş matris sıfır matrisdir və $r(A)=0$. Sonra M_1 minorunu öz daxilinə alan sıfırdan fərqli M_2 minoru tapılanadək iki tərtibli minorlar hesablanır. Əgər belə minor (yəni sıfırdan fərqli olan iki tərtibli) yoxdursa, onda $r(A)=1$, əks halda $r(A)\geq 2$ və s. Bu qayda ilə matrisin ranqını axtararkən hər addımda cəmi bircə k tərtibli sıfırdan fərqli minoru tapmaq kifayətdir və onu ancaq $M_{k-1}\neq 0$ minorunu öz daxilinə alan minorlar içərisində axtarmaq lazımdır.

Misal.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -7 & 18 & 11 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin elementar çevirmələrin köməyi ilə ranqını tapmalı.

Həlli:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & -4 & 3\\ 4 & -7 & -18 & 11\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}^{\substack{I\times(-2)+II\\ I\times(-4)+III\\ I\times(-3)+IV}} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & -5 & -10 & 5\\ 0 & -15 & -30 & 15\\ 0 & -5 & -10 & 5\end{pmatrix}^{\substack{II\times(-3)+III\\ II\times(-1)+IV}}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & -5 & -10 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Bu A matrisinin pilləvari şəklidir. Sıfırdan fərqli sətirlərin sayı 2-yə bərabər olduğundan $r(A)=2$ olar.

İndi isə verilmiş A matrisinin ranqını sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunu tapmaqla hesablayaq:

A matrisinin sıfırdan fərqli elementi olduğundan $r(A)\geq 1$.

Sıfırdan fərqli iki tərtibli minoru axtaraq:

$M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0$. Deməli $r(A)\geq 2$, M_2-ni daxilinə olan üç tərtibli minorlara baxaq:

$$M_3^{(1)}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -4\\ 4 & -7 & -18\end{vmatrix}=18-42-32+12-28+72=102-102=0;$$

$$M_3^{(2)}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -4\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=1+6-24+9+4+4=24-24=0;$$

$$M_3^{(3)}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & -7 & 11\end{vmatrix}=-11+14+24-4-44+21=59-59=0;$$

$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ iki tərtibli minorunu daxilinə alan bütün üç tərtibli minorlar sıfra bərabər olduğundan verilmiş matrisin ranqı $r(A) = 2$ olur.

Misal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -7 & -18 & 11 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisinin bir bazis minorunu, bazis sətirlərini və bazis sütunlarını göstərin. Bazis minoru haqda teoremin doğruluğunu yoxlayın.

Həlli:

Bu matrisin ranqını hesablayarkən gördük ki,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

Deməli, birinci və ikinci sətirləri ilə birinci və ikinci sütunlarının kəsişməsində duran

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$$

minorunu bazis minoru kimi götürmək olar.

Qeyd edək ki, digər ixtiyari sıfırdan fərqli iki tərtibli minoru da A matrisinin bazis minoru kimi götürmək olar.

Beləliklə, A matrisinin bazis sətirləri

(1 2 3 -1) və (2 -1 -4 3),

bazis sütunları $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ və $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ olar.

İndi göstərək ki, A matrisinin ixtiyari sətrini bazis sətirlərinin xətti kombinasiyası kimi göstərmək olar. Əvvəlcə ixtiyari sətir olaraq, bazis sətirlərindən birini götürək, onda

$$(1 \quad 2 \quad 3 \quad -1) = \lambda_1 \cdot (1 \quad 2 \quad 3 \quad -1) + \lambda_2 \cdot (2 \quad -1 \quad -4 \quad 3)$$

münasibətini ödəyən eyni zamanda sıfra bərabər olmayan λ_1 və λ_2 ədədləri tapmalıyıq. Aydındır ki, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ olarsa, bu münasibət ödənər:

$$(4 \quad -7 \quad -18 \quad 11) = -1(1 \quad 2 \quad 3 \quad -1) + 0(2 \quad -1 \quad -4 \quad 3).$$

İndi isə ixtiyari sətir olaraq, qeyri-bazis sətrini seçək: $(4 \quad -7 \quad -18 \quad 11)$.

$$(4 \quad -7 \quad -18 \quad 11) = \lambda_1 \cdot (1 \quad 2 \quad 3 \quad -1) + \lambda_2 \cdot (2 \quad -1 \quad -4 \quad 3).$$

Buradan $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 4, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = -7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = 3. \end{cases}$ və

$$(4 \quad -7 \quad -18 \quad 11) = -2(1 \quad 2 \quad 3 \quad -1) + 3(2 \quad -1 \quad -4 \quad 3)$$

olar.

Eyni qayda ilə birinci (bazis) sütunu üçün:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0$ olur. Üçüncü (qeyri-bazis) sütunu üçün:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -18 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Buradan $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = -4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 2. \end{cases}$ və

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -18 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olar.

Tapşırıqlar:

Elementar çevirmələrin köməyi ilə matrisin ranqını tapın.

1.3.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **1.3.2.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3.3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \end{pmatrix}$.

1.3.4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

1.3.5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$. **1.3.6.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Minorların köməyi ilə matrisin ranqını hesablayın, hər hansı bazis minorunu göstərin. Bazis minoru haqqında teoremin hökmünü yoxlayın.

1.3.7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

1.3.8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}$.

1.3.9. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.3.10. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.3.11. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3.12. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Minorların köməyi ilə matrisin ranqını tapın, bir bazis minorunu göstərin.

1.3.13. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3.14. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3.15. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3.16. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3.17. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3.18. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

§ 4. Tərs matrisin tapılması.

Kvadrat A matrisinin tərsi elə A^{-1} matrisinə deyilir ki, $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ olsun.

A matrisinin a_{ij} elementlərinin A_{ij} cəbri tamamlayıcılarından düzəldilmiş matrisi transponirə etsək,

$$\widetilde{A} = (A_{ij})^T$$

matrisini alarıq. Əgər $\det A \neq 0$ olarsa, onda A^{-1} var və

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}.$$

Misal.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin tərsini tapın.

Həlli:

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 + 6 + 6 - 4 - 6 + 2 = 1 \text{ və}$$

$\det A = 1 \neq 0$ olduğundan A^{-1} var. Verilmiş matrisin hər bir elementinin cəbri tamamlayıcısını hesablayaq:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 6 = 3; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6+2 = -4;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3+3 = 0; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2+1 = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2-2 = 0;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1.$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deməli, A matrisinin tərsi:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

Yoxlama aparaq:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot(-4) & 0+1-1 & -1+0+1 \\ -6-2+8 & 0-1+2 & 2-0-2 \\ 6+6-12 & 0+3-3 & -2+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Bu isə o deməkdir ki, A^{-1} düzgün təyin edilmişdir. İndi həmin matrisin tərsini elementar çevirmələrin köməyi ilə tapaq.

Bunun üçün $P=(A/E)$ 3×6 ölçülü matrisini yazaq. Sonra elementar çevirmələrin köməyi ilə P matrisini pilləvari $P_1=(A_1/B)$ şəklinə, sonra isə $P_2=(E/A^{-1})$ şəklinə gətirək.

$$P=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{\substack{I\cdot 2+II \\ I\cdot(-2)+III}} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)^{II\cdot(-1)+III} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Bu $P_1=(A_1/B)$ pilləvari matrisidir. Sonuncu matrisin birinci sətrindən ikinici və üçüncü sətirləri çıxsaq

$$P_2=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

alarıq. Beləliklə, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ olar, bu da əvvəlki cavabla üst-üstə düşür.

Misal.

Verilmiş matris tənliyi həll edin:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Həlli:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -4 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=5\neq 0 \text{ və } \det B=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -4 & 5\end{vmatrix}=2\neq 0$$

olduğundan A^{-1} və B^{-1} var. Onda,

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}, A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix} \text{ və}$$

$$B^T=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -2 & 5\end{pmatrix}, B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}.$$

İndi verilmiş tənliyin hər tərəfini soldan A^{-1}-ə və sağdan B^{-1}-ə vuraq; onda $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$ və ya

$$X=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$X=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}.$$

Deməli, $X=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

Tapşırıqlar:

Verilmiş matrisin tərsini tapın.

1.4.1. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$. **1.4.2.** $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.4.3. $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. **1.4.4.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4.5. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$. **1.4.6.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. **1.4.8.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **1.4.10.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

1.4.11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$. **1.4.12.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

1.4.13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. **1.4.14.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.4.15. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.16.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Matris tənlikləri həll edin.

1.4.17. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1.4.18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

1.4.19. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.20. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.21. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.22. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.4.23. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.4.24. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1.4.25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1.4.26. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.27. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.28. $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

1.4.29. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}.$

II FƏSİL
XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ

§1. Xətti tənliklər sisteminin araşdırılması. Kroneker-Kapelli teoremi. Qauss üsulu.

n məchullu və m tənlikdən ibarət xətti tənliklər sisteminə baxaq:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Burada $a_{ij}(i = 1,2,\ldots,m;\ \ j = 1,2,\ldots,n)$ məchulların əmsalları, b_i $(i = 1,2,\ldots,m)$ sərbəst hədlər, $x_1, x_2,\ldots,x_n$ isə məchullardır.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisi xətti tənliklər sisteminin əsas matrisi adlanır. A matrisinə sistemin sağ tərəflərindən ibarət

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

sütununu əlavə etməklə alınan matris sistemin genişlənmiş matrisi adlanır. Genişlənmiş matrisi A' və ya A/B ilə işarə etsək:

$$A/B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

olar. Bu sistemin uyuşan olub-olmaması Kroneker-Kapelli teoreminin köməyi ilə müəyyən edilir:

Teorem. Xətti cəbri tənliklər sisteminin uyuşan olması üçün zəruri və kafi şərt əsas matrisin ranqının genişlənmiş matrisin ranqına bərabər olmasıdır

$$r(A) = r(A/B).$$

Xətti tənliklər sistemini araşdırmaq onun uyuşan olub-olmadığını, uyuşan olduqda isə müəyyən və ya qeyri-müəyyən olduğunu təyin etməkdən ibarətdir.

İxtiyari xətti tənliklər sisteminin həlli qaydası aşağıdakından ibarətdir:

1) $r(A)$ və $r(A/B)$-nı hesablamaq lazımdır; əgər $r(A) \neq r(A/B)$ olarsa, onda sistem uyuşmayandır;

2)Əgər $r(A) = r(A/B) = r$ olarsa, onda sistem uyuşandır. Bu halda A matrisinin hər hansı r tərtibli bazis minorunu seçmək, həmin bazis minorunu əmələ gətirən əmsallara uyğun olan r sayda tənliyi götürmək, yerdə qalan tənlikləri isə atmaq lazımdır. Sonra əmsalları bazis minoruna uyğun olan r sayda məchulu (əsas) sol tərəfdə saxlayıb, qalan $n-r$ sayda məchulu (sərbəst) isə tənliklərin sağ tərəflərinə keçirmək lazımdır.

3)Əsas məchulların sərbəst məchullardan asılılığı müəyyən edilir, bununla da sistemin ümumi həlli tapılır.

4)Sərbəst məchullara ixtiyari qiymətlər verməklə əsas məhçulların qiymətləri, yəni verilmiş sistemin xüsusi həlləri təyin edilir.

Qeyd edək ki, xətti tənliklər sistemini araşdırmaq üçün Qauss üsulundan istifadə etmək olar. Bu üsul iki mərhələdən ibarətdir. Birinci mərhələdə sistem pilləvari şəklə (xüsusi halda üçbucaq şəklinə) gətirilir və bu mərhələ düzünə gediş adlanır. Düzünə gediş nəticəsində verilmiş sistem, elementar çevirmələrin köməyi ilə

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

şəkilli pilləvari sistemlə əvəz edilir. Burada $k \le n$ və $a_{ii} \ne 0$ $(i = 1,2,..,k)$. İkinci mərhələdə-tərsinə gediş nəticəsində pilləvari sistemdən məchulların ardıcıl təyini yerinə yetirilir.

Qeyd edək ki, əgər verilmiş sistemin pilləvari sistemə gətirilməsi zamanı:

1)0=0 şəklində tənlik alınarsa, həmin tənlik atılır;

2) $0 = b_i$ $(b_i \ne 0)$ şəklində tənlik alınarsa, deməli verilmiş sistem uyuşmayandır.

Əgər pilləvari matris üçbucaq şəkilli olarsa $(k = n)$, onda verilmiş sistemin yeganə həlli var. Bu halda sonuncu tənlikdən x_n, axırdan ikinci tənlikdən x_{n-1}, sonra sitstem üzrə yuxarıya doğru hərəkət edərək, qalan məchullar

$$(x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_1)$$

təyin edilir. Praktiki olaraq, sistemin özü ilə yox, onun genişlənmiş matrisi ilə işləmək daha məqsədəuyğundur (bu halda bütün elementar çevirmələri matrisin sətirləri üzərində aparmaq lazımdır).

Misal.

Xətti tənliklər sistemini araşdırın, uyuşan sistem üçün ümumi həlli və bir xüsusi həlli tapın.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Həlli:

Sistemin əsas və genişlənmiş matrislərini yazaq.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix},\quad A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 2 & 5\end{array}\right).$$

Aydındır ki,

$$\Delta A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=-2+8+1+1-4-4=0\Rightarrow r(A)<3,$$

$$M_2^1(A)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-2=-3\neq 0\Rightarrow r(A)=2,$$

$$M_3^1(A')=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 5\end{vmatrix}=-5+24+2+3-8-10=6\neq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(A')=3$$

olar və Kroneker-Kapelli teoreminə görə, $r(A)\neq r(A')$ olduğundan sistem uyuşmayandır.

Misal.

Xətti tənliklər sistemini araşdırın, uyuşan sistemlər üçün ümumi həlli və bir xüsusi həlli tapın.

$$\begin{cases}4x-3y+2z=9,\\ 2x+5y-3z=4,\\ 5x+6y-2z=18.\end{cases}$$

Həlli:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix},\qquad A'=\left(\begin{array}{ccc|c}4 & -3 & 2 & 9\\ 2 & 5 & -3 & 4\\ 5 & 6 & -2 & 18\end{array}\right).$$

$$\Delta(A)=-40+24+45-50+72-12=39\neq 0\Rightarrow r(A)=3$$

(sistem uyuşandır və müəyyəndir) deməli, sistemin yeganə həlli var. Sistemi Kramer üsulu ilə həll edək:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \\ 18 & 6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -90 + 48 + 162 - 180 + 162 - 24 = 372 - 294 = 78,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 18 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -32 + 72 - 135 - 40 + 36 + 216 = 324 - 207 = 117,$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= 360 + 108 - 60 - 225 + 108 - 96 = 576 - 381 = 195$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta A} = \frac{78}{39} = 2; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta A} = \frac{117}{39} = 3; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta A} = \frac{195}{39} = 5.$$

Deməli sistemin üm.h.=xüs.h=(2;3;5).

Misal.

Sistemin genişlənmiş matrisini pilləvari şəklə gətirməklə araşdırın. Uyuşan olarsa, ümumi həllini və bir xüsusi həllini tapın.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 - 18x_3 + 11x_4 = -13, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$$

Həlli:

Sistemin genişlənmiş matrisini yazaq və onu elementar çevirmələrin köməyi ilə pilləvari şəklə gətirək. Aşağıda istifadə edilmiş simvolik yazılışı izah edək: Məsələn, $\mathrm{I}\times(-2)+\mathrm{II}$ o deməkdir ki, «birinci sətri (-2)-yə vurub, ikinci sətrə əlavə edək».

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & -4 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -18 & 11 & -13 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 9 \end{array}\right)^{\substack{\mathrm{I}\times(-2)+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\times(-4)+\mathrm{III} \\ \mathrm{I}\times(-3)+\mathrm{IV}}} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & -10 & 5 & -15 \\ 0 & -15 & -30 & -15 & -45 \\ 0 & -5 & -10 & 5 & -15 \end{array}\right)^{\substack{\mathrm{II}\times(-3)+\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\times(-1)+\mathrm{IV}}} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & -10 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^{\mathrm{II}\times(-5)}.$$

$0=0$ olduğundan, III və IV sətirlər atılır.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \{r(A)=2, r(A')=2 \text{ və } r(A)<4\}$$

olduğundan, sistem uyuşan və qeyri-müəyyəndir, odur ki, sistemin sonsuz sayda həlli var. Beləliklə,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8, \\ \qquad x_2 + 2x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ minoruna uyğun (x_1, x_2) məchullarını əsas, qalan məchulları, yəni x_3 və x_4-ü isə sərbəst məchul qəbul etsək:

II tənlikdən $x_2 = 3 - 2x_3 + x_4$ tapıb və x_2-nin bu qiymətini I tənlikdə nəzərə alsaq:

$$x_1 + 2(3 - 2x_3 + x_4) + 3x_3 - x_4 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + 6 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_3 - x_4 = 8 \Rightarrow x_1 = 2 + x_3 - x_4 .$$

Deməli, sistemin ümumi həlli:

$$x_1 = 2 + x_3 - x_4,$$
$$x_2 = 3 - 2x_3 + x_4,$$
$$x_3 \text{ - ixtiyari},$$
$$x_4 \text{ -ixtiyari}.$$

Əgər $x_3 = t_1, x_4 = t_2$ qəbul etsək, $x_1 = 2 + t_1 - t_2$ və $x_2 = 3 - 2t_1 + t_2$ olar. Deməli, sistemin ümumi həlli

$$(2 + t_1 - t_2;\ 3 - 2t_1 + t_2; t_1; t_2)$$

şəklindədir. Sistemin bir xüsusi həllini yazaq. Bunun üçün $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ qəbul edək. Onda alınmış $(2;3;0;0)$ həlli sistemin xüsusi həlli olar.

İndi isə əvvəl baxdığımız xətti tənliklər sistemini onun genişlənmiş matrisini pilləvari şəkilə gətirməklə həll edək:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)+\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & \frac{13}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{39}{4} & -\frac{18}{4} & \frac{27}{4} \end{array}\right)^{II\times\left(-\frac{3}{2}\right)+III} \sim\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & \frac{13}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{4} & \frac{30}{4} \end{array}\right).$$

Həm A, həm də A' üçün sıfırdan fərqli olan sətirlərin sayı 3 olduğundan, $r(A)=r(A')=3$ olar, yəni sistem uyuşan və müəyyəndir.

Alınmış matrisə uyğun sistemi yazaq:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ \frac{13}{2}x_2 - 4x_3 = -\frac{1}{2}, \\ \frac{6}{4}x_3 = \frac{30}{4}. \end{cases}$$

Tərsinə gedişi yerinə yetirsək:

$$x_3 = 5,$$

$$\frac{13}{2}x_2 - 4\cdot 5 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = 3,$$

$$4x_1 - 3\cdot 3 + 2\cdot 5 = 9 \Rightarrow x_1 = 2.$$

Deməli: Üm. həll (2;3;5)=xüs.həll (2;3;5).

Tapşırıqlar: Xətti tənliklər sistemini araşdırın, uyuşan sistemlər üçün ümumi həlli və bir xüsusi həlli tapın.

2.1.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$

2.1.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$

2.1.3. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 2. \end{cases}$

2.1.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

2.1.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$ **2.1.6.** $\begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ 4x - 3y + 3z = 0, \\ x + 3y = 0. \end{cases}$

2.1.7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 8x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ **2.1.8.** $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 5, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$

2.1.9. $\begin{cases} 2x - 3y = -2, \\ x + 2y = 2{,}5, \\ -2x - 4y = -5, \\ 2\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}y = -2\sqrt{3}. \end{cases}$ **2.1.10.** $\begin{cases} 3x - y + 2z = 2, \\ 4x - 3y + 3z = 3, \\ x + 3y = 0, \\ 5x + 3z = 3. \end{cases}$

2.1.11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8. \end{cases}$ **2.1.12.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 = 1. \end{cases}$

2.1.13. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - 4y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$ **2.1.14.** $\begin{cases} -x + y - 3z = 5, \\ 3x - y - z = 2, \\ 2x + y - 9z = 0. \end{cases}$

2.1.15. $\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ 3x + 4y - 2z = 0, \\ 3x - 2y + 4z = 0. \end{cases}$

§2. Xətti tənliklər sisteminin tərs matrisin köməyi ilə həlli. Kramer düsturları.

Tutaq ki, n məchullu n xətti tənlikdən ibarət sistem verilmişdir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Burada $a_{ij}(i = 1,2,...,n, j = 1,2,...,n)$ sistemin əmsalları, $b_i(1,2,...,n)$ sərbəst hədlər adlanır. $x_1, x_2,..., x_n$ məchullardır. Bu sistemin matris şəklində yazaq:

$$A \cdot X = B.$$

Burada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Sistemin əsas matrisi A kvadrat matrisidir. Əgər $\Delta = \det(A) \neq 0$ olarsa, sistem cırlaşmayan sistem adlanır. Tutaq ki, $\Delta \neq 0$, onda

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Sistemin həllinin bu düsturun köməyi ilə tapılması matris üsulu adlanır. Δ_k ilə Δ baş determinantın k-cı sütununun sərbəst hədlərindən ibarət sütunla əvəz edilməsindən alınmış determinantı işarə edək:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Onda baxılan xətti tənliklər sisteminin həllini Kramer düsturları adlanan aşağıdakı düsturların köməyi ilə tapmaq olar:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, \quad i = 1,2,\ldots,n .$$

Beləliklə, n məchullu n xətti tənlikdən ibarət cırlaşmayan sistemin yeganə həlli var və bu həll matris üsulu və ya Kramer düsturlarının köməyi ilə tapıla bilər.

Misal.

Verilmiş xətti tənliklər sistemini Kramer və matris üsulları ilə həll edin.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Həlli:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ olduğundan,}$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 2 + 4 - 6 - 3 - 12 = 12 \neq 0$$

olduğundan, sistemin yeganə həlli var.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -72-3-2+3+8+18=-48,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & -8 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \text{ və } \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 24$$

olduğunu nəzərə alsaq, Kramer düsturlarına əsasən:

$$x_1 = \frac{\Delta x_i}{\Delta} = \frac{-48}{12} = -4, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1,$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{24}{12} = 2.$$

Deməli, sistemin həlli $(-4;\ 1;\ 2)$ olur.

İndi verilmiş sistemi tərs matris üsulu ilə həll edək. Bunun üçün A matrisinin tərsini tapaq. $\det A = 12 \neq 0$ olduğundan, A^{-1} var.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

olduğundan,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ və}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -64+15+1 \\ 32-21+1 \\ 32-3-5 \end{pmatrix}$$

və ya

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -48 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

verilmiş sistemin həllidir.

Tapşırıqlar:

Verilmiş xətti tənliklər sistemini Kramer üsulu və tərs matris üsulu ilə həll edin.

2.2.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24. \end{cases}$.

2.2.2. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -4, \\ 2x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$.

2.2.3. $\begin{cases} \sqrt{3}x_1 + 2x_2 = 11, \\ 4x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0. \end{cases}$.

2.2.4. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 4x + 5y + 6z = 8, \\ 7x + 8y \qquad = 2. \end{cases}$.

2.2.5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18. \end{cases}$.

2.2.6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 \qquad = 5. \end{cases}$.

2.2.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$.

2.2.8. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 4x + 5y + 6z = 19, \\ 7x + 8y \qquad = 1. \end{cases}$.

2.2.9. $\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3=4, \\ x_1+3x_2+2x_3=-8, \\ 3x_1+10x_2+8x_3=20. \end{cases}$. **2.2.10.** $\begin{cases} 3x+2y+z=1, \\ 6x+5y+4z=-2, \\ 9x+8y+7z=3. \end{cases}$.

§3. Bircins və qeyri-bircins xətti tənliklər sistemi.

İndi isə

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

şəkilli xətti bircins tənliklər sisteminə baxaq.

Aydındır ki, bircins xətti tənliklər sistemi həmişə uyuşandır $(r(A)=r(A/B))$ və onun $(x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0)$ – sıfır (trivial) həlli var.

Əgər $r(A)<n$ olarsa, onda bircins sistem qeyri-müəyyəndir.

Tutaq ki, $r=r(A)$ və bircins sistemin ümumi həlli

$$X=\begin{pmatrix} x_1(t_1,\ldots,t_{n-r}) \\ x_2(t_1,\ldots,t_{n-r}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r(t_1,\ldots,t_{n-r}) \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix}$$

şəklində yazılmışdır.

Sistemin ümumi həllindən, bu sistemin elə $n-r$ sayda həllini seçək ki, sərbəst məchullardan biri 1-ə, yerdə qalanı isə sıfra bərabər olsun, başqa sözlə:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1(1,0,...,0) \\ x_2(1,0,...,0) \\ .... \\ x_r(1,0,...,0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_1(0,1,...,0) \\ x_2(0,1,...,0) \\ .... \\ x_r(0,1,...,0) \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_l = \begin{pmatrix} x_1(0,0,...,1) \\ x_2(0,0,...,1) \\ .... \\ x_r(0,0,...,1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$X_1, X_2, ..., X_{n-r}$ həlləri bircins sistemin normal fundamental həllər sistemini əmələ gətirir və bircins sistemin ixtiyari X həllini yeganə qayda ilə

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_{n-1} X_{n-r}$$

şəklində göstərmək olar, burada $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-r}$ hər hansı ədədlərdir.

Bircins xətti tənliklər sisteminin hansı halda sıfırdan fərqli həlli var?

Teorem. Bircins xətti tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həllinin olması üçün zəruri və kafi şərt, sistemin əsas matrisinin ranqının (r) məchulların sayından (n) kiçik olmasıdır (yəni $r < n$).

$m = n$ olduqda, aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem. n məchullu n xətti tənlikdən ibarət bircins sistemin sıfırdan fərqli həllinin olması üçün zəruri və kafi şərt sistemin Δ baş determinantının sıfra bərabər olmasıdır (yəni $\Delta = 0$).

Qeyd edək ki, qeyri-bircins xətti tənliklər sisteminin ümumi həlli, bu sistemin bir xüsusi həlli ilə, uyğun bircins sistemin ümumi həllinin cəmi şəklində göstərilə bilər.

Misal.

Verilmiş xətti bircins tənliklər sisteminin ümumi həllini və fundamental həllər sistemini qurun.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Həlli:

Verilmiş sistemin matrisni yazaq və onu pilləvari şəklə gətirək:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}^{\substack{\mathrm{I}\times(-2)+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\times(-3)+\mathrm{III}}} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deməli, sıfırdan fərqli sətirlərin sayı 1-ə bərabər olduğundan, $r(A) = 1 < 3$. Odur ki, sistem uyuşan və qeyri-müəyyəndir.

Verilmiş sistemə ekvivalent tənlik $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ olur. $r = 1$ sayda dəyişəni sol tərəfdə saxlayaq, $n - r = 3 - 1 = 2$ dəyişəni isə sağ tərəfə keçirək.

$$x_3 = x_2 - 2x_1$$

Əgər $x_1 = t_1, x_2 = t_2$ qəbul etsək, sistemin ümumi həlli

$$(t_1; t_2; t_2 - 2t_1)$$

olar. Fundamental sistemi yazmaq üçün $(t_1 = 1, t_2 = 0)$ və $(t_1 = 0; t_2 = 1)$ götürsək, onda uyğun olaraq $(1;0;-2)$ və $(0;1;1)$ xüsusi həllərini alarıq ki, bu həllər də fundamental sistem təşkil edir. Başqa sözlə sistemin ixtiyari həlli, bu həllərin xətti kombinasiyası kimi göstərilə bilər. Doğrudan da, $t_1 = 1$ və $t_2 = 1$ götürsək $t_2 - 2t_1 = -1$ olar və sistemin $(1;1;-1)$ xüsusi həllini almış olarıq. Göstərək ki, bu həll fundamental həllərin xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilər, yəni

$$(1,1,-1) = \lambda_1(1,0,-2) + \lambda_2(0,1,1).$$

Buradan,

$$\begin{cases} 1\cdot\lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 = 1, \\ 0\cdot\lambda_1 + 1\lambda_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Deməli, $(1,1,-1) = (1,0,-2) + (0,1,1)$ olur.

Tapşırıqlar:

Bircins xətti tənliklər sistemi üçün ümumi həlli və fundamental həllər sisemini tapın.

2.3.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$.

2.3.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$.

2.3.3. $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ 4x - 6y = 0. \end{cases}$.

2.3.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$.

2.3.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$.

2.3.6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$.

2.3.7. $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0. \end{cases}$.

2.3.8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$.

2.3.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$.

2.3.10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$.

2.3.11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$

2.3.12. $\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ 4x - 2y - 2z = 0. \end{cases}$

2.3.13. $\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 0. \end{cases}$

2.3.14. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.15. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.16. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.17. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

2.3.18. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6, \\ x_2 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

III FƏSİL
VEKTORLAR CƏBRİ

§1. Vektorlar və onlar üzərində xətti əməllər. Vektorların ayrılışı.

İstiqamətlənmiş düz xətt parçası vektor adlanır. Başlanğıcı A nöqtəsində sonu B nöqtəsində yerləşən vektor $\overline{AB}$ simvolu ilə işarə edilir (və ya $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$). $\overline{AB}$ vektorunun uzunluğu dedikdə AB parçasının uzunluğu başa düşülür və $|\overline{AB}|$, və ya $|\bar{a}|$ kimi işarə edilir. Uzunluğu sıfra bərabər olan vektor sıfır vektor adlanır və $\bar{0}$ və ya 0 simvolu ilə işarə edilir. Uzunluğu vahidə bərabər olan vektor vahid vektor adlanır və $\bar{e}$ simvolu ilə işarə edilir.

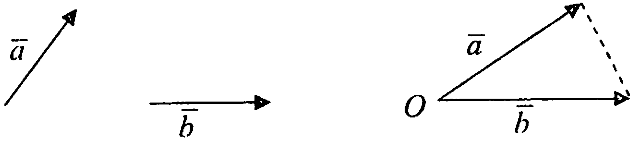
İstiqaməti $\bar{a}$ vektorunun istiqaməti ilə eyni olan vahid uzunluqlu vektor $\bar{a}$ vektorunun ortu adlanır və $\bar{a}_0$-la işarə edilir. Uzunluqları eyni, istiqamətləri bir-birinin əksinə yönəlmiş vektorlar əks vektorlar adlanır. $\bar{a}$ vektoruna əks vektor $-\bar{a}$ kimi (və ya $\overline{AB} = -\overline{BA}$) işarə edilir.

Əgər $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları bir düz xətt və ya paralel düz xəttlər üzərindədirlərsə, onda bu vektorlar kollinear vektorlar adlanır və $\bar{a} \parallel \bar{b}$ kimi göstərilir.

Üç (və ya daha çox) vektor ya bir, ya da iki paralel müstəvi üzərində yerləşərlərsə, onda bu vektorlar komplanar vektorlar adlanır.

Əgər kollinear $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının istiqamətləri və uzunluqları eynidirsə, bu vektorlar bərabər vektorlar adlanır və $\bar{a} = \bar{b}$ kimi işarə edilir.

Tutaq ki, kollinear olmayan $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları verilmişdir. Paralel köçürmə vasitəsi ilə $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının başlanğıclarını bir O nöqtəsinə gətirək:



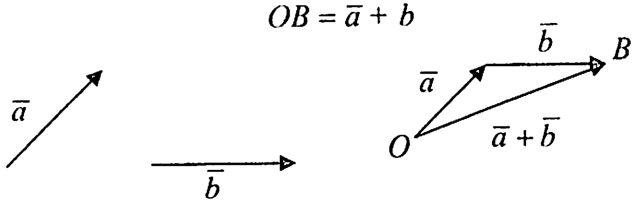
Şəkil 1.

O nöqtəsi $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının başlanğıc və son nöqtələri bir üçbucağın təpə nöqtələri olur. Üçbucağın verilmiş vektorların başlanğıc nöqtələrinə uyğun təpə nöqtəsindəki bucaq $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları arasındakı bucaq adlanır. Əgər vektorlar eyni istiqamətlidirlərsə, onda onlar arasındakı bucaq sıfra bərabərdir; əksistiqamətli vektorlar arasındakı bucaq 180^0-yə bərabərdir.

Tutaq ki, ixtiyari $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları verilmişdir. İxtiyari O nöqtəsi götürək və $\overline{OA} = \bar{a}$ vektorlarını quraq, sonra A nöqtəsindən $\overline{AB} = \bar{b}$ vektorunu quraq.

$\bar{a}$ vektorunun başlanğıcı ilə $\bar{b}$ vektorunun sonunu birləşdirən vektor bu vektorların cəmi adlanır.

$$\overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}$$



Şəkil 2.

$\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının fərqi dedikdə, elə $\bar{c}$ vektoru başa düşülür ki, $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ münasibəti ödənsin:

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}.$$

$\bar{a} \neq 0$ vektoru ilə $\lambda \neq 0$ ədədinin hasili elə $\bar{b}$ vektorudur ki, onun uzunluğu $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$-ya bərabər olub, $\lambda > 0$ olduqda, $\bar{a}$ ilə eyni istiqamətli, $\lambda < 0$ olduqda isə $\bar{a}$ ilə əks istiqamətli olsun: $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$.

$\bar{a} \neq \bar{0}$ və $\bar{b} \neq \bar{0}$ vektorları üçün $\bar{b} = \lambda \bar{a}$ münasibəti $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının kollinearlıq şərtidir.

Tutaq ki, λ_1 və λ_2 eyni zamanda sıfra bərabər olmayan ədədlərdir. Sıfra bərabər olmayan $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorlarının komplanar olması üçün zəruri və kafi şərt onlardan birinin, qalan ikisinin xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilməsidir, məsələn $\bar{c} = \lambda_2 \cdot \bar{a} + \lambda_2 \cdot \bar{b}$ (bu münasibət vektorların komplanarlıq əlamətidir).

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ vektorları düzbucaqlı koordinat sistemində koordinat oxlarının ortları olarsa, onda koordinatları a_x, a_y, a_z olan $\bar{a}$ vektorunu

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$$

kimi göstərmək olar.

Onda a_x, a_y, a_z əmsalları $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ bazisində $\bar{a}$ vektorunun koordinatları adlanır və belə yazılır $\bar{a}$ =(a_x, a_y, a_z).

$\bar{a}$ vektorunun uzunluğu

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

düsturu ilə hesablanır.

$\bar{a}$ vektorunun OX, OY, OZ oxları ilə əmələ gətirdiyi bucaqlar, uyğun olaraq, α, β, γ olarsa, $\bar{a}$ vektorunun istiqaməti $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ istiqamətverici kosinuslarının köməyi ilə təyin edilir. Qeyd edək ki,

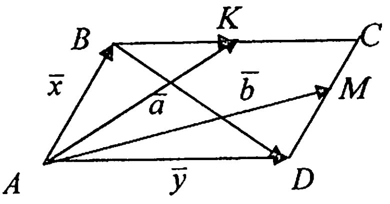
$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$$

və $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ münasibətləri doğrudur.

Məsələ.

$ABCD$ paraleloqramında K və M, uyğun olaraq, BC və CD tərəflərinin orta nöqtələridir. $\overline{AK} = \overline{a}; \overline{AM} = \overline{b}$ olduğunu bilərək, $\overline{BD}$ və $\overline{AD}$ vektorlarını $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları ilə ifadə edin.

Həlli:



Şəkil 3.

$\overline{AB} = \overline{x}$ və $\overline{AD} = \overline{y}$ işarə edək. Onda,

$$\overline{BK} = \frac{1}{2}\overline{y} \text{ və } \overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{x}$$

olar.

$$\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{BK} = \overline{x} + \frac{1}{2}\overline{y},$$

$$\overline{AM} = \overline{AD} + \overline{DM} = \overline{y} + \frac{1}{2}\overline{x} \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{cases} \overline{x} + \dfrac{1}{2}\overline{y} = \overline{a}, \\ \overline{y} + \dfrac{1}{2}\overline{x} = \overline{b}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\overline{x} + \overline{y} = 2\overline{a}, \\ \overline{x} + 2\overline{y} = 2\overline{b}. \end{cases}$$

alarıq. Buradan,

$$\overline{x} = \frac{\begin{vmatrix} 2\overline{a} & 1 \\ 2\overline{b} & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}\left(4\overline{a} - 2\overline{b}\right) = \frac{4}{3}\overline{a} - \frac{2}{3}\overline{b}$$

və

$$\bar{y}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 2\bar{a} \\ 1 & 2\bar{b} \end{vmatrix}=\frac{1}{3}\left(4\bar{b}-2\bar{a}\right)=\frac{4}{3}\bar{b}-\frac{2}{3}\bar{a} \text{ alınq.}$$

Beləliklə,

$$\overline{AD}=\bar{y}=-\frac{2}{3}\bar{a}+\frac{4}{3}\bar{b} \text{ və}$$

$$\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}=\bar{y}-\bar{x}=-\frac{2}{3}\bar{a}+\frac{4}{3}\bar{b}-\frac{4}{3}\bar{a}+\frac{2}{3}\bar{b}=$$

$=-2\bar{a}+2\bar{b}$.

$$\overline{BD}=-2\bar{a}+2\bar{b}$$

olur.

Məsələ.

Uzunluğunun 16-ya bərabər olduğunu, $\bar{b}=3\bar{i}-5\bar{j}+\sqrt{2}\bar{k}$ vektorunun əksinə yönəldiyini bilərək, $\bar{a}$ vektorunun koordinatlarını tapın.

Həlli:

$\overline{a_0}=\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ olduğunu nəzərə alsaq, aydındır ki, $\bar{a}=16\cdot\overline{a_0}$. $\bar{a}$ vektorunun $\bar{b}$ vektorunun əksinə yönəldiyini bilərək $\overline{a_0}=-\overline{b_0}$ yazmaq olar. $\bar{b}_0$ ortunu tapaq.

$$|\bar{b}|=\sqrt{3^2+(-5)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=6 \text{ olduğundan,}$$

$$\bar{b}_0=\frac{3}{6}\bar{i}-\frac{5}{6}\bar{j}+\frac{\sqrt{2}}{6}\bar{k} \text{ və } \bar{a}_0=-\frac{3}{6}\bar{i}+\frac{5}{6}\bar{j}-\frac{\sqrt{2}}{6}\bar{k}$$

olar. Onda,

$$\bar{a}=16\cdot\overline{a_0}=16\cdot\left(-\frac{3}{6}\bar{i}+\frac{5}{6}\bar{j}-\frac{\sqrt{2}}{6}\bar{k}\right)=-8\bar{i}+\frac{40}{3}\bar{j}-\frac{8\sqrt{2}}{3}\bar{k}.$$

Deməli, $\bar{a}=\left(-8;\dfrac{40}{3};-\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\right)$.

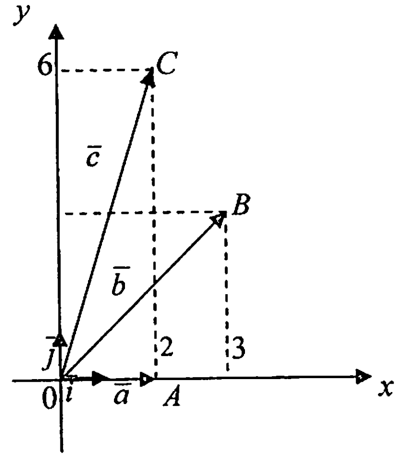
Məsələ.

OXY müstəvisi üzərində

$\overline{OA} = \bar{a} = 2\bar{i}, \quad \overline{OB} = \bar{b} = 3\bar{i} + 3\bar{j}, \quad \overline{OC} = \bar{c} = 2\bar{i} + 6\bar{j}$

vektorlarını qurun və $\bar{c}$ vektorunu $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları üzrə ayırın.

Həlli:



Şəkil 4.

Əvvəlcə $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlarını quraq. Elə λ_1, λ_2 ədədləri tapaq ki, $\bar{c} = \lambda_1 \cdot \bar{a} + \lambda_2 \cdot \bar{b}$ olsun.

$$2\bar{i} + 6\bar{j} = 2\lambda_1 \cdot \bar{i} + 3\lambda_2 \cdot \bar{i} + 3\lambda_2 \cdot \bar{j}$$

Deməli,

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2, \\ 3\lambda_2 = 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3 \cdot 2 = 2, \\ \lambda_2 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = 2. \end{cases} \text{ və}$$

$\bar{c} = -2\bar{a} + 2\bar{b}$ olur.

Tapşırıqlar:

3.1.1. ABC üçbucağında $\overline{AB}=\overline{a},\overline{AC}=\overline{b}$ və M nöqtəsinin BC tərəfinin orta nöqtəsi olduğunu bilərək, $\overline{AM}$ vektorunu $\overline{a}$,$\overline{b}$ vektorlarının köməyi ilə ifadə edin.

3.1.2. Verilmiş $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorlarına görə aşağıdakı vektorları qurun:

1. $\frac{1}{3}\overline{a}-2\overline{b}$;

2. $4\overline{a}+\overline{b}$;

3. $2(\overline{a}-\overline{b})$;

4. $\frac{3}{4}(\overline{a}+2\overline{b})-\overline{a}-\overline{b}$.

3.1.3. $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları verilmişdir. $\overline{c}=\overline{a}-2\sqrt{3}\overline{b}$ və $\overline{d}=-\sqrt{3}\overline{a}+6\overline{b}$ vektorları kollineardırmı?

3.1.4. λ-nın hansı qiymətində $2\lambda\cdot\overline{a}$ və $(\lambda^3-1)\cdot\overline{a}$ $(\overline{a}\neq\overline{0})$ vektorları eyniistiqamətlidir?

3.1.5. x-in hansı qiymətlərində $x^3\cdot\overline{a}$ və $(x^2-x-2)\cdot\overline{a}$ $(\overline{a}\neq\overline{0})$ vektorları əksistiqamətlidirlər?

3.1.6. $|\overline{a}|=13,|\overline{b}|=19,|\overline{a}+\overline{b}|=24$ olduğunu bilərək, $|\overline{a}-\overline{b}|$-ni tapın.

3.1.7. $\overline{a}\perp\overline{b},|\overline{a}|=5,|\overline{b}|=12$ olduğunu bilərək, $|\overline{a}+\overline{b}|$ və $|\overline{a}-\overline{b}|$-ni tapın.

3.1.8. M,ABC üçbucağının medianlarının kəsişmə nöqtəsidir. $\overline{AM}=\overline{a},\overline{AC}=\overline{b}$ olduğunu bilərək, $\overline{AB},\overline{BC}$ vektorlarını $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları üzrə ayırın.

3.1.9. Paraleloqramın üç ardıcıl təpə nöqtəsi verilmişdir: $A(1;-2;3),B(3;2;1),C(6;4;4)$. Bu paraleloqramın dördüncü təpəsini tapın.

3.1.10. Uzunluğu 5-ə bərabər olub, $\bar{b} = 5\bar{i} - 4\bar{j} + 2\sqrt{2}\bar{k}$ vektorunun əksinə yönəlmiş $\bar{a}$ vektorunun koordinatlarını tapın.

3.1.11. α və β-nın hansı qiymətlərində

$$\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \alpha \cdot \bar{k} \text{ və } \bar{b} = \beta \cdot \bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$$

vektorları kollinear olar?

3.1.12. $\bar{c} = (9;4)$ vektorunu $\bar{a} = (1;2)$ və $\bar{b} = (2;-3)$ vektorları üzrə ayırın.

3.1.13. $\bar{d} = (4;12;-3)$ vektorunu $\bar{a} = (2;3;1), \bar{b} = (5;7;0)$ və $\bar{c}(3;-2;4)$ vektorlarının xətti kombinasiyası kimi göstərin.

3.1.14. OY oxu üzərində yerləşib, $A(1;-4;7)$ və $B(5;6;-5)$ nöqtələlərindən eyni uzaqlıqda yerləşən M nöqtəsini tapın.

3.1.15. Təpə nöqtələri $A(3;-1;-5)$, $B(4;2;-5)$, $C(-4;0;3)$ olan ABC üçbucağının A təpəsindən çəkilmiş medianının uzunluğunu tapın.

3.1.16. OXY müstəvisində $\overline{OA} = \bar{a} = 2\bar{i}$; $\overline{OB} = \bar{b} = 3\bar{i} + 3\bar{j}$, $\overline{OC} = \bar{c} = 2\bar{i} + 6\bar{j}$ vektorlarını qurun. $\bar{c}$ vektorunu $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları üzrə ayırın.

3.1.17. $\bar{c} = 4\bar{i} + 7\bar{j} - 4\bar{k}$ vektoru verilmişdir. $\bar{c}$ vektoruna paralel və uzunluğu 27-yə bərabər olan $\bar{d}$ vektorunu tapın.

§2. Vektorların skalyar hasili.

Sıfırdan fərqli $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının uzunluqlarının, aralarındakı bucağın kosinusu hasilinə bərabər olan ədədə bu vektorların skalyar hasili deyilir:

$$(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi .$$

Skalyar hasilin aşağıdakı xassələri var:

1. $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$;
2. $(\bar{a},\bar{b}+\bar{c}) = (\bar{a},\bar{b}) + (\bar{a},\bar{c})$;

3. $\left(\lambda \cdot \bar{a}, \bar{b}\right) = \lambda \cdot \left(\bar{a}, \bar{b}\right)$;

4. $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$;

5. $\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$.

Əgər $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları uyğun olaraq $\left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\left(b_x, b_y, b_z\right)$ koordinatları ilə verilmişdirlərsə onda,

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z .$$

Məsələ.

$\bar{m} = \bar{a} + 2\bar{b}$ və $\bar{n} = 5\bar{a} - 4\bar{b}$ vektorlarının qarşılıqlı perpendikulyar olduğunu bilərək, $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vahid vektorları arasındakı bucağı tapın.

Həlli:

Şərtə görə $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$ və $\bar{m} \perp \bar{n}$.

$\bar{m} \perp \bar{n}$ olduğundan $(\bar{m}, \bar{n}) = 0$ və ya

$$\left(\bar{a} + 2\bar{b}, 5\bar{a} - 4\bar{b}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\bar{a}^2 + 6\left(\bar{a}, \bar{b}\right) - 8\bar{b}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = 3 \Rightarrow |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\left(\bar{a} \,\hat{}\, \bar{b}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\bar{a} \,\hat{}\, \bar{b}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\bar{a} \,\hat{}\, \bar{b}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Məsələ.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlarının uzunluqları və cüt-cüt əmələ gətirdikləri bucaqlar bərabərdir. $\bar{a} = (1;1;0)$ və $\bar{b} = (0;1;-1)$ olduğunu bilərək, $\bar{c}$ vektorunun koordinatlarını tapın.

Həlli:

Şərtə görə $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}|$ və $\left(\bar{a}, \hat{}\, \bar{b}\right) = \left(\bar{b}, \hat{}\, \bar{c}\right) = \left(\bar{a}, \hat{}\, \bar{c}\right)$

$\bar{c} = (x; y; z)$ olsun. Aydındır ki,

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos(\bar{a},\hat{\ }\bar{b})=\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{1\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot(-1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

$$\cos(\bar{b},\hat{\ }\bar{c})=\frac{(\bar{b},\bar{c})}{|\bar{b}|\cdot|\bar{c}|}\Rightarrow\frac{0+y-z}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow y-z=1,$$

$$\cos(\bar{a},\hat{\ }\bar{c})=\frac{(\bar{a},\bar{c})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{c}|}\Rightarrow\frac{x\cdot 1+y\cdot 1+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow x+y=1,$$

$$|\bar{c}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}.$$

Ona görə,

$$\begin{cases} y-z=1, \\ x+y=1, \\ x^2+y^2+z^2=2. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=1+z, \\ x=1-1-z, \\ x^2+y^2+z^2=2. \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y=1+z, \\ x=-z, \\ z^2+1+2z+z^2+z^2=2. \end{cases}.$$

$$3z^2+2z-1=0,\quad z_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{6},\quad \begin{cases} z_1=-1, \\ z_2=\frac{1}{3}. \end{cases}.$$

Deməli, məsələnin şərtini ödəyən iki $\bar{c}$ vektoru var. Onlardan birincisi

$$(z_1=-1, y_1=0, x_1=1)$$
$$\bar{c}_1=(1;0;-1)$$

və ikincisi

$$\left(z_2=\frac{1}{3}, y_2=\frac{4}{3}, x_2=-\frac{1}{3}\right)$$
$$\bar{c}_2=\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$$

vektorlarıdır.

Taşırıqlar:

3.2.1. $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları bir-biri ilə $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ bucağını əmələ gətirir. $|\bar{a}| = 10$ və $|\bar{b}| = 2$ olduğunu bilərək, $(\bar{a} + 2\bar{b}, 3\bar{a} - \bar{b})$ skalyar hasilini tapın.

3.2.2. $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$, $\varphi = (\bar{a},\hat{}\ \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$ olduğunu bilərək, $\bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$ vektorunun modulunu tapın.

3.2.3. $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 4$, $\varphi = (\bar{a},\hat{}\ \bar{b}) = 120^0$ olduğunu bilərək, $c = 3\bar{a} + 2\bar{b}$ vektorunun modulunu tapın.

3.2.4. $\bar{a} = 7\bar{i} + 6\bar{j} - 6\bar{k}$ və $\bar{b} = 6\bar{i} + 2\bar{j} + 9\bar{k}$ vektorları kubun tilləri ola bilərlərmi? Kubun üçüncü tilini tapın.

3.2.5. $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$ və $\bar{b} = -\bar{j} + 2\bar{k}$ vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın diaqonalları arasındakı bucağı tapın.

3.2.6. Göstərin ki, təpə nöqtələri A(-5;3;4), B(-1;-7;5), C(6;-5;-3) və D(2;5;-4) olan dördbucaqlı kvadratdır.

3.2.7. İsbat edin ki, $\vec{d} = (\bar{c}, (\bar{b}, \bar{a})) - (\bar{a}, (\bar{b}, \bar{c}))$ vektoru $\vec{b}$ vektoruna perpendikulyardır.

3.2.8. $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$ vektoruna kollinear olub, $\bar{b}, \bar{a} = 28$ şərtini ödəyən $\bar{b}$ vektorunu tapın.

3.2.9. λ-nın hansı qiymətində $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k}$ və $\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j} - \lambda \cdot \bar{k}$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyardırlar?

3.2.10. A(1;1;-1), B(2;3;1), C(3;2;1) nöqtələri ABC üçbucağının təpə nöqtələridir.

a)Üçbucağın tərəflərinin uzunluğunu, b)daxili bucaqlarını və c) BD medianı ilə AC tərəfi arasındakı iti bucağı tapın.

3.2.11. Koordinat oxları ilə M(-2;3;1) nöqtəsinin radius-vektoru arasındakı bucaqları tapın.

3.2.12. İsbat edin ki, əgər $\bar{a}+\bar{b}$ və $\bar{a}-\bar{b}$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyardırlarsa, onda $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının uzunluqları bərabərdir.

3.2.13. $\overline{AB}=2\bar{a}-6\bar{b}$, $\overline{BC}=\bar{a}+7\bar{b}$, $\overline{CA}=-3\bar{a}-\bar{b}$ vektorları üçbucağını əmələ gətirirlər. $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyardırlar. ABC üıçbucağının bucaqlarını tapın.

3.2.14. OXY və OYZ bucaqlarının tənbölənləri arasındakı bucağı tapın.

3.2.15. Göstərin ki, $A(-3;-7;-5)$, $B(0;-1;-2)$ və $C(2;3;0)$ nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşirlər və B nöqtəsi A və C nöqtələri arasındadır.

3.2.16. $ABCD$ paraleloqramının üç ardıcıl təpə nöqtəsinin radius-vektorları verilmişdir:

$\bar{r}_A=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{r}_B=\bar{i}+3\bar{j}+5\bar{k}$, $\bar{r}_C=7\bar{i}+9\bar{j}+11\bar{k}$.

Dördüncü D təpəsinin radius-vektorunu tapın.

§3. Vektorların vektorial hasili.

$\bar{a},\bar{b}$ vektorlarının vektorial hasili aşağıdakı şərtləri ödəyən $\bar{c}$ vektoruna deyilir.

1) $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$;

2) $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi, \varphi=(\bar{a}\ \hat{,}\ \bar{b})$;

3) $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorları sağ üçlük əmələ gətirirlər.

$\bar{a},\bar{b}$ vektorial hasili $\bar{a}\times\bar{b}$ və ya $[\bar{a};\bar{b}]$ kimi işarə edilir.

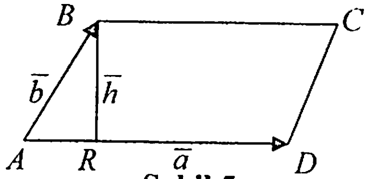
Əgər $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$ $\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$ koordinatları ilə verilərsə onda,

$$[\bar{a}\times\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Məsələ.

$\bar{a}=(2;-1;7)$ və $\bar{b}=(1;0;-4)$ vektorları üzərində paraleloqram qurulmuşdur. $\bar{b}$ vektorunun sonundan endirilmiş hündürlüyü və bu hündürlüklə paraleloqramın tərəfi arasında qalan üçbucağın sahəsini tapın.

Həlli:



Şəkil 5.

$[\bar{a}\times\bar{b}]$ vektorial hasilini tapaq.

$$\bar{c}=[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 7\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & 7\\ 0 & -4\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & -4\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\bar{k}=4\bar{i}+15\bar{j}+\bar{k}\ .$$

Vektorial hasilin tərifinə əsasən $\bar{c}$ vektorunun uzunluğu ədədi qiymətcə paraleloqramın sahəsinə bərabərdir, odur ki,

$$S_{ABCD}=\sqrt{16+225+1}=\sqrt{242}=11\sqrt{2}\,.$$

Digər tərəfdən,

$$S_{ABCD}=|\bar{a}|\cdot BR\,.$$

Deməli,

$$BR=\frac{S_{ABCD}}{|\bar{a}|}=\frac{11\sqrt{2}}{\sqrt{4+1+49}}=\frac{11\sqrt{2}}{\sqrt{54}}=\frac{11\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\frac{11}{3\sqrt{3}},$$

$$BR = \frac{11}{3\sqrt{3}}$$

olur.

ΔABR -dən $AR = \sqrt{|\bar{b}|^2 - |BR|^2} = \sqrt{17 - \frac{121}{27}} = \frac{\sqrt{338}}{3\sqrt{3}}$.

Onda,

$$S_{\Delta ABR} = \frac{1}{2} \cdot AR \cdot BR = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{338}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{11}{3\sqrt{3}} = \frac{13 \cdot 11\sqrt{2}}{54},$$

$$S_{\Delta ABR} = \frac{143\sqrt{2}}{54}.$$

Tapşırıqlar:

3.3.1. $\bar{a} = (3;-1;-2), \bar{b} = (1;2;-1)$ olduğunu bilərək $\bar{a} \times (2\bar{a} + \bar{b})$ vektorunun koordinatlarını tapın.

3.3.2. $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}, \bar{b} = -2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ vektorları verilmişdir. $\bar{c} = (\bar{a} - \bar{b}) \times (2\bar{b})$ vektorunu və onun modulunu tapın.

3.3.3. $|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 2, (\bar{a}, \hat{} \bar{b}) = \frac{2}{3}\pi$ olduğunu bilərək $|\bar{a} \times \bar{b}|$ -i və $|(\bar{a} + 2\bar{b}) \times (-\bar{a} + 3\bar{b})|$ -i tapın.

3.3.4. Təpə nöqtələri $A(1;2;0), B(3;2;1), C(-2;1;2)$ olan ABC üçbucağının sahəsini tapın.

3.3.5. $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}$ və $\bar{b} = 5\bar{j} - 7\bar{k}$ vektorları üzərində qurulmuş üçbucağın sahəsini tapın.

3.3.6. $\bar{a} = (8;4;1)$ və $\bar{b} = (2;-2;1)$ vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsini tapın.

3.3.7. $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları arasındakı bucaq 45^0 -yə bərabərdir. $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 5$ olduğunu bilərək, $\bar{a} - 2\bar{b}$ və $3\bar{a} + 2\bar{b}$ vektorları üzərində qurulmuş üçbucağın sahzsini tapın.

3.3.8. $\bar{a}=(3;-1;2)$ və $\bar{b}=(-1;3;-1)$ vektorlarının hər birinə perpendikulyar olan vahid $\bar{c}$ vektorunu tapın.
3.3.9. $\bar{a}=(1;4;3)$ vektoruna və absis oxuna perpendikulyar olan vahid $\bar{e}$ vektorunu qurun.

3.3.10. $|\bar{p}|=4, |\bar{q}|=3, (\bar{p},\hat{\ }\bar{q})=\frac{3}{4}\pi$ olduğunu bilərək, $\bar{a}=3\bar{p}+2\bar{q}$ və $\bar{b}=2\bar{p}-\bar{q}$ vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsini tapın.
3.3.11. Təpə nöqtələri $A(1;-2;3), B(0;-1;2), C(3;4;5)$ olan üçbucağın sahəsini tapın.
3.3.12. $\bar{a}=(-4;-8;8), \bar{b}=(4;3;2)$ vektorlarının vektorial hasilini, aralarındakı bucağın sinusunu, onlar üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsini tapın.
3.3.13. $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}, \bar{b}=2\bar{i}+7\bar{j}+4\bar{k}$ və $\bar{c}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$ vektorları verilmişdir. $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ və $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ - ni tapın.
3.3.14. $\bar{a}=(2;-2;1)$ və $\bar{b}=(2;3;6)$ vektorlarının əmələ gətirdiyi bucağın sinusunu tapın.
3.3.15. Təpə nöqtələri $A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)$ olan üçbucağının B təpəsindən AC tərəfinə endirilmiş hündürlüyünün uzunluğunu tapın.

§4. Vektorların qarışıq hasili.

$\bar{a}\times\bar{b}$ vektoru ilə $\bar{c}$ vektorunun skalyar hasilinə bərabər olan ədədə $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlarının qarışıq hasili deyilir və belə işarə edilir $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$. Deməli, $\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$.

Əgər

$\bar{a}=(a_x,a_y,a_z), \bar{b}=(b_x,b_y,b_z), \bar{c}=(c_x,c_y,c_z)$ olarsa,

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ sağ üçlük əmələ gətirirsə, $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}>0$, sol üçlük əmələ gətirirsə $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}<0$ olar.

Məsələ.

$A_1A_2A_3A_4$ piramidasının təpə nöqtələrinin koordinatları verilmişdir:

$A_1(1;2;3), A_2(-2;4;1), A_3(7;6;3), A_4(4;-3;-1)$

a) A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 tillərinin uzunluğunu;

b) $A_1A_2A_3$ üzünün sahəsini;

c) A_1A_4 və A_1A_3 tilləri arasındakı bucağı;

d) piramidanın həcmini;

e) $A_1A_2A_3$ üzünə endirilmiş hündürlüyü tapın.

Həlli:

a) $\overline{A_1A_2}=(-3;2;-2)$ olduğundan $\left|\overline{A_1A_2}\right|=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}$.

$\overline{A_1A_3}=(6;4;0)$ olduğundan $\left|\overline{A_1A_3}\right|=\sqrt{36+16+0}=\sqrt{52}$.

$\overline{A_1A_4}=(3;-5;-4)$ olduğundan,

$\left|\overline{A_1A_4}\right|=\sqrt{9+25+16}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

b) $\overline{A_1A_2}$ və $\overline{A_1A_3}$ vektorlarının vektorial hasilini tapaq:

$$\left[\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}=8\bar{i}-12\bar{j}-24\bar{k}.$$

$A_1A_2A_3$ üçbucağının sahəsi $\overline{A_1A_2}$ və $\overline{A_1A_3}$ vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsinin yarısına bərabərdir. Həmin paraleloqramın sahəsi isə ədədi qiymətcə

$$\left[\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right]=8\bar{i}-12\bar{j}-24\bar{k}$$

vektorunun uzunluğuna bərabərdir. Deməli,

$$S_{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\sqrt{64+144+576}=\frac{1}{2}\sqrt{784}=\frac{1}{2}\cdot 28=14.$$

c) $$\left(\overline{A_1A_4}\,\hat{}\,\overline{A_1A_3}\right)=\arccos\frac{\left(\overline{A_1A_4},\overline{A_1A_3}\right)}{\left|\overline{A_1A_4}\right|\cdot\left|\overline{A_1A_3}\right|}=\arccos\frac{6\cdot 3+4\cdot(-5)}{5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{13}}=$$

$$=\arccos\frac{18-20}{5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{13}}=\arccos\frac{-2}{5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{13}}=$$

$$=\arccos\left(\frac{1}{5\sqrt{26}}\right).$$

d)Aydındır ki,

$$V_{pir}=V_{A_1A_2A_3A_4}=\frac{1}{6}V_{par-d}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-3 & 2 & -2\\ 6 & 4 & 0\\ 3 & -5 & -4\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}(48+60+24+48)=8+10+4+8=30,$$

$$V_{pir}=30.$$

e) $V_{pir}=\frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot H$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$H=\frac{3\cdot V_{pir}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}}=\frac{3\cdot 30}{14}=\frac{90}{14}=6\frac{3}{7},\ H=6\frac{3}{7}$$

alarıq.

Tapşırıqlar:

3.4.1. $a)\bar{a}=(1;2;-2),\bar{b}=(1;-2;1),\bar{c}=(5;-2;-1);$

$b)\bar{a}=\bar{j}+\bar{k},\bar{b}=\bar{j}-\bar{k},\bar{c}=\bar{i}$ vektorları komplanardırlarmı?

3.4.2. λ-nın hansı qiymətində $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+\lambda\bar{k},\bar{b}=(0;1;0)$ və $\bar{c}=(3;0;1)$ vektorları komplanardırlar?

3.4.3. $\bar{a} = (1;-2;1), \bar{b} = (3;2;1), \bar{c} = (1;0;-1)$ vektorları üzərində qurulmuş paralelepipedin həcmini tapın.

3.4.4. $\bar{a} = (2;1;-3), \bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}, \bar{c} = (1;-3;1)$ vektorları üzərində qurulmuş paralelopipedin, $\bar{b}$ və $\bar{c}$ vektorları üzərində qurulmuş üzünə endirilmiş hündürlüyünü tapın.

3.4.5. $\bar{a} = (1;2;3), \bar{b} = (2;4;1), \bar{c} = (2;-1;0)$ vektorları üzərində qurulmuş üçbucaqlı prizmanın həcmini tapın.

3.4.6. $(\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{b} - \bar{c}) \cdot (\bar{c} - \bar{a})$ qarışıq hasilini hesablayın.

3.4.7. $\bar{a} \cdot (\bar{b} - \bar{c}) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + 2\bar{c})$ qarışıq hasilini hesablayın.

3.4.8. $\bar{c}$ vektoru $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarına perpendikulyardır. $(\bar{a}, \hat{} \ \bar{b}) = \frac{\pi}{6}, |\bar{a}| = 6, |\bar{b}| = 3, |\bar{c}| = 3$ olduğunu bilərək, $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ qarışıq hasilini tapın.

3.4.9. Təpə nöqtələri $A_1(0;0;1), A_2(2;3;5), A_3(6;2;3), A_4(3;7;2)$ olan piramidanın həcmini tapın.

3.4.10. Göstərin ki, $A(5;7;2), B(3;1;-1), C(9;4;-4)$ və $D(1;5;0)$ nöqtələri bir müstəvi üzərində yerləşir.

3.4.11. $A(-5;-4;8), B(2;3;1), C(4;1;-2), D(6;3;7)$ nöqtələri piramidanın təpə nöqtələridir. BCD üzünə endirilmiş hündürlüyün uzunluğunu tapın.

3.4.12. Həcmi 5-ə bərabər olan tetraedrin üç təpəsi $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3)$ nöqtələrindədir. Dördüncü D təpəsinin ordinat oxu üzərində olduğunu bilərək, onu tapın.

3.4.13. $\overline{AB} = (4;3;0)$, $\overline{AD} = (2;1;2)$ və $\overline{AA_1} = (-3;-2;5)$ vektorları üzərində qurulmuş $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedi verilmişdir.

a) paralelepipedin həcmini;

b) $ABCD$ üzünün sahəsini;

c) A_1 təpəsindən endirilmiş hündürlüyünü tapın;

d) AB tili ilə BD_1 diaqonalı arasındakı bucağı tapın.

IV FƏSİL
MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ ANALİTİK HƏNDƏSƏ

§1. Müstəvi üzərində koordinatlar üsulu.

Koordinatlar üsulu dedikdə, düz xəttin (müstəvinin, fəzanın) nöqtələri ilə onun koordinatları arasındakı uyğunluğun müəyyən edilməsi başa düşülür.

Tutaq ki, müstəvi üzərində iki $M_1(x_1;y_1)$ və $M_2(x_2;y_2)$ nöqtələri verilmişdir. Bu nöqtələr arasındakı məsafə

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

düsturu ilə hesablanır.

$A(x_1;y_1)$ və $B(x_2;y_2)$ nöqtələri verildikdə AB parçasını verilmiş λ nisbətində bölən M nöqtəsinin $\left(\lambda=\frac{AM}{MB}\right)$ $(x;y)$ koordinatları

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

düsturları ilə tapılır. Xüsusi halda $\lambda=1$ (bu halda M nöqtəsi AB parçasını yarıya bölür) olduqda, parçanın orta nöqtəsinin koordinatlarını hesablamaq üçün aşağıdakı düsturlar alınır:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Təpə nöqtələri $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2), C(x_3;y_3)$ olan üçbucağın sahəsi

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

düsturu ilə hesablanır.

Məsələ.

Kvadratın iki qarşı təpəsi verilmişdir. $A(3;0)$ və $C(4;1)$. Kvadratın qalan iki təpəsinin koordinatlarını tapın.

Həlli:

Tutaq ki, $ABCD$ kvadratının diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi O nöqtəsidir. O nöqtəsi AC parçasının orta nöqtəsi olduğundan:

$$O\left(\frac{3+(-4)}{2};\frac{0+1}{2}\right) \text{ və ya } O\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

olar. Pifaqor teoreminə əsasən

$$2AB^2 = AC^2,$$

$$AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(-4-3)^2+(1-0)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = 5,$$

$AB = 5$ olur. $B(x,y)$ olarsa,

$$\begin{cases} AO = \frac{1}{2}AC, \\ AB = \frac{1}{\sqrt{2}}AC. \end{cases} \quad \text{münasibətindən}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{50}, \\ \sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{50}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+x+\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4} = \frac{50}{4}, \\ x^2-6x+9+y^2 = 25. \end{cases}$$

və ya

$$\begin{cases} x^2+y^2+x-y = 12, \\ x^2+y^2-6x = 16. \end{cases}$$

İkinci tənlikdən $y^2 = 16-x^2+6x$ ifadəsini birinci tənlikdə nəzərə alsaq:

$$x^2+16-x^2+6x+x-\sqrt{16-x^2+6x}=12,$$

və ya $4+7x=\sqrt{16-x^2+6x}$. Hər tərəfi kvadrata yüksəltsək:

$$16+56x+49x^2=16-x^2+6x$$

olar və ya $$50x^2+50x=0,$$

$$x(x+1)=0.$$

Deməli, $x_1=0; x_2=-1$ olur. Bu qiymətləri əvəzləmədə nəzərə alaq.

$x_1=0$ -a uyğun $y_1^2=16 \Rightarrow y_1^{(1)}=4$ və $y_1^{(2)}=-4$;

$x_2=-1$ -ə uyğun $y_2^2=9 \Rightarrow y_2^{(1)}=3$ və $y_2^{(2)}=-3$

alırıq.

Beləliklə, $B(0;4), D(-1;-3)$ və $B'(0;-4), D'(-1;3)$ təpələr cütünü alırıq. B və D nöqtələri kvadratın təpə nöqtələridir, çünki

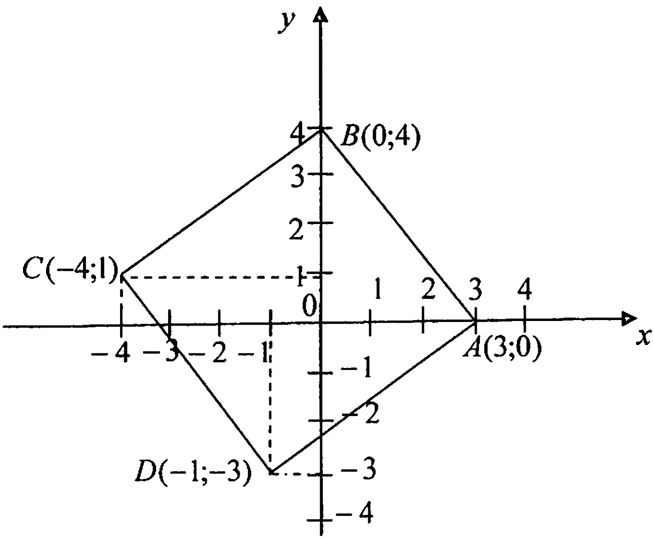
$$AB=BC=CD=DA=5.$$

B' və D' nöqtələri isə kvadratın təpə nöqtələri ola bilməzlər, belə ki,

$$AB'=\sqrt{(0-3)^2+(4-0)^2}=5, \text{ ancaq}$$

$$CB'=\sqrt{\left((-4-0)^2+(1-(-4)\right)^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41} \text{ olur.}$$

Odur ki, $B\,(0;4)$ və $D\,(-1;-3)$ axtarılan nöqtələrdir.



Şəkil 6.

Tapşırıqlar:

4.1.1. Birinci koordinat rübünün tənböləninə nəzərən $A(-2;4)$ nöqtəsinə simmetrik nöqtəni tapın.

4.1.2. $A(3;-2)$ nöqtəsi verilmişdir. OX, OY oxlarına və koordinat başlanğıcına nəzərən A nöqtəsinə simmetrik nöqtələrin koordinatlarını tapın.

4.1.3. $A(2;4)$ nöqtəsi verilmişdir.

1. II və IV koordinat rübünün tənbölənlərinə nəzərən,
2. I və III koordinat rüblərinin tənbölənlərinə nəzərən simmetrik olan A_1 nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

4.1.4. Təpə nöqtələri $A(2;3)$, $B(6;3)$, $C(6;-5)$ olan üçbucağın BM tənböləninin uzunluğunu tapın.

4.1.5. Təpə nöqtələri $A(-2;-1)$, $B(6;1)$, $C(3;4)$ olan üçbucağın düzbucaqlı üçbucaq olduğunu isbat edin.

4.1.6. Təpə nöqtələri $A(-2;4)$, $B(-6;8)$, $C(5;-6)$ olan üçbucağın sahəsini tapın.

4.1.7. Göstərin ki, $A(2;3)$, $B(5;7)$, $C(11;15)$ nöqtələri bir düz xətt üzərindədirlər.

4.1.8. $A(0;2)$ və $B(8;0)$ nöqtələrinin arasındakı parçanı onların koordinat başlanğıcından olan məsafələrin nisbətində bölən nöqtənin koordinatlarını tapın.

4.1.9. Ordinat oxu üzərində yerləşib, $A(3;-8)$ nöqtəsindən 5-ə bərabər məsafədə olan nöqtəni tapın.

4.1.10. $A(1;-5)$ və $B(4;3)$ olduğunu bilərək AB parçasını 3 bərabər hissəyə bölən nöqtələrin koordinatlarını tapın.

4.1.11. Kvadratın iki qarşı təpəsinin koordinatları verilmişdir: A (3;5) və $C(1;-3)$. Kvadratın sahəsini tapın.

4.1.12. $A(-3;2)$, $B(3;4)$, $C(6;1)$, $D(5;-2)$ olduğunu bilərək $ABCD$ dördbucaqlısının sahəsini tapın.

4.1.13. Üçbucağın $A(-3;6)$, $B(9;-10)$, $C(-5;4)$ təpələri verildikdə onun xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzinin koordinatlarını və radiusunu tapın.

4.1.14. ABC üçbucağının təpə nöqtələrinin koordinatları verilmişdir: $A(2;1)$, $B(-2;-2)$, $C(-8;6)$. B təpəsindən endirilmiş hündürlüyün uzunluğunu tapın.

4.1.15. Paraleloqramın iki qonşu təpəsi $A(-2;6)$, $B(2;8)$ və diaqonallarının $M(2;2)$ kəsişmə nöqtəsi verilmişdir. Paraleloqramın qalan iki təpəsinin koordinatlarını tapın.

4.1.16. Üçbucağın tərəflərinin orta nöqtələrinin koordinatları verilmişdir: $M(-1;5)$, $N(1;1)$, $Z(4;3)$. Bu üçbucağın təpə nöqtələrini tapın.

4.1.17. Üçbucağın $O(0;0)$, $A(8;0)$, $B(0;6)$ təpə nöqtələri məlum olduqda, onun OC medianının və OD tənböləninin uzunluğunu tapın.

4.1.18. AB parçası dörd bərabər hissəyə bölünmüşdür. $A(-8;-8)$ və $B(-2;-4)$ olduğunu bilərək, bölgü nöqtələrinin koordinatlarını tapın. AB parçasının hansı nöqtəyə qədər uzatmaq lazımdır ki, onun uzunluğu üç dəfə artsın?

4.1.19. $A(1;2)$ və $B(4;4)$ nöqtələri verilmişdir. OX oxu üzərində elə C nöqtəsi tapın ki, ABC üçbucağının sahəsi 5-ə bərabər olsun?

4.1.20. Kvadratın iki qarşı təpəsinin koordinatları verilmişdir: $A(3;0)$ və $C(-4;1)$. Kvadratın qalan iki təpəsinin koordinatlarını tapın.

4.1.21. M nöqtəsinin $\left(2;-\frac{2}{3}\pi\right)$ polyar koordinatları verildikdə, onun düzbucaqlı koordinatlarını tapın.

4.1.22. A, B, C, D, E nöqtələrinin

$$A(3;0), B\left(2;-\frac{\pi}{3}\right), C\left(5;\frac{\pi}{2}\right), D\left(0;-\frac{\pi}{4}\right), E\left(1;\frac{2}{3}\pi\right)$$

polyar koordinatları məlum olduqda, onların düzbucaqlı koordinatlarını tapın.

4.1.23. M nöqtəsinin $\left(-\sqrt{3};-1\right)$ düzbucaqlı koordinatları məlum olduqda onun polyar koordinatlarını tapın.

4.1.24. A, B, C, D, E nöqtələrinin düzbucaqlı koordinatları $A(-3;3), B(0;-5), C(-2;-2), D(-4;0), E\left(2\sqrt{3};2\right)$ olduğuna görə bu nöqtələrin polyar koordinatlarını tapın.

4.1.25. Düzgün altıbucaqlının tərəfinin uzunluğu 1-ə bərabərdir. Polyus olaraq, təpə nöqtələrindən birini, polyar ox olaraq bu təpədən keçən tərəfi qəbul edərək, qalan beş təpənin polyar koordinatlarını tapın.

4.1.26. Polyar koordinat sistemində $ABCD$ paraleloqamının diaqonallarınn kəsişmə nöqtəsi polyusla üst-üstə düşür. $A\left(3;-\frac{4}{9}\pi\right)$ və $B\left(5;\frac{3}{4}\pi\right)$ təpələrini bilərək, onun qalan iki təpəsini tapın.

4.1.27. Kvadratın iki qarşı təpəsinin polyar koordinat sistemində koordinatları məlumdur: $A\left(2;-\frac{\pi}{3}\right), C\left(2;\frac{2}{3}\pi\right)$. Kvadratın sahəsini tapın.

4.1.28. Üçbucağın təpələrindən biri polyus üzərindədir, qalan iki təpə isə $A(2;0)$ və $B\left(4;\frac{\pi}{3}\right)$ nöqtələrindədir. Üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

§2. Müstəvi üzərində düz xətt.

OXY müstəvisi üzərində hər bir düz xətt iki məchullu bir dərəcəli xətti tənliklə müəyyən edilir və tərsinə, hər bir ikiməchulllu birdərəcəli xətti tənlik müstəvi üzərində bir düz xətti müəyyən edir.

Müstəvi üzərində düz xətti müxtəlif tənliklərin köməyi ilə təyin etmək olar.

1. $y = kx + b$ düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi adlanır, burada k düz xəttin bucaq əmsalı (düz xəttin OX oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi α bucağının tangensi, yəni $k = tg\alpha$), b düz xəttin OY oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin ordimnatıdır.

2. $Ax + By + C = 0$ düz xəttin ümumi tənliyidir, burada A, B, C sabit ədədlər olub, əmsallardır və $A^2 + B^2 \neq 0$ (yəni A və B əmsalları eyni zamanda sıfra bərabər ola bilməzlər).

3. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ düz xəttin parçalarla tənliyi adlanır, burada a və b düz xəttin uyğun olaraq, OX və OY oxlarından ayırdığı parçaların uzunluğudur (işarələri nəzərə alınmaqla).

4. Verilmiş nöqtədən verilmiş istiqamətdə keçən düz xətt tənliyi

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

şəklindədir, burada (x_0, y_0) verilmiş nöqtənin koordinatları, $k = tg\alpha$ (α -düz xətlə OX oxu arasındakı bucaqdır).

Bu tənlik həm də mərkəzi $(x_0;y_0)$ nöqtəsində olan düz xətlər dəstəsinin tənliyi adlanır; $A_1x+B_1y+C_1=0$ və $A_2x+B_2y+C_2=0$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsindən keçən düz xətlər dəstəsinin tənliyi

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

şəklindədir, burada λ -ədədi vuruqdur.

5. Verilmiş iki $M_1(x_1,y_1)$ və $M_2(x_2,y_2)$ nöqtələrindən keçən $(x_1\neq x_2, y_1\neq y_2)$ düz xətt tənliyi

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

şəklindədir. Bu düz xəttin bucaq əmsalı $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ kimi təyin edilir. Əgər $x_1=x_2$ olarsa, düz xətt tənliyi $x=x_1$, $y_1=y_2$ olarsa, düz xətt tənliyi $y=y_1$ şəklində olur.

6. Düz xəttin normal tənliyi

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

şəklindədir, burada p-koordinat başlanğıcından düz xəttə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğudur, α bu perpendikulyarın OX oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır. Düz xəttin ümumi tənliyinin hər tərəfini $\lambda=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ normallaşdırıcı vuruğuna vurmaqla onu normal tənlik şəklinə gətirmək olar; burada λ-nın işarəsi ümumi tənlikdə C -nin işarəsinin əksinə götürülür.

7. Düz xəttin polyar koordinatlarla tənliyi

$$r\cos(\varphi-\alpha)=p$$

şəklindədir, burada r, φ düz xətt üzərindəki ixtiyari nöqtənin polyar koordinatlarıdır; p koordinat başlanğıcından bu düz xəttə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğu, α həmin perpendikulyarın polyar oxla əmələ gətirdiyi bucaqdır.

Müstəvi üzərində iki düz xətt arasındakı bucaq dedikdə, bu düz xətlərin əmələ gətirdiyi iki qonşu bucaqdan ən kiçiyi (iti bucaq) başa düşülür.

Əgər l_1 və l_2 düz xətləri bucaq əmsallı tənliklərlə verilmişdirsə,

$$y = k_1x + b_1 \text{ və } y = k_2x + b_2$$

Onda onlar arasındakı φ bucağı

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

düsturu ilə hesablanır.

$k_1 = k_2$ şərti l_1 və l_2 düz xətlərinin paralellik, $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ isə perpendikulyarlıq şərtidir.

Əgər l_1 və l_2 düz xətləri $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ və $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ümumi tənlikləri ilə verilmişdirsə, onda onlar arasındakı φ bucağı

$$tg\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$$

düsturu ilə hesablanır. Bu halda düz xətlərin paralellik şərti

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ (və ya } A_1B_2 - A_2B_1 = 0\text{)}$$

və perpendikulyarlıq şərti $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$ şəklində olar.

Verilmiş $M(x_0; y_0)$ nöqtəsindən $Ax + By + C = 0$ düz xəttinə qədər olan d məsafəsi həmin nöqtədən bu düz xəttə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğu olub,

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

düsturu ilə hesablanır.

$M(x_0;y_0)$ nöqtəsindən $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ düz xəttinə qədər olan məsafə

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|$$

düsturu ilə hesablanır.

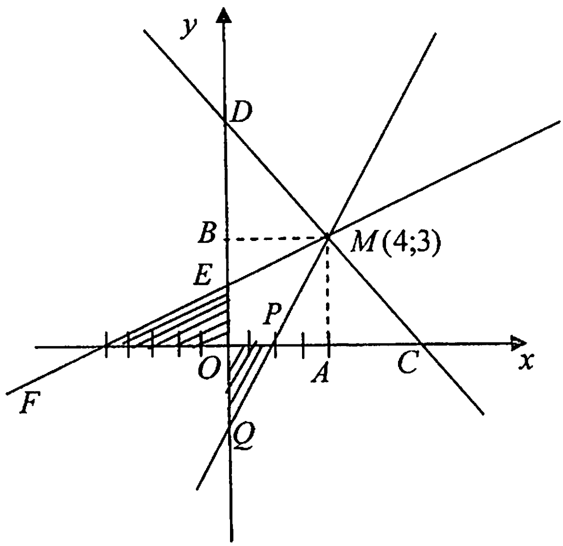
Məsələ.

$M(4;3)$ nöqtəsindən keçən və koordinat bucağından sahəsi 3-ə bərabər üçbucaq ayıran düz xəttin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.

Həlli:

M nöqtəsindən keçməklə koordinat bucaqlarından üçbucaq ayıran düz xətt koordinat oxlarını: 1)I rübdə $(x>0;y>0)$; 2)II rübdə $(x<0;y>0)$; 3)III rübdə $(x<0;y<0)$ kəsə bilər.

$S_{\Delta ODC} > S_{AOBM} = 12$ olduğundan birinci hal ola bilməz.



Şəkil 7.

İkinci və üçüncü halların mümkünlüyünü araşdıraq. Şərtə görə $S_\Delta = 3$; düz xəttin koordinat oxlarından ayırdığı parçalar a və b olarsa,

onda $S_\Delta = \frac{1}{2}|a \cdot b|$ $(a \cdot b < 0)$ və $a \cdot b = -6$ yəni $a = -\frac{6}{b}$ olar.

Axtarılan düz xəttin tənliyini

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

kimi yazmaq olar. M nöqtəsi bu düz xəttin üzərində olduğundan,

$$\frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 1$$

və ya $\dfrac{4}{-\frac{6}{b}} + \dfrac{3}{b} = 1 \Rightarrow \dfrac{-4b^2 + 18}{6b} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4b^2 + 6b - 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -3, \\ b_2 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Onda uyğun olaraq, $\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_2 = -4. \end{cases}$ alırıq.

Beləliklə, axtarılan nöqtələr cütü $P(2;0)$ və $Q(0;-3)$ ya da $E\left(0;\frac{3}{2}\right)$ və $F(-4;0)$ olar.

Tapşırıqlar:

4.2.1. $y = 2x - 3$ düz xəttinin parçalarla tənliyini yazın və bu düz xətti qurun.

4.2.2. α -nın hansı qiymətində

$(\alpha^2 - \alpha)x + (2+\alpha)y - 3\alpha + 1 = 0$ düz xətti:

1. OX oxuna paraleldir;
2. Koordinat başlanğıcından keçir.

4.2.3. $y = kx + 2$ düz xəttinin koordinat başlanğıcından $\sqrt{3}$ məsafəsində yerləşdiyini bilərək k-nı tapın.

4.2.4. $A\left(-2;\frac{2}{5}\right)$ nöqtəsindən keçib OX oxu ilə $arctg3$ bucağını əmələ gətirən düz xəttin tənliyini yazın.

4.2.5. $4x - 3y + 12 = 0$ düz xəttinin tənliyini bucaq əmsallı parçalarla, normal tənlik şəklində yazın.

4.2.6. Düz xəttin $A(1;1)$ və $B(-2;3)$ nöqtələrindən keçdiyini bilərək, onun bucaq əmsalını və OY oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapın.

4.2.7. Düz xətt $A(2;3)$ və $B(-4;-1)$ nöqtələrindən keçərək ordinat oxunu C nöqtəsində kəsir. C nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

4.2.8. $A(-2;-2)$ və $B(-1;6)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin üzərində yerləşib, ordinatı 22-yə bərabər olan M nöqtəsinin absisini tapın.

4.2.9. $y + 3 = k(x - 2)$ tənliyi ilə müəyyən edilən düz xətlər dəstəsindən eləsini seçin ki, $A(-2;5)$ nöqtəsindən keçsin.

4.2.10. $-4x + 2y + 1 + \lambda(x - 3y + 2) = 0$ düz xətlər dəstəsinə aid olan və $A(1;0)$ nöqtəsindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.

4.2.11. $x - 2y + 3 = 0$ və $2x + y + 5 = 0$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsindən keçib, ordinat oxuna paralel olan düz xəttin tənliyini yazın.

4.2.12. $x + y = 6 = 0$ və $2x + y - 13 = 0$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsindən keçən (verilən düz xətlərdən heç biri ilə üst-üstə düşməyən) və koordinat oxlarından bərabər parçalar ayıran düz xəttin tənliyini yazın.

4.2.13. $M(2;-6)$ nöqtəsindən keçib, OX və OY oxlarından bərabər parçalar (koordinat başlanğıcından hesablayaraq) ayıran düz xəttin tənliyini yazın.

4.2.14. α-nın hansı qiymətlərində aşağıdakı düz xətlər cütü; a)paraleldirlər; b)perpendikulyardırlar?

1) $2x-3y+4=0$ və $\alpha x-6y+7=0$;

2) $2x-4y+1=0$ və $-2x+y+2=0$;

3) $4x+y-6=0$ və $3x+\alpha y-2=0$;

4) $x-\alpha y+5=0$ və $2x+3y+3=0$.

4.2.15. $A(2;-5)$ nöqtəsi bir tərəfi $x-2y-7=0$ düz xətti üzərində yerləşən kvadratın təpə nöqtəsidir. Bu kvadratın sahəsini tapın.

4.2.16. Kvadratın iki tərəfi $5x-12y-65=0$ və $5x-12y+26=0$ düz xətləri üzərindədir. Kvadratın sahəsini tapın.

4.2.17. $A(1;2)$ nöqtəsindən keçən və $M_1(2;3), M_2(4;-5)$ nöqtələrindən bərabər məsafədə yerləşən düz xəttin tənliyini yazın.

4.2.18. $2x-3y+8=0$ və $4x-6y=10$ düz xətləri arasındakı məsafəni tapın.

4.2.19. Təpə nöqtələri $A(4;-3)$, $B(-2;6)$ və $C(5;4)$ olan üçbucağın BD hündürlüyünün uzunluğunu tapın.

4.2.20. $A(1;5)$ nöqtəsindən və kooodinat başlanğıcından 5-ə bərabər məsafədə keçən düz xəttin tənliyini yazın.

4.2.21. Təpə nöqtələri $A(-3;2)$, $B(5;-2)$, $C(0;4)$ olan üçbucağın BD hündürlüyünü öz üzərində saxlayan düz xəttin tənliyini yazın.

4.2.22. $A(1;-3)$ nöqtəsinin $2x-y+5=0$ düz xətti üzərindəki proyeksiyasının koordinatlarını tapın.

4.2.23. $x+y-4=0$ düz xəttinə nəzərən $A(-2;-2)$ nöqtəsinə simmetrik nöqtənin koordinatları tapın.

§3. İki tərtibli əyrilər.

x və y dəyişənlərinə nəzərən iki dərəcəli tənliklərlə, yəni

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad \left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right)$$

şəklində tənliklərlə təyin edilən xətlər iki tərtibli əyrilər adlanır. Bu tənlik müstəvi üzərində çevrəni, ellipsi, hiperbolanı və ya parabolanı təyin edir.

Mərkəzi $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində radiusu R-ə bərabər çevrənin tənliyi

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

şəklindədir. Xüsusi halda çevrənin mərkəzi kooordinat başlanğıcı ilə üst-üstə düşürsə, onda onun tənliyi

$$x^2 + y^2 = R^2$$

şəklində olar. Qeyd edək ki, $A = C \neq 0$ və $B = 0$ olduqda iki dərəcəli tənlik çevrəni təyin edir.

Ellipsin kanonik tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şəklindədir.

Burada a-ellipsin böyük yarımoxu, b-isə kiçik yarımozxu adlanır. c-fokuslar arasındakı məsafənin yarısına bərabər olub, a və b ilə

$$c^2 = a^2 - b^2$$

münasibəti ilə bağlıdır. Ellipsin ekssentrisiteti fokuslar arasındakı məsafənin $2c$, böyük yarımoxa $2a$ nisbəti şəklində təyin edilir:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (c < a \text{ olduğundan, } \varepsilon < 1).$$

Ellipsin fokal radiusları:

$$r_1 = a + \varepsilon\, x, r_2 = a - \varepsilon\, x \quad \left(r_1 + r_2 = 2a\right)$$

düsturları ilə təyin edilir.

Ellipsin direktrisləri

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ və } x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

şəklində düz xətlərdir.

Hiperbolanın kanonik tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ şəklindədir.}$$

Burada $2a$-hiperbolanın həqiqi oxu, $2b$ isə xəyali oxudur. Hiperbolanın fokusları arasındakı məsafənin yarısı olan c, a və b arasında $c^2 = a^2 + b^2$ münasibəti doğrudur.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($c > a$ olduğundan, $\varepsilon > 1$) ədədi hiperbolanın ekssentristeti adlanır. Sağ qanad üçün hiperbolanın fokal radiusları

$$r_1 = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = -a + \varepsilon x$$

düsturları və sol qanad üçün

$$r_1 = -a - \varepsilon x, \qquad r_2 = a - \varepsilon x$$

düsturları ilə təyin edilir.

Hiperbolanın asimptotları

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

tənlikləri ilə təyin edilir.

Hiperbolanın direktrisləri

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ və } x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

düsturları ilə təyin edilən düz xətlərdir.

Parabolanın kanonik tənliyi

$$y^2 = 2px$$

şəklindədir. Burada $p > 0$ ədədi parametr adlanan, fokus nöqtəsindən direktris arasındakı məsafəyə bərabər olan ədəddir. Fokus nöqtəsinin koordinatları $\left(\frac{p}{2};0\right)$ kimidir. $O(0;0)$ nöqtəsi parabolanın təpə nöqtəsi adlanır. Parabolanın direktrisinin tənliyi

$$x = -\frac{p}{2}$$

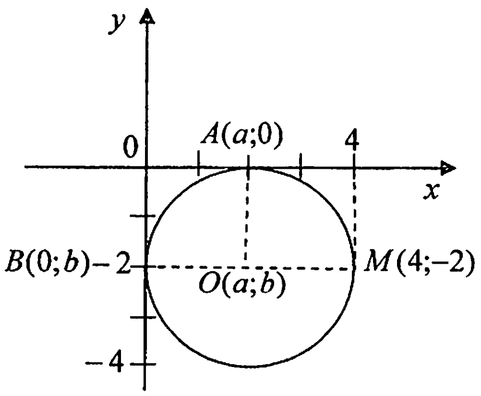
şəklindədir və fokal radius

$$r = x + \frac{p}{2}$$

düsturu ilə hesablanır.

Məsələ.

M (4;-2) nöqtəsindən keçib koordinat oxlarına toxunan çevrənin tənliyini yazın.



Şəkil 8

Həlli:

Ç: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ şəklində axtaraq.

Çevrənin koordinat oxlarına toxunma nöqtələrini A və B ilə işarə edək. Onda aydındır ki, $A(a;0)$ və $B(0;b)$

$M \in Ç \Rightarrow (4-a)^2 + (-2-b)^2 = R^2$

$$A \in Ç \Rightarrow (a-a)^2 + (0-b)^2 = R^2 \Rightarrow b^2 = R^2,$$
$$B \in Ç \Rightarrow (0-a)^2 + (b-b)^2 = R^2 \Rightarrow a^2 = R^2,$$

Deməli, $|a| = |b| = R$. $M(4;-2)$ nöqtəsinin absisi müsbət, ordinatı mənfi olduğundan, A nöqtəsinin absisi müsbət, B nöqtəsinin ordinatı isə mənfi olmalıdır. Deməli, $b = -a$. Onda,

$$(4-a)^2 + (-2-(-a))^2 = a^2 \Rightarrow 16 - 8a + a^2 + a^2 - 4a + 4 = a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 - 12a + 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -2, R_1 = 2 \\ b_2 = -10, R_2 = 10 \end{cases}$$

Beləliklə, verilən şərtləri ödəyən çevrələr

$$Ç_1 : (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

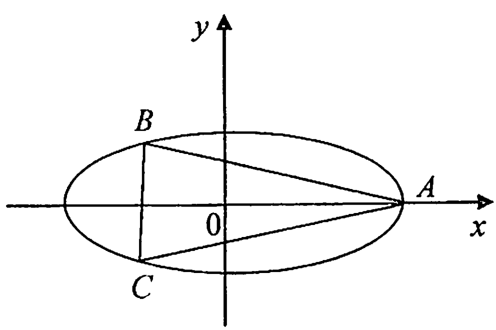
və

$$Ç_2 : (x-10)^2 + (y+10)^2 = 100$$

şəklindədir.

Məsələ.

$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ellipsinin daxilinə çəkilmiş bərabərtərəfli üçbucağın təpə nöqtələrindən biri ellipsin sağ təpəsi ilə üst-üstə düşür. Üçbucağın qalan iki təpəsinin koordinatlarını tapın.



Şəkil 9

Həlli:

Üçbucağı ABC ilə işarə edək. Ellipsin

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$$

tənliyindən $a=1, b=2$. Ona görə də A nöqtəsinin koordinatları $A(1;0)$ olur. ABC üçbucağı bərabərtərəfli olduğundan, onun təpələri ellipsin üzərində olduğundan B və C təpələri OX oxuna nəzərən simmetrik nöqtələr olar. Deməli, əgər $B(x,y)$ isə, onda $C(x;-y)$ olacaq.

Ellipsin tənliyindən

$$4x^2+y^2-4=0$$

$AB=BC$ olduğundan,

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-x)+(y-(-y))^2} \text{ və ya}$$

$$(x-1)^2+y^2=4y^2$$

olur. Buradan,

$$3y^2=(x-1)^2 \text{ və ya } y^2=\frac{1}{3}(x-1)^2.$$

y^2-nın bu qiymətini ellipsin tənliyində nəzərə alsaq,

$$12x^2+x^2-2x+1-12=0 \text{ və ya } 13x^2-2x-11=0$$

tənliyini alırıq ki, buradan da,

$$x_1=1, \quad x_2=-\frac{11}{13}$$

($x_1=1$, A təpəsinin absisidir).

$$y^2=\frac{1}{3}\left(-\frac{11}{13}-1\right)^2 \Rightarrow y^2=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{24}{13}\right)^2 \Rightarrow y=\pm\frac{24}{\sqrt{3}\cdot 13}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{8\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 13}\Rightarrow y=\pm\frac{8\sqrt{3}}{13}.$$

Beləliklə, $B\left(-\frac{11}{13};\frac{8\sqrt{3}}{13}\right)$ və $C\left(-\frac{11}{13};-\frac{8\sqrt{3}}{13}\right)$ alırıq.

Məsələ.

Xəyali yarımoxunun 2-yə bərabər olduğunu və $M\left(4;-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ nöqtəsindən keçdiyini bilərək, koordinat oxlarına nəzərən simmetrik olan hiperbolanın tənliyini yazın. M nöqtəsi ilə sağ fokus arasındakı məsafəni tapın.

Həlli:

Axtarılan tənlik $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ şəklində olmalıdır. Şərtə görə $b=2$ və M nöqtəsi hiperbola üzərindədir. Ona görə də

$$\frac{16}{a^2}-\frac{\frac{12}{9}}{4}=1\Rightarrow\frac{16}{a^2}=\frac{4}{3}\Rightarrow a^2=12$$

və hiperbolanın tənliyi

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$$

olur.

Bilirik ki,

$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=16\Rightarrow c=\pm4.$$

Deməli sağ fokus nöqtəsi $F_1(4;0)$ olur. Onda,

$$MF_1=\sqrt{(4-4)^2+\left(0+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

yəni

$$MF_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

alırıq.

Tapşırıqlar:

4.3.1. Çevrənin mərkəzinin kooordinatlarını və radiusunu tapın.

$$a)\, x^2+y^2-4x+6y-3=0;$$
$$b)\, 3x^2+3y^2+6x-4y-2=0.$$

4.3.2. Koordinat başlanğıcından $(x-4)^2+(y-2)^2=4$ çevrəsinə çəkilmiş toxunanların tənliyini yazın.

4.3.3. $x^2+y^2=9$ və $x^2+y^2-8x+12=0$ çevrələrinin mərkəzləri arasındakı məsafəni tapın.

4.3.4. $x^2+y^2-6x-8y+16=0$ və $x^2+y^2+10x+4y+13=0$ çevrələrinin mərkəzlərindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.

4.3.5. $(x-2)^2+(y+3)^2=20$ çevrəsinin $y=x-3$ düz xətti ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.

4.3.6. $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ və $x^2+y^2-6x-10y+30=0$ çevrələrinin ortaq vətərinin tənliyini yazın.

4.3.7. Təpə nöqtələri $A(0;2)$, $B(1;1)$, $C(2;-2)$ olan üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzini və radiusunu tapın.

4.3.8. $2x+y-5=0$ və $2x+y+15=0$ düz xətlərinə toxunan çevrənin tənliyini yazın. Nəzərə almaq lazımdır ki, düz xətlərdən birinin çevrəyə toxunma nöqtəsi $A(2;1)$ nöqtəsidir.

4.3.9. $16x^2+25y^2-400=0$ ellipsinin yarımoxlarını, fokuslarının koordinatlarını, ekssentrisitetinin və direktrisinin tənliyini tapın.

4.3.10. Aşağıdakı verilənlərə əsasən ellipsin tənliyini yazın:

1) böyük yarımox 10-a bərabərdir və $F_1(-6;0), F_2(10;0)$ fokus nöqtələridir;

2) $a=5, F_1(-3;5), F_2(3;5)$.

4.3.11. $3x^2+8y^2=22$ ellipsinin koordinat oxları arasındakı bucağı yarıya bölən diametrinin uzunluğunu tapın.

4.3.12. Verilənlərə əsasən hiperbolanın kanonik tənliyini yazın:

$$1)\, 2c=10, a=3;$$

$2)\ c=3, \varepsilon=1{,}5;$

$3)\ b=6, y=\pm\frac{5}{3}x$ asimptotların tənliyidir.

4.3.13. Verilənlərə əsasən hiperbolanın kanonik tənliyini yazın:

$1)\ c=10$ və $y=\pm\frac{4}{3}x$ asimptotların tənliyidir;

$2)\ \varepsilon=\frac{3}{2}$ və direktrislər arasındakı məsafə $\frac{8}{3}$-ə bərabərdir;

$3)\ \varepsilon=\sqrt{2}$ və $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$ hiperbola üzərindədir.

4.3.14. $5x^2+8y^2=40$ ellipsi verilmişdir. Təpələri bu ellipsin fokuslarında, fokusları isə ellipsin təpələrində yerləşən hiperbolanın tənliyini yazın.

V FƏSİL
FƏZADA ANALİTİK HƏNDƏSƏ

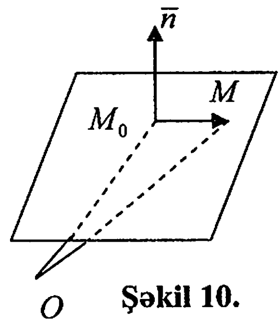
§1. Fəzada müstəvi tənlikləri.

Verilmiş müstəviyə perpendikulyar olan, sıfırdan fərqli $\bar{n}=(A;B;C)$ vektoru həmin müstəvinin normal vektoru adlanır.

$M(x_0;y_0;z_0)$ nöqtəsindən keçən, normal vektoru $\bar{n}=(A;B;C)$ olan müstəvinin vektorial tənliyi

$$\bar{n}(\bar{r}-\bar{r}_0)=0$$

şəklindədir, burada $\bar{r}_0=\overline{OM_0}$ $M(x_0;y_0;z_0)$ nöqtəsinin, $\bar{r}=\overline{OM}$ isə müstəvi üzərindəki ixtiyari $M(x;y;z)$ nöqtəsinin radius-vektorlarıdır. Bu tənlik dekart koordinat sistemində



Şəkil 10.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

və ya

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (D=-Ax_0-By_0-Cz_0)$$

şəklində yazılır. Sonuncu tənlik müstəvinin ümumi tənliyi adlanır. Qeyd edək ki, $\bar{n}\neq\bar{0}$ olduğundan A,B,C əmsalları eyni zamanda sıfra bərabər ola bilməzlər. Əgər $A\neq 0, B\neq 0$ və $C\neq 0$ olarsa, ümumi tənliyi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

şəklində yazmaq olar ki, bu da müstəvinin parçalarla tənliyi adlanır, burada $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}$ olub, müstəvinin uyğun olaraq, OX, OY və OZ oxlarından ayırdığı parçaların uzunluğudur.

Verilmiş üç $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$ və $M_3(x_3;y_3;z_3)$ nöqtələrindən keçən müstəvinin tənliyi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

şəklindədir.

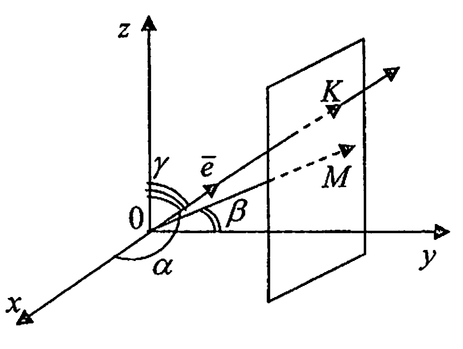
Müstəvinin ümumi tənliyinin hər tərəfini normallaşdırıcı

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

vuruğuna vurmaqla onu normal

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

şəklinə gətirmək olar. Burada p koordinat başlanğıcından müstəviyə endirilmiş OK perpendikulyarının uzunluğu, α, β, γ isə istiqaməti OK perpendikulyarının istinaməti ilə eyni olan $\bar{e}$ vahid vektorunun uyğun olaraq OX, OY və OZ oxları ilə əmələ gətirdiyi bucaqlardır.



Şəkil 11.

Fəzada verilmiş

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{və} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

müstəviləri arasındakı bucağın kosinusu

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

düsturu ilə təyin edilir. Verilmiş iki müstəvinin bir-birinə paralel olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

şəklindədir;

İki müstəvinin üst-üstə düşməsi şərti

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$$

münasibəti ilə təyin edilir.

İki müstəvinin perpendikulyar olması üçün zəruri və kafi şərt

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

bərabərliyi ilə ifadə edilir.

Verilmiş $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nöqtəsindən

$$Ax+By+Cz+D=0$$

müstəvisinə qədər olan məsafə

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

düsturu ilə təyin edilir.

Əgər müstəvi normal

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

tənliyi ilə verilmişdirsə onda, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nöqtəsindən bu müstəviyə qədər olan məsafə

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|$$

düsturu ilə tapılır.

Məsələ.

$M(2;5;-4)$ nöqtəsindən keçən və koordinat oxlarından bərabər parçalar ayıran müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli:

Müstəvinin parçalarla tənliyi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

şəklindədir. Şərtə görə $a=b=c$ olduğundan müstəvinin tənliyi

$$x+y+z=a$$

şəklini alır. Müstəvi M nöqtəsindən keçdiyindən

$$2+5+(-4)=a,$$

və ya $a=3$ alırıq. Deməli, axtarılan müstəvinin tənliyi

$$x+y+z-3=0$$

olar.

Məsələ.

$M(8;3;6)$, $N(4;2;7)$ nöqtələrindən keçən və OZ oxundan $c=6$ parçasını ayıran müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli:

Axtarılan müstəvi M,N nöqtələrindən və $P(0;0;6)$ nöqtəsindən keçdiyindən:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-6 \\ 8-0 & 3-0 & 6-6 \\ 4-0 & 2-0 & 7-6 \end{vmatrix}=0$$

olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} x & y & z-6 \\ 8 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

və ya

$$3x-8y+4z-24=0$$

axtarılan müstəvinin tənliyidir.

Məsələ.

Koordinat başlanğıcından və $M(2;1;-1)$ nöqtəsindən keçib, $2x-3z=0$ müstəvisinə perpendikulyar müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli:

Axtarılan müstəvi $O(0;0;0)$ nöqtəsindən keçdiyindən onun tənliyi

$$Ax+By+Cz=0$$

şəklindədir.

Axtarılan müstəvinin $\bar{n}=(A;B;C)$ normalı, həmin müstəvinin üzərində yerləşən $\overline{OM}=(2;1;-1)$ vektoruna (çünki, həm O, həm də M nöqtəsi müstəvinin üzərindədir) və $2x-3z=0$ müstəvinin $\bar{n}_1=(2;0;-3)$ normal vektoruna perpendikulyar olmalıdır.

Deməli,

$$A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

və ya

$$A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k}=3\bar{i}-4\bar{j}+2\bar{k}.$$

Odur ki, $\bar{n}=(3;-4;2)$ və axtarılan müstəvinin tənliyi:

$$3x-4y+2z=0$$

olur.

Tapşırıqlar:

5.1.1. $M(-2;3;1)$ nöqtəsi verilmişdir. 1) M nöqtəsindən keçib, OXY müstəvisinə paralel olan müstəvinin; 2) M nöqtəsindən və OY oxundan keçən müstəvinin tənliyini yazın.

5.1.2. $A(5;-4;6)$ nöqtəsi verilmişdir. 1) A nöqtəsindən keçib, OX oxuna perpendikulyar olan; 2) A nöqtəsindən keçib, müsbət koordinat yarımoxlarından bərabər parçalar ayıran müstəvinin tənliyini yazın.

5.1.3. $3x-4y+5z-10=0$ müstəvisinə perpendikulyar olan radius-vektorun istiqamətverici kosinuslarını təyin edin.

5.1.4. $M_1(2;0;-1)$ və $M_2(-3;1;3)$ nöqtələrindən keçib, $\bar{s}=(1;2;-1)$ vektoruna paralel olan müstəvinin tənliyini yazın.

5.1.5. $M(1;-1;0)$ nöqtəsindən keçib, $\bar{a}=(0;2;3)$ və $\bar{b}=(-1;4;2)$ vektorlarına paralel olan müstəvinin tənliyini yazın.

5.1.6. $M_1(-2;0;0), M_2(0;4;0), M_3(0;0;5)$ nöqtələrindən keçən müstəvinin tənliyini yazın.

5.1.7. $M(1;1;1)$ nöqtəsindən keçib, $x-y+2z-3=0$ və $2x-z+4=0$ müstəvilərinin kəsişmə xəttinə perpendikulyar olan müstəvinin tənliyini yazın.

5.1.8. $x+3y-5z-15=0$ müstəvisi və koordinat müstəviləri ilə məhdudlanmış piramidanın həcmini tapın.

5.1.9. Koordinat başlanğıcından $20x-5y+4z-210=0$ müstəvisinə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğunu və onun OZ oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağı tapın.

5.1.10. $M(2;-4;4)$ nöqtəsi koordinat başlanğıcından p müstəvisinə endirilmiş perpendikulyarın oturacağı olduğunu bilərək, bu müstəvinin tənliyini yazın.

5.1.11. $M_1(4;2;3)$ və $M_2(2;0;1)$ nöqtələrindən keçib, $x+2y+3z+4=0$ müstəvisinə perpendikulyar müstəvinin tənliyini yazın.

5.1.12. $M(-4;-3;-2)$ nöqtəsindən keçib, $x+2y-3z-6=0$ müstəvisinə paralel olan müstəvinin tənliyini yazın.

5.1.13. $M(0;-3;2)$ nöqtəsindən keçib,

$$M_1(0;-2;-1), M_2(1;-3;4), M_3(1;1;-1)$$

nöqtələrindən keçən müstəviyə paralel olan müstəvinin tənliyini yazın.

5.1.14. Verilmiş müstəvilər arasındakı iti bucağı tapın:

$1)\, x+y-2z+5=0$ və $2x+3y+z-2=0$;

$2)\, 2x-2y+z=0$ və $z=0$

5.1.15. Aşağıdakı müstəvilər cütünün hansının paralel, hansının perpendikulyar olduğunu müəyyən edin:

$1)\, 3x+4y-z+8=0$ və $6x+8y-2z-3=0$;

$2)\, 3x-6y+3z-12=0$ və $-x+2y-z+4=0$;

$3)\, x+2y-5z+1=0$ və $2x+4y+2z-7=0$

§2. Fəzada düz xətt tənlikləri.

Verilmiş düz xəttin və ya ona paralel düz xəttin üzərində yerləşən hər hansı sıfırdan fərqli vektor həmin düz xəttin istiqamətverici vektoru adlanır.

Fəzada düz xətti müxtəlif tənliklərlə ifadə etmək olar.

1. Verilmiş $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nöqtəsindən keçib $\bar{s}=(m,n,p)$ vektoruna paralel düz xəttin kanonik tənliyi

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

şəklindədir, burada məxrəclərdən birinin sıfra bərabər olması, uyğun surətin də sıfra bərabər olması deməkdir.

2. t dəyişən parametr olduqda düz xəttin parametrik tənlikləri

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$

şəklindədir.

3. Verilmiş iki $M_1(x_1;y_1;z_1)$ və $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

şəklindədir, burada $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ və $z_1 \neq z_2$.

4. Hər bir düz xəttə iki müstəvinin kəsişmə xətti kimi baxmaq olar:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Bu, düz xəttin ümumi tənliyidir. Bu düz xəttiin istiqamətverici $\bar{s}$ vektorunu

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

düsturunun köməyi ilə tapmaq olar.

Tutaq ki, fəzada L_1 və L_2 düz xətləri verilmişdir:

$$L_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ və } L_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

Bu düz xətlər arasındakı iti bucağı

$$\cos\varphi = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

düsturu ilə tapmaq olar.

L_1 və L_2 düz xətlərinin perpendikulyarlıq **1)** şərti $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ və paralellik **2)**şərti $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ şəklindədir.

L_1 və L_2 düz xətlərinin bir müstəvi üzərində olması şərti

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

münasibətindən ibarətdir. Bu halda $\bar{S}_1 // \bar{S}_2$ olarsa L_1 və L_2 kəsişirlər. L_1 və L_2 düz xətləri arasındakı ən qısa məsafə

$$d=\frac{\begin{Vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{Vmatrix}}$$

düsturun köməyi ilə hesablana bilər.

Məsələ. $\begin{cases} 5x+3y-2z+4=0, \\ 2x+3y-z+3=0. \end{cases}$ düz xəttinin kanonik tənliyini yazın.

Həlli:

İki müstəvinin kəsişməsi kimi verilmiş bu düz xəttin üzərində bir $M(x_0;y_0)$ nöqtəsini təyin edək. Bunun üçün, məsələn, $x_0=1$ qəbul edək, onda

$$\begin{cases} 3y_0-2z_0=-9, \\ 3y_0-z_0=-5. \end{cases}$$

Buradan $y_0=-\frac{1}{3}$ və $z_0=4$. Deməli, $M_0\left(1;-\frac{1}{3};4\right)$ nöqtəsi düz xəttin üzərindədir. İndi isə düz xəttin yönəldicisi $\bar{s}$ vektorunu tapaq. Müstəvilərin normalları $\overline{N}_1=(5;3;-2)$ və $\overline{N}_2=(2;3;-1)$ olduğundan,

$$\overline{S}=\left[\overline{N}_1,\overline{N}_2\right]=\begin{vmatrix} \bar{\mathrm{i}} & \bar{\mathrm{j}} & \bar{\mathrm{k}} \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=3\bar{i}+1\bar{j}+9\bar{k}.$$

Deməli, verilmiş düz xəttin kanonik tənliyi

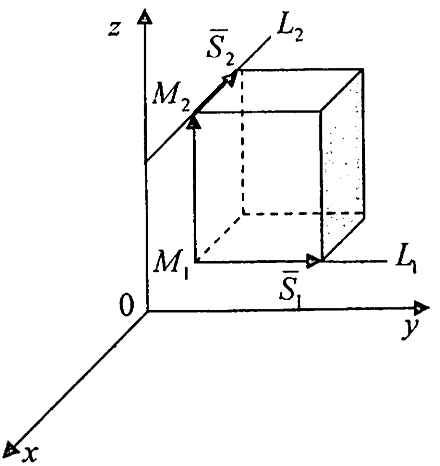
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+\frac{1}{3}}{1}=\frac{z-4}{9}$$

olur.

Məsələ.

$$L_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{1} \text{ və } L_2:\frac{x+4}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{4}$$

düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyətini müəyyənləşdirin və aralarındakı məsafəni tapın.



Şəkil 12.

Həlli:

Aydındır ki, L_1 düz xətti $M_1(0;1;-2)$ nöqtəsindən, L_2 düz xətti isə $M_2(-4;-4;1)$ nöqtəsindən keçir. Onda,

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(-4-0;-3-1;1-(-2))$$

və ya

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(-4;3;3) \text{ olar.}$$

L_1 düz xəttinin istiqamətverici vektoru $\vec{S_1}=(2;-3;1)$ və L_2 düz xəttinin istiqamətverici vektoru

$$\overline{S_2}=(3;2;4)$$

olduğunu nəzərə alaraq $\overline{M_1M_2}$, $\overline{S_1}$ və $\overline{S_2}$ vektorlarının bir müstəvinin üzərində olmasını (onların komplanarlığını) yoxlayaq. Bunun üçün onların qarışıq hasilini hesablayaq:

$$\left(\overline{M_1M_2},\left[\overline{S_1},\overline{S_2}\right]\right)=\begin{vmatrix}-4 & -4 & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{vmatrix}=115\neq 0$$

Deməli, L_1 və L_2 çarpaz düz xətlərdir. İndi isə L_1 və L_2 arasındakı məsafəni tapaq. Bilirik ki, $\left(\overline{M_1,M_2},\left[\overline{S_1},\overline{S_2}\right]\right)$ qarışıq hasili $\overline{M_1M_2}$, $\overline{S_1}$ və $\overline{S_2}$ vektorları üzərində qurulmuş paralelepipedin həcminə bərabərdir:

$$V_{par}=\left(\overline{M_1M_2},\left[\overline{S_1},\overline{S_2}\right]\right)=115.$$

Bu paralelopipedin oturacağının sahəsi isə ədədi qiymətcə $\left[\vec{S_1},\vec{S_2}\right]$ vektorial hasilinin nəticəsi olan vektorun uzunluğuna bərabərdir. Odur ki,

$$\left[\overline{S_1},\overline{S_2}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{vmatrix}=-14\bar{i}-5\bar{j}+13\bar{k} \quad \text{və}$$

$$S_{ot}=\sqrt{196+25+169}=\sqrt{390}.$$

Digər tərəfdən

$V_{par}=\left|S_{ot}\right|\cdot H$ olduğundan,

$$H=\frac{V_{par}}{\left|S_{ot}\right|}=\frac{115}{\sqrt{390}}\approx\frac{115}{19{,}748}=5{,}82.$$

alırıq.

Tapşırıqlar:

5.2.1. $\begin{cases} x+2y+4z-8=0, \\ 6x+3y+2z-18=0. \end{cases}$ düz xəttinin kanonik tənliyini yazın.

5.2.2. $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2,5}{0}=\dfrac{z-1}{-4}$ düz xəttinin istiqamətverici kosinuslarını tapın.

5.2.3. 1) $M(1;0;-1)$ nöqtəsindən keçən və $\bar{a}=(2;3;0)$ vektoruna paralel olan düz xəttin tənliyini yazın;
2) $A(2;2;2)$ və $B(6;2;1)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.

5.2.4. $A(-3;5;4), B(2;4;6), C(2;14;6)$ nöqtələrinin bir düz xətt üzərində olub-olmadığını yoxlayın.

5.2.5. $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-5}{5}$ düz xəttinin koordinat müstəviləri ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.

5.2.6. $M(-4;2;2)$ nöqtəsindən keçib OZ oxuna perpendikulyar olan düz xəttin tənliyini yazın.

5.2.7. $M(1;-1;2)$ nöqtəsindən keçib, $\bar{a}=(2;2;3)$ və $\bar{b}=(-2;5;0)$ vektorlarına perpendikulyar olan düz xəttin tənliyini yazın.

5.2.8. Təpə nöqtələri $A(-3;2;8), B(-7;0;3), C(3;4;5)$ olan üçbucağın A təpəsindən çəkilmiş medianının parametrik tənliyini yazın.

5.2.9. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x-y+2z=0. \end{cases}$ düz xəttinin parametrik tənliyini yazın.

5.2.10. Verilmiş düz xətlər arasındakı iti bucağı tapın:

1) $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y+1}{8}=\dfrac{z-1}{7}$ və $\dfrac{x-4}{7}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{8}$;

2) $\begin{cases} x-y+2=0, \\ 2x+y-z-6=0. \end{cases}$ və $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ x-y+3z+1=0. \end{cases}$

5.2.11. Düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyətini müəyyən edin:

1) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$ və $\begin{cases} x=5-8t, \\ y=4-6t, \\ z=3+4t. \end{cases}$

2) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{1}$ və $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{4}$,

5.2.12. OXY müstəvisi üzərində yerləşən, koordinat başlanğıcından keçən və $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-4}{3}$ düz xəttinə perpendikulyar olan düz xəttin kanonik tənliyini yazın.

5.2.13. $M(1;-2;3)$ nöqtəsindən keçib, $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$ və $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+4}{-5}=\dfrac{z-1}{4}$ düz xətlərinə perpendikulyar olan düz xəttin tənliyini yazın.

5.2.14. $M(-5;4;3)$ nöqtəsindən $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{2}$ düz xəttinə qədər olan məsafəni tapın.

5.2.15. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$ və $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$ paralel düz xətləri arasındakı məsafəni tapın.

5.2.16. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{4}$ və $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{4}$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını tapın.

5.2.17. $\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y-8}{0}=\dfrac{z-2}{3}$ və $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$ çarpaz düz xətləri arasındakı məsafəni tapın.

§3. Fəzada düz xətt və müstəvi.

$L: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ düz xətti və

$Q: Ax + By + Cz + D = 0$ müstəvisi arasındakı bucağın

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

düsturunun köməyi ilə hesablamaq olar.

L düz xətti ilə Q müstəvisinin

a)Paralellik şərti

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

b)Perpendikulyarlıq şərti

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

şəklindədir.

Düz xətlə müstəvinin kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün, düz xəttin parametrik tənliklərini

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

müstəvinin tənliyində nəzərə almaq kifayətdir:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

L düz xəttinin Q müstəvisi üzərində olması şərti:

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

Əgər $Am + Bn + Cp \neq 0$ olarsa, onda düz xətt müstəvini kəsir; $Am + Bn + Cp = 0$ və $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ olduqda isə düz xətt müstəviyə paraleldir.

Məsələ.

$M(4;-3;6)$ nöqtəsindən keçən və $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{-2}$ düz xəttinə perpendikulyar olan müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli:

Axtarılan müstəvinin $\overline{N}$ normalı bu müstəvinin perpendikulyar olduğu düz xəttin yönəldici $\overline{S}=(2;1;-2)$ vektoru ilə eyni olacaqdır:

$$\overline{N}=(2;1;-2).$$

Onda müstəvinin tənliyi:

$$2x+y-2z+D=0$$

olar. D-ni tapmaq üçün müstəvinin $M(4;-3;6)$ nöqtəsindən keçdiyini nəzərə almaq kifayətdir:

$$2\cdot4-3-2\cdot6+D=0$$

və $D=7$.

Deməli, axtarılan müstəvinin tənliyi

$$2x+y-2z+7=0$$

olur.

Məsələ.

$\frac{x}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-3}(L)$ düz xəttinin $2x-3y+z-4=0(Q)$ tənliyi ilə verilmiş müstəvi üzərindəki proyeksiyasının tənliyini yazın.

Həlli:

Verilmiş düz xətti iki müstəvinin kəsişməsi kimi yazmaq olar:

$$\begin{cases}\frac{z+1}{-3}=\frac{x}{5},\\ \frac{y+1}{-2}=\frac{x}{5}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+5z+5=0,\\ 2x+5y+5=0.\end{cases}$$

Belə müstəvilər dəstəsinə baxaq:

$$3x+5z+5+\alpha(2x+5y+5)=0$$

və ya

$$(3+2\alpha)x+5\alpha y+5z+(5\alpha+5)=0\,.$$

Bu müstəvilər dəstəsindən elə müstəvi seçək ki, həmin müstəvi verilmiş müstəviyə perpendikulyar olsun. Onda

$$2\cdot(3+2\alpha)+(-3)\cdot 5\alpha+1\cdot 5=0 \Rightarrow \alpha=1$$

alırıq.

Odur ki, $2x-3y+z-4=0$ müstəvisinə perpendikulyar müstəvinin tənliyi

$5x+5y+5z+10=0$ və ya $x+y+z+2=0(R)$ olar.

L düz xəttinin Q üzərindəki proyeksiyası düz xətt olacaqdır. Ona görə də tənliyi axtarılan proyeksiya P və R müstəvilərinin kəsişmə xətti olar:

$$\begin{cases} 2x-3y+z-4=0, (Q) \\ x+y+z+2=0. (R) \end{cases}$$

Tapşırıqlar:

5.3.1. $M(0;1;2)$ nöqtəsindən və $\begin{cases} x-3y+5=0, \\ 2x+y+z-2=0. \end{cases}$ düz xəttindən keçən müstəvinin tənliyini yazın.

5.3.2. $\begin{cases} x-y+z=0, \\ 2x+y-z-3=0. \end{cases}$ düz xətti ilə $2x+y-2z-3=0$ müstəvisi arasındakı iti bucağı tapın:

5.3.3. Verilmiş L düz xətti ilə Q müstəvisi arasındakı bucağı tapın:

1) $\begin{cases} x-y+4z-6=0, \\ 2x+y-z+3=0. \end{cases}$ (L) və $3x-y+6z-12=0$ (Q);

2) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+13}{17}=\dfrac{2+7}{13}$ (L) və $5x-z=4$ (Q)

5.3.4. $\frac{x-0{,}5}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2{,}5}{3}$ düz xəttindən keçib, $3x+4y-5z-6=0$ müstəvisinə perpendikulyar müstəvinin tənliyini yazın.

5.3.5. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{-1}$ və $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{-1}$ paralel düz xətlərindən keçən müstəvinin tənliyini yazın.

5.3.6. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$ düz xəttinin $3x-y+2z+5=0$ müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini tapın.

5.3.7. m-in hansı qiymətində $\frac{x+10}{m}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+2}{-6}$ düz xətti $5x-3y+4z-1=0$ müstəvisinə paralel olar?

5.3.8. C və D-nin hansı qiymətlərində $\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{7}$ düz xətti $2x-y+Cz+D=0$ müstəvisinin üzərində yerləşər?

5.3.9. $M(1;1;6)$ nöqtəsindən keçib,

$$\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=2t, \\ z=t. \end{cases}$$

düz xəttinə endirilmiş perpendikulyarın tənliyini yazın.

5.3.10. $\begin{cases} x+2y-z+2=0, \\ 3x-y+z-5=0. \end{cases}$ düz xəttindən keçib, $\begin{cases} x=1-t, \\ y=-2+2t, \\ z=1+2t. \end{cases}$ düz xəttinə perpendikulyar müstəvinin tənliyini yazın.

5.3.11. $M(3;5;5)$ nöqtəsindən $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$ düz xəttinə qədər olan məsafəni tapın.

5.3.12. L düz xətti $M(3;-4;0)$ nöqtəsindən və $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{1}$ düz xəttinin $x+y-z+2=0$ müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsindən keçir. L düz xəttinin $2x+y+2z-5=0$ müstəvisi ilə əmələ gətirdiyi bucağı tapın.

5.3.13. Verilmiş paralel düz xətlər arasındakı məsafəni tapın:

$$1)\ \begin{cases} x+z=1, \\ y+2z=0. \end{cases} \text{ və } \begin{cases} x+z=1, \\ y+2z=1. \end{cases}$$

$$2)\ \frac{x}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-1}{-3} \text{ və } \frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{-8}=\frac{z+1}{-12}$$

5.3.14. $\frac{x-9}{-6}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$ və $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$ düz xətləri arasındakı məsafəni tapın.

C A V A B L A R

I FƏSİL. MATRİSLƏR VƏ DETERMİNANTLAR

§1. Matrislər üzərində əməllər.

1.1.1. $\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$. **1.1.2.** $\begin{pmatrix} -7 & -9 & 10 \\ 22 & 11 & -23 \\ -12 & -6 & 40 \end{pmatrix}$.

1.1.3. $\begin{pmatrix} 29 & -10 & -3 & -8 \\ 28 & 2 & 3 & 13 \\ 17 & 1 & 10 & 20 \end{pmatrix}$. **1.1.4.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$.

1.1.5. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1.1.6.** $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix}$.

1.1.7. $\begin{pmatrix} 4 & -22 & -29 & 47 \\ 64 & -7 & -33 & 4 \\ -8 & -18 & 14 & -19 \end{pmatrix}$. **1.1.8.** $\begin{pmatrix} -20 & -7 & 8 \\ 28 & 19 & -6 \\ -5 & 18 & 27 \end{pmatrix}$

1.1.9. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{pmatrix}$.

1.1.10. $A\cdot B=(31), B\cdot A=\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.11. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 20 & 40 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}$.

1.1.12. $A\cdot B=B\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

1.1.13. $A\cdot B$-yoxdur, $B\cdot A=\begin{pmatrix}10&14\\4&4\\-1&-2\end{pmatrix}$.

1.1.14. $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}-3&-4\\7&10\end{pmatrix}$.

1.1.15. $A\cdot B=(-1), B\cdot A=\begin{pmatrix}5&-10&15&0\\-3&6&-9&0\\-4&8&-12&0\\1&-2&3&0\end{pmatrix}$.

1.1.16. $A\cdot B=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$, $B\cdot A$ – yoxdur.

1.1.17. $A\cdot B=\begin{pmatrix}-14&11\\10&8\end{pmatrix}, B\cdot A=\begin{pmatrix}14&2&-2\\-9&-15&3\\17&23&-5\end{pmatrix}$.

1.1.18. $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&-9&14\\5&-22&-11\\-18&19&-32\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}-18&-21&6\\-13&-13&-5\\-18&-9&-21\end{pmatrix}$.

1.1.19. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C=\begin{pmatrix}13&-8\\13&8\end{pmatrix}$.

1.1.20. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$.

1.1.21. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C=(3\quad -17\quad -68\quad 38)$.

1.1.22. $\begin{pmatrix}6&95\\0&-70\end{pmatrix}$. **1.1.23.** $\begin{pmatrix}-24&12\\-12&-12\end{pmatrix}$.

1.1.24. $\begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}$. **1.1.25.** $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.26. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. **1.1. 27.** $\begin{pmatrix} 21 & -60 \\ 0 & 61 \end{pmatrix}$.

1.1.28. $\begin{pmatrix} 18 & -20 \\ 30 & -2 \end{pmatrix}$. **1.1.29.** $\begin{pmatrix} -102 & 105 \\ 35 & -32 \end{pmatrix}$.

1.1.30. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix}$. **1.1.31.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1.1.32. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1.1.33.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & -342 & 360 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.34. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1.1.35.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.36. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 0 & 10 & -10 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1.1.37.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & -1 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.38. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$. **1.1.39.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.40. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 8 & -13 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ **1.1.41.** $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -5 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.1.42. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -7 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 12 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 28\end{pmatrix}$.

§2. Determinantlar.

1.2.1. 2. **1.2.2.** 0. **1.2.3.** 0. **1.2.4.** ad-bc. **1.2.5.** 1.

1.2.6. $\dfrac{1}{\cos^2\varphi}$. **1.2.7.** –3. **1.2.8.** 0. **1.2.9.** 40. **1.2.10.** –12.

1.2.11. 1. **1.2.12.** 20. **1.2.13.** 6. **1.2.14.** –6. **1.2.15.** $-x\cdot y\cdot z$

1.2.16. 0. **1.2.17.** 8. **1.2.18.** –9. **1.2.19.** –8. **1.2.20.** 0.

1.2.21. 3. **1.2.22.** 4.**1.2.23.** $\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$.

§3. Matrisin ranqı. Bazis minoru.

1.3.1. 2. **1.3.2.** 3. **1.3.3.** 3. **1.3.4.** 3. **1.3.5.** 3. **1.3.6.** 4.

1.3.7. $3;|A|$. **1.3.8.** $2;\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}$. **1.3.9.** $2;\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}$.

1.3.10. $3;\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 4\end{vmatrix}$. **1.3.11.** $2;\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{vmatrix}$.

1.3.12. $3;\ \begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 4\\ 7 & 7 & 1\end{vmatrix}$. **1.3.13.** $2;\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & -3\end{vmatrix}$.

1.3.14. $3;|A|$.

1.3.15. $2;\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}$. **1.3.16.** $3;\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}$.

1.3.17. $3;\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & -2 & -1\end{vmatrix}$. **1.3.18.** $2;\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}$.

§4. Tərs matrisin tapılması.

1.4.1. $\begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}$. **1.4.2.** $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.4.3. $\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\\ 2/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}$. **1.4.4.** $\begin{pmatrix}-4 & 3 & -2\\ -8 & 6 & -5\\ -7 & 5 & -4\end{pmatrix}$.

1.4.5. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **1.4.6.** $\begin{pmatrix} 2/3 & -5/12 & -1/12 \\ -1/3 & 7/12 & -1/12 \\ -1/3 & 1/12 & 5/12 \end{pmatrix}$.

1.4.7. A^{-1} yoxdur. **1.4.8.** $\begin{pmatrix} 1/19 & -1/19 & -3/19 \\ 9/19 & 10/19 & 11/19 \\ -13/19 & -25/19 & -18/19 \end{pmatrix}$.

1.4.9. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.10.** $\begin{pmatrix} 4/3 & 7/3 & -5/3 \\ -2/3 & -1/6 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

1.4.11. A^{-1} yoxdur. **1.4.12.** $\begin{pmatrix} -1/6 & -1/5 & -61/60 & 23/60 \\ 1/3 & 3/10 & 11/15 & -11/30 \\ -1/6 & 0 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & -1/10 & -1/20 & 3/20 \end{pmatrix}$.

1.4.13. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. **1.4.14.** $\begin{pmatrix} -1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

1.4.15. $\begin{pmatrix} 11/41 & 6/41 & -4/41 \\ -5/41 & 1/41 & 13/41 \\ 14/41 & -11/41 & -20/41 \end{pmatrix}$. **1.4.16.** A^{-1} yoxdur.

1.4.17. $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. **1.4.18.** $\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. **1.4.19.** $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.20. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **1.4.21.** X yoxdur. **1.4.22.** $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.23. $\begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -17 & 13 & -10 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$. **1.4.24.** $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. **1.4.25.** X yoxdur.

1.4.26. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

1.4.27. $\begin{pmatrix} 5/2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.28. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4.29. $\begin{pmatrix} 15/7 \\ -16/7 \\ -11/7 \end{pmatrix}$.

II FƏSİL. XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ

§1. Xətti tənliklər sisteminin araşdırılması Kroneker-Kapelli teoremi. Qauss üsulu.

2.1.1. Sistem uyuşan və müəyyəndir; ümumi həll (ü.h.)=xüsusi həll *x.h.*.
2.1.2. Uyuşmayandır. **2.1.3.** Uyuşan və qeyri-müəyyəndir; ü.h. (t+1; t); *x.h.* (1;0).
2.1.4. Uyuşan və qeyri-müəyyəndir; ü.h. $(3-t_1-t_2;t_1;t_2)$. *x.h.* (3;0;0). **2.1.5.** Uyuşmayandır.
2.1.6. Uyuşan və qeyri-müəyyəndir; ü.h. $=$*x.h.* (-3t; t; 5t); *x.h*.(0;0;0). **2.1.7.** Uyuşan və müəyyəndir; ü.h. $=$*x.h.* (0;0;0).
2.1.8. Uyuşan və müəyyəndir;ü.h.= *x.h.* (2;3;5)
2.1.9. Uyuşan və müəyyəndir; ü.h. $=$*x.h.* (0;5;1).
2.1.10. Uyuşan və qeyri-müəyyəndir; ü.h. (-3t; t; 5t+1); *x.h.* (0;0;1).
2.1.11. Uyuşmayandır. **2.1.12.** Uyuşmayandır. **2.1.13.** Uyuşan və müəyyəndir; ü.h.= *x.h.* (2;-1;3). **2.1.14.** Uyuşmayandır.
2.1.15. Uyuşan və müəyyəndir; ü.h.= *x.h.* (0;0;0).

§2. Xətti tənliklər sisteminin tərs matrisin köməyi ilə həlli. Kramer düsturları.

2.2.1. Sistemi nə tərs matris üsulu ilə nə də Kramer düsturları ilə həll etmək olmaz.
2.2.1. (-3;1). **2.2.3.** $(\sqrt{3};4)$. **2.2.4.** $(a\cdot b\neq 0 \ olduqda)$ $\left(-b;\frac{2}{3}a\right)$; $a\cdot b=0$ olduqda, sistemi həll etmək olmaz.

2.2.5. $ad-bc\neq 0 \ olduqda$ $\left(\frac{f_1d-f_2b}{ad-bc};\frac{af_2-cf_1}{ad-bc}\right)$; $ad-bc=0$ olduqda, sistemi həll etmək olmaz.
2.2.6. (-2;-2;1). **2.2.7.** (1;2;3). **2.2.8.** Sistemi həll etmək olmaz.
2.2.9. (2;-3). **2.2.10.** (-1;1;3). **2.2.11.** (2;-3;2). **2.2.12.** Sistemi həll etmək olmaz.

§3. Bircins və qeyri-bircins xətti tənliklər sistemi.

2.3.1.Ümumi həll (0,4,0); həllərin fundamental sistemi yoxdur.
2.3.2. (-t;t), (-1;1).**2.3.3.** (3t;2t), (3;2). **2.3.4.** (0;t;t), (0;1;1).
2.3.5. $(t_2 - t_1; t_1; t_2), (-1;1;0), (1;0;1)$. **2.3.6.** (t;-2t;t); (1;-2;1).
2.3.7. ü.h. (0;0;0;0;0;0); həllərin fundamental sistemi yoxdur.
2.3.8. $(2t_1 - 3t_2; t_1; t_2), (2;1;0), (-3;0;1)$.
2.3.9. $(t_1; t_2; t_2 - 2t_1), (1;0;-2), (0;1;1)$.
2.3.10. ü.h. (0;0;0); həllərin fundamental sistemi yoxdur.
2.3.11. (t;2t), (1;2). **2.3.12.** $(t_1 + t_2; t_1; t_2)$, $(1;1;0); (1;0;1)$.
2.3.13. (t;7t;-5t); (1;7;-5). **2.3.14.** (-;0;0); həllərin fundamental sistemi yoxdur. **2.3.15.** (t;-t;t), (1;-1;1).
2.3.16. $(2t_1 - 3t_2; t_1; t_2), (2;1;0); (-3;0;1)$.**2.3.17.** (t;3t;5t), (1;3;5).
2.3.18. $(t_1 - t_2; t_1 - t_3; t_1; t_2; t_3), (1;1;1;0;0), (-1;0;0;1;0))$,
(0;-1;0;0;1).

III FƏSİL. VEKTORLAR CƏBRİ

§1. Vektorlar və onlar üzərində xətti əməllər. Vektorların ayrılışı.

3.1.1. $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$. **3.1.3.** Hə. $\bar{d} = -\sqrt{3} \cdot \bar{c}$.

3.1.4. $(-\infty;0) \cup (1;\infty)$. **3.1.5.** $(-\infty;-1) \cup (0;2)$.

3.1.6. 22. **3.1.7.** 13;13. **3.1.8.** $\overline{AB} = 3\bar{a} - \bar{b}; \overline{BC} = 2\bar{b} - 3\bar{a}$.

3.1.9.D(4;0;6). **3.1.10.** $\bar{a} = -\frac{25}{7}\bar{i} + \frac{20}{7}\bar{j} - \frac{10\sqrt{2}}{7}\bar{k}$.

3.1.11. $\alpha = -1, \beta = 4$. **3.1.12.** $\bar{c} = 5\bar{a} + 2\bar{b}$.

3.1.13. $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$. **3.1.14.** (0;1;0). **3.1.15.** 7.

3.1.16. $\bar{c} = -2\bar{a} + 2\bar{b}$. **3.1.17.** $\bar{d} = -12\bar{i} - 21\bar{j} + 12\bar{k}$.

§2. Vektorların skalyar hasili.

3.2.1. 242. **3.2.2.** $\sqrt{13}$. **3.2.3.** $\sqrt{73}$. **3.2.4.** $\bar{c} = \pm(6\bar{i} - 9\bar{j} - 2\bar{k})$.

3.2.5. $\frac{\pi}{2}$. **3.2.8.** (2;4;-6). **3.2.9.** –5. **3.2.10.** a) $3;3;\sqrt{2}$;

b) $\approx 76^0; \approx 76^0; \approx 27^0$; c) $\approx 50^0$. **3.2.11.** $\approx 122^0; \approx 37^0; \approx 74^0$.

3.2.13. $\frac{\pi}{2}; \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}; \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **3.2.14.** 60^0.

3.2.16. $8\bar{i} + 8\bar{j} + 7\bar{k}$

§3. Vektorların vektorial hasili.

3.3.1. (5;1;7). **3.3.2.** (10;10;10); $10\sqrt{3}$. **3.3.3.** $\sqrt{3}; 5\sqrt{3}$.

3.3.4. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. **3.3.5.** $\frac{\sqrt{195}}{2}$. **3.3.6.** $18\sqrt{2}$.

3.3.7. $50\sqrt{2}$ **3.3.8.** $\pm\frac{1}{3\sqrt{10}}\left(5\bar{i}-\bar{j}-8\bar{k}\right)$.

3.3.9. $\pm\left(0;\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$. **3.3.10.** $42\sqrt{2}$. **3.3.11.** $4\sqrt{2}$.

3.3.12. $(-40;40;20);\frac{5}{\sqrt{29}};60$.

3.3.13. $-7\bar{i}+7\bar{j}+7\bar{k};-46\bar{i}+29\bar{j}-12\bar{k}$.

3.3.14. $\frac{5\sqrt{17}}{21}$. **3.3.15.** 5.

§4. Vektorların qarışıq hasili.

3.4.1. a)Hə; b)Yox. **3.4.2.** $\frac{1}{3}$. **3.4.3.** 12. **3.4.4.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

3.4.5. $\frac{25}{6}$. **3.4.6.** 0. **3.4.7.** $3\bar{a}\bar{b}\bar{c}$. **3.4.8.** ± 27 .

3.4.9. 20. **3.4.11.** 11. **3.4.12.** (0;8;0) və ya (0;-7;0).

3.4.13. a)12; b) $2\sqrt{26}$; $c)\frac{6}{\sqrt{26}}$; $d)\arccos\frac{16\sqrt{10}}{75}$.

IV FƏSİL. MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ ANALİTİK HƏNDƏSƏ

§1. Müstəvi üzərində koordinatlar üsulu.

4.1.1. $A_1(4;-2)$. **4.1.2.** (3;2); (-3;-2); (-3;2).

4.1.3. 1)(-4;-2); 2)(4;2). **4.1.4.** $\frac{8}{3}\sqrt{2}$. **4.1.6.** 6.

4.1.8. $\left(\frac{8}{5};\frac{8}{5}\right)$. **4.1.9.** (0;-4) və (0;-12).

4.1.10. $\left(2;-\frac{7}{3}\right)$ və $\left(3;\frac{1}{3}\right)$. **4.1.11.** 34. **4.1.12.** 26.

4.1.13. (3;-2);10. **4.1.14.** $2\sqrt{5}$. **4.1.15.** (6;-2) və (2;-4)

4.1.16. (-4;3);(2;7); (6;-1). **4.1.17.** 5; $\frac{24\sqrt{2}}{7}$.

4.1.18. $\left(-\frac{13}{2};-7\right);(-5;-6)\left(-\frac{7}{2};-5\right);(10;4)$.

4.1.19. (3;0) və (-7;0). **4.1.20.** (0;4) və (-1;-3).

4.1.21. $M\left(-1;-\sqrt{3}\right)$. **4.1.22.** $A(3;0); B(1;-\sqrt{3}); C(0;5); D(0;0)$

4.1.23. $M\left(2;-\frac{5}{6}\pi\right)$.

4.1.24. $A\left(3\sqrt{2};\frac{3}{4}\pi\right); B\left(5;-\frac{\pi}{2}\right); C\left(2\sqrt{2}-\frac{3}{4}\pi\right); D(4;\pi);$

$E\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$.

4.1.25. $(1;0);\left(\sqrt{3};\frac{\pi}{6}\right);\left(2;\frac{\pi}{3}\right);\left(\sqrt{3};\frac{\pi}{2}\right);\left(1;\frac{2}{3}\pi\right)$.

4.1.26. $\left(3;\frac{5}{9}\pi\right);\left(5;-\frac{\pi}{4}\right)$. **4.1.27.** 8. **4.1.28.** $\sqrt{3}-1$.

§2. Müstəvi üzərində düz xətt.

4.2.1. $\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{-3}=1$. **4.2.2.** $1)\alpha=0;\alpha=1;2)\alpha=\frac{1}{3}$.

4.2.3. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **4.2.4.** $15x-5y+32=0$.

4.2.5. $y=\frac{4}{3}x+4;\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1;-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{12}{5}=0$.

4.2.6. $k=-\frac{2}{3};b=\frac{5}{3}$. **4.2.7.** $\left(0;\frac{5}{3}\right)$. **4.2.8.** 1.

4.2.9. $y+3=-2(x-2)$ və ya $2x+y-1=0$.

4.2.10. $3x+y--3=0$. **4.2.11.** $5x+13=0$.

4.2.12. $x+y-6=0$. **4.2.13.** $x+y+4=0$ və $x-y-8=0$

4.2.14. 1) *a)* 4; *b)* -9; 2) *a)* 8; *b)* -2; 3) $a)\frac{3}{4};b)-12;4)a)-\frac{3}{2};b)\frac{2}{3}$

4.2.15. 5. **4.2.16.** 49.

4.2.17. $4x+y-6=0$ və ya $3x+2y-7=0$. **4.2.18.** $\sqrt{13}$.

4.2.19. $5{,}1\cdot\sqrt{2}$. **4.2.20.** $y-5=0$ və ya $5x+12y-65=0$.

4.2.21. $3x+2y-11=0$. **4.2.22.** (-3;-1). **4.2.23.** (6;6).

§3. İki tərtibli əyrilər.

4.3.1. $a)(2;-3)R=4;b)\left(-1;\frac{2}{3}\right);R=\frac{\sqrt{19}}{3}$.

4.3.2. $y=0$ və $4x-3y=0$. **4.3.3.** 4. **4.3.4.** $3x-4y+7=0$

4.3.5. (4;1);(-2;-5). **4.3.6.** $x+y-6=0$. **4.3.7.** (-3;-2);R=5.

4.3.8. $(x+2)^2+(y+1)^2=20$ **4.3.9.** 5 və 4; (3;0) və (-3;0);

$\varepsilon=0{,}6;x=\pm\frac{25}{3}$.

4.3.10. 1) $\frac{(x-2)^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$;2) $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$. **4.1.11**. 4.

4.3.12. 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$;2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$;3) $\frac{25}{324}x^2-\frac{y^2}{36}=1$

4.3.13. 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$;2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$;3) $x^2-y^2=1$

4.3.14. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

V FƏSİL. FƏZADA ANALİTİK HƏNDƏSƏ
§1. Fəzada müstəvi tənlikləri.

5.1.1. $1) z-1=0; 2) x+2z=0$.
5.1.2. $1) x-5=0; 2) x+y+z-7=0$.

5.1.3. $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{10}, \cos\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{5}, \cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.1.4. $9x+y+11x-7=0$. **5.1.5.** $8x+3y-2z-5=0$.
5.1.6. $10x-5y-4z+20=0$. **5.1.7.** $x+5y+2z-8=0$.

5.1.8. 37,5. **5.1.9.** 10; $arccos\frac{4}{21}$. **5.1.10.** $x-2y+2z-18=0$.

5.1.11. $x-2y+z-3=0$. **5.1.12.** $x+2y-3z+4=0$.
5.1.13. $15x-5y-4z-7=0$.

5.1.14. $1) arccos\frac{\sqrt{21}}{14}; 2) arccos\frac{1}{3}$.

5.1.15. 1)Paraleldirlər; 2)Üst-üstə düşürlər; 3)Perpendikulyardırlar.

§2. Fəzada düz xətt tənlikləri.

5.2.1. $\frac{x}{-8}=\frac{y-7}{22}=\frac{z+1{,}5}{-9}$.

5.2.2. $\cos\alpha=\frac{3}{5}; \cos\beta=0; \cos\gamma=-\frac{4}{5}$.

5.2.3. $1)\begin{cases} x=1+2t, \\ y=3t, \\ z=-1. \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x=2+4t, \\ y=2, \\ z=2-t. \end{cases}$.

5.2.4. Yox. **5.2.5.** (4;-4;0); (2;0;10); (0;4;20).

5.2.6. $\frac{x}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0}$. **5.2.7.** $\frac{x-1}{-15}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-2}{14}$.

5.2.8. $x=-3+t, y=2, z=8-4t$. **5.2.9.** $\begin{cases} x=3t, \\ y=-t, \\ z=-2t. \end{cases}$.

5.2.10. $1)\frac{\pi}{4}; 2)\arccos\frac{2}{\sqrt{66}}$.

5.2.11. 1)Düz xətlər paralelldirlər; 2)Düz xətlər çarpazdırlar.

5.2.12. $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$. **5.2.13.** $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{16}=\frac{z-3}{17}$.

5.2.14. $2\sqrt{10}$. **5.2.15.** 3. **5.3.16.** $\left(\frac{5}{8};-\frac{11}{4};\frac{3}{3}\right)$. **5.3.17.** 2.

§3. Fəzada düz xətt və müstəvi.

5.3.1. $3x+5y+2z-9=0$. **5.3.2.** $\frac{\pi}{4}$.

5.3.3. 1) $L \,//\, Q$;2) L və Q (2;4;6) nöqtəsində kəsişirlər.

5.3.4. $17x+y+11z+22=0$. **5.3.5.** $2x+y-z-1=0$.

5.3.6. (-3;-4;0). **5.3.7.** 6. **5.3.8.** $C=-1, D=-3$.

5.3.9. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-5}$.

5.3.10. $6x+5y-2z+1=0$. **5.3.11.** $\sqrt{33}$.

5.3.12. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.3.13. $1)\frac{\sqrt{3}}{3}; 2)\frac{6}{7}\sqrt{42}$. **5.3.14.** 7.

ƏDƏBİYYAT

1. Д. Письменнный. Конспект лекций по высшей математике. Москва, 2004.
2. К.Н. Лунгу и др. Сборник задач по высшей математике. Москва, 2004.
3. Б.С. Шипачев. Высшая математика. Москва, 2000, Т2.
4. Г.И. Запорожец, Руководство к решению задач по математическому анализу. Москва 1966.
5. H.P.Vəliyev. «Ali riyaziyyat» fənnindən yoxlama yazı işləri (nümunələrlə). Bakı, 2004

MÜNDƏRİCAT

Yığılmağa verilmişdir. 18.01.2007
Çapa imzalanmışdır. 06.03.2007
Kağız formatı *60×84 1/16*
Fiziki çap vərəqi 8
Tiraj 200
Sifariş 02

Bakı Biznes Universiteti nəşriyyatı
AZ 1122, Bakı, H. Zərdabi pr. *88*[a]