

Giriş

Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi fənni üzrə ədəbiyyat siyahısında kifayət qədər mənbə göstərilmişdir. Bu mənbələrin hər birinin özünə xas olan xüsusiyyətləri vardır ki, onlar müəlliflərin dərsliyi yazarkən qarşıya qoyduğu məqsədlə bağlıdır. Əlbəttə, onları birləşdirən ümumi cəhət məcburi kursun əsas məzmununu oxucuya çatdırmaqdan ibarətdir. Bu, müxtəlif müəlliflər tərəfindən müxtəlif yollarla yerinə yetirilir. Dərsikləri fərqləndirən digər cəhət bu və ya digər istiqamətə daha artıq diqqətin verilməsi, misalların rəngarəngliyi, dilin sadəliyi, tətbiq sahələrinin seçimi və s. ilə bağlıdır.

Təqdim olunan dərsliyin keyfiyyətləri bəzi universitet kurslarında fənnin tədrisinin xüsusiyyətləri ilə bağlı olmaqla yanaşı, cəbri strukturların, xətti fəza və xətti operator anlayışlarının geniş tətbiqi ilə müəyyən olunur. Məsələn, matrislər cəbri bir çox mənbələrdə müstəqil surətdə öyrənilir. Lakin, burada matrislər cəbrinin xətti fəzalar və xətti operatorlar cəbri ilə sıx əlaqəli şəkildə öyrənilməsinə üstünlük verilmişdir. Matris anlayışı, beləliklə, bu kitabda köməkçi, lakin olduqca mühüm obyekt kimi qəbul olunur. Məlumdur ki, bu anlayış cədvəl mənasında hələ b. e. ə. III əsrlə b. e.-nin III əsri arasında naməlum Çin riyaziyyatçısı (bax. [1, səh. 45]) tərəfindən daxil olunmuşdur. Lakin onun geniş tətbiqləri və əhəmiyyəti məhz xətti fəza və xətti inikaslarla sıx əlaqəsi ilə müəyyən olunur.

Təqdim olunan dərslik üç hissədən ibarətdir. Birinci hissə riyazi məntiq və çoxluq nəzəriyyəsinin ilkin anlayışlarının qısa şərhinin verildiyi giriş materialı ilə başlayır. Əsas diqqət isə cəbrlər və xətti tənliklər sistemi və onlarla bağlı məsələlərin öyrənilməsinə verilir. Xətti fəza nəzəriyyəsinə giriş kimi ədədi xətti fəzalar daxil olunur və əsas xassələri öyrənilir. Xətti fəza anlayışının bu şəkildə verilməsi bir çox mənbələrdə belə aparılır və təcrübə bunun doğru olduğunu göstərir. Ümumi xətti fəza anlayışı verildikdə sonlu ölçülü xətti fəzanın ədədi xətti fəzaya izomorf olması haqda teoremdən sonra əldə olunmuş biliklər öz yerini tutmuş olur.

İkinci hissə demək olar ki, xətti inikasların quruluşunun öyrənilməsinə həsr olunur. Burada biz ancaq minimal zəruri faktları verməklə kifayətlənirik və xətti inikasların matrislərin və xətti fəzaların xüsusu növləri ilə bağlı xassələrinin öyrənilməsi ilə məşğul oluruq. Bu istiqamətdə əlavə məlumatlar almaq üçün oxuculara ədəbiyyat siyahısında göstərilən başqa, daha geniş mənbələrə müraciət etmələri tövsiyə olunur. İkinci hissədə həmçinin bəzi cəbri strukturlar daha dərinlən öyrənilir ki, bu da onların çoxhədlilər cəbrində, ədədlər nəzəriyyəsində, cəbrin və eləcə də riyaziyyatın digər sahələrində geniş tətbiqlərinin olması ilə izah olunur.

Üçüncü hissədə bir və çoxdəyişənli çoxhədlilər nəzəriyyəsi və onun əsas məsələsi olan cəbri tənliklərin həlli məsələsi öyrənilir. Cəbrin əsas teoremi və onunla bağlı məsələlər şərh olunur. Cəbri genişlənmələr öyrənilir və ənənəvi kurslardan fərqli olaraq, müəlliflər onların xətti fəza strukturundan daha dolğun istifadə etməyə çalışmışlar.

Dərslik yazılarkən müəlliflər qarşılarına geniş material vermək deyil, olduqca yığcam, əsas etibarlı ilə mühüm cəbri strukturlar və xətti inikaslarla bağlı məsələlərin müfəssəl və daxili əlaqə saxlanılmaqla şərhinə üstünlük vermişlər. Nəzəri faktları və mürəkkəb anlayışları izah edən kifayət qədər nümunələr verilmişdir. Vacib olan, lakin tamliq xatirinə kənar oluna bilməyən məsələlərin sxematik şərhinə üstünlük verilmişdir. Bu yolla məsələ, xətti operatorların quruluşunun müfəssəl öyrənilməsi təmin olunmuşdur.

Müəlliflərin oxucuya başlıca tövsiyəsi kitabda verilən bütün materialın, bütün faktların əslində dərin daxili əlaqəyə malik olmasını aşkar etmələrindən ibarətdir. Ancaq bu, vəsaitin öz təyinatına çatdığına və müəlliflərin isə əsas məqsədlərinə nail olduqlarının göstəricisi ola bilər. Dərslik haqda öz fikirlərini bildirmək üçün oxuculardan ilgar_j@rambler.ru elektron ünvanına müraciət etmələri xahiş olunur.

I HİSSƏ

I FƏSİL. Riyazi məntiqin elementləri

Hər bir elm sahəsi öz tədqiqat obyektinə və tədqiqat üsullarına malikdir. Riyaziyyatın tədqiqat obyekti real aləmlə bağlı olaraq meydana gələn, lakin mücərrəd, ancaq təsəvvürdə və təfəkkürdə mövcud olan obyektlərdən ibarətdir. Məsələn, ədəd, düz xətt, müstəvi və s. Bu fikirləri daha düzgün qavramaq üçün qədim riyaziyyatçılar tərəfindən qəbul edilən təriflərə diqqət yetirmək kifayətdir. Evklidə görə, nöqtə elə şeydir ki, onun hissəsi yoxdur, yaxud, düz xətt eni olmayan uzunluqdur, və ya, xəttin ucları nöqtədir və i. a. (bax [7]). Göründüyü kimi, əsas riyazi anlayışlar, maddi aləm təsəvvürləri, hissi qavrayış ilə sıx bağlı olan, reallıqda isə mövcud olmayan obyektlərdir. Buna görə də, riyaziyyatın tədqiqat üsulu da təfəkkürlə, əqli düşüncə ilə bağlı olan metodlardan, yəni məntiqi təfəkkürdən, əqli nəticə üsulundan ibarətdir. Bu təfəkkürün öz qanunauyğunluqları vardır ki, bunların öyrənilməsi riyazi məntiqin məzmununu təşkil edir.

Riyazi məntiqin sistematik şəkildə öyrənilməsi XIX əsrin II yarısına təsadüf edir. Riyaziyyatın çoxluq nəzəriyyəsi, həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi və digər sahələrində həllini tələb edən məntiqi məsələlər riyazi məntiqin antik dövrə məxsus sxematik qaydalar toplumundan ciddi riyazi nəzəriyyəyədək sürətli inkişaf yolu keçməsinə səbəb oldu. Müasir dövrdə riyazi məntiq nəinki sürətlə inkişaf edən ciddi riyazi nəzəriyyədir, habelə onun riyaziyyatın bir çox sahələrində geniş tətbiqləri də vardır.

§1. Müləhizələr və onlar üzərində məntiq əməlləri

Hər bir elmin özünə məxsus ilkin anlayışları vardır ki, onlar baxılan nəzəriyyə hüdudları daxilində ciddi məntiqi tərifə malik deyil. Riyazi məntiqin belə anlayışları sırasına “müləhizə”, “məntiq əməlləri”, “predikat” kimi anlayışlar daxildir. Belə anlayışların “tərfi” adi dilin qanunauyğunluqlarından istifadə olunmaqla, obyektin əsas xüsusiyyətlərini ifadə etməklə verilir, yəni anlayış öz xarakterik xüsusiyyətləri ilə təsvir olunur.

Tərif 1. *Müləhizə* elə *nəqli cümləyə* deyilir ki, onun doğru yaxud yalan olduğunu hökm etmək mümkün olsun.

Əlbəttə, nəqli cümlə anlayışı dəqiq tərif olunmadığı üçün onun doğru və ya yalan olması kriteriyası, ümumi halda, intuitiv olaraq müəyyən olunur. Verilən cümlənin doğru olması ona qarşı “D” doğruluq qiymətinin qarşı qoyulması, yalan olması isə “Y” doğruluq qiymətinin qarşı qoyulması deməkdir. Bəzən bunların yerinə 1 və 0 ədədlərindən də istifadə olunur.

Misallar. 1. “Hava buludludursa, deməli yağış yağacaq” cümləsi nəqli cümlədir və təcrübədən bizə məlumdur ki, o yalandır. Buna görə də bu cümlə müləhizədir.

2. “ $3 > 2$ ” müləhizədir, çünki, onun doğru olduğunu hökm edə bilərik.

3. “ $x = 2$ ” mülahizə deyil; x -in nəyi ifadə etdiyi məlum olmadığı üçün onun doğru və ya yalan olduğunu hökm etmək olmaz.

Mülahizələr böyük latın hərfləri ilə işarə olunur. Məsələn, A = “Hava buludludursa, deməli yağış yağacaq”, yaxud B = “ $2 > 3$ ”. Mülahizələr üzərində məntiq əməlləri yerinə yetirmək olar. Məntiq əməlləri bunlardır: inkar, konyunksiya, dizyunksiya, implikasiya, ekvivalensiya. Bunlardan birincisi ancaq bir mülahizəyə tətbiq olunur. Qalanları isə iki mülahizənin köməyi ilə yeni mülahizə yaratmağa imkan verir. Onların işarələri, uyğun olaraq belədir: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

1. A mülahizəsinin inkarı $\neg A$ (“ A deyil”, yaxud “qeyri A ” kimi oxunur) kimi işarə olunan elə mülahizəyə deyilir ki, A doğru olduqda o yalan, A yalan olduqda isə o doğru olsun.

Məsələn, B = “ $2 > 3$ ” mülahizəsi üçün $\neg B$ = “ $2 \leq 3$ ”. Yaxud, A = “Hava buludludursa, deməli yağış yağacaq” yalan mülahizəsinin inkarı isə $\neg A$ = “Hava buludlu deyil və yağış yağmayacaq” doğru mülahizəsi qəbul oluna bilər. A və $\neg A$ mülahizələrinin doğruluq qiymətlərini müəyyənləşdirmək üçün aşağıdakı cədvəldən istifadə etmək olar:

A	$\neg A$
D	Y
Y	D

2. A və B mülahizələrinin konyunksiyası $A \wedge B$ (“ A və B kimi oxunur) kimi işarə olunan elə yeni mülahizəyə deyilir ki, bu mülahizə yalnız və yalnız hər iki mülahizə doğru olduqda “D” doğruluq qiymətini alsın.

Bu əməlin doğruluq cədvəlini aşağıdakı kimi vermək olar:

A	B	$A \wedge B$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

Bu cədvələ əsasən hökm etmək olar ki, “ $x=2$ ədədi

$$x^2 = 4 \wedge x - 1 = 0$$

sisteminin köküdür” mülahizəsi yalandır, çünki x -in yerinə 2 yazdıqda alınan ikinci mülahizə, yəni “ $2-1=0$ ” mülahizəsi yalandır.

3. A və B mülahizələrinin dizyunksiyası $A \vee B$ (“ A və ya B ” kimi oxunur) kimi işarə olunan elə yeni mülahizəyə deyilir ki, bu mülahizə yalnız və yalnız hər iki mülahizə yalan olduqda “Y” doğruluq qiymətini alsın.

Məsələn, “ $2 \leq 3$ ” mülahizəsi iki mülahizənin dizyunksiyasıdır: “ $2 \leq 3$ ” = “ $2 < 3$ ” $\vee$ “ $2 = 3$ ” (doğrudan da $a \leq b$ bərabərsizliyi “ $a < b$ ” və ya “ $a = b$ ” deməkdir). Tərifdən bilavasitə göründüyü kimi dizyunksiyanın “D” doğruluq qiymətini alması üçün dizyunksiya götürülən iki

mülahizədən heç olmasa birinin “D” doğruluq qiymətini alması kifayətdir. Bu əməl üçün aşağıdakı doğruluq cədvəli vermək olar:

A	B	$A \vee B$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

4. **A və B mülahizələrinin implikasiyası $A \rightarrow B$** (“əgər A isə, onda B ” kimi oxunur) kimi işarə olunan elə yeni mülahizəyə deyilir ki, bu mülahizə yalnız və yalnız A doğru və B yalan olduqda “Y” doğruluq qiymətini alsın.

Bu əməl üçün aşağıdakı doğruluq cədvəli vermək olar:

A	B	$A \rightarrow B$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Teorem. Əgər A və $A \rightarrow B$ mülahizələri doğru olarsa, onda B mülahizəsi də doğrudur.

İsbatı. A və $A \rightarrow B$ mülahizələri doğru olarsa, implikasiyanın doğruluq cədvəlinə əsasən, ancaq cədvəlin birinci sətrinə uyğun olan hal mümkündür, yəni B mülahizəsi də doğrudur. Teorem isbat olundu.

Bu teorem isbat nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır. Bu teoremin köməyi ilə biz hər hansı B mülahizəsinin doğruluğunu göstərmək üçün məlum olan A teoremindən başlayırıq. $A \rightarrow B$ implikasiyasının doğru olduğunu göstərməklə, teoremə əsasən, B mülahizəsini isbat etmiş olur. A mülahizəsi implikasiyanın şərti, B mülahizəsi isə onun nəticəsi adlanır.

Bir misala müraciət edək. Tutaq ki, $A \rightarrow B$ implikasiyası Pifaqor teoremini ifadə edir: əgər MNK üçbucağında $\angle N = 90^\circ$ olarsa, onda $MN^2 + NK^2 = MK^2$. Hər hansı $MNKT$ düzbucaqlısında A mülahizəsi olaraq $\angle N = 90^\circ$ mülahizəsini götürək. Düzbucaqlının tərifinə görə bu mülahizə doğrudur. Onda, yuxarıdakı teoremə əsasən aşağıdakı doğru təklifi alırıq: düzbucaqlının diaqonalının kvadratı onun oturacağı ilə yan tərəfinin kvadratları cəminə bərabərdir.

5. **A və B mülahizələrinin ekvivalensiyası $A \leftrightarrow B$** (“ A və B eynigüclüdür, və ya ekvivalentdir” kimi oxunur) kimi işarə olunan elə yeni mülahizəyə deyilir ki, bu mülahizə yalnız və yalnız A və B eyni doğruluq qiymətlərini aldıqda “D” doğruluq qiymətini alsın.

Bu əməl üçün aşağıdakı doğruluq cədvəli vermək olar.

A	B	$A \leftrightarrow B$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

Məsələn, “ $2-3=1$ ” $\leftrightarrow$ “ $0=1$ ” ekvivalensiyası doğrudur, çünki, hər iki mülahizə yalandır.

§2. Məntiq düsturları və məntiq qanunları

Məntiq əməllərinin köməyi ilə sadə mülahizələrdən mürəkkəb mülahizələr düzəltmək olar. Eyni zamanda, məntiq əməlləri, vermiş mürəkkəb mülahizənin məntiqi quruluşunu müəyyən edərək onu sadələşdirməyə imkan verir (yəni onun doğruluq qiymətini müəyyən etməyi sadələşdirir). Məsələn, belə bir mülahizəyə baxaq:

”18:3 və ya $\pi > 3$ olarsa, onda $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin həqiqi kökləri yoxdur.”

Onu məntiq əməllərinin köməyi ilə $(A \vee B) \rightarrow C$ şəklində yazmaq olar. İmplikasiyanın hər iki tərəfi doğrudur. Deməli, o doğru mülahizədir. Misaldan göründüyü kimi mürəkkəb mülahizənin doğruluğunu müəyyən edərkən, mülahizənin məntiqi forması, yəni ən sadə mülahizələrə bölünərək məntiq əməlləri vasitəsi ilə simvolik yazılışı, onun nəqli cümlə şəklində böyük həcmli yazılışından daha əhəmiyyətlidir. Mülahizələrin belə simvolik yazılışı məntiq düsturu anlayışına gətirir. Məsələn, yuxarıda alınan $(A \vee B) \rightarrow C$ ifadəsi (artıq **A**, **B** və **C** heç bir konkret mülahizəni ifadə etmir) məntiq düsturudur. Məntiq düsturlarına daxil olan dəyişənlərin yerinə ixtiyari mülahizə yazdıqda o, mülahizəyə çevrilir. Məntiq düsturunun ciddi tərfi aşağıdakı kimi verilir.

Tərif. Məntiq düsturu dedikdə aşağıdakı qaydaların köməyi ilə və ancaq bu yolla alınan simvolik yazılışlar başa düşülür:

- 1) mötərizələr – yəni “(” və “)” simvolları – arasında kiçik latın hərfinin yazılması ilə məntiq düsturu alınır;
- 2) əgər (a) və (b) ixtiyari iki məntiq düsturu olarsa, onda $(\neg(a))$, $((a) \wedge (b))$, $((a) \vee (b))$, $((a) \rightarrow (b))$, $((a) \leftrightarrow (b))$ simvolik yazılışları da məntiq düsturlarıdır.

Qeyd edək ki, məntiq düsturuna daxil olan hərflər indeksləyə və ştrixləyə bilər. Məntiq düsturu anlayışının tərifdə deyilən şəkildə istifadəsi həddindən artıq mürəkkəb yazılışlara gətirə bilər. Məsələn, $((a) \vee (b))$ məntiq düsturunda hərflərin yerinə **A** və **B** mülahizələrini yazsaq **A** $\vee$ **B** mülahizəsi üçün daha mürəkkəb $((\mathbf{A}) \vee (\mathbf{B}))$ ifadəsini alarıq. Məntiq düsturlarının yazılışını sadələşdirmək üçün müəyyən ixtisarlara qəbul olunur. Hər şeydən əvvəl, kənar mötərizələrə heç bir ehtiyac yoxdur. Artıq bu ixtisardan sonra $((\mathbf{A}) \vee (\mathbf{B}))$ mülahizəsi öz normal **A** $\vee$ **B** şəklini alır. Daha sonra, məntiq əməlləri üçün yuxarıdakı ardıcılıqla təsir radiusu qəbul edilir. Ən kiçik təsir radiusuna $\neg$ əməli malikdir və o, bilavasitə özündən sonra gələn məntiq düsturuna aid edilir. Belə ki, məsələn $\neg a \vee b$ ifadəsində mötərizələr ancaq bir üsulla bərpa oluna bilər: $(\neg(a) \vee (b))$; məsələn, $(\neg((a) \vee (b)))$ düsturu artıq tamamilə başqa məzmunla malikdir.

Digər əməllərin təsir radiusları eyni ardıcılıqla sıralanır. Buna görə də, məntiq düsturunun tərifə müvafiq olan yazılışını almaq üçün mötərizələri göstərilən ardıcılıqla bərpa etmək lazımdır. Məsələn, $a \vee (\neg c) \rightarrow (\neg c) \wedge b \leftrightarrow (\neg a) \vee b$ ifadəsində mötərizələr ancaq belə bərpa oluna bilər:

$$\begin{aligned}
& a \vee (\neg c) \rightarrow (\neg c) \wedge b \leftrightarrow (\neg a) \vee b \Rightarrow \\
& a \vee (\neg(c)) \rightarrow (\neg(c)) \wedge b \leftrightarrow (\neg(a)) \vee b \Rightarrow \\
& a \vee (\neg(c)) \rightarrow ((\neg(c)) \wedge b) \leftrightarrow (\neg(a)) \vee b \Rightarrow \\
& (a \vee (\neg(c))) \rightarrow ((\neg(c)) \wedge b) \leftrightarrow ((\neg(a)) \vee b) \Rightarrow \\
& ((a \vee (\neg(c))) \rightarrow ((\neg(c)) \wedge b)) \leftrightarrow ((\neg(a)) \vee b) \Rightarrow \\
& (((a \vee (\neg(c))) \rightarrow ((\neg(c)) \wedge b)) \leftrightarrow ((\neg(a)) \vee b)).
\end{aligned}$$

Adətən, ardıcıl iki məntiq əməli işarəsi mötərizəsiz yazılır. Lakin, bəzən $a \rightarrow \neg b$ kimi yazılış da işlənə bilər. Mötərizələrin atılmasında da eyni qayda gözlənilir. Mötərizələrin mümkün olan atılma sırası əməllərin düzülüşünün əksinədir. Eyni əmələ bir neçə dəfə rast gəlinərsə, tərifə əsasən, onlar yazıldığı ardıcılıqla nəzərə alınır. $(a \rightarrow b) \vee c$ düsturunda mötərizələri atmaq olmaz, əks halda başqa düstur alınar: $a \rightarrow (b \vee c)$. Eyni qayda ilə, $(a \rightarrow (b \rightarrow c))$ düsturunda mötərizələrin hamısının atılması başqa düstura gətirir: $((a \rightarrow b) \rightarrow c)$.

Məntiq düsturlarında hərflərin, yəni dəyişənlərin yerinə ixtiyari mülahizələri yazmaq mümkün olduğundan, onlar nəticə etibarlı ilə iki qiymət ala bilər: D və ya Y.

Məntiq düsturları içərisində elə düsturlar vardır ki, onlar, bu düstura daxil olan dəyişənlərin bütün mümkün qiymətlərində ancaq D doğruluq qiymətini alır. Belə düsturlar riyazi məntiqdə mühüm əhəmiyyət kəsb edir və onlar *tavtalogiya*, yaxud *məntiq qanunları* adlanırlar. Verilmiş düsturun məntiq qanunu olub- olmamasını yoxlamaq üçün geniş istifadə olunan üsul bu düstur üçün doğruluq cədvəlinin tərtib olunmasıdır. Bu yolla aşağıdakı teoremi isbat etmək olar.

Teorem 1. Aşağıdakı düsturlar tautologiyadır:

- 1) nəticə qanunu: $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$;
- 2) konyunksiyanın kənarlaşdırılması qanunu: $\left. \begin{aligned} p \wedge q \rightarrow p \\ p \wedge q \rightarrow q \end{aligned} \right\}$;
- 3) dizyunksiyanın daxil edilməsi qanunu: $\left. \begin{aligned} p \rightarrow p \vee q \\ q \rightarrow p \vee q \end{aligned} \right\}$;
- 4) dizyunksiyanın kənarlaşdırılması qanunu: $(p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow p$;
- 5) ikiqat inkar qanunu: $\neg \neg p \leftrightarrow p$;
- 6) kontrapozisiya qanunu: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$;
- 7) əks fərziyyə ilə isbat qanunu: $(\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p$;
- 8) sillogizm qanunu: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$;

İsbatı. Teoremin isbatını yuxarıda deyildiyi kimi doğruluq cədvəllərinin köməyi ilə aparmaq olar. Burada biz kontrapozisiya üçün cədvəl tərtib etməklə kifayətlənirik. Digər düsturlar üçün cədvəllərin tərtib olunması oxucuya təklif olunur. $Z = (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ işarə edək.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	Z
D	D	Y	Y	D	D	D
D	Y	Y	D	Y	Y	D
Y	D	D	Y	D	D	D
Y	Y	D	D	D	D	D

Cədvəlin sonuncu sütunundan göründüyü kimi Z düsturu həqiqətən tautologiyadır. Eyni qayda ilə digər düsturlar da isbat oluna bilər. Məntiq düsturlarının doğruluğunu daha yığcam şəkildə isbat etmək üçün bəzən aşağıdakı tautologiyalardan istifadə etmək əlverişli olur:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q; \quad p \rightarrow q \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q); \quad p \vee q \leftrightarrow \neg p \rightarrow q; \quad p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q);$$

$$p \wedge q \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q); \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

§3. Predikatlar və kvantorlar

Yuxarıda biz mülahizələr və onlar üzərində əməllərlə tanış olduq. Bir çox məntiqi məsələlərin həlli üçün bunlar kifayət etmir. Riyaziyyatın bütün sahələrində biz elə hökmlərlə rastlaşırıq ki, bunlara dəyişənlər daxil olur və bu dəyişənlərin bəzi qiymətlərində biz mülahizələr alırıq. Riyazi məntiqin metodlarını belə məsələlərə tətbiq etmək üçün dəyişəni olan hökmlər-predikatlar daxil edilir. Aşağıdakı misala baxaq: “ $x > y$ ”. Bu hökm nəqli cümlədir, lakin mülahizə deyil. Burada x və y dəyişənlərdir və aydındır ki, onlar həqiqi ədədi qiymətlər alır. Əks halda cümlə mənasız olar. Dəyişənlərin hər bir ədədi qiymətlərində bu hökm mülahizəyə çevrilir: $2 > 3$ və ya $-1 > 0$ və s. Dəyişənlərin ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu mümkün qiymətlər oblası adlanır. Əlbəttə, yuxarıdakı misalda x və y dəyişənləri müxtəlif vahidlərlə ölçülən ədədi qiymətlər ala bilməz. Belə cümlələrdə dəyişənlərin ala biləcəyi mümkün qiymətlər çoxluğu ya əvvəlcədən verilir və ya cümlənin (predikatın) məzmununa müvafiq olaraq müəyyən olunur.

Tərif. *Dəyişənləri olan nəqli cümlədə dəyişənlərin yerinə onların mümkün qiymətlərini yazdıqda mülahizə alınarsa, onda belə nəqli cümlə predikat adlanır.*

Məsələn, “ $x^2 + y^2 = 1$ ” cümləsində x və y dəyişənlərinin ixtiyati həqiqi qiymətlərində iki həqiqi ədədin bərabər olmasını ifadə edən nəqli cümlə, yəni mülahizə alınır. Deməli, baxılan cümlə predikatdır.

Predikatlar, onlara daxil olan dəyişənləri göstərməklə, böyük latın hərfləri ilə işarə olunur. Məsələn, yuxarıdakı predikat qısa olaraq belə işarə olunur: $A(x, y) = “x^2 + y^2 = 1”$. Yaxud, $B(x) = “x < 3”$ və i. a. Riyaziyyatda isbat olunan bir çox hökmlər predikatlar vasitəsi ilə simvolik şəkildə yazıla bilər. Aşağıdakı teoremə baxaq (Pifaqor teoremi):

İxtiyari düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuzun kvadratı katetlərin kvadratları cəminə bərabərdir.

Əgər Π ilə müstəvi üzərində bütün mümkün üçbucaqlar çoxluğunu işarə etsək, onda yuxarıdakı hökmü simvolik olaraq belə yazıla bilər:

$$\text{ixtiyari } \triangle ABC \in \Pi \text{ üçün } \angle A = 90^\circ \text{ olarsa, onda } BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Məntiq əməllərinin köməyi ilə onu daha qısa yazmaq olar:

$$\text{ixtiyari } \triangle ABC \in \Pi \text{ üçün } (\angle A = 90^\circ \rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2).$$

“ixtiyari $\Delta ABC \in \Pi$ üçün” ifadəsini simvolik şəkildə $(\forall \Delta ABC \in \Pi)$ kimi yazmaq qəbul olunmuşdur. Onda Pifaqor teoremi $(\forall \Delta ABC \in \Pi)(\angle A = 90^\circ \rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2)$ kimi yazıla bilər. Burada $\forall$ simvolu *ümumilik kvantoru* adlanır. Beləliklə, kvantor predikatdan mülahizə alınması əməliyyatının simvoludur (işarəsidir).

$\tau(n)$ ilə n natural ədədinin natural bölənlərinin sayını işarə edək. Onda, natural ədədin sadə ədəd olması hökmünü simvolik olaraq belə yazmaq olar: $(\forall n \in N)(n \in P \leftrightarrow \tau(n) = 2)$; burada P sadə ədədlər çoxluğunu göstərir.

Geniş yayılmış riyazi hökmlər içərisində varlıq teoremləri adlanan hökmlərə də tez-tez rast gəlmək olar. Verilmiş düz xəttə müstəvinin verilmiş nöqtəsindən çəkilmiş perpendikulyarın varlığı haqda teorem belə ifadə olunur: ixtiyari a düz xətti və C nöqtəsi verilərsə, bu nöqtədən keçən və a düz xəttinə perpendikulyar olan düz xətt vardır və yeganədir. Bu hökmü simvolik yazmaq. Π ilə müstəvi üzərində yerləşən nöqtələr çoxluğunu işarə edək. Tutaq ki, $a \in \Pi$ düz xətti və $C \in \Pi$ nöqtəsi verilmişdir. Perpendikulyarın varlığı hökmü belə ifadə olunur:

$$\text{elə } b \in \Pi \text{ düz xətti var ki, } C \in b \text{ və } b \perp a.$$

“elə $b \in \Pi$ düz xətti var ki,” ifadəsini simvolik olaraq $(\exists b \in \Pi)$ kimi işarə etmək qəbul olunmuşdur. Belə simvolika ilə yuxarıdakı hökmün birinci (varlıq) hissəsini

$$(\exists b \in \Pi)(C \in b \wedge b \perp a)$$

şəklində yazmaq olar. $\exists$ simvolu *varlıq kvantoru* adlanır. Lakin bu simvolik yazılış deyilən hökmün bir hissəsini ifadə edir. Doğrudan da verilmiş hökmdə b düz xəttinin yeganə olduğu da hökm edilir. Bu tipli təklifləri dəqiqi ifadə etmək üçün $\exists!$ simvolu ilə işarə olunan “*varlıq və yeganəlik*” kvantoru daxil edilir. Beləliklə, verilmiş teoremin dəqiq ifadəsi belə olmalıdır:

$$(\exists! b \in \Pi)(C \in b \wedge b \perp a).$$

$(\exists! b \in \Pi)$ ifadəsi belə oxunur: “elə yeganə $b \in \Pi$ vardır ki”.

Əgər predikatın qarşısında sərbəst dəyişənlərin hamısı iştirak edən kvantorlar qoyulmuşsa, onda alınan yazılış mülahizə olacaqdır. Məsələn, $A(x, y)$ iki dəyişənli predikatdırsa, onda

$$(\forall x)(\exists y)(A(x, y))$$

mülahizədir. Bu mülahizə yalnız və yalnız o zaman D doğruluq qiymətini alır ki, x –in hər bir mümkün qiymətinə qarşı y -in elə qiymətini göstərmək mümkün olsun ki, bu qiymətlərdə $A(x, y)$ mülahizəsi doğru olsun. Predikatlar dəyişənlərin mümkün qiymətlərində mülahizəyə çevrildiyi üçün onlar üzərində məniq əməlləri təyin olunmuşdur. Məsələn, $A(x)$ və $B(y)$ predikatları verilərsə, onda məntiq əməlləri ilə müəyyən olan $\neg A(x)$, $A(x) \vee B(y)$, $A(x) \wedge B(y)$, $A(x) \rightarrow B(y)$ və $A(x) \leftrightarrow B(y)$ predikatlarına baxmaq olar.

II FƏSİL. Çoxluqlar və münasibətlər

Çoxluq anlayışı müasir riyazi nəzəriyyələrdə mühüm rol oynayan anlayışlardan biridir. Çoxluq anlayışı riyaziyyatın ilkin anlayışlarından olduğu üçün onun ciddi riyazi tərfi yoxdur. Lakin çoxluğu xarakterizə edən əsas cəhətləri göstərməklə onu təsvir etmək olar. Bu təsvir onunla bağlı bir çox məslələri həll etməyə imkan verir.

Riyazi anlayışların əksəriyyətini çoxluq anlayışı vasitəsi ilə müəyyən etmək olur. Belə anlayışlar sırasına münasibələr və inikaslar da aiddir. İnikas və ya funksiya anlayışı münasibətlərin xüsusi və olduqca mühüm növü kimi daxil edilir. Bu anlayışlar müasir cəbrin əsasını təşkil edir.

§1. Çoxluqlar və onlar üzərində əməllər

Çoxluq dedikdə müəyyən əşyalar toplusu başa düşülür. Çoxluğun elementləri adlanan bu ünsürlər çox vaxt müəyyən ümumi keyfiyyətlərə malik olur. Məsələn, kitabda olan vərəqlər çoxluğu, hər hansı tənliyin kökləri çoxluğu və i. a. Çoxluq o zaman verilmiş hesab olunur ki, hər hansı elementin ona daxil olub-olmadığını müəyyən etmək mümkün olsun. Əgər çoxluğu əmələ gətirən elementlər sonlu sayda olarsa, belə çoxluq *sonlu*, əks halda isə *sonsuz çoxluq* adlanır. İki çoxluq yalnız və yalnız o zaman bərabər hesab olunur ki, onlar eyni elementlərdən ibarət olsunlar.

Çoxluq adətən böyük latın hərfləri ilə işarə edilir: A, B, C və i. a. Çoxluğun elementləri isə kiçik latın hərfləri ilə işarə olunur. Çoxluqlar öz elementləri ilə birqiyəmətli təyin olunur. Sonlu çoxluqlar bilavasitə elementlərin sadalanması yolu ilə verilə bilər. Bu elementlər fiqurlu mötərizə içərisində yazılır. Məsələn, $A = \{1, 2, 3\}$ yazılışı üç elementdən təşkil olunmuş çoxluğu göstərir. Bəzən sonsuz çoxluqları da elementlərin bir hissəsini sadalamaqla vermək mümkün olur. Bu o zaman edilir, elementlərin düzülüş sırasına əsasən və ya digər üsulla çoxluğun bütün elementləri müəyyən oluna bilsin. Məsələn, natural ədədlər çoxluğunu $\{1, 2, 3, \dots\}$ şəklində, tam ədədlər çoxluğunu isə $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ və ya $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ şəklində göstərmək olar.

Çoxluqların verilmə üsullarından biri və geniş şəkildə işlənəni onların şərt vasitəsi ilə verilməsidir. Məsələn,

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

çoxluğu müstəvi üzərində koordinatları $x^2 + y^2 = 1$ şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğunu, yəni mərkəzi koordinat başlanğıcında olan vahid çevrəni göstərir. Ümumi halda şərtlə verilə çoxluq aşağıdakı yazılışa malik olur:

$$B = \{x \in M \mid P(x)\};$$

fiqurlu mötərizə içərisində şaquli xəttədən sağda $P(x)$ predikatı yazılmışdır və B çoxluğu bütün elə $x \in M$ elementlərindən təşkil olunmuşdur ki, $P(x)$ predikatı doğru olsun. Məsələn,

$$\{x \in R \mid x^2 - 4x + 4 = 0\}$$

çoxluğu ancaq bir elementdən ibarətdir ($x=2$) çünki, kvadrat tənliyin ancaq bir kökü vardır.

x elementinin A çoxluğunun elementi olması belə yazılır: $x \in A$. $x \notin A$ yazılışı isə x elementinin A çoxluğuna daxil olmadığını işarə edir. Yuxarıda deyilənlərə əsasən, iki A və B çoxluqlarının bərabərlik şərtini belə yaza bilərik:

$$A = B \leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Tərif 1. Əgər A çoxluğunun hər bir elementi B çoxluğunun da elementi olarsa, onda A çoxluğu B çoxluğunun *alt çoxluğu* adlanır və belə yazılır: $A \subset B$.

Məsələn, $\{1,2,3\} \subset N$; burada N bütün natural ədədlər çoxluğunu göstərir.

Tərifə əsasən,

$$A \subset B \leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B). \quad (1)$$

Aydındır ki,

$$A = B \leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A.$$

Tərif 2. Heç bir elementi olmayan çoxluq *boş çoxluq* adlanır və $\emptyset$ ilə işarə olunur.

Məsələn, $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin həqiqi köklər çoxluğu boş çoxluqdur: $\{x \in R \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$. Tərifə əsasən, boş çoxluğu belə göstərə bilərik: $\emptyset = \{x \mid x \notin \{x\}\}$.

Teorem 1. Boş çoxluq istənilən çoxluğun alt çoxluğudur və boş çoxluq yeganədir.

İsbatı. İxtiyari A çoxluğu götürək və $x \notin \{x\} \rightarrow x \in A$ implikasiyasına baxaq. Bu implikasiyanın şərti yalandır. Deməli, o doğrudur. Beləliklə, $(\forall x)(x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$ mülahizəsi doğrudur. Onda (1) -ə əsasən $\emptyset \subset A$.

Əgər $\emptyset$ və $\emptyset'$ iki boş çoxluq olarsa, yuxarıda isbat olunduğuna görə $\emptyset \subset \emptyset' \wedge \emptyset' \subset \emptyset$. Deməli, $\emptyset = \emptyset'$. Teorem isbat olundu.

Çoxluqlar üzərində təyin olunan əsas əməllər aşağıdakılardır: çoxluqların birləşməsi ($\cup$), kəsişməsi ($\cap$) və iki çoxluğun fərqi ($\setminus$).

Tərif 3. A və B çoxluqlarının birləşməsi yalnız və yalnız bu çoxluqlardan heç olmasa birinə daxil olan elementlərin əmələ gətirdiyi çoxluğa deyilir:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Misal. Tutaq ki, $A = \{-2, 3, 0\}$ və $B = \{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$. Onda, $A \cup B = \{-2, 0, 1, 3\}$.

Tərif 4. A və B çoxluqlarının kəsişməsi yalnız və yalnız bu çoxluqların hər ikisinə daxil olan elementlərin əmələ gətirdiyi çoxluğa deyilir:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Misal. Tutaq ki, $A = \{-2, 1, 0\}$ və $B = \{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$. Onda, $A \cap B = \{1\}$.

Tərif 5. A və B çoxluqlarının fərqi yalnız və yalnız bu çoxluqlardan birincisinə daxil olan və ikincisinə isə daxil olmayan elementlərdən təşkil olunmuş çoxluğa deyilir:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Misal. Tutaq ki, $A = \{-2, 1, 0\}$ və $B = \{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$. Onda, $A \setminus B = \{-2, 0\}$. Aydınır ki, $A \setminus B \neq B \setminus A$. Doğrudan da, $B \setminus A = \{1\}$.

Çoxluqlar üzərində əməllərin xassələri aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem 2. İxtiyari A, B, C çoxluqları üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

- 1) birləşmə və kəsişmənin idempotentliyi: $A \cup A = A \cap A = A$;
- 2) birləşmə və kəsişmənin kommutativliyi: $A \cup B = B \cup A \wedge A \cap B = B \cap A$;
- 3) birləşmə və kəsişmənin assosiativliyi: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- 4) birləşmənin kəsişməyə və kəsişmənin birləşməyə nəzərən distributivliyi: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$$5) A \cup \emptyset = A \setminus \emptyset = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

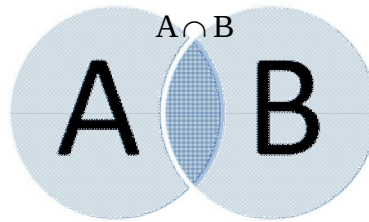
İsbatı. Xassələrin isbatı eyni sxem üzrə aparılır və buna görə də bu xassələrdən birinin isbatı ilə kifayətlənmək olar. Birləşmənin kəsişməyə nəzərən distributivliyini isbat edək.

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

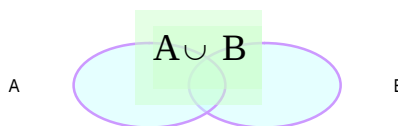
Deməli, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Birləşmə və kəsişmə əməllərinin assosiativliyi istənilən sayda çoxluğun birləşməsi və kəsişməsini müəyyən etməyə imkan verir. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ olduğundan üç çoxluğun birləşməsini sadəcə $A \cup B \cup C$ kimi yazmaq olar. Eyni qayda ilə $A \cap B \cap C$ təyin olunur.

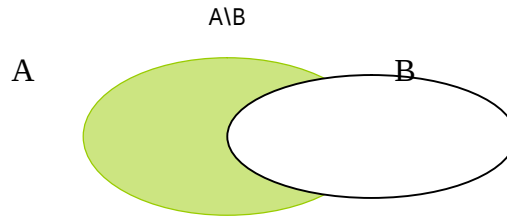
Çoxluqlar üzərində əməllər və onlarla bağlı bir çox məsələləri əyani şəkildə təsvir etmək üçün Eyler-Venn diaqramları adlanan sxemlərdən istifadə olunur. Aşağıdakı şəkillərdə çoxluqlar üzərində əməllərin Eyler-Venn diaqramları vasitəsi ilə təsviri verilmişdir.



Şəkil 1.



Şəkil 2.



Şək. 3.

Riyazi nəzəriyyələrdə çox vaxt universal çoxluq adlanan müəyyən U çoxluğu götürülür və onun alt çoxluqlarına baxılır. Məsələn, Evklid həndəsəsində universal çoxluq olaraq müstəvi qəbul olunur və onun alt çoxluqları – həndəsi fiqurlar öyrənilir. Tutaq ki, U hər hansı universal çoxluqdur və $A \subset U$ onun ixtiyari alt çoxluğudur. $U \setminus A$ fərqi A çoxluğunun *tamamlayıcısı* adlanır və A' kimi işarə olunur. Çoxluğun tamamlayıcısı anlayışının aşağıdakı xassələri vardır:

$$1) (\forall A \subset U)(A \cup A' = U \wedge A \cap A' = \emptyset);$$

$$2) (\forall A \subset U)(A'' = A);$$

$$3) (\forall A, B \subset U)(A \subset B \rightarrow B' \subset A');$$

4) de Morgan qanunları:

$$(\forall A, B \subset U)((A \cup B)' = A' \cap B') \wedge (\forall A, B \subset U)((A \cap B)' = A' \cup B').$$

Sonuncu düsturlardan birincini isbat edək.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\leftrightarrow x \in U \setminus (A \cup B) \leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A \cup B \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in U \wedge \neg(x \in A \cup B) \leftrightarrow x \in U \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in U \wedge (\neg x \in A \wedge \neg x \in B) \leftrightarrow x \in U \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A) \wedge (x \in U \wedge x \notin B) \leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B' \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in (A' \cap B'). \end{aligned}$$

Bununla birinci bərabərlik isbat olunur. Digər xassələr də eyni qayda ilə, məntiq qanunlarından istifadə etməklə isbat oluna bilər.

§2. Binar münasibətlər

1.Çoxluqların düz hasili. Tutaq ki, boş olmayan iki A və B çoxluqları verilmişdir. $a \in A$ və $b \in B$ elementləri götürək. Əgər iki elementli $\{a, b\}$ çoxluğunu düzəltəsək, aydındır ki, $\{a, b\} = \{b, a\}$ olacaqdır. Yəni bu çoxluqlardan götürülmüş elementlərin hansı ardıcılıqla yazılmasından asılı olmadan $\{a, b\}$ çoxluğu dəyişmir. İndi elementlər cütünü elə düzəldək ki, birinci element həmişə birinci çoxluqdan, yəni A çoxluğundan, ikinci element isə B çoxluğundan

götürülmüş olsun. Belə cüt nizamlı cüt adlanır və $\langle a, b \rangle$ kimi işarə olunur. Deyilənlərdən aydındır ki, $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$. İki $\langle a, b \rangle$ və $\langle a', b' \rangle$ ($a, a' \in A \wedge b, b' \in B$) cütləri o zaman bərabər hesab olunur ki, $a = a' \wedge b = b'$ olsun: $\langle a, b \rangle = \langle a', b' \rangle \leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$. a elementinə nizamlı cütün birinci elementi, b -yə isə onun ikinci elementi deyilir.

Tərif 1. Birinci elementi A çoxluğundan, ikinci elementi isə B çoxluğundan götürülmüş bütün mümkün nizamlı cütlər çoxluğuna A və B çoxluqlarının *düz hasili* deyilir və belə işarə olunur: $A \times B$.

Tərifə əsasən yazı bilərik: $A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B \}$.

Misal. $A = \{1, 2, 3\}$ və $B = \{a, b\}$ çoxluqlarının düz hasilini yazı.

$$A \times B = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 3, b \rangle \}.$$

Eyni qayda ilə,

$$B \times A = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle \}.$$

Göründüyü kimi $A \times B \neq B \times A$. Deməli, çoxluqların düz hasili kommutativlik xassəsinə malik deyil. Asanlıqla yəqin etmək olar ki, düz hasil üçün assosiativlik xassəsi də ödənilmir:

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C.$$

Doğrudan da, col tərəf $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle$ kimi, birinci elementi A çoxluğuna daxil olan cütlərdən, sağ tərəf isə $\langle \langle a, b \rangle, c \rangle$ kimi, birinci elementi $A \times B$ hasilinə daxil olan cütlərdən ibarətdir. Deməli, bu hasillər həqiqətən müxtəlifdirlər. Lakin bu çoxluqlar arasında $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle \leftrightarrow \langle \langle a, b \rangle, c \rangle$ kimi qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır.

Teorem 1. İxtiyari A, B, C çoxluqları üçün aşağıdakı münasibətlər ödənilir:

$$a) (A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C;$$

$$b) (A \cap B) \times C = A \times C \cap B \times C;$$

$$c) (A \setminus B) \times C = A \times C \setminus B \times C;$$

$$d) A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset.$$

Teoremin isbatı oxucuya təklif olunur.

Nizamlı cüt anlayışının ümumiləşməsi n ($n \geq 1$) elementli kortej anlayışıdır. Tutaq ki, $A_1, A_2, \dots, A_n$ çoxluqları verilmişdir. i -ci həddi A_i çoxluğundan olan $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ şəklində sonlu ardıcılıq n elementli kortej adlanır. a_i elementlərinə kortejin elementləri deyilir. İki kortejin bərabərlik şərti aşağıdakı münasibətlə müəyyən edilir:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n) \leftrightarrow a_1 = a'_1 \wedge a_2 = a'_2 \wedge \dots \wedge a_n = a'_n.$$

Tərif 2. i -ci həddi A_i çoxluğundan olan bütün mümkün $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ şəkildə n -elementli kortejlər çoxluğuna $A_1, A_2, \dots, A_n$ çoxluqlarının düz hasili deyilir və belə işarə olunur: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Əgər $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ olarsa, $A \times A \times \dots \times A = A^n$ yazılışı da işlədilir (çoxluğun Dekart qüvvəti).

1. Müstəvi üzərində düzbucaqlı Dekart koordinat sistemində hər bir nöqtə iki elementli $\langle x, y \rangle = (x, y)$ korteji vasitəsi ilə göstərilir. Beləliklə, müstəvinin nöqtələr çoxluğu ilə $R \times R$ hasili arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır.

2. Fəzada düzbucaqlı Dekart koordinat sistemində hər bir nöqtə üç elementli $\langle x, y, z \rangle = (x, y, z)$ korteji vasitəsi ilə göstərilir. Beləliklə, fəzanın nöqtələri çoxluğu ilə $R \times R \times R$ hasili arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır.

2. Binar münasibətlər. Binar münasibət anlayışı cəbrdə mühüm rol oynayır. Bir sıra cəbri strukturlar və onlarla bağlı olan anlayışlar binar münasibət anlayışı ilə verilir. Fərz edək ki, iki boş olmayan A və B çoxluqları verilmişdir.

Tərif 3. $A \times B$ düz hasilinin hər bir $\varphi \subset A \times B$ alt çoxluğuna A və B çoxluqlarında verilmiş binar münasibət deyilir; $\langle x, y \rangle \in A \times B$ olarsa deyilir ki, x və y elementləri φ münasibətindədir və belə yazırlar: $x\varphi y$.

Xüsusi halda əgər $A = B$ olarsa, onda deyilir ki, φ münasibəti A çoxluğunda verilmişdir.

Misal 1. R həqiqi ədədlər çoxluğunda $\leq$ münasibəti binar münasibətdir. Bu münasibət $R \times R$ düz hasilində bütün $x \leq y$ şərtini ödəyən $\langle x, y \rangle$ cütlərindən ibarətdir.

Misal 2. $m:n$ bölünmə münasibəti natural ədədlər çoxluğunda verilmiş binar münasibətdir. Bu münasibət $N \times N$ düz hasilində bütün $m:n$ şərtini ödəyən cütlərdən ibarətdir. Məsələn, $18:3$ olduğu üçün $\langle 18, 6 \rangle$ cütü bu münasibətə daxildir: $\langle 18, 6 \rangle \in :$. Lakin, $\langle 6, 18 \rangle$ cütü bu münasibətə daxil deyil, çünki, $6 \nmid 18$.

Tutaq ki, boş olmayan A və B çoxluqlarında φ binar münasibəti verilmişdir.

Tərif 4. A çoxluğunun

$$\text{Dom } \varphi = \{x \in A \mid (\exists y \in B)(x\varphi y)\}$$

şəkildə təyin olunan alt çoxluğuna φ münasibətinin *təyin oblastı* deyilir; B çoxluğunun isə

$$\text{Im } \varphi = \{y \in B \mid (\exists x \in A)(x\varphi y)\}$$

şəkildə təyin olunan alt çoxluğuna φ münasibətinin *qiymətlər oblastı* deyilir.

Tərif 5. $B \times A$ düz hasilində

$$\varphi^\cup = \{\langle y, x \rangle \in B \times A \mid \langle x, y \rangle \in A \times B\}$$

kimi təyin olunan binar münasibət φ münasibətinin *inversiyası* (tərsi) adlanır.

Məsələn, $A = \{1,2,3\}$ və $B = \{a,b,c\}$ çoxluqlarında verilmiş

$$\varphi = \{\langle 1,a \rangle, \langle 1,c \rangle, \langle 2,b \rangle, \langle 2,c \rangle, \langle 3,a \rangle\}$$

münasibəti üçün $\varphi^\cup = \{(a,1), (c,1), (b,2), (c,2), (a,3)\}$ münasibəti inversiya olacaqdır.

Tərif 6. A və B çoxluqlarında verilmiş φ münasibəti ilə B və C çoxluqlarında verilmiş γ münasibətlərinin kompozisiyası A və C çoxluqlarında

$$\gamma \circ \varphi = \{\langle x,z \rangle \mid (\exists y \in B)(x\varphi y \wedge y\gamma z)\}$$

kimi təyin olunan yeni münasibətə deyilir.

İxtiyari cütlər çoxluğuna binar münasibət kimi baxmaq olar. Bu zaman münasibətə daxil olan cütlərin birinci elementlərindən təşkil olunmuş çoxluq münasibətin təyin oblası, ikinci elementlərindən təşkil olunmuş çoxluq isə qiymətlər oblası olacaqdır. Məsələn,

$$\varphi = \{\langle 1,3 \rangle, \langle -1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,-3 \rangle, \langle 0,0 \rangle, \langle 0,2 \rangle\}$$

cütlər çoxluğu binar münasibətdir və

$$Dom \varphi = \{1, -1, 2, 0\}, \quad Im \varphi = \{3, 2, -3, 0\}, \quad \varphi \subset Dom \varphi \times Im \varphi.$$

$A = \{1,2,3\}$ və $B = \{a,b,c\}$ çoxluqlarında verilmiş

$$\varphi = \{\langle 1,a \rangle, \langle 1,c \rangle, \langle 2,b \rangle, \langle 2,c \rangle, \langle 3,a \rangle\}$$

münasibəti ilə, B və $\{0,-2\}$ çoxluqlarında verilmiş

$$\gamma = \{\langle a,-2 \rangle, \langle a,0 \rangle, \langle b,0 \rangle, \langle b,-2 \rangle, \langle c,0 \rangle, \langle c,-2 \rangle\}$$

münasibətinin kompozisiyası aşağıdakı münasibət olacaqdır:

$$\begin{aligned} \gamma \circ \varphi &= \{\langle 1,-2 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 1,-2 \rangle, \langle 2,0 \rangle, \langle 2,-2 \rangle, \langle 2,0 \rangle, \langle 2,-2 \rangle, \langle 3,0 \rangle, \langle 3,-2 \rangle\} = \\ &= \{\langle 1,-2 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 2,0 \rangle, \langle 2,-2 \rangle, \langle 3,0 \rangle, \langle 3,-2 \rangle\}. \end{aligned}$$

Yuxarıda, təkrar olunan cütlərdən biri saxlanaraq qalanları atılmışdır. Asanlıqla görmək olar ki, $\varphi \circ \gamma$ kompozisiyası təyin olunmamışdır (boş çoxluqdır). Deməli, kompozisiya kommutativlik xassəsinə malik deyil: $\gamma \circ \varphi \neq \varphi \circ \gamma$.

Teorem 2. Binar münasibətlərin kompozisiyası assosiativdir, yəni ixtiyari üç φ, γ, η binar münasibətləri üçün

$$\eta \circ (\gamma \circ \varphi) = (\eta \circ \gamma) \circ \varphi.$$

İsbatı. Tərifə əsasən göstərmək lazımdır ki, əgər $x[\eta \circ (\gamma \circ \varphi)]y$ münasibəti doğrudursa, yəni $\langle x,y \rangle \in \eta \circ (\gamma \circ \varphi)$ olarsa, onda $\langle x,y \rangle \in (\eta \circ \gamma) \circ \varphi$ və tərsinə. Birinci implikasiyanı, yəni

$$\langle x,y \rangle \in \eta \circ (\gamma \circ \varphi) \rightarrow \langle x,y \rangle \in (\eta \circ \gamma) \circ \varphi$$

olduğunu göstərmək kifayətdir.

$$\begin{aligned}
& \langle x, y \rangle \in \eta \circ (\gamma \circ \varphi) \rightarrow (\exists z)(x(\gamma \circ \varphi)z \wedge z\eta y) \rightarrow \\
& \rightarrow (\exists z)((\exists t)(x\varphi t \wedge t\gamma z) \wedge z\eta y) \rightarrow (\exists z)(\exists t)(x\varphi t \wedge (t\gamma z \wedge z\eta y)) \rightarrow \\
& \rightarrow (\exists t)(x\varphi t \wedge (\exists z)(t\gamma z \wedge z\eta y)) \rightarrow (\exists t)(x\varphi t \wedge t(\eta \circ \gamma)y) \rightarrow \\
& \rightarrow x[(\eta \circ \gamma) \circ \varphi]y \rightarrow \langle x, y \rangle \in (\eta \circ \gamma) \circ \varphi.
\end{aligned}$$

Teorem isbat olundu. Aşağıdakı teoremin isbatı oxucuya təklif olunur.

Teorem 3. İxtiyari iki φ və γ binar münasibətləri üçün

$$(\varphi \circ \gamma)^\cup = \gamma^\cup \circ \varphi^\cup.$$

Binar münasibət anlayışının ümumiləşməsi n –ar münasibət anlayışıdır. n –ar münasibət dedikdə ixtiyari n elementli kortejlər çoxluğu başa düşülür. Əgər bu kortejlərin hamısının elementləri eyni bir A çoxluğundan götürülərsə, onda deyilir ki, n –ar münasibət A çoxluğunda verilmişdir. Münasibətlərin verilmə üsullarından biri n yerli, yəni n dəyişənli predikatlardan istifadəyə əsaslanır. Tutaq ki, $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ predikatının dəyişənlərinin mümkün qiymətlər çoxluğu, uyğun olaraq, $A_1, A_2, \dots, A_n$ çoxluqlarıdır.

$$\varphi = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid R(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

ilə $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ düz hasilində $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ predikatının doğruluq kortejləri çoxluğunu işarə edək. Aydındır ki, bu $A_1, A_2, \dots, A_n$ çoxluqlarında n –ar münasibət müəyyən edir. Bu münasibət $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ predikatının qrafiki adlanır.

§3. İnikaslar

İnikas və ya funksiya anlayışı münasibət anlayışının xüsusi halıdır.

Tərif 1. φ binar münasibəti o zaman *funksional münasibət* adlanır ki, aşağıdakı şərt ödənilsin:

$$(\forall x)(\exists! y)(x\varphi y);$$

Funksional münasibət eyni zamanda *funksiya* və ya *inikas* da adlanır.

Tərifə əsasən, φ münasibəti yalnız və yalnız o zaman inikas (funksiya) adlanır ki,

$$x\varphi y \wedge x\varphi z \rightarrow y\varphi z$$

münasibəti ödənilsin. $x\varphi y$ şərtini ödəyən y elementi $y = \varphi(x)$ kimi yazılır. Məsələn,

$$\varphi = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$$

münasibəti funksional münasibət deyil, çünki, birinci iki cütdə 1 elementi ilə cüt təşkil edən iki element vardır. Lakin

$$\{\langle n, n^2 \rangle \mid n \in N\}$$

münasibəti isə funksional münasibətdir. Funksional münasibətin təyin oblastı və qiymətlər oblastı eyni zamanda uyğun inikasin təyin oblastı və qiymətlər oblastı adlanır.

Bəzi kurslarda (məsələn, orta məktəb kursunda) funksiyanın tərfi aşağıdakı kimi verilir.

Tərif 2. Əgər X çoxluğundan götürülmüş hər bir x elementinə Y çoxluğundan yeganə y elementi qarşı qoyularsa, onda belə uyğunluğa X çoxluğunda təyin olunmuş funksiya deyilir.

Göstərək ki, bu tərif yuxarıda verilən tərif ilə eynigüclüdür. Tutaq ki, φ inikası tərif 1 vasitəsi ilə təyin olunmuşdur. $X = \text{Dom}\varphi$, $Y = \text{Im}\varphi$ işarə edək. Tərifə əsasən, ixtiyari $x \in X$ elementi götürsək $\langle x, y \rangle \in \varphi$ şərtini ödəyən $y \in Y$ elementi vardır və yeganədir. Beləliklə, φ inikası tərif 2-ni ödəyir. Tərsinə, ikinci tərif ödənilərsə, onda $X = \text{Dom}\varphi$ olan φ funksional münasibəti təyin olunmuşdur. Beləliklə, təriflərin eynigüclü olduğu isbat olundu.

Tutaq ki, φ funksional münasibətdir, $X = \text{Dom}\varphi$ və $\text{Im}\varphi \subset Y$. Bu qısa olaraq $\varphi: X \rightarrow Y$ və ya $X \xrightarrow{\varphi} Y$ kimi yazılır. X çoxluğunun φ inikası zamanı *obrazı* $\varphi(X) = \{\varphi(x) \mid x \in X\} \subset Y$ alt çoxluğuna deyilir. $M \subset Y$ çoxluğunun *proobrazı* isə $\varphi^{-1}(M) = \{x \in X \mid \varphi(x) \in M\}$ çoxluğuna deyilir. Təyin oblastı iki çoxluğun düz hasilinə daxil olan inikas *ikidəyişənli funksiya* adlanır. Eyni qayda ilə çoxdəyişənli funksiya anlayışı verilir.

Inikasların kompozisiyası. Tutaq ki, iki f və g inikasları verilmişdir. Bu inikasların kompozisiyası dedikdə onların binar münasibətlər kimi kompozisiyası başa düşülür və $f \cdot g$ kimi işarə olunur. Asanlıqla göstərmək olar ki, (isbat edin) inikasların kompozisiyası inikasdır; eyni zamanda $(f \cdot g)(x) = f(g(x))$ münasibəti ödənilir. Münasibət kimi, inikasların kompozisiyasının grafiki aşağıdakı kimi müəyyən olunan cütlər çoxluğudur:

$$f \cdot g = \{\langle x, f(g(x)) \rangle \mid g(x) \in \text{Dom}f\}.$$

Məsələn, $f(x) = \sqrt{x}$ və $g(x) = \sin x$ funksiylarının kompozisiyası olan $y = \sqrt{\sin x}$ funksiya elə $\langle x, y \rangle$ cütlər çoxluğundan ibarətdir ki, $\sin x \geq 0$ olsun. Sonuncu bərabərsizliyin həllər çoxluğu bütün $[2\pi k, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}$ şəklində intervalların birləşməsindən ibarətdir.

Münasibətlərdə olduğu kimi inikasların da kompozisiyası kommutativlik xassəsinə malik deyil, lakin assosiativlik isə doğrudur, yəni f, g, h inikaslar olarsa, onda

$$f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h.$$

Tutaq ki, $f: A \rightarrow A$ inikası verilmişdir. Əgər ixtiyari $x \in A$ elementi üçün $f(x) = x$ olarsa, bu inikas eynilik və ya vahid inikas adlanır və i_A kimi işarə olunur. Əgər $g: A \rightarrow B$ inikası verilərsə, onda $g^\cup$ inversiyası həmişə vardır.

Tərif 3. $g: A \rightarrow B$ inikası o zaman *süryektiv inikas* (yaxud A -nın B üzərinə inikası) adlanır ki, ixtiyari $y \in B$ elementi üçün elə $x \in A$ elementi tapmaq mümkün olsun ki, $f(x) = y$

olsun.

Məsələn, $y = \sin x$ funksiyası R həqiqi ədədlər çoxluğunun $[-1,1]$ parçasına süryektiv inikasıdır. Lakin o, R çoxluğunun özünə süryektiv inikası deyil. İki süryektiv inikası kompozisiyası süryektiv inikasıdır.

Tərif 4. $g : A \rightarrow B$ inikası o zaman *inyektiv inikas* adlanır ki, ixtiyari $x_1, x_2 \in A$ elementləri üçün $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$ münasibəti ödənilsin.

Tərifdən alınır ki, inyektiv inikas zamanı iki müxtəlif nöqtənin obrazı iki müxtəlif nöqtə olur. Məsələn, $y = x^3$ inikası inyektivdir, $y = x^2$ isə inyektiv deyil. İki inyektiv inikası kompozisiyası da inyektiv inikasıdır.

Tərif 5. $g : A \rightarrow B$ inikası o zaman *biyektiv inikas* adlanır ki, o həm inyektiv və həm də süryektiv olsun.

İki biyektiv inikası kompozisiyası da biyektiv inikasıdır.

Məsələn, $f(x) = \operatorname{tg} x$ funksiyası $f: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow R$ (intervalın uzunluğu dövrə bərabərdir) inikası kimi biyektivdir, lakin $f(x) = \cos x$ funksiyası isə $f: (-\pi; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ inikası kimi biyektiv deyil.

Teorem. İxtiyari süryektiv $g : A \rightarrow B$ inikası üçün $g \circ g^\cup = i_B$ münasibəti doğrudur.

İsbatı. İxtiyari $y \in B$ elementi götürək. Süryektivliyə əsasən elə $x \in A$ elementi tapmaq olar ki, $y = g(x)$. Deməli, $\{x \in A \mid y = g(x)\}$ çoxluğu boş deyil. Tutaq ki, $x' \in A$ və $\langle x', y \rangle \in g$. Onda, $\langle y, x' \rangle \in g^\cup$ və ya $g(g^\cup(y)) = y$. Kompozisiyanın tərifinə görə $g \circ g^\cup = i_B$.

Tərif 5. $g : A \rightarrow B$ inikası o zaman *tərsi olan inikas* adlanır ki, elə $h : B \rightarrow A$ inikası tapmaq mümkün olsun ki, $h \cdot g = i_A$ və $g \cdot h = i_B$ bərabərlikləri doğru olsun; bu halda h *tərs inikas* adlanır və $h = g^{-1}$ kimi işarə olunur.

Məsələn, $g : x \mapsto \operatorname{tg} x$ inikası $g : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow R$ kimi tərsi olan inikasıdır və onun tərsi $h(x) = \operatorname{arctg} x$ funksiyasıdır.

Teorem 4-dən aydın olur ki, əgər $g^\cup$ münasibəti də süryektiv inikas olarsa, onda tərif 5-ə əsasən g və $g^\cup$ inikaları bir-birinin tərsi olacaqdır. Əgər iki f və g funksiyalarının tərsi varsa, onda $f \circ g$ kompozisiyasının da tərsi vardır və $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ (isbat edin).

§4. Ekvivalentlik münasibəti

Binar münasibətlərin bəzi növlərinin riyaziyyatın bir çox sahələrində mühüm tətbiqləri vardır.

Tərif 1. Tutaq ki, boş olmayan A çoxluğunda φ binar münasibəti verilmişdir. Bu münasibəti

sibət o zaman:

- a) *refleksiv münasibət* adlanır ki, $(\forall x)(x\varphi x)$;
- b) *antirefleksiv münasibət* adlanır ki, $(\forall x)(\neg x\varphi x)$;
- c) *simmetrik münasibət* adlanır ki, $(\forall x, y)(x\varphi y \rightarrow y\varphi x)$;
- ç) *antisimmetrik münasibət* adlanır ki, $(\forall x, y)(x\varphi y \wedge y\varphi x \rightarrow x = y)$;
- d) *tranzitiv münasibət* adlanır ki, $(\forall x, y, z)(x\varphi y \wedge y\varphi z \rightarrow x\varphi z)$;
- e) *rabitəli münasibət* adlanır ki, $(\forall x, y)(x \neq y \rightarrow x\varphi y \vee y\varphi x)$ şərtləri ödənilsin.

Misallar. a) $i_A = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$ münasibəti refleksiv münasibətdir. Asanlıqla yəqin etmək olar ki, i_A münasibətini daxilinə alan hər bir münasibət refleksiv münasibətdir. Xüsusi halda, $A = [0,1]$ olarsa, $x \leq y$ münasibəti refleksiv münasibətdir.

b) İxtiyari φ münasibəti verildisə, $\varphi \setminus i_A$ münasibəti antirefleksiv münasibətdir. Xüsusi halda $A = [0,1]$ olarsa, $x < y$ münasibəti refleksiv münasibətdir.

c) R həqiqi ədədlər çoxluğunda $\varphi = \{\langle x, y \rangle \mid x^2 + y^2 = 1\}$ münasibəti simmetrik münasibətdir. Doğrudan da, x və y ədədləri göstərilən bərabərliyi ödəyərsə, onda onların yerini dəyişdikdə bərabərlik pozulmur.

ç) N natural ədədlər çoxluğunda $\varphi = \{\langle x, y \rangle \mid x : y\}$ bölünmə münasibəti antisimmetrik münasibətdir. Doğrudan da, əgər $x : y$ olarsa, elə k natural ədədi tapmaq olar ki, $x = yk$. Eyni qayda ilə elə m natural ədədi var ki, $y = xm$. Birinci bərabərlikdə ikincini nəzərə alsaq, yazı bilərik: $x = xmk \rightarrow mk = 1 \rightarrow m = k = 1 \rightarrow x = y$.

d) R həqiqi ədədlər çoxluğunda $x < y$ tranzitiv münasibətdir. Yəni $x < y \wedge y < z$ olarsa, onda $x < z$.

e) R həqiqi ədədlər çoxluğunda $x < y$ rabitəli münasibətdir, yəni $x \neq y$ olarsa, onda ya $x < y$ və ya $y < x$.

Tərif 2. Boş olmayan A çoxluğunda verilmiş φ münasibəti o zaman *ekvivalentlik münasibəti* adlanır ki, o, *refleksiv, simmetrik və tranzitiv* olsun.

Ekvivalentlik münasibəti üçün çox işlənən işarələr bunlardır: $\equiv, \approx, \sim$.

Misallar. 1. Z natural ədədlər çoxluğunda verilmiş $\varphi = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in Z \wedge x - y : 5\}$ münasibəti ekvivalentlik münasibətidir. Doğrudan da φ münasibətinin a), c), e) şərtlərini ödədiyi aşağıdakı sxemlərdən görünür.

$$a) (\forall x \in Z)(x\varphi x \leftrightarrow x - x = 0 : 5);$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
& x\varphi y & \rightarrow & y\varphi x \\
c) & \downarrow & & \uparrow \\
& x-y:5 & \rightarrow & y-x:5
\end{array} \\
\\
\begin{array}{ccc}
x\varphi y & \wedge & y\varphi z & \rightarrow & x\varphi z \\
e) & \downarrow & \downarrow & & \uparrow \\
x-y:5 & \wedge & y-z:5 & \rightarrow & (x-y)+(y-z):5 \rightarrow x-z:5
\end{array}
\end{array}$$

Yuxarıdakı sxemdə, məsələn, $x-y:5$ yazılışı $x-y$ fərqlinin 5-ə bölündüyünü işarə edir.

2. Tutaq ki, A müstəvi üzərində yerləşən düz xətlər çoxluğu göstərir. φ binar münasibətini aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\varphi = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge (x = y \vee x \parallel y) \}.$$

Göründüyü kimi, φ münasibəti düz xətlərin paralel olması və ya üst-üstə düşməsi münasibətidir. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu münasibət a), c), e) şərtlərini ödəyir. Deməli, o, ekvivalentlik münasibətidir.

3. İstiqamətlənmiş parçalar (vektorlar) çoxluğunda bərabərlik ekvivalentlik münasibətidir.

Tərif 3. Tutaq ki, φ boş olmayan A çoxluğunda verilmiş ekvivalentlik münasibətidir. $x \in A$ ixtiyari element olarsa, A çoxluğunun $[x]_{\varphi} = \{y \in A \mid x\varphi y\}$ şəklində müəyyən olunan alt çoxluğuna x elementinin *ekvivalentlik sinfi* deyilir.

Ekvivalentlik sinfi bəzən qonşu sinif, çıxıqlar sinfi kimi də adlandırılır. x elementinin ekvivalentlik sinfi $\bar{x}$, x/φ ilə də işarə olunur.

Yuxarıda 1-ci misalda

$$[1] = \{ \dots; -9; -4; 1; 6; 11; \dots \}$$

alt çoxluğu 5-ə böldükdə 1qalığı verən tam ədədlərdən ibarətdir, yəni 1-in ekvivalentlik sinfini göstərir. 2-ci misalda hər hansı a düz xəttinin ekvivalentlik sinfi bu düz xətdən və ona paralel olan bütün düz xətlərdən təşkil olunmuşdur. 3-cü misalda isə verilən istiqamətlənmiş parçanın ekvivalentlik sinfi onun müəyyən etdiyi (sərbəst) vektordur.

Tərif 4. A çoxluğunda verilmiş φ ekvivalentlik münasibətinin doğurduğu ekvivalentlik sinifləri çoxluğuna onun φ münasibətinə nəzərən *faktor-çoxluğu* deyilir və A/φ ilə işarə olunur.

Yuxarıdakı 1-ci misalda cəmi beş ekvivalentlik sinfi vardır: $Z/\varphi = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$. Asanlıqla görmək olar ki, $Z = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$ olmaqla, ekvivalentlik sinifləri cüt-cüt kəsişmir. Bu xassə ekvivalentlik münasibətinin mühüm xassəsidir və o, ümumi halda da doğrudur.

Tərif 5. Əgər A çoxluğunu cüt-cüt kəsişməyən və boş olmayan alt çoxluqlar ailəsinin birləşməsi şəklində göstərmək olarsa, onda bu ailə A çoxluğunun *bölgüsü* adlanır.

Teorem 1. A çoxluğunda φ ekvivalentlik münasibəti verilərsə, onda A/φ faktor-çoxluğu onun bölgüsüdür.

İsbatı. İxtiyari $x \in A$ elementi götürək. $x\varphi x$ mülahizəsi refleksivliyə əsasən doğru olduğu üçün, $x \in [x]_\varphi$. Beləliklə, hər bir element boş olmayan ekvivalentlik sinfi doğurur və bu sinfə daxil olur. Deməli, bütün qonşu siniflərin birləşməsi A çoxluğunu verir. Göstərək ki, müxtəlif ekvivalentlik sinifləri cüt-cüt kəsişmir. $[x]_\varphi \cap [y]_\varphi \neq \emptyset$ olarsa, onda onların ümumi z elementi vardır. Göstərək ki, bu halda $[x]_\varphi = [y]_\varphi$. İxtiyari $a \in [x]_\varphi$ elementi götürək. Ekvivalentlik sinfinin tərifinə əsasən $x\varphi a$. Eyni zamanda, $x\varphi z$. Simmetriklik şərtinə görə yazı bilərik: $x\varphi a \rightarrow a\varphi x$. Transizitivliyə görə $a\varphi x \wedge x\varphi z \rightarrow a\varphi z \rightarrow z\varphi a$. Lakin fərziyyəyə görə $z \in [y]_\varphi$; onda $y\varphi z$ və $z\varphi a$. Transizitivlik xassəsini sonuncu iki münasibətə tətbiq edərək, alırıq $y\varphi z \rightarrow z \in [y]_\varphi$. Deməli, $[x]_\varphi \subset [y]_\varphi$. Eyni qayda ilə göstərə bilərik ki, $[x]_\varphi \supset [y]_\varphi$. Beləliklə, $[x]_\varphi = [y]_\varphi$. Yuxarıdakı mülahizələr göstərir ki, ekvivalentlik sinifləri ya cüt-cüt kəsişmir və ya üst-üstə düşür. Teoremin isbatı başa çatdı.

Bu teoremin tərsi də doğrudur. Yəni boş olmayan A çoxluğunun hər bir bölgüsü müəyyən bir ekvivalentlik münasibəti təyin edir.

Teorem 2. Tutaq ki, boş olmayan A çoxluğunda hər hansı S alt çoxluqlar ailəsi ilə bölgü verilmişdir: yəni heç biri boş olmayan və cüt-cüt kəsişməyən elə A_s ($s \in S$) alt çoxluqları verilmişdir ki,

$$A = \bigcup_{s \in S} A_s$$

Onda, A çoxluğunda elə φ ekvivalentlik münasibəti müəyyən etmək olar ki, S ailəsinə aid olan hər bir alt çoxluq ekvivalentlik sinfi olsun.

İsbatı. Teoremi isbat etmək üçün φ münasibəti aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\varphi = \{ \langle x, y \rangle \mid (\exists s \in S)(x \in A_s \wedge y \in A_s) \}$$

Əvvəlcə göstərək ki, φ münasibəti ekvivalentlik münasibətidir. İxtiyari $x \in A$ elementi verilərsə, onda elə $s \in S$ tapmaq olar ki, $x \in A_s$. Onda φ münasibətinin tərifindən görünür ki, $\langle x, x \rangle \in \varphi$ və $\langle x, y \rangle \in \varphi \rightarrow \langle y, x \rangle \in \varphi$. Deməli, φ münasibəti refleksiv və simmetrikdir. Əgər $\langle x, y \rangle \in \varphi$ və $\langle y, z \rangle \in \varphi$ olarsa, onda elə $s \in S$ tapmaq olar ki, $x, y \in A_s$. Eyni qayda ilə, onda elə $t \in S$ tapmaq olar ki, $y, z \in A_t$. Lakin, S ailəsi bölgü olduğundan $y \in A_s$ və $y \in A_t$ münasibətləri

ancaq $t = s$ olduqda mümkündür. Deməli, $x, y, z \in A_s$ və buna görə də $\langle x, z \rangle \in \varphi$, yəni φ münasibəti həm də tranzitivdir. Hər bir A_s alt çoxluğunun ekvivalentlik sinfi olması bilavasitə φ münasibətinin tərifindən alınır. Teorem 2 isbat olundu.

Eyni zamanda göstərmək olar ki, belə φ münasibəti yeganədir.

Tutaq ki, $f : A \rightarrow B$ inikası verilmişdir. A çoxluğunda aşağıdakı kimi ekvivalentlik münasibəti təyin edək:

$$\varphi = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge f(x) = f(y) \}$$

(φ -nin ekvivalentlik münasibəti olduğunu göstərmək oxucuya təklif olunur). Bu münasibət A çoxluğunda bölgü müəyyən edir. Yeni $\bar{f} : A/\varphi \rightarrow B$ inikası müəyyən edək. Hər bir $[x]_\varphi$ sinfinə $f(x) \in B$ elementini qarşı qoyaq. Əgər $x' \in [x]_\varphi$ olarsa, onda $f(x) = f(x')$ olduğu üçün, $\bar{f}$ inikasının qiyməti sinfin elementindən deyil, sinfin özündən asılıdır. Aydındır ki, $\bar{f}$ inyektiv inikasdır (göstərin).

§5. Nizam münasibəti

Tərif 1. Boş olmayan A çoxluğunda verilmiş φ binar münasibəti antisimmetrik və tranzitiv olarsa, onda belə münasibət *nizam münasibəti* adlanır. Bu halda deyilir ki, $\langle A, \varphi \rangle$ cütü *nizamlanmış, yaxud nizamlı çoxluqdur*.

Tərif 2. A çoxluğunda verilmiş φ nizam münasibəti refleksiv münasibət olarsa, onda o, *qeyri-ciddi nizam münasibəti* adlanır; antirefleksiv nizam münasibətinə isə *ciddi nizam münasibəti* deyilir.

Qeyd edək ki, əgər φ binar münasibəti tranzitiv və antirefleksiv olarsa, onda bu münasibət antisimmetrikdir. Doğrudan da, tutaq ki, φ binar münasibəti tranzitiv və antirefleksivdir. Onda, tranzitivliyə görə $x\varphi y \wedge y\varphi x \rightarrow x\varphi x$. Lakin, antirefleksivliyə əsasən $x\varphi x$ mülahizəsi yalandır. Buna görə də $x\varphi y \wedge y\varphi x$ olmasından şərti yalan olan $x\varphi x \rightarrow x = y$ implikasiyasının doğruluğu alınır. Beləliklə,

$$x\varphi y \wedge y\varphi x \rightarrow x = y$$

və deməli, φ antisimmetrikdir. Deyilənlərə və tərif 2-yə əsasən aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq.

Teorem 1. Antirefleksiv və tranzitiv münasibət ciddi nizam münasibətidir.

Misallar. 1. Natural ədədlər çoxluğunda tam bölünmə ($\div$) münasibəti nizam münasibətidir. Bu nizam münasibəti refleksiv olduğu üçün $(a \div a)$ o, qeyri-ciddi nizamdır.

2. Həqiqi ədədlər çoxluğunda $x < y$ ciddi nizam münasibətidir.

3. Tam ədədlər çoxluğunda bölünmə münasibəti antisimmetrik olmadığı üçün o, nizam münasibəti deyil. Məsələn, $3:(-3) \wedge (-3):3$, lakin $3 \neq -3$.

Tərif 3. Tutaq ki, $\langle A, \varphi \rangle$ nizamlı çoxluqdur. Əgər φ rabitəli münasibət olarsa, ona *xətti nizam münasibəti* deyilir, $\langle A, \varphi \rangle$ isə *xətti nizamlı çoxluq* adlanır.

Qeyd etmək lazımdır ki, nizam münasibətinə müxtəlif yanaşmalar mövcuddur. Biz [10] və [17]–də olan yanaşmaya üstünlük veririk. Tutaq ki, φ xətti nizamdır. Onda əgər $x\varphi y \wedge y\varphi x$ doğru olarsa, tranzitivliyə əsasən $x\varphi x$ doğru olar. Deməli, əgər φ ciddi nizam olarsa, onda $x\varphi y \wedge y\varphi x$ mülahizəsi yalandır. Beləliklə, ciddi xətti nizam münasibəti müəyyən edilmiş çoxluqda *trixotomiya qanunu* deyilən təklif alınır: $x = y$, $x\varphi y$, $y\varphi x$ münasibətlərindən ancaq biri ödənilir.

Tərif 4. Əgər $\langle A, \varphi \rangle$ xətti nizamlı çoxluq deyilsə, onda o, *qismən nizamlı çoxluq* adlanır.

Misallar. 1. $x\varphi y \leftrightarrow x < y$ kimi təyin olunan münasibət R həqiqi ədədlər çoxluğunda ciddi xətti nizam münasibətidir. İxtiyari iki x və y həqiqi ədədləri üçün aşağıdakı üç münasibətdən ancaq biri ödənilir: $x = y$, $x > y$, $x < y$.

2. Hər hansı M çoxluğunun alt çoxluqlar çoxluğunda $\subset$ münasibəti qeyri-ciddi və xətti olmayan nizam münasibətidir.

Tərif 5. Tutaq ki, $\langle A, \varphi \rangle$ nizamlı çoxluqdur. $a \in A$ elementi o zaman *ən kiçik element* adlanır ki, $(\forall x \in A)(a \neq x \rightarrow a\varphi x)$.

Hər bir xətti nizamlı çoxluqda ən kiçik element birdən çox ola bilməz. N natural ədədlər çoxluğunun hər bir alt çoxluğunda ən kiçik element vardır. Lakin $(0,1)$ aralığında “ $<$ ” ciddi nizamına görə ən kiçik element yoxdur.

Tərif 6. Əgər xətti nizamlı $\langle A, \varphi \rangle$ çoxluğunun hər bir boş olmayan alt çoxluğunda ən kiçik element varsa, onda belə çoxluq *tamam nizamlı çoxluq* adlanır.

Yuxarıda deyilənlərə əsasən, N natural ədədlər çoxluğu *tamam nizamlı çoxluq*dur, lakin həqiqi ədədlər çoxluğu *tamam nizamlı* deyil.

III FƏSİL. Cəbrlər və cəbri sistemlər

Cəbrin əsas tədqiqat obyektləri içərisində cəbrlər və cəbri sistemlər mühüm yer tutur. Müasir riyaziyyat elminin bir çox sahələrində cəbri sistemlərin böyük əhəmiyyəti vardır. Cəbr və cəbri sistemlərdə daxil olunaraq öyrənilən əməllər və münasibətlərin bir çox xassələri müxtəlif tətbiqlərdə müxtəli şəkildə özünü büruzə verir. Bu müxtəlifliyin zahiri təzahürlərindən azad olaraq, məsələnin məzmununa müvafiq şərh verməklə tədqiq olunan proseslərdə cəbri strukturlar vermək olur. Məsələn, riyazi analizdə kəsilməz funksiyalar halqasının daxil edilməsi, yaxud çoxobrazlıları öyrənərkən toxunan fəza anlayışının daxil edilməsi və s. məsələlərin öyrənilməsini sadələşdirir, onlara ümumi məzmun və məna verir. Cəbrlərin və cəbri sistemlərin tətbiqi nəticəsində riyaziyyatın müxtəlif, ilk baxışda uyuşmayan bir çox sahələrini birləşdirən müştərək tədqiqat istiqamətləri meydana gəlmişdir.

§1. Cəbri əməllər və onların növləri

Tutaq ki, G ixtiyari boş olmayan çoxluq, n natural ədəddir.

Tərif 1. n rəngli cəbri əməl dedikdə, hər bir n elementli $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \in G^n$ kortejinə birqiymətli təyin olunmuş $a \in G$ elementini qarşı qoyan

$$f : G^n \rightarrow G,$$

inikası başa düşülür.

Əgər $n=1$ olarsa, cəbri əməl *unar* əməl, $n=2$ olduqda isə *binar* əməl adlanır. Bəzən *0-ar* əməl də daxil edilir. $n=0$ olduqda, şərti olaraq $G^0 = \{e\}, e \in G$ hesab edilir və ümimiliyi pozmadan, $f(e) = e$ qəbul olunur; beləliklə, *0-ar* əməl hər hansı bir elementin qeyd olunmasından ibarətdir.

Cəbri əməllər içərisində binar əməllər xüsusi rol oynayır. Əgər $f : G \times G \rightarrow G$ binar əməl olarsa, onda funksional yazılışdan istifadə edərək ixtiyarı $\langle a, b \rangle$ elementlər cütü üçün əməlin nəticəsini $f(a, b) = c, c \in G$ kimi yazı bilərik. Lakin binar əməllər üçün ənənəvi simvolika vardır. Bu əməllər üçün yuxarıda deyilən $f(a, b)$ simvolu əvəzinə afb yazılışından istifadə olunur. Bəzi geniş yayılmış əməl işarələri bunlardır: $+, -, \cdot, \times, \div, *, \perp$ və s. Məsələn, $a + b, a * b, a \perp b$ və s.

Misallar. 1. N natural ədədlər çoxluğunda toplama əməli təyin olunmuşdur. Hər $\langle n, m \rangle$ natural ədədlər cütünə onların $n + m$ cəmini qarşı qoyan bu əməl binar əməldir.

2. Q rasional ədədlər çoxluğunda iki binar əməl təyin olunmuşdur: toplama və vurma əməlləri. Əlbəttə, bu o demək deyildir ki, Q çoxluğunda başqa binar əməl təyin oluna bilməz. Belə əməllər sonsuz sayda müəyyən oluna bilər. Məsələn, $\langle a, b \rangle \mapsto ab - 2$ kimi təyin olunan ini-

kas binar əməl müəyyən edir.

3. R həqiqi ədədlər çoxluğunda toplama və vurma binar əməlləri təyin olunmuşdur.

4. R həqiqi ədədlər çoxluğunda unar əməl olaraq əks həqiqi ədədi müəyyən edən $a \mapsto (-a)$ əməli daxil etmək olar.

5. Hər hansı M çoxluğunun alt çoxluqlar çoxluğunu G ilə işarə edək. (A, B) alt çoxluqlar cütünə $A \cup B$ birləşməsini qarşı qoyan əməl binar əməldir. $A \mapsto M \setminus A$ kimi təyin olunan inikas isə unar əməl müəyyən edir.

Əlbəttə, müxtəlif rəngli əməllər təyin olunmuş bir-birindən kəskin fərqlənən çoxlu sayda misallar göstərmək olar. Gələcəkdə biz belə misallara daha çox rast gələcəyik və onların cəbrdə mühüm rolunun olduğunu yəqin edəcəyik.

Binar əməllərin növləri. Tutaq ki, G çoxluğunda $*$ binar əməli təyin olunmuşdur.

Tərif 2. Əgər ixtiyari iki $a, b \in G$ elementləri üçün

$$a * b = b * a$$

bərabərliyi ödənilərsə, onda deyilir ki, $*$ əməli *kommutativ* əməldir, yəni $*$ əməli *kommutativlik* xassəsinə malikdir.

Tərif 3. Əgər ixtiyari üç $a, b, c \in G$ elementləri üçün

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

bərabərliyi ödənilərsə, onda deyilir ki, $*$ əməli *assosiativ* əməldir, yəni $*$ əməli *assosiativlik* xassəsinə malikdir.

Assosiativlifə əsasən hər iki nəticə eynidir və onu sadəcə $a * b * c$ kimi yazmaq olar.

İndi isə fərz edək ki, G çoxluğunda iki binar əməl təyin olunmuşdur: $\bullet$ və $+$.

Tərif 4. Əgər ixtiyari $a, b, c \in G$ elementləri üçün

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c \wedge (a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$$

bərabərlikləri ödənilərsə, onda deyilir ki, $\bullet$ əməli $+$ əməlinə nəzərən *distributiv* əməldir, yəni $\bullet$ əməli $+$ əməlinə nəzərən *distributivlik* xassəsinə malikdir.

Misallar.1. Q rəşional ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş toplama və vurma əməlləri kommutativ və assosiativ əməllərdir.

2. Tam ədədlər çoxluğunda “ $-$ ” çıxma əməli təyin olunmuşdur, lakin bu əməl kommutativlik və assosiativlik xassələrinə malik deyil:

$$3 - 2 \neq 2 - 3 \wedge (1 - 1) - 1 \neq 1 - (1 - 1).$$

3. Q rəşional ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş vurma əməli toplama əməlinə nəzərən distributivlik xassəsinə malikdir: $a(b + c) = ab + ac$.

4. R həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş vurma əməli çıxma əməlinə nəzərən

distributivlik xassəsinə malikdir: $a(b - c) = ab - ac$.

5. R həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş çıxma əməli vurma əməlinə nəzərən distributivlik xassəsinə malik deyil. Doğrudan da,

$$a - (bc) = (a - b)(a - c)$$

bərabərliyi doğru deyil.

Neytral və simmetrik elementlər. Tutaq ki, G çoxluğunda $\bullet$ binar əməli təyin edilmişdir və $e \in G$ elementi qeyd olunmuşdur.

Tərif 5. Əgər ixtiyari $a \in G$ elementi üçün

$$a \bullet e = a$$

bərabərliyi ödənilərsə, onda deyilir ki, $e \in G$ elementi $\bullet$ əməlinə nəzərən *sağ neytral elementdir*.

Tərif 6. Əgər ixtiyari $a \in G$ elementi üçün

$$e \bullet a = a$$

bərabərliyi ödənilərsə, onda deyilir ki, $e \in G$ elementi $\bullet$ əməlinə nəzərən *sol neytral elementdir*.

Əgər e həm sağ, həm də sol neytral element olarsa, ona sadəcə neytral element adlanır.

Teorem 1. Neytral element yeganədir.

İsbatı. Tutaq ki, iki neytral element vardır: e və e' . Onda yazı bilərik: $e = e \bullet e' = e' \rightarrow e = e'$, yəni neytral element yeganədir.

Misallar. 1. Q rəşional ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş toplama əməli üçün 0 ədədi neytral elementdir.

2. 1 ədədi Q rəşional ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş vurma əməli üçün neytral elementdir.

3. A çoxluğunda təyin olunmuş $f : A \rightarrow A$ inikaslar çoxluğunda inikasların $\circ$ kompozisiyası binar əməldir. i_A eynilik inikası bu əmələ nəzərən neytral elementdir.

4. Tutaq ki, U hər hansı universal çoxluq, E isə onun alt çoxluqları çoxluğudur. E çoxluğunda $\cup$ birləşmə əməli binar əməldir. $\emptyset$ (boş çoxluq) bu əmələ nəzərən neytral elementdir.

Tutaq ki, G çoxluğunda $\bullet$ binar əməli təyin olunmuşdur və $e \in G$ elementi neytral elementdir.

Tərif 7. Tutaq ki, $a \in G$ elementi üçün elə $a' \in G$ elementi var ki,

$$a \bullet a' = e$$

bərabərliyi ödənilir. Onda deyilir ki, a' elementi $\bullet$ əməlinə nəzərən a elementinə *sağ simmetrik elementdir*.

Tərif 8. Tutaq ki, $a \in G$ elementi üçün elə $a'' \in G$ elementi var ki,

$$a'' \bullet a = e$$

bərabərliyi ödənilir. Onda deyilir ki, a'' elementi • əməlinə nəzərən a elementinə *sol simmetrik element*dir. Əgər e elementi həm sağ və həm də sol simmetrik element olarsa, ona verilmiş əmələ görə a elementinə simmetrik element deyilir.

Misallar. 1. Q rəşional ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş toplama əməlinə nəzərən hər bir a rəşional ədədinin simmetrik elementi vardır və $-a$ -ya bərabərdir.

2. Q rəşional ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş vurma əməlinə nəzərən sıfırdan fərqli hər bir a rəşional ədədinin simmetrik elementi vardır və $a^{-1} = 1/a$ -ya bərabərdir.

§2. Cəbrlər.

Tutaq ki, boş olmayan hər hansı G çoxluğunda müəyyən Ω əməllər çoxluğu verilmişdir. $G = \langle G, \Omega \rangle$ cütü *cəbr* adlanır. G çoxluğu cəbrin əsas çoxluğu, Ω çoxluğunun elementlərinə baş əməllər, yaxud əsas əməllər deyilir.

Misallar. 1. N natural ədədlər çoxluğunda toplama əməli təyin olunmuşdur. Buna görə də $\langle N, \Omega \rangle$ cütü cəbrdir, burada $\Omega = \{+\}$. Bu cəbr sadəcə olaraq $\langle N, + \rangle$ kimi işarə olunur.

2. Q rəşional ədədlər çoxluğunda iki binar əməl təyin olunmuşdur: toplama və vurma əməlləri. Buna görə də $\langle Q, \Omega \rangle$ cütü cəbrdir, burada $\Omega = \{+, \cdot\}$. Bu cəbr sadəcə olaraq $Q = \langle Q, +, \cdot \rangle$ kimi işarə olunur.

3. R həqiqi ədədlər çoxluğunda iki binar əməl təyin olunmuşdur: toplama və vurma əməlləri. Buna görə də $R = \langle R, +, \cdot \rangle$ nizamlı üçlüyü cəbrdir.

Qeyd edək ki, misal 3-də əməl kimi unar “-” əməli götürülə bilər və bu əməl verilmiş ədədi əks işarəli ədədə inikas edən unar əməldir. Əsas çoxluğu eyni olan, lakin baş əməlləri eyni olmayan cəbrlər müxtəlif cəbrlər hesab olunur. Cəbrin kortej şəklində söyləniləndə əməllərin yerləşdiyi ardıcılıqla onların rəşqlərindən düzəlmiş ardıcılığa cəbrin tipi deyilir. Məsələn, yuxarıda göstərilən misallardakı cəbrlər, uyğun olaraq, (2), (2,2) və (2,2) tipli cəbrlərdir. $\langle R, +, \cdot, - \rangle$ cəbrinin tipi (2,2,1)-dir (burada “-” əks elementə keçməni göstərən unar əməldir).

$\langle R, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ isə (2,2,1,0,0) tipli cəbrdir (0 və 1 elementlərinin seçilməsi 0 rəşqlı əməllərdir).

$\langle G, \Omega \rangle$ cəbrində hər hansı $A \subset G$ alt çoxluğu götürək və bu çoxluqda ixtiyari $\omega \in \Omega$ cəbri əməlinin təsirini öyrənək. Sadəlik üçün bu əməli binar əməl qəbul edək. Ola bilər ki, ixtiyari iki $a, b \in A$ elementləri üçün $a \omega b \in A$ münasibəti də doğru olsun. Bu halda deyilir ki, $A \subset G$ alt çoxluğu ω əməlinə görə qapalıdır (yaxud dayanıqlıdır).

Tərif 1. Əgər $A \subset G$ alt çoxluğu ixtiyari $\omega \in \Omega$ əməlinə görə qapalıdırsa, onda $\langle A, \Omega \rangle$ cəbri $\langle G, \Omega \rangle$ cəbrinin *alt cəbri* adlanır.

Aydındır ki, alt cəbrdə hər bir əməl əvvəlki cəbrdəki bütün xassələrə malik olacaqdır. Yuxarıda təyin olunan cəbrlərin bəzi alt cəbrlərini göstərək.

1. N natural ədədlər çoxluğunda bütün cüt ədədlər çoxluğunu $2N$ kimi işarə edək. $\langle 2N, + \rangle$ cəbri $\langle N, + \rangle$ cəbrinin alt cəbri olacaqdır.

2. Q rasional ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş $\langle Q, +, \cdot \rangle$ cəbrinin alt cəbri olaraq $\langle Z, +, \cdot \rangle$ cəbri götürülə bilər.

3. Öz növbəsində $\langle Q, +, \cdot \rangle$ cəbri $\langle R, +, \cdot \rangle$ cəbrinin alt cəbridir.

Alt cəbrlərə aid daha əhəmiyyətli misallar müxtəlif konkret cəbrlər öyrənilərkən veriləcək və onların müxtəlif xassələri və tətbiqləri öyrəniləcəkdir.

Fərz edək ki, ixtiyari iki eyni tipli $\langle G, \Omega \rangle$ və $\langle G', \Omega' \rangle$ cəbrləri verilmişdir. İki inikasa baxaq. Bunlardan birincisi əsas çoxluqların inikasıdır: $\varphi: G \rightarrow G'$, ikincisi isə baş əməllər çoxluğunda verilmiş biyektiv $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega'$ inikasıdır. İstənilən $\omega \in \Omega$ əməli üçün $\sigma(\omega)$ əməlinin ω əməli ilə eyni r rənginə malik olduğunu qəbul edək. Onda ixtiyari $\langle a_1, \dots, a_r \rangle \in G^r$ korteji üçün $\omega(a_1, \dots, a_r) \in G$. Aydındır ki, $\varphi: G \rightarrow G'$ inikası $\bar{\varphi}: G^r \rightarrow G'^r$ inikasını doğurur. Bu sadəcə olaraq $(a_1, \dots, a_r) \rightarrow (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_r))$ uyğunluğu ilə yaranır.

Tərif 2. Əgər ixtiyari $\langle a_1, \dots, a_r \rangle \in G^r$ korteji üçün

$$\varphi(\omega(a_1, \dots, a_r)) = \sigma(\omega)(\bar{\varphi}(a_1, \dots, a_r))$$

olarsa, onda deyilir ki, $\varphi: G \rightarrow G'$ inikası $\omega \in \Omega$ əməlini saxlayır.

Aydındır ki, hər bir ω əməlinin öz r rəngi vardır və deməli, $\bar{\varphi}$ inikası ω əməlinə asılıdır və onu $\bar{\varphi}_\omega$ kimi işarə etmək daha doğrudur. Beləliklə, yuxarıdakı bərabərliyi daha qısa şəkildə $\varphi \circ \omega = \sigma(\omega) \circ \bar{\varphi}_\omega$ kimi yazmaq olar. Bəzən bu bərabərlik aşağıdakı diaqram ilə ifadə olunur

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\ \omega \uparrow & & \uparrow \sigma(\omega) \\ G^r & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & G'^r \end{array}$$

və deyilir ki, bu *diaqram kommutativdir*.

Tərif 3. İxtiyari $\omega \in \Omega$ əməli üçün $\varphi \circ \omega = \sigma(\omega) \circ \bar{\varphi}_\omega$ münasibəti ödənilərsə, yəni $\varphi: G \rightarrow G'$ inikası hər bir baş əməli saxlayarsa, onda belə inikas $\langle G, \Omega \rangle$ cəbrinin $\langle G', \Omega' \rangle$ cəbrinə *homomorfizmi* adlanır.

φ homomorfizmi suryektiv olarsa ona *epimorfizm*, inyektiv olarsa *monomorfizm*, φ biyektiv olduqda isə *izomorfizm* deyilir. $\varphi: G \rightarrow G'$ izomorfizm olduqda

$$\langle G, \Omega \rangle \cong \langle G', \Omega' \rangle$$

yazırlar və deyirlər ki, $\langle G, \Omega \rangle$ və $\langle G', \Omega' \rangle$ cəbrləri izomofdur. Məsələn, $n \mapsto 2n$ inikası $\langle N, + \rangle$ cəbrinin $\langle 2N, + \rangle$ cəbrinə izomorfizmdir: $\langle N, + \rangle \cong \langle 2N, + \rangle$. Eynilik inikası isə $\langle Z, +, \cdot \rangle$ cəbrinin $\langle Q, +, \cdot \rangle$ cəbrinə monomorfizmdir. $a \mapsto \ln a$ inikası $\langle R^+, \cdot \rangle$ cəbrinin $\langle R, + \rangle$ cəbrinə homomorfizmdir. Asanlıqla görmək olar ki, bu homomorfizm də izomorfizmdir, yəni

$$\langle R^+, \cdot \rangle \cong \langle R, + \rangle.$$

Bəzən monomorfizm *izomorf daxilolma* adlanır. $\langle G, \Omega \rangle$ cəbrinin özünə izomorfizminə *avtomorfizm*, özünə epimorfizminə isə *endomorfizm* deyilir. Aşağıdakı xassələri isbatsız qəbul edək.

1. Tutaq ki, $\langle G, \Omega \rangle$, $\langle G', \Omega' \rangle$, $\langle G'', \Omega'' \rangle$ üç eynitipli cəbrlərdir, $\alpha : G \rightarrow G'$ və $\beta : G' \rightarrow G''$ isə homomorfizmlərdir. Onda, $\beta \circ \alpha : G \rightarrow G''$ kompozisiyası da homomorfizmdir.
2. $\alpha : G \rightarrow G'$ və $\beta : G' \rightarrow G''$ izomorfizmlər olarsa, onda, $\beta \circ \alpha : G \rightarrow G''$ kompozisiyası izomorfizmdir.
3. $\alpha : G \rightarrow G'$ izomorfizm olarsa, onda $\alpha^{-1} : G' \rightarrow G$ izomorfizmdir.

Cəbri sistemlər. Cəbr anlayışının ümumiləşməsi *cəbri sistem* anlayışdır. Cəbri sistem dedikdə elə nizamlı $\langle A, \Omega, \Sigma \rangle$ üçlüyü başa düşülür ki, burada A hər hansı çoxluq, Ω A çoxluğunda təyin olunmuş əməllər çoxluğu, Σ isə həmin çoxluqda təyin olunmuş münasibətlər çoxluğudur. Ω və Σ çoxluqları sonlu olarsa, onlara daxil olan əməl və münasibətlər sadalanmaqla da verilə bilər.

Misallar.1. $\langle N, +, > \rangle$ nizamlı üçlüyü natural ədədlərin ciddi xətti nizamlanmış additiv yarımqrupunu göstərir.

2. $\langle Q, +, \cdot, 0, 1, > \rangle$ rəşional ədədlərin ciddi xətti nizamlı meydanını göstərir. Ciddi xətti nizamlı ixtiyari $\langle K, +, \cdot, 0, 1, > \rangle$ meydanında həmişə $(u \in K)(u^2 > 0)$ münasibəti ödənilir. Bu səbəbdən kompleks ədədlər meydanını ciddi xətti nizamlı meydana çevirmək olmaz.

3. $\langle N, +, \vdots \rangle$ cəbri sistemi natural ədədlərin additiv yarımqrupunda bölünmə münasibətinin verildiyini göstərir. Bu nizamlı additiv yarımqrup qismən nizamlanmış olur. Toplama əməli ilə nizamlı münasibəti arasında aşağıdakı münasibət ödənilir:

$$(m, n, a \in N)(m \vdots a \wedge n \vdots a \rightarrow m + n \vdots a).$$

Tutaq ki, K və K' çoxluqlarında binar $\varphi \subset K \times K$ və $\varphi' \subset K' \times K'$ münasibətləri verilmişdir, $f : K \rightarrow K'$ isə hər hansı inikasdır. Əgər

$$(\forall a, b \in K)(a\varphi b \rightarrow f(a)\varphi f(b))$$

münasibəti ödənərsə, onda deyilir ki, f inikası $\langle K, \varphi \rangle$ cəbri sisteminin $\langle K', \varphi' \rangle$ cəbri sisteminə homomorfizmdir. Biyektiv homomorfizm *izomorfizm* adlanır. $f : K \rightarrow K'$ izomorfizm olarsa, $\langle K, \varphi \rangle$ cəbri sistemi ilə $\langle K', \varphi' \rangle$ cəbri sistemi izomorf sistemlər adlanır və bu fakt simvolik olaraq belə yazılır $\langle K, \varphi \rangle \cong \langle K', \varphi' \rangle$.

§3. Qrupun tərfi və misallar

Cəbrlər içərisində ən sadəsi və eyni zamanda ən geniş tətbiqlərə malik olanı qrupdur. Qrupda ancaq bir binar əməl təyin olunmuşdur. Təbiətdə baş verən proseslərin əksəriyyətində daxili simmetriya müşahidə olunur. Belə proseslərin öyrənilməsinə qrup nəzəriyyəsi tətbiq olunur.

Tutaq ki, hər hansı boş olmayan G çoxluğu verilmişdir və “ $\cdot$ ” binar əməli təyin olunmuşdur. Bu əməl hər bir $(x, y) \in G^2$ cütünə qarşı yeganə $x \cdot y \in G$ elementi qarşı qoyur.

Tərif 1. $\langle G, \cdot \rangle$ cəbri o zaman qrup adlanır ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

- 1) “ $\cdot$ ” əməli assosiativdir, yəni $(\forall x, y \in G)(x(yz) = (xy)z)$;
- 2) vahid element vardır, yəni e elementi var ki, $(\forall x \in G)(xe = x)$;
- 3) ixtiyari $x \in G$ elementi üçün e x' elementi tapmaq olar ki,

$$xx' = e.$$

Göründüyü kimi qrup $(2,1,0)$ tipli cəbrdir. Tərifdəki e elementi qrupun vahid, yaxud neytral elementi adlanır. x' elementinə isə x -ə görə simmetrik element deyilir. Əgər qrupun əməli multiplikativ yəni “ $\cdot$ ” kimi yazılırsa, neytral element vahid, additiv yəni « $+$ » kimi yazılırsa, onda neytral element - sıfır adlanır.

Tərif 2. $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunda təyin olunmuş əməl kommutativ olarsa, yəni

$$(\forall x, y \in G)(xy = yx)$$

şərti ödənilərsə, ona *kommutativ qrup* yaxud *Abel qrupu* deyilir.

G sonlu çoxluq olarsa, onda bu qrup *sonlu qrup* adlanır, G çoxluğunun elementlərinin sayına isə *qrupun tərtibi* deyilir. G sonsuz çoxluq olduqda isə belə qrup sonsuz tərtibli qrup adlanır. Məsələn, $G = \{-1, 1\}$ çoxluğu vurma əməli ilə qrup təşkil edir. Bu qrupun tərtibi 2- yə bərabərdir. Aşağıdakı 1-4 misallarında sonsuz tərtibli qruplara aid nümunələr verilmişdir.

Misallar. 1. Q rəşional ədədlər çoxluğunda binar əməl olaraq adi toplama əməlini götürək. Onda $\langle Q, + \rangle$ cütü (2) tipli cəbr olacaqdır. Toplama əməli assosiativ və kommutativdir, 0 neytral

elementdir, işarəcə əks elementə keçid isə simmetrik elementi verəcəkdir. Bu cəbr kommutativ qrupdur və rəşional ədədlərin additiv qrupu adlanır.

2. Sıfır elementi təcrid olunmuş $Q^* = Q \setminus \{0\}$ rəşional ədədlər çoxluğunda binar əməl olaraq adi vurma əməlini götürək. Onda $\langle Q^*, \cdot \rangle$ cütü rəşqı (2) olan cəbr olacaqdır. Əməl kommutativlik və assosiativlik xassələrinə malikdir, 1 neytral elementdir, simmetrik element tərs elementə keçməklə alınır. Buna görə də $\langle Q^*, \cdot \rangle$ cəbri kommutativ qrupdur.

3. $\langle R, + \rangle$ cütü (2) tipli cəbrdir. Toplama əməli assosiativ və kommutativdir. 0 neytral elementdir, i.ə. işarəcə əks elementə keçid isə simmetrik elementi verəcəkdir. Bu cəbr kommutativ qrupdur və həqiqi ədələrin additiv qrupu adlanır.

4. Sıfır elementi təcrid olunmuş $R^* = R \setminus \{0\}$ həqiqi ədədlər çoxluğunda binar əməl olaraq adi vurma əməlini götürək. Onda $\langle R^*, \cdot \rangle$ cütü yenə də rəşqı (2) olan cəbrdir. Əməl kommutativ və assosiativdir, 1 neytral elementdir, simmetrik element tərs elementə keçməklə alınır. Deməli, bu cəbr kommutativ qrupdur.

5. Tutaq ki, A ixtiyari boş olmayan çoxluqdur. G ilə A çoxluğunun bütün mümkün biyektiv inikaslar çoxluğunu işarə edək. G çoxluğunda inikasların “ $\circ$ ” kompozisiya əməli təyin olunmuşdur. Buna görə də $\langle G, \circ \rangle$ cütü cəbr olacaqdır. Kompozisiya əməli assosiativ əməldir və eynilik inikası onun neytral elementidir. Eyni zamanda hər bir biyektiv inikas tərsi olan inikasdır və tərs inikas simmetrik element rolunu oynayır. Deməli, $\langle G, \circ \rangle$ cəbri kommutativ olmayan qrupdur. Cəbrdə kompozisiya əməli çox zaman multiplikativ şəkildə yazılır, yəni f və g inikaslarının kompozisiyası fg kimi işarə olunur.

6. Fərz edək ki, $V(O)$ müstəvi üzərində, başlanğıc nöqtələri qeyd olunmuş O nöqtəsində olan istiqamətlənmiş parçalar (vektorlar) çoxluğudur. Paralleloqram qaydasına əsasən iki belə vektorun cəmi yenə də başlanğıcı O nöqtəsində olan vektordur. Asanlıqla yəqin etmək olar ki, bütün baxılan vektorlar çoxluğu vektorların toplanması əməlinə nəzərən kommutativ qrup əmələ gətirir. Bu qrupu (2,1) tipli $\langle V(O), +, - \rangle$ cəbri kimi işarə etmək olar.

7. Cəbrə misal olaraq $\langle G, \circ \rangle$ cütünü götürək; burada G müstəvinin koordinat başlanğıcı ətrafında dönmələr çoxluğunu göstərir. Dönmə, yaxud fırlanma müstəvinin özünə inikasıdır. Bu inikas inyektivdir və baxılan cəbr kommutativ qrupdur (cəbri əməl burada dönmələrin kompozisiyasından ibarətdir). Bu qrup müstəvinin dönmələr qrupu adlanır. Qrupun neytral elementi sıfır bucaq qədər dönmə, yəni eynilik inikasıdır. α bucağı qədər dönmənin əksi isə $-\alpha$ bucağı qədər dönmədir (simmetrik element). Qeyd etmək lazımdır ki, $\alpha - \beta = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ olarsa, α və β bucağı qədər iki dönmə bərabər hesab olunur.

§4. Qrupun sadə xassələri

Bundan sonra əksi xüsusi olaraq qeyd olunmadığı bütün hallarda biz qrupun əməli üçün multiplikativ yazılışdan istifadə edəcəyik. İndi biz qrupların bilavasitə tərifdən, yəni qrupun aksiomlarından alınan ən sadə xassələr ilə tanış olaq. Qrup kommutativ olmadığı üçün sağ vahid elementin və ya sağ simmetrik elementin, sol vahid və ya simmetrik elementə bərabər olmasını gözləmək olmaz. Lakin indi görəcəyimiz kimi qrupun aksiomları bunu təmin edir.

Lemma 1. Tutaq ki, ixtiyari $x \in G$ elementi sol simmetrik element x' -dir, yəni $xx' = e$. Onda $x'x = e$ bərabərliyi də doğrudur.

İsbatı. Tərifə əsasən, yaza bilərik:

$$\begin{aligned} x'x &= (x'x)e = (x'x)(x'(x'))' = ((x'x)x')(x')' = (x'(xx'))(x')' = \\ &= (x'e)(x')' = x'(x')' = e. \end{aligned}$$

Lemma 1 isbatı olundu.

Lemma 1 göstərir ki, sol simmetrik element eyni zamanda sağ simmetrik elementdir və tərsinə.

Lemma 2. İxtiyari $x \in G$ üçün simmetrik elementi yeganədir.

İsbatı. Tutaq ki, $x \in G$ elementi üçün iki simmetrik element vardır: x' və x'' . Onda tərifə əsasən

$$x' = x'e = x'(xx'') = (x'x)x'' = ex'' = (x''x)x'' = x''(xx'') = x''e = x''.$$

Lemma 2 isbat olundu.

Lemma 3. Elə yeganə e elementi var ki, o həm sağ və həm də sol vahid elementdir.

İsbatı. Qrupun tərifində ikinci aksiom ödənilərsə, onda

$$(\forall x \in G)(xe = x).$$

Bu halda ixtiyari $x \in G$ elementi üçün

$$ex = (xx')x = x(x'x) = xe = x,$$

yəni e elementi eyni zamanda sol vahid elementdir. İndi fərz edək ki, başqa bir neytral e' elementi də vardır. Onda:

$$e' = e'e = e.$$

Beləliklə, lemma 3 isbat olundu. Bu lemma göstərir ki, sağ və sol vahidlər də yeganə bir vahid elementlə üst-üstə düşür.

Lemma 4. İxtiyari iki $a, b \in G$ elementləri üçün $ax = b$ və $ya = b$ tənliklərinin həlli vardır və yeganədir.

İsbatı. Aydındır ki, $x = a^{-1}b$ elementi birinci tənliyin köküdür, $y = ba^{-1}$ elementi isə ikinci tənliyin köküdür. Doğrudan da,

$$a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b; (ba^{-1})a = b(a^{-1}a) = be = b.$$

Göstərək ki, bu həllər yeganədir. Bunu ancaq birinci tənlik üçün göstərək. İkinci tənlik üçün də isbat eyni qayda ilə aparıla bilər. Tutaq ki x' tənliyin başqa həllidir. Onda,

$$x' = ex' = (a^{-1}a)x' = a^{-1}(ax') = a^{-1}b.$$

Beləliklə, $x = x'$. Lemma 4 isbat olundu.

Lemma 5. (İxtisar qanunu). İxtiyari üç $a, b, c \in G$ elementləri üçün $ac = bc$ və $ca = cb$ bərabərliklərinin hər birindən $a = b$ alınır.

İsbatı. $d = ac = bc$ işarə etsək a və b elementləri eyni bir $d = xc$ tənliyinin kökləri olacaqdır. Lemma 4-ə əsasən, bu tənliyin həlli yeganədir, yəni $a = b$. Eyni qayda ilə ikinci bərabərlikdən də $a = b$ alındığını göstərmək olar. Lemma 5 isbat olundu.

Lemma 6. İxtiyari a elementi üçün $(a^{-1})^{-1} = a$.

İsbatı. Doğrudan da,

$$a^{-1}(a^{-1})^{-1} = e = a^{-1}a.$$

Olduğundan ixtisar qanununa əsasən buradan tələb olunan münasibət alınır. Lemma 6 isbat olundu.

Lemma 7. İxtiyari a və b elementləri üçün $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

İsbatı. Doğrudan da,

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = abb^{-1}a^{-1} = aea^{-1} = e.$$

olduğundan buradan tələb olunan münasibət alınır. Lemma 7 isbat olundu.

Qrupun (2,1) tipli cəbr şəklində yazılışı da geniş yayılmışdır. Belə yazılışda simmetrik elementin götürülməsi ayrıca unar əməl kimi verilir. Buna görə də artıq unar əməlin nəticəsi kimi cimmatrik elementin yeganəliyi təmin olunmuşdur və deməli, lemma 2-yə ehtiyac qalmır. Bəzən qrupun $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ kimi yazılışından istifadə olunur ki, burada üç baş əməl qeyd olunur: bunlardan birincisi binar, ikincisi vahid elementin seçilməsindən ibarət olan 0 -ar əməl və üçüncüsü isə tərs elementə keçməkdən ibarət olan unar əməldir. Çox zaman qrupun tərifini daha da sadələşdirmək üçün onu (2,1) tipli elə cəbr kimi müəyyən edirlər ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

- 1) “ $\cdot$ ” əməli assosiativdir, yəni $(\forall x, y \in G)(x(yz) = (xy)z)$;
- 2) elə e elementi var ki, $(\forall x \in G)(xe = ex = x)$;
- 3) hər bir $x \in G$ elementi üçün elə x' elementi tapmaq olar ki,

$$xx' = x'x = e$$

münasibəti ödənilsin.

Belə tərif verildikdə 1-3 lemmalarına ehtiyac qalmır, çünki onların hökmü əvvəlcədən qəbul edilir. Aşağıda biz ancaq qrupun $\langle G, \cdot \rangle$ cəbri şəklində yazılışından istifadə edəcəyik.

§5. Qrupların homomorfizmi

Tutaq ki, iki $\langle G, \cdot \rangle$ və $\langle G', \circ \rangle$ qrupları və G çoxluğunun G' -ə $f : G \rightarrow G'$ inikası verilmişdir.

Tərif 1. Əgər f inikası

$$(\forall x, y \in G)(f(xy) = f(x) \circ f(y)),$$

şərtini ödəyərsə onda belə inikas *homomorfizm* adlanır.

Tərif 2. f homomorfizmi biyektiv inikas olarsa, onda o, *izomorfizm* adlanır. Əgər $f : G \rightarrow G'$ inikası izomorfizm olarsa, onda $\langle G, \cdot \rangle$ və $\langle G', \circ \rangle$ qrupları izomorf qruplar adlanır və bu belə işarə olunur $\langle G, \cdot \rangle \cong \langle G', \circ \rangle$ (çox vaxt sadəcə $G \cong G'$ kimi də yazılır).

Teorem 1. Əgər $f : G \rightarrow G'$ homomorfizmi verilərsə, onda aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$(\forall x \in G)(f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}), f(e) = e'.$$

İsbatı. Hər şeydən əvvəl qeyd edək ki,

$$f(e) \circ e' = f(e) = f(ee) = f(e) \circ f(e).$$

Onda, buradan ixtisar qanununa əsasən yazı bilərik $f(e) = e'$. Daha sonra

$$f(xx^{-1}) = f(x) \circ f(x^{-1}) = f(e) = e'.$$

Deməli, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$. Teoremin isbatı başa çatdı.

Tərif 3. G çoxluğunun

$$\text{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan alt çoxluğuna *homomorfizmin nüvəsi* deyilir;

$$\text{Im } f = \{y \in G' \mid (\exists x \in G)(y = f(x))\}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan alt çoxluq isə *homomorfizmin obrazı* adlanır.

Misallar. 1. $\langle R_+, \cdot \rangle$ ilə R_+ müsbət həqiqi ədədlərin multiplikativ qrupunu işarə edək. $x \rightarrow \ln x$ inikası R_+ çoxluğunu R -ə inikas edir.

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

bərabərliyi göstərir ki, bu inikas $\langle R_+, \cdot \rangle$ qrupunun həqiqi ədədlərin $\langle R, + \rangle$ additiv qrupuna homomorfizmdir. O eyni zamanda həm də izomorfizmdir.

2. $f(x) = |x|$ inikası $\langle R \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ qrupunun $\langle R_+, \cdot \rangle$ qrupuna homomorfizmdir. Bu homomorfizm izomorfizm deyil. Homomorfizmin nüvəsi iki tərtibli $\langle \{\pm 1\}, \cdot \rangle$ qrupudur.

3. $x \rightarrow e^x$ inikası $\langle R, + \rangle$ qrupunun $\langle R_+, \cdot \rangle$ qrupuna izomorfizmidir.

§6. Qonşu siniflər. Laranj teoremi

Fərz ki, $H \subset G$ hər hansı alt çoxluqdur. Aydındır ki, H çoxluğunun elementləri üzərində G -də təyin olunan əməlləri yerinə yetirmək olar.

Tərif 1. Əgər $\langle H, \cdot \rangle$ cəbri qrup olarsa, onda o, verilən $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunun *alt qrupu* adlanır.

Aydındır ki, $\langle H, \cdot \rangle$ cəbri o zaman alt qrup olar ki, o, ilk növbədə baş əməllərə nəzərən qapalı olsun. Burada baş əməllər dedikdə $\langle G, \cdot, e, {}^{-1} \rangle$ cəbrinin baş əməlləri nəzərdə tutulur. Bu halda asanlıqla yoxlamaq olar ki, qrupun tərifindəki bütün şərtlər ödənilir. Başqa sözlə, $\langle H, \cdot \rangle$ cəbri o zaman alt qrup olar ki, H çoxluğunun ixtiyari iki elementinin hasil, ixtiyari elementinin tərsi (simmetrik elementi) və $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunun neytral elementi H -a daxil olsun. Beləliklə, alt qrup eyni zamanda alt cəbr kimi də müəyyən oluna bilər.

Misallar. 1. Tam ədədlərin $\langle Z, + \rangle$ qrupunda bütün $H = 2Z$ cüt ədədlər çoxluğu alt qrup təşkil edir.

2. İki elementli $\{\pm 1\}$ çoxluğu bütün sıfırdan fərqli rəşional ədədlərin $\langle Q^*, \cdot \rangle$ multiplikativ qrupunun alt qrupudur.

3. $\langle R_+, \cdot \rangle$ multiplikativ qrupu $\langle R^*, \cdot \rangle$ qrupunun alt qrupudur.

Teorem 1. Tutaq ki, $H \subset G$ boş olmayan hər hansı alt çoxludur. Onda,

$$(\forall x, y \in H)(xy^{-1} \in H)$$

şərti $\langle H, \cdot \rangle$ cəbrinin G -də alt qrup olması üçün zəruri və kafi şərtidir.

İsbati. Əvvəlcə $(\forall x, y \in H)(xy^{-1} \in H)$ şərtinin doğruluğunu qəbul edək. $x = y$ olduda bu şərtədən $xx^{-1} = e \in H$ olması alınır. Onda, $(\forall y \in H)(ey^{-1} = y^{-1} \in H)$ və deməli, $xy \in H$. Nəticə etibararı ilə, $\langle H, \cdot \rangle$ cəbrdir və qrupun tərifinin bütün şərtləri ödənilir. Beləliklə, şərtin kafiliyi isbat olundu. Zərurilik də oxşar yolla isbat oluna bilər.

Teorem 2. Hər hansı alt qruplar ailəsinin kəsişməsi də alt qrupdur.

İsbati. Teoremi sonlu sayda $G_1, G_2, \dots, G_n \prec G$ alt qrupları üçün isbat edək.

$$H = \bigcap_{k=1}^n G_k$$

işarə edək. Teorem 1-ə əsasən göstərək ki, $(\forall x, y \in H)(xy^{-1} \in H)$. Hər bir $1 \leq k \leq n$ şərtini ödəyən k üçün G_k alt qrupdur və buna görə də $x, y \in G_k \rightarrow xy^{-1} \in G_k$. Onda

$$x, y \in H \rightarrow (\forall k)(x, y \in G_k) \rightarrow (\forall k)(xy^{-1} \in G_k) \rightarrow xy^{-1} \in H.$$

Teorem 2 isbat olundu.

Teorem 3. Homomorfizmin nüvəsi və obrazı uyğun olaraq G və G' qruplarının alt qruplarıdır.

İsbatı. Teoremin isbatını nüvə üçün verək. Teorem 1-ə əsasən göstərmək kifayətdir ki, $(\forall x, y \in \text{Kerf})(xy^{-1} \in \text{Kerf})$. Aydınır ki,

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = ee^{-1} = e.$$

Deməli, $xy^{-1} \in \text{Kerf}$. Oxşar üsulla obrazın da alt qrup olduğunu göstərmək olar. Teorem 3 isbat olundu.

Tutaq ki, G hər hansı sonlu və ya sonsuz qrupdur. H isə onun alt qrupudur. G qrupundan hər hansı a elementi götürək. Aşağıdakı kimi iki alt çoxluğa baxaq.

$$aH = \{ab \mid b \in H\}, Ha = \{ba \mid b \in H\}.$$

Analoji olaraq ixtiyari

$$A \prec G, B \prec G$$

altqrupları verilərsə, onda

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

alt çoxluğunu müəyyən etmək olar. Aydınır ki,

$$y \in xH$$

münasibəti yalnız və yalnız o zaman ödənilir ki,

$$x\varphi y \leftrightarrow x^{-1}y \in H \quad (1)$$

doğru olsun.

Teorem 4. (1) şəklində təyin olunan φ münasibəti ekvivalentlik münasibətidir.

İsbatı. a) İxtiyari $x \in G$ elementi üçün

$$x\varphi x \leftrightarrow xx^{-1} = e \in H$$

olduğundan φ refleksiv münasibətdir.

b) $x, y \in G$ elementləri verilərsə, onda,

$$x\varphi y \leftrightarrow (x^{-1}y) \in H \leftrightarrow (x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x \in H.$$

Deməli, φ simmetrik münasibətdir.

c) Əgər $x, y, z \in G$ olarsa, onda

$$\begin{aligned} x\varphi y \wedge y\varphi z &\leftrightarrow (x^{-1}y) \in H \wedge (y^{-1}z) \in H \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x^{-1}y)(y^{-1}z) = x^{-1}z \in H \leftrightarrow x\varphi z, \end{aligned}$$

yəni φ tranzitiv münasibətdir. Teorem 1 isbat olundu.

Teorem 1-ə əsasən, φ münasibəti G çoxluğunda bölgü müəyyən edir.

Tərif 2. Əgər $a \in G$ qrupun hər hansı elementi və H hər hansı alt qrupudursa, onda aH alt çoxluğuna G qrupunun H alt qrupuna nəzərən *sol qonşu sinfi* deyilir.

Analoji olaraq, Ha – sağ qonşu sinif anlayışı daxil edilir. H -in özü də qonşu sinifdir (həm sağ, həm sol). Doğrudan da, $H = He = eH$ yazıla bilər.

Qonşu siniflər aşağıdakı xassələrə malikdir.

1. Qonşu sinfin hər bir elementi onu müəyyən edir.
2. İki müxtəlif sol qonşu sinif (sağ qonşu sinif) ortaq elementə malik deyil.
3. H qonşu siniflər içərisində yeganə alt qrupdur.
4. G qrupunun H alt qrupuna nəzərən 2 sol qonşu sinfi ya üst-üstə düşür, ya da heç bir ortaq elementə malik deyil.

Teorem 5. $x\phi y \leftrightarrow x^{-1}y \in H$ münasibəti ilə təyin olunan hər bir ekvivalentlik sinfi H alt qrupuna nəzərən sol qonşu sinifdir.

İsbatı. Tutaq ki, A hər hansı ekvivalentlik sinfidir və $a \in A$ onun ixtiyari elementidir. Onda hər hansı $b \in G$ elementinin A -ya daxil olması üçün

$$a\phi b \leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

münasibətinin ödənməsi zəruri və kafidir. Deməli,

$$b \in A \leftrightarrow b \in aH.$$

Bu ekvivalensiya göstərir ki, $A = aH$. Teorem isbat olundu.

Asanlıqla yəqin etmək olar ki, A sinfi a elementindən asılı deyil. Teorem 5-in tərsi də doğrudur, yəni hər bir sol qonşu sinif ekvivalentlik sinfidir. Analoji olaraq, sağ qonşu siniflər də G qrupunun bölgüsünü müəyyən edir.

Tutaq ki, G tam ədədlərin additiv qrupu, H alt qrupu isə 4-ə bölünən ədədlər qrupudur. a və b ədədləri yalnız və yalnız o zaman eyni bir sol qonşu sinfə daxil olacaqdır ki, bunların 4-ə bölünməsindən alınan qalıqlar bərabər olsun. Onda, G -nin H alt qrupuna nəzərən sol qonşu siniflərə ayrılışı aşağıdakı 4 qonşu sinifdən ibarətdir:

1. 4-ə böldükdə qalığı 0-a bərabər olan ədədlər çoxluğu, yəni H -in özü;
2. 4-ə böldükdə qalığı 1-ə bərabər olan ədədlər çoxluğu;
3. 4-ə böldükdə qalığı 2-yə bərabər olan ədədlər çoxluğu;
4. 4-ə böldükdə qalığı 3-ə bərabər olan ədədlər çoxluğu.

Teorem 6. İxtiyari iki qonşu sinif arasında biyektiv uyğunluq vardır.

İsbatı. Tutaq ki, aH və bH qonşu sinifləri verilmişdir. Bu qonşu siniflər üst –üstə düşərsə, onda teoremin hökmü doğrudur. Əks halda $aH \cap bH$ kəsişməsi boş çoxluqdur.

$$f : aH \rightarrow bH$$

inikasını aşağıdakı kimi təyin edək. İxtiyari

$$h \in H$$

üçün

$$f(ah) = bh$$

işarə edək. Bu inikas süryektivdir. Onun inyektiv olması isə ixtisar qanunundan alınır:

$$bh = bh' \rightarrow h = h'.$$

Beləliklə, bu inikas həm süryektiv, həm də inyektiv inikasdır. Onda f biyektiv uyğunluqdur. Teorem isbat olundu.

Tərif 3. G qrupunun H alt qrupuna nəzərən hər bir ayrılışında qonşu siniflərin sayına (bu say sonlu olarsa) H alt qrupunun *indeksi* deyilir və $(G:H)$ kimi işarə olunur.

Sonlu qruplar üçün alt qrupun tərtibi və indeksləri ilə qrupun tərtibi arasında sıx əlaqə vardır və bu əlaqə aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem 7 (Laqranj teoremi). Hər bir sonlu qrupun alt qrupunun tərtibi (eləcə də indeksi) bu qrupun tərtibinin bölənidir.

İsbatı . Doğrudan da tutaq ki, G qrupunun tərtibi n -dir. H isə bu qrupun k tərtibli alt qrupudur. G qrupunun H alt qrupuna nəzərən sol qonşu siniflərə ayrılışına baxaq. Tutaq ki, qonşu siniflərin sayı t -dir (yəni H -in indeksi t -yə bərabərdir). Onda G qrupunun H alt qrupuna nəzərən hər bir sol qonşu sinfi, teorem 6-ya əsasən, k sayda müxtəlif ünsürlərə malik olacaqdır. (çünki H, G -nin k tərtibli alt qrupudur). Bütün belə qonşu siniflərin birləşməsi isə G çoxluğunu verir. Buradan alırıq ki, $n=kt$. Deməli, k və t ədədlərinin hər biri n -in bölənidir. Teorem 7 isbat olundu.

Nəticə. Sonlu qrupun hər bir elementinin tərtibi qrupun tərtibinin bölənidir.

Tərif 4. Əgər G qrupunun H alt qrupuna nəzərən ixtiyari x elementi ilə düzələn sol və sağ qonşu sinifləri eyni olarsa, yəni $xH=Hx$ olarsa, onda H alt qrupuna G -nin *normal böləni*, yaxud *normal alt qrupu* deyilir.

H alt qrupu normal bölən olarsa, istənilən a elementi üçün $aH=Ha$ olar. Başqa sözlə G qrupunun istənilən a elementi və H alt qrupunun hər hansı h ünsürləri üçün H -da elə g elementi var ki, $ah=ga$ yaxud $aha^{-1}=g$.

Misallar. 1. Hər bir qrupun vahid alt qrupu onun normal bölənidir. Çünki qrupun istənilən a elementi üçün $ae=ea$ şərti həmişə doğrudur.

2. G qrupu özü özünün normal bölənidir. Çünki qrupun istənilən elementi üçün $aG=Ga$.

3. Abel qrupunun bütün alt qrupları normal böləndir. Çünki Abel qrupunda vurma əməli kommutativlik xassəsinə malikdir.

§7.faktor-grup və ona aid misallar

Tutuaq ki, G qrupu verilmişdir və H onun normal bölənidir. G qrupunun qonşu sinifləri çoxluğunu G/H ilə işarə edək. İxtiyari a və b elementləri götürək və aH və bH qonşu sinifləri cütünə $(ab)H$ qonşu sinfini qarşı qoyaq. Göstərək ki, bu uyğunluq a və b elementlərindən asılı deyil. Başqa sözlə, bu siniflərdən birini (yaxud, hər ikisini), məsələn, aH sinfini müəyyən edən başqa c elementi götürülsə, onda $(ab)H = (cb)H$. Bunun üçün qeyd edək ki,

$$c \in aH \rightarrow (\exists h \in H)(c = ah).$$

Onda, yaza bilərik:

$$cbH = cHb = ahHb = aHb = abH,$$

çünki

$$(\forall h \in H)(hH = H).$$

Beləliklə,

$$(aH, bH) \mapsto abH$$

kimi təyin olunan inikas vardır və bu binar əməl ilə G/H faktor çoxluğu qrup əmələ gətirir. Bu qrupa G qrupunun H normal böləninə nəzərən faktor-qrupu deyilir.

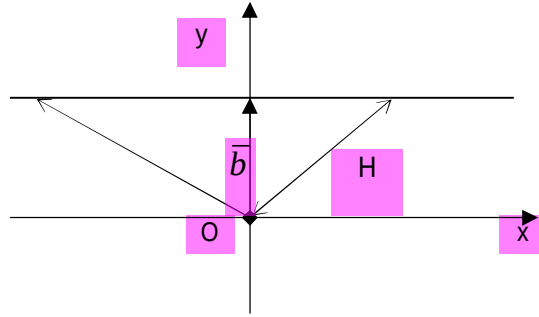
Qrupun sonlu və ya sonsuz olmasından asılı olmayaraq, onun faktor-qrupu sonlu da ola bilər, sonsuz da ola bilər. Sonlu G qrupunun G/H faktor-qrupunun tərtibi H normal bölənin indeksinə bərabərdir. faktor-qrupa aid aşağıdakı misallara baxaq.

Misal.1. Tam ədədlərin $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ qrupunda bütün 7-yə bölünəm ədədlərin $7\mathbb{Z}$ alt çoxluğu normal böləndir. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ faktor çoxluğu 7 sinifdən ibarətdir:

$$7\mathbb{Z}, 1+7\mathbb{Z}, 2+7\mathbb{Z}, 3+7\mathbb{Z}, 4+7\mathbb{Z}, 5+7\mathbb{Z}, 6+7\mathbb{Z}.$$

Bu siniflər $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ cəbri əməli ilə faktor-qrup əmələ gətirir.

2. Həqiqi ədədlərin $\langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$ multiplikativ qrupunda bütün müsbət ədədlərin $\langle \mathbb{R}_+, \cdot \rangle$ qrupu normal böləndir. $sign: \mathbb{R}^* \rightarrow \{\pm 1\}$ funksiyası hər bir sıfırdan fərqli həqiqi ədədə onun işarəsini qarşı qoyur. Bu inikas multiplikativ qrupların homomorfizmidir və onun nüvəsi $\mathbb{R}_+$ çoxluğudur. İki qonşu sinif vardır: müsbət həqiqi ədədlər çoxluğu $(\mathbb{R}_+)$ və mənfi həqiqi ədədlər çoxluğu $(-\mathbb{R}_+)$.



Şək. 1.

3. Mustəvi üzərində düzbucaqlı Dekart koordinat sistemində koordinat başlanğıcından çıxan vektorlar (istiqamətlənmiş parçalar) çoxluğunu V ilə işarə edək. Bu çoxluqda vektorların toplanması adi üçbucaq qaydası ilə müəyyən olunur. Ox oxu üzərində yerləşən bütün vektorların H çoxluğu alt qrupdur. $\bar{a}$ vektorunun qonşu sinfi $\bar{a} + H$ şəklindədir, yəni Ox oxunun $\bar{a}$ vektoru ilə paralel köçürülməsindən alınır. Bütün koordinat müstəvisi, bir-birinə paralel belə düz xətlərə bölünür və hər bir düz xətt bir qonşu sinif müəyyən edir. Hər bir düz xətt Oy oxunu ancaq bir nöqtədə kəsir (bax şəkil 1). Həmin nöqtə Oy oxu üzərində yeganə $\bar{b}$ istiqamətlənmiş parçasını müəyyən edir və bu qonşu sinif $\bar{b} + H$ kimi yazıla bilər. $\{\bar{b} + H \mid \bar{b} \in (Oy)\}$ çoxluğu bütün qonşu siniflərin çoxluğu olacaqdır. $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in (Oy)$ oldudqa, iki qonşu sinfin cəmi

$$(\bar{b}_1 + H) + (\bar{b}_2 + H) = (\bar{b}_1 + \bar{b}_2) + H$$

kimi birqiymətli təyin olunur. Beləliklə, qonşu siniflərin toplanması Oy oxu üzərində yerləşən istiqamətlənmiş parçaların toplanmasına gətirilir.

Normal bölən homomorfizmin nüvəsi olması ilə xarakterizə olunur.

Teorem 8. H alt qrupunun normal bölən olması üçün onun G qrupunun hər hansı başqa bir qrupa

$$f : G \rightarrow G'$$

homomorfizminin nüvəsi olması zəruri və kafi şərtidir.

İsbatı. Əvvəlcə fərz edək ki, $H = \text{Ker} f$ hər hansı homomorfizmin nüvəsidir. Göstərək ki, G qrupunun ixtiyari x elementi üçün $xH = Hx$ və ya

$$H = xHx^{-1}.$$

Həmin nəticə isə aşağıdakı münasibətlərdən alınır:

$$f(xHx^{-1}) = f(x)f(H)(f(x))^{-1} = f(x)(f(x))^{-1} = e'.$$

Deməli, $xHx^{-1} \subset H$. Eyni qayda ilə göstərə bilərik ki, $x^{-1}Hx \subset H$ və ya $H \subset xHx^{-1}$. Deməli, $H = xHx^{-1}$.

İndi isə göstərək ki, hər bir normal bölən müəyyən bir homomorfizmin nüvəsidir. H normal bölən olarsa, G/H faktor-qrupu vardır. G qrupunun bu faktor-qrupa hər bir xH qonşu sinfinə qarşı $f(x)$ elementini uyğun qoyan inikasına baxaq. Göstərək ki, o, biyektiv homomorfizmdir. İnikasın süryektivliyi aydındır. Əgər

$$xy^{-1} \in H$$

olarsa, yəni x və y elementləri eyni qonşu sinfə daxil olarsa, onda

$$f(x) = f(xy^{-1})f(y) = f(y).$$

Deməli, təyin olunan inikas ancaq sinifdən asılıdır. Bu inikas homomorfizmdir. Doğrudan da, iki sinfin hasili onları müəyyən edən elementlərin hasilinin sinfinə bərabərdir: $xH \cdot yH = xyH$. Nəhayət, göstərək ki, bu inikas inyektivdir, yəni

$$f(x) = f(y)$$

olmasından $xH = yH$ alınır. Doğrudan da,

$$f(x) = f(y) \rightarrow f(x)f(y^{-1}) = f(xy^{-1}) = e'.$$

Bu halda $xy^{-1} \in H$ və deməli $xH = yH$. Teorem 8 isbat olundu.

Aşağıdakı teorem homomorfizmlər haqında əsas teorem adlanır.

Teorem 9. Tutaq ki,

$$f : G \rightarrow U$$

G qrupunun başqa U qrupuna süryektiv homomorfizmi, H isə onun nüvəsidir. Onda,

$$G/H \cong U.$$

İsbatı. G/H faktor-qrupunun U -ya hər bir xH qonşu sinfinə qarşı $f(x)$ elementini uyğun qoyan

$$\bar{f} : \bar{x} \mapsto f(x)$$

inikasına baxaq. Yuxarıda deyildiyi kimi o, x elementindən asılı deyil və inyektivdir. Teoremin şərtindən bu inikasın süryektivliyi alınır. Deməli o, biyektiv inikasdır. Göstərək ki, təyin etdiyimiz inikas homomorfizmdir. Bu aşağıdakı münasibətdən alınır:

$$(\forall \bar{x}, \bar{y} \in G/H)(\bar{f}(\bar{xy}) = f(xy) = f(x)f(y) = \bar{f}(\bar{x})\bar{f}(\bar{y})).$$

Teorem 9 isbat olundu.

§8. Halqa və meydan.

Qrup cəbrlər içərisində ən sadəsidir, belə ki, burada ancaq bir cəbri əməl təyin olunur. Lakin bir çox hallarda eyni bir coxluqda bir neçə cəbri əməl təyin etmək və belə cəbrlərin xassələrini öyrənmək zərurəti meydana gəlir.

Tutaq ki, hər hansı K çoxluğu və bu çoxluqda təyin olunmuş iki binar əməl verilmişdir. Bu əməllərdən birini toplama, digərini isə vurma əməli adlandıraraq. Əlbəttə, ixtiyari təbiətli çoxluqlarda təyin olunmuş bu əməllər adi toplama və vurma əməllərindən fərqlənir.

Tərif 1. İki cəbri binar əməl təyin olunmuş $\langle K, +, \cdot \rangle$ cəbri o zaman halqa adlanır ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

1. $\langle K, + \rangle$ cəbri $+$ əməlinə nəzərən kommutativ qrup olsun;
2. $\langle K, \cdot \rangle$ cəbri gruppoid olsun, yəni K çoxluğu vurma əməlinə nəzərən qapalı olsun:

$$(\forall a, b \in K)(a \cdot b \in K).$$

3. K -da təyin olunmuş toplama və vurma əməlləri distributivlik qanununa tabe olsun:

$$(\forall a, b \in K)(a(b + c) = ab + ac; (a + b)c = ac + bc).$$

Əgər əlavə olaraq, K -da təyin olunmuş vurma əməli kommutativ olarsa, yəni

$$(\forall a, b \in K)(ab = ba)$$

münasibəti ödənilərsə, onda K halqası kommutativ halqa adlanır. Əgər

$$(\forall a, b, c \in K)((ab)c = a(bc))$$

münasibəti ödənilərsə, onda K halqası assosiativ halqa adlanır. Hər iki xassə ödəndikdə isə ona assosiativ-kommutativ halqa deyilir.

Qeyd edək ki, halqanı $(2, 2, 1)$ tipli $\langle K, +, \cdot, - \rangle$ cəbri şəklində də yazmaq olar.

Misallar. 1. a) bütün cüt ədədlər çoxluğu, b) bütün tam ədədlər çoxluğu, c) rəşional ədədlər çoxluğu, ç) həqiqi ədədlər çoxluğu adi toplama və vurma əməllərinə nəzərən kommutativ halqa təşkil edir.

2) əmsalları həqiqi ədədlər olan bütün çoxhədlilər çoxluğu çoxhədlilərin toplanması və vurulması əməllərinə nəzərən kommutativ halqa əmələ gətirir.

3) asanlıqla yoxlamaq olar ki, riyazi analiz kursundan məlum olan parçada təyin olunmuş kəsilməz funksiyalar çoxluğu funksiyaların toplanması və vurulması əməllərinə nəzərən halqanın tərifinə daxil olan şərtləri ödəyir. Bu çoxluq da assosiativ-kommutativ halqadır.

Halqanın sadə xassələri. Hər şeydən öncə qeyd edək ki, halqa additiv qrup olduğundan additiv qrupun məlum xassələri halqa üçün də öz gücündə qalır. Buna görə də vurma əməli ilə bağlı xassələrə baxaq.

Xassə 1. n sayda $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ və $c \in K$ elementləri üçün

$$\left. \begin{aligned} c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) &= ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n \\ (a_1 + a_2 + \dots + a_n)c &= a_1c + a_2c + \dots + a_nc \end{aligned} \right\}$$

bərabərlikləri doğrudur.

Xəssə 2. İxtiyari $a, b, c \in K$ elementləri üçün $c(a-b) = ca - cb$ və $(a-b)c = ac - bc$ bərabərlikləri doğrudur.

Xəssə 3. İxtiyari halqada $(-a)b = -ab$; $(-a)(-b) = a \cdot b$ bərabərlikləri doğrudur.

Xəssə 4. $(\forall a \in K)(a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0)$.

Elə halqalar vardır ki, $a \neq 0$ və $b \neq 0$ elementləri üçün $a \cdot b = 0$ münasibəti doğrudur. Əgər halqada belə elementlər varsa, onda bu elementlər *sıfırın bölənləri* adlanır.

Misal 1. Kəsilməz funksiyalar halqasında $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarını aşağıdakı kimi təyin edək.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

və

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0; \\ x, & x < 0. \end{cases}$$

Ayındır ki, bu funksiyalarının hər biri eyniliklə sıfıra bərabər olmadığı halda $f(x)g(x) = 0$ -dir. Deməli, baxılan halqada bu elementlər sıfırın bölənləridir. Bütün ədədi halqalar (yəni kompleks ədədlər halqasının alt halqaları) sıfırın bölənlərinə malik olmayan halqalardır.

Tərif 2. Əgər assosiativ, kommutativ və vahidi olan halqada sıfırın bölənləri yoxdursa, onda belə halqa *tamliq oblasti* və ya *tamliq halqası* adlanır.

Məsələn, $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ tam ədədlər halqası tamliq oblastıdır. Eyni qayda ilə $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ rəşional ədədlər və $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ həqiqi ədədlər halqası tamliq oblastıdır.

$\langle \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, + \rangle$ faktor-qrupu $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$ əməli ilə halqaya çevrilir və bu halqada sıfırın bölənləri vardır. Məsələn, $\bar{2} = 2 + 6\mathbb{Z}$ və $\bar{3} = 3 + 6\mathbb{Z}$ elementləri sıfırdan fərqlidir, lakin $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$. Deməli, $\langle \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ halqası tamliq oblastı deyil.

Alt halqa. Fərz edək ki, K halqa, M isə bu halqanın müəyyən alt çoxluğu.

Tərif 3. M çoxluğu K -da təyin olunmuş əməllərə nəzərən halqa əmələ gətirirsə, onda $\langle M, +, \cdot \rangle$ cəbrinə $\langle K, +, \cdot \rangle$ halqasının *alt halqası* deyilir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, hər bir halqanın sıfır elementdən ibarət bir elementli alt çoxluğu halqa təşkil edir. Bu halqaya sıfır alt halqa deyilir.

Verilmiş $M \subset K$ çoxluğunun K halqasının alt halqası olub olmamasını aşağıdakı əlamətin köməyi ilə yoxlamaq olar.

Teorem 1. K halqasından götürülmüş M çoxluğu onda və yalnız onda alt halqa əmələ gətirir ki,

$$(\forall a, b \in M) (a - b \in M \wedge a \cdot b \in M) \quad (*)$$

münasibəti ödənilsin.

İsbatı. Əgər M althalqa olarsa onda o, toplamaya nəzərən alt qrup olacaqdır. Buna görə də M çoxluğu toplama, çıxma və vurma əməllərinə nəzərən qapalıdır. Zərurilik isbat olundu.

Tərsinə, tutaq ki, $(*)$ münasibəti ödənilir. İsbat edək ki, M althalqa təşkil edir. İsbat etmək üçün əvvəlcə M -in additiv qrup olmasını göstərmək lazımdır.

$$a - a = 0 \in M; 0 - a = -a \in M; a - (-b) = a + b \in M$$

münasibətlərindən görünür ki, M çoxluğu toplama, əks elementə keçmə əməllərinə görə qapalıdır və 0 elementini daxilinə alır. Deməli o, altqrupdur.

$(*)$ şərtinə əsasən M çoxluğu vurma əməlinə nəzərən qapalıdır və onun elementləri üçün distributivlik xassəsi doğrudur. Yəni M alt halqadır. Teorem 1 isbat olundu.

Göründüyü kimi, alt çoxluğun alt halqa əmələ gətirməsi üçün zəruri və kafi şərt onun çıxma və vurma əməllərinə nəzərən qapalı olmasıdır.

Halqanın additiv qrupunun xassələrindən alırıq:

$$a) (\forall a, b \in K)(a + b = a \rightarrow b = 0);$$

$$b) (\forall a, b \in K)(a + b = 0 \rightarrow a = -b);$$

$$c) -(-a) = a.$$

Tutaq ki, assosiativ, kommutativ və vahidi olan $\langle K, +, -, 0, 1 \rangle$ halqası verilmişdir. Aydındır ki, ixtiyari $a, b, c \in K$ elementləri üçün aşağıdakı münasibətlər ödənilir:

$$a) a(bc) = (ab)c;$$

$$b) 1 \cdot a = a \cdot 1 = a;$$

$$c) ab = ba.$$

Tərif 4. Əgər $\langle K, +, -, 0, 1 \rangle$ tamliq oblastı olmaqla, onun hər bir $a \neq 0$ elementinin tərsi varsa, onda belə halqa *meydan* adlanır.

Misallar. 1. Rasional ədədlər çoxluğu burada təyin olunmuş toplama və vurma əməllərinə nəzərən meydan təşkil edir.

2. Həqiqi ədədlər çoxluğu bu çoxluqda təyin olunmuş toplama və vurma əməllərinə nəzərən meydan təşkil edir.

3. Bütün $a + b\sqrt{2}$ şəklində rasional əmsallı ədədlər çoxluğuna baxaq:

$$K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}.$$

Göstərək ki, bu çoxluq toplama və vurma əməllərinə nəzərən qapalıdır.

$$(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2};$$

$$(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = (aa' + 2bb') + (a'b + ab')\sqrt{2}.$$

K -nın elementləri həqiqi ədəd olduğu üçün $\langle K, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ cəbri assosiativ, kommutativ, vahidi olan ($a=1$; $b=0$ olduqda 1 elementi alınır) və sıfırın bölənləri olmayan halqadır. Göstərək ki, o, meydandır.

Hər şeydən əvvəl qeyd edək ki, bu halqada $a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$. Doğrudan da, əksini fərz edərək, $a \neq 0 \vee b \neq 0$ olduğunu qəbul edək. Əgər, məsələn, $a \neq 0$ olarsa, yazı bilərik:

$$a + b\sqrt{2} = 0 \rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Lakin bu ola bilməz. Çünki, bu bərabərliyin sol tərəfi rəşional, sağ tərəfi isə irrasional ədəddir. Beləliklə, $a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$ və deməli $a + b\sqrt{2} \neq 0 \rightarrow a \neq 0 \vee b \neq 0$.

İndi isə tərs elementin varlığını göstərək. Aydındır ki,

$$a^2 - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0.$$

(isbat edin). Deməli, $a + b\sqrt{2} \neq 0 \rightarrow a^2 - 2b^2 \neq 0$ və buna görə də

$$\frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} \in K.$$

Yoxlayaq ki, bu ədəd $a + b\sqrt{2}$ ədədinin tərsidir:

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - 2b^2} = 1.$$

Tərif 5. Əgər $\langle K, +, \cdot, -, 0 \rangle$ halqasında müəyyən natural n ədədi üçün

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n = n * 1 = 0$$

olarsa, onda n ədədinə bu halqanın *xarakteristikası* deyilir. Əgər belə natural ədəd yoxdursa, onda halqanın xarakteristikası sıfır bərabər hesab olunur. $\langle \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +, \cdot, \bar{0}, \bar{1} \rangle$ halqasının xarakteristikası 12-yə bərabərdir, çünki,

$$\bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}.$$

$\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ meydanının xarakteristikası 0-a bərabərdir.

§9. Halqaların homomorfizmi. İdeal

Halqa iki binar əməl təyin olunmuş cəbr olduğu üçün halqaların homomorfizmi hər iki əməli saxlamalıdır. Tutaq ki, $\langle K, +, \cdot \rangle$ və $\langle K', +, \cdot \rangle$ halqaları verilmişdir, $f : K \rightarrow K'$ isə hər hansı inikasdır.

Tərif 1. f inikası o zaman K halqasının K' halqasına homomorfizmi adlanır ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

- 1) $(\forall a, b \in K)(f(a+b) = f(a) + f(b));$
- 2) $(\forall a, b \in K)(f(ab) = f(a)f(b)).$

Misallar. 1. $\langle 2Z, +, \cdot \rangle$ cüt tam ədədlər halqasının $\langle Z, +, \cdot \rangle$ halqasına $a \mapsto a$ kimi təyin olunan inikası halqaların homomorfizmidir.

2. $\langle Z, +, \cdot \rangle$ tam ədədlər halqasının $\langle Q, +, \cdot \rangle$ meydanına $a \mapsto a$ kimi təyin olunan inikası halqaların homomorfizmidir.

3. Bütün həqiqi funksiyalar çoxluğu halqa təşkil edir. Bu halqanı F ilə işarə edək. F çoxluğunun bütün həqiqi ədədlər çoxluğuna

$$\varphi: f(x) \mapsto f(c)$$

kimi təyin olunan inikası homomorfizmdir. Doğrudan da, $(f+g)(c) = f(c) + g(c)$ və

$$(fg)(c) = f(c)g(c).$$

Homomorfizmin bilavasitə tərifdən alınan aşağıdakı xassələri vardır:

Xassə 1. Əgər $f: K \rightarrow K'$ halqaların homomorfizmi olarsa, onda $f(K) \subset K'$ alt halqadır.

İsbatı. Halqaların yuxarıda verilmiş əlamətinə görə isbat etmək lazımdır ki, ixtiyari iki $a', b' \in K'$ elementləri üçün $a' - b' \in K' \wedge a'b' \in K'$ münasibətləri ödənilir. Doğrudan da, $(\exists a, b \in K)(f(a) = a' \wedge f(b) = b')$. K halqa olduğu üçün

$$a - b \in K \rightarrow f(a - b) = f(a) - f(b) = a' - b' \in K'.$$

Eyni qayda ilə,

$$ab \in K \rightarrow f(ab) = f(a)f(b) = a'b' \in K'.$$

Xassə isbat olundu.

Xassə 2. Əgər $f: K \rightarrow K'$ halqaların sürəktiv homomorfizmi olarsa və bu halqaların vahidi varsa, onda $f(1) = 1'$.

İsbatı. Tutaq ki, $f(1) = e'$. İnikas sürəktiv olduğu üçün ixtiyari $a' \in K'$ elementi üçün elə $a \in K$ tapmaq olar ki, $f(a) = a'$ və $a' \cdot e' = f(a)f(1) = f(a \cdot 1) = f(a) = a'$. Deməli, e' sağ vahiddir. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, o, sol vahiddir. Lakin əgər e'' başqa vahid olarsa, onda

$$e' = e'e'' = e''$$

bərabərliyindən göründüyü kimi ikitərəfli vahid element yeganədir. Deməli, $e' = 1'$ olmalıdır.

Xassə isbat olundu.

Tərif 2. $f : K \rightarrow K'$ halqaların homomorfizmi olarsa, K halqasının $f(x) = 0$ şərtini ödəyən bütün $x \in K$ elementlər çoxluğuna homomorfizmin *nüvəsi* deyilir və $\text{Ker} f$ kimi işarə olunur.

Halgalarla bağlı mühüm anlayışlardan biri ideal anlayışıdır. Bu anlayışı daxil etmək üçün əvvəlcə qeyd edək ki, əgər $\langle K, +, \cdot \rangle$ hər hansı halqa və $\langle K', +, \cdot \rangle$ isə onun alt halqası olarsa, onda K' vurma əməlinə görə qapalıdır, lakin ümumiyyətlə, ola bilər ki, bu çoxluq onun elementlərinin K -nın elementlərinə vurulmasına görə qapalı olmasın.

Tərif 3. Fərz edək ki, $\langle K, +, \cdot \rangle$ hər hansı halqadır $\langle A, + \rangle$ isə onun additiv qrupunun alt qrupudur. Əgər

$$(\forall a \in A)(\forall b \in K)(ab \in A)$$

şerti ödənilərsə, onda boş olmayan A alt çoxluğu *sağ ideal* adlanır. Analogi olaraq, *sol ideal* anlayışı verilə bilər. Əgər sol A idealı həm də sağ ideal olarsa, onda ona ikitərəfli ideal və ya sadəcə *ideal* deyilir.

İdeala aid misallar. 1. Hər bir halqada ancaq bir 0 elementdən ibarət alt çoxluq idealdır. Bu ən kiçik idealdır.

2. Hər bir halqanın özü idealdır. Bu ideal ən böyük idealdır.

3. $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ tam ədədlər halqasında bütün 7-yə bölünən ədədlərinin $7\mathbb{Z}$ alt çoxluğu idealdır.

4. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ halqasında $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ alt çoxluğu idealdır.

5. Hər bir meydana ancaq iki ideal vardır: 0 ideal və meydana özü.

6. $\langle K, +, \cdot \rangle$ kommutativ halqasından ixtiyari $a \in K$ elementi götürək. (a) ilə halqanın bütün mümkün ak , $k \in K$ şəklində elementlər çoxluğunu işarə edək. (a) idealdır və bu ideal *baş ideal* adlanır.

7. $\langle K, +, \cdot \rangle$ kommutativ halqasından ixtiyari $a_1, \dots, a_n \in K$ elementləri götürək.

$$(a_1, \dots, a_n) = \{a_1 k_1 + \dots + a_n k_n \mid k_1, \dots, k_n \in K\}$$

kimi müəyyən olunan alt çoxluq idealdır.

Tərif 3-dən göründüyü kimi ideal ümumi mənada alt halqadır. Lakin vahidi olan halqa götürülərsə, yəni vahid elementin seçilməsi baş əməllər içərisinə daxil edilərsə onda ideal alt halqa olmaya bilər. Bu aşağıdakı teoremdən görünür.

Teorem 1. Əgər vahidi olan $\langle K, +, \cdot, 1 \rangle$ halqası verilərsə, onda onun özündən fərqli alt halqa təşkil edən idealı yoxdur.

İsbati. Tutaq ki, $A \subset K$ sıfır olmayan və alt halqa təşkil edən idealdır (qeyd edək ki, sıfır ideal o zaman alt halqa olar ki, $1 = 0$ olsun və bu halda $K = \{0\}$). Onda $1 \in A$ və ixtiyari $a \in K$ elementi üçün $a \cdot 1 = a \in A$. Deməli, $A = K$. Teorem 1 isbat olundu.

Teorem 2. $\langle K, +, \cdot \rangle$ halqasının başqa bir $\langle K', +, \cdot \rangle$ halqasına $f : K \rightarrow K'$ homomorfizmi verilərsə, onda bu homomorfizmin nüvəsi idealdır.

İsbati. Nüvənin tərifindən aydın olur ki, o, additiv qrupların homomorfizminin nüvəsidir. Buna görə də o, alt qrupdur. Deməli, teoremi isbat etmək üçün göstərmək lazımdır ki, $\text{Ker} f$ çoxluğu K halqasının elementlərinə vurmaya nəzərən qapalıdır, yəni $K \cdot \text{Ker} f \subset \text{Ker} f$. Doğrudan da, ixtiyari $a \in K$ və $x \in \text{Ker} f$ üçün §8, xassə 4-ə əsasən

$$f(ax) = f(a)f(x) = f(a) \cdot 0 = 0.$$

Deməli, $ax \in \text{Ker} f$ və nüvə sol idealdır. Asanlıqla görmək olar ki, o, həm də sağ idealdır. Bununla teoremin isbatı başa çatdı.

Məlumdur ki, qruplarda normal bölənlər homomorfizmin nüvəsi kimi xarakterizə olunur. Halqalarda da isə eyni xassəyə ideallar malikdir.

Teorem 3. $A \subset K$ alt çoxluğunun ideal olması üçün onun hər hansı homomorfizmin nüvəsi olması zəruri və kafidir.

İsbati. Şərtin kafiliyi teorem 2-dən alınır. Buna görə də zəruriliyi isbat edək. Tutaq ki, A idealdır. $\langle K, + \rangle$ additiv qrupunda A normal böləndir. Buna görə də o, müəyyən $f : K \rightarrow K'$ homomorfizminin nüvəsidir; burada K' hər hansı qrupdur. Onda, $L = f(K) \subset K'$. İxtiyari iki $a' = f(a), b' = f(b)$ elementləri üçün L -də vurma əməlini

$$a'b' = f(ab)$$

kimi müəyyən edək. Bununla, $\langle L, +, \cdot \rangle$ cəbrini alırıq. $\langle L, + \rangle$ -kommutativ qrupdur. Bundan əlavə,

$$a', b', c' \in L \rightarrow (\exists a, b, c \in K)(a' = f(a), b' = f(b), c' = f(c)).$$

Buna görə də,

$$\begin{aligned} a'(b' + c') &= f(a)(f(b) + f(c)) = f(a)f(b + c) = f(a(b + c)) = \\ &= f(ab + ac) = f(ab) + f(ac) = f(a)f(b) + f(a)f(c) = a'b' + a'c'. \end{aligned}$$

Deməli, $\langle L, +, \cdot \rangle$ cəbri halqadır. Qurmayla əsasən, $f : K \rightarrow L$ halqaların homomorfizmidir və A idealı onun nüvəsidir. Teorem 3 isbat olundu.

Faktor-halqa. İndi isə halqalar nəzəriyyəsi üçün vacib olan faktor-halqa anlayışını verək. Tutaq ki, $\langle K, +, \cdot \rangle$ hər hansı halqa, L isə onun idealıdır. K çoxluğunda $x \oslash y \leftrightarrow x - y \in L$ kimi təyin olunan binar münasibətə baxaq. Aydındır ki, L kommutativ alt qrupdur. Deməli, K halqası

bu alt qrupa görə cüt-cüt kəsişməyən qonşu siniflərə bölünür. Bu qonşu siniflər $x + L, x \in K$ şəklindədir. $\langle K/L, + \rangle$ faktor-qrupunda vurma binar əməli daxil edək. Bunun üçün ixtiyari $\langle x + L, y + L \rangle$ qonşu siniflər cütünə $xy + L$ qonşu sinfini qarşı qoyaq. Hər şeydən əvvəl göstərək ki, $\langle x + L, y + L \rangle \mapsto xy + L$ inikası x və y elementlərindən asılı olmayıb, ancaq qonşu sinifdən asılıdır. Bu o deməkdir ki, əgər $x' \in K$ və x elementi ilə eyni sinifdə olarsa, onda $xy + L = x'y + L$. Lakin sonuncu münasibət $xy - x'y \in L$ ilə eynigüclüdür. $xy - x'y = (x - x')y \in Ly \subset L$ olduğundan biz tələb olunan hökmü alırıq. Beləliklə, biz $\langle K/L, +, \cdot \rangle$ cəbrini aldıq.

Teorem 4. $\langle K/L, +, \cdot \rangle$ cəbri halqadır.

İsbatı. Yuxarıdakıları nəzərə alsaq, teoremi isbat etmək üçün ancaq vurma əməlinin distributivliyini göstərmək qalır. İxtiyari üç $x, y, z \in K$ elementləri götürərək, $\overline{x}(\overline{y} + \overline{z})$ və $\overline{x}\overline{y} + \overline{x}\overline{z}$ siniflərini müqayisə edək. Birinci hasil, tərifə əsasən $\overline{x(y+z)}$ qonşu sinfini verir. Lakin $x(y+z) = xy + xz$ olduğu üçün o, $\overline{x}\overline{y} + \overline{x}\overline{z}$ sinfi ilə eynidir. Deməli, $\overline{x}(\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x}\overline{y} + \overline{x}\overline{z}$. Teorem 4 isbat olundu.

Tərif 4. Teorem 4 vasitəsi ilə qurulan halqa K halqasının L idealına görə faktor-halqası adlanır və K/L kimi işarə olunur.

$\langle K, +, \cdot \rangle$ halqasının $\langle K/L, +, \cdot \rangle$ faktor-halqasına $x \mapsto x + L$ kimi təyin olunan inikası *təbii homomorfizm* adlanır. Bu inikas hər bir elementə onun faktor-halqada öz sinfini qarşı qoyur.

Misal. 1. $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ halqasında 5-ə bölünən ədədlər qrupu baş idealdır. Bu baş ideala görə $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ faktor-halqası 5 elementdən ibarətdir: $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$.

Halqaların homomorfizmi də qrupların homomorfizmi ilə oxşar xassələrə malikdir. Homomorfizmin nüvəsi və obrazı haqqında yuxarıda isbat olunan teoremlər aşağıdakı əsas teoremi isbat etməyə imkan verir.

Teorem 5. Tutaq ki, $f: K \rightarrow K'$ suryektiv homomorfizmdir, L isə onun nüvəsidir. Onda $K/L \cong K'$.

İsbatı. Yuxarıdakı izomorfizm qrupların homomorfizmləri haqda əsas teoremə əsasən additiv qruplar üçün doğrudur. Siniflər üzərində yuxarıda təyin olunan vurma əməlinin tərifinə görə isə $x + L \mapsto f(x)$ inikası multiplikativ $\langle K/L, \cdot \rangle$ və $\langle K', \cdot \rangle$ gruppoidlərinin homomorfizmidir, yəni vurma əməlini saxlayır. Teorem 5 isbat olundu.

Tutaq ki, $\langle K, +, \cdot \rangle$ və $\langle K', +, \cdot \rangle$ halqaları verilmişdir. Bunların köməyi ilə $K \times K'$ hasilində yeni halqa müəyyən etmək olar. İxtiyari $\langle a, b \rangle$ və $\langle a', b' \rangle$ cütü üçün iki binar əməli belə təyin edək:

$$\langle a, b \rangle + \langle a', b' \rangle = \langle a + a', b + b' \rangle;$$

$$\langle a, b \rangle \langle a', b' \rangle = \langle aa', bb' \rangle.$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\langle 0, 0 \rangle$ elementi neytral element, $\langle -a, -b \rangle$ elementi simmetrik element və əgər halqaların vahidləri (1 və 1') varsa, onda $\langle 1, 1' \rangle$ neytral element olacaqdır. Qurulmuş bu halqa K və K' halqalarının *düz cəmi* adlanır və $K \oplus K'$ kimi işarə olunur.

IV FƏSİL. Çıxıqlar sinifləri halqası

§1. Tam ədədlər halqası və onun idealları

Tam ədədlər halqası ən sadə halqalardan biridir. O, tamlıq oblastıdır. Qruplarla bağlı bəzi məsələlərin həlli aşağıdakı qalıqlı bölmə teoreminə əsaslanır.

Teorem 1. Əgər b natural ədədi verilərsə, hər bir tam a ədədi yeganə qayda ilə

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

şəkilində göstərilə bilər.

İsbatı. b ədədinin bütün tam misillərinə baxaq:

$$\dots, -2b, -b, 0, b, 2b, \dots$$

Ayındır ki, a ədədi hər hansı iki kb və $(k+1)b$ misilləri arasında yerləşmiş olacaqdır:

$$kb \leq a < (k+1)b.$$

$k=q$ və $a - qb = r$ işarə edərək alırıq:

$$0 \leq a - bq = r < b.$$

Buradan tələb olunan göstəriliş alınır. Əgər $a = bq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < b$ başqa göstəriliş olarsa onda, bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə çıxsaq alırıq: $b(q - q_1) = r_1 - r$. Buradan:

$$|b(q - q_1)| = |r - r_1|. \quad (1)$$

Lakin r və r_1 mənfi olmayan tam ədədlərdir və buna görə də onların fərqlərinin mütləq qiyməti bu ədədlərdən ən böyüyünü aş bilməz. Deməli, $|r - r_1| \leq \max(r, r_1)$ və nəticə etibarilə alırıq: $|r - r_1| < b$. (1) bərabərliyinin sol tərəfi b -yə bölünür. Bu səbəbdən $r - r_1$ fərqi də b -yə bölünməlidir. Yuxarıda göstərilən bərabərsizlikdən aydın olur ki, bu ancaq $r - r_1 = 0$, yəni $r = r_1$ olduqda mümkündür. Nəticədə, (1) bərabərliyinin sağ tərəfinin 0-a bərabər olduğunu alırıq: $b(q - q_1) = 0$. Beləliklə, $q = q_1$. Teoremin isbatı başa çatdı.

Teorem 1-in ifadəsindəki yeganə q və r ədədləri uyğun olaraq *natamam qismət* və *qalıq* adlanır. Bəzən bu teorem aşağıdakı şəkildə də ifadə olunur.

Teorem 2. Əgər a və b tam ədədlər olmaqla, $b \neq 0$ olarsa, onda elə yeganə (q, r) tam ədədlər cütü tapmaq olar ki,

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|$$

olsun.

Tərif 1. Əgər qrupun hər bir elementi hər hansı bir $a \in G$ elementinin və ya onun tərsinin natural qüvvəti şəklində göstərilə bilərsə, onda belə qrupa *doğuranı a olan dövrü qrup* deyilir.

İxtiyari $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunda ən sadə yolla alt qrup almaq üçün onun ixtiyari $a \in G$ elementini götürək. İstənilən $n \in \mathbb{Z}$ tam ədədi üçün $a^n \in G$. İxtiyari $m, n \in \mathbb{Z}$ tam ədədləri üçün $a^{m-n} \in G$.

Tərif 1-ə əsasən, $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dövrü qrupdur. Doğuranı a olan dövrü qrup $\langle a \rangle$ şəklində yazılır.

Tam ədədlər halqasının additiv qrupu doğuranı 1 olan dövrü qrupdur.

Tərif 2. $a \in G$ elementi doğurarı bu elementə bərabər sonlu dövrü qrup əmələ gətirərsə, onda bu qrupun tərtibinə $a \in G$ elementinin *tərtibi* deyilir.

$a \in G$ elementinin tərtibi $a^n = e$ şərtini ödəyən ən kiçik natural ədəddir. Dövrü qruplar haqda əsas teorem aşağıdakı kimidir.

Teorem 3. Dövrü qrupun hər bir alt qrupu dövrü qrupdur.

İsbati. Tutaq ki, G doğurarı g olan dövrü qrupdur və $H \triangleleft G$ onun hər hansı alt qrupudur. Onda bu alt qrupun hər bir h elementi $h = g^n, n \in \mathbb{Z}$ şəklindədir. Göstərək ki, H dövrü qrupdur. Bunun üçün onun hər hansı bir $a = g^m, m \in \mathbb{Z}$ elementini götürək. H alt qrupunun bütün $a = g^m, m \in \mathbb{N}$ natural üstlü qüvvətləri çoxluğuna baxaq. q ilə elə ən kiçik natural ədədi işarə edək ki, $g^q \in H$ olsun. Teorem 2-yə əsasən, elə b tam ədədi tapmaq olar ki,

$$m = bq + r, \quad 0 \leq r < q$$

olsun. Bu halda,

$$g^m = g^{qb} g^r.$$

H alt qrup olduğu üçün

$$(g^q)^b = g^{qb} \in H \wedge g^r = g^{m-qb} \in H.$$

q ədədinin seçiminə əsasən, $0 \leq r < q$ şərtini ödəyən r üçün bu, ancaq $r=0$ olduqda mümkündür. Deməli, $m = bq$ və buna görə də, H alt qrupunun hər bir elementi $g^m = g^{qb}$ şəklindədir. Buradan görünür ki, H alt qrupu doğurarı g^q olan dövrü qrupdur. Teorem 3 isbat olundu.

Tərif 3. Əgər $\langle K, +, \cdot \rangle$ halqasında hər bir ideal baş ideal olarsa, onda belə halqa *baş ideallar halqası* adlanır.

Teorem 4. Tam ədədlər halqasında hər bir ideal baş idealdir.

İsbati. Tutaq ki, $A \subset \mathbb{Z}$ hər hansı idealdır. Onda o, tam ədədlər halqasında alt qrupdur. Lakin tam ədədlər qrupu dövrü qrup olduğu üçün, teorem 3-ə görə onun hər bir alt qrupu doğurarı müəyyən bir a tam ədədi olan dövrü qrupdur, yəni $A = \langle a \rangle$. Deməli, A çoxluğunun hər bir elementi $ak, k \in \mathbb{Z}$ şəklindədir. Beləliklə, A baş idealdir. Teoremin isbatı başa çatdı.

Tutaq ki, $m \neq 0$ tam ədəddir. Teorem 4-ə əsasən tam ədədlər halqasının idealları $m\mathbb{Z}$ şəklindədir. $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$ faktor-halqası $\bar{a} = a + m\mathbb{Z}$ şəklində qonşu siniflərdən ibarətdir.

Teorem 5. $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$ faktor-halqası sonlu halqadır. Onun xarakteristikası m -ə bərabərdir.

İsbati. İki $a + m\mathbb{Z}$ və $b + m\mathbb{Z}$ sinifləri yalnız və yalnız o zaman eyni olar ki, $a - b \in m\mathbb{Z}$ olsun. Bu halda a və b ədədləri m bölünənə görə eyni qalıqlı ədədlərdir. Tərsinə, əgər a və b ədədləri m bölünənə görə eyni qalıqlı ədədlər olarsa, onda $a + m\mathbb{Z} = b + m\mathbb{Z}$. Lakin teorem 1-ə əsasən ancaq m sayda müxtəlif qalıqlar vardır və onların hər biri bir qonşu sinif doğurur. Deməli,

$Z / mZ = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$. $\overline{0} = \overline{m} = \underbrace{\overline{1} + \dots + \overline{1}}_m$ olduğu üçün onun xarakteristikası m -ə bərabərdir.

Teorem 5 isbat olundu.

Əgər m müsbət tam ədədi mürəkkəb ədəd olarsa, onda Z / mZ halqası tamlıq oblastı deyil. Doğrudan da, $m = ab$ olarsa və $1 < |a| < m$ şərti ödənilərsə, yazı bilərik:

$$\overline{a}\overline{b} = \overline{m} = 0.$$

§2. Çıxıqlar siniflərinin tam və gətirilmiş sistemləri. Vahidlər qrupu

Tutaq ki, $A \subset Z / mZ$ alt çoxluğu verilmişdir. Aydındır ki, A qonşu siniflərin hər hansı çoxluğudur. Belə qonşu siniflər çoxluğu çıxıqlar sinifləri sistemi adlanır.

Tərif 1. $A = Z / mZ$ olduqda A sistemi çıxıqlar siniflərinin *tam sistemi* adlanır.

Məsələn, $Z / 5Z$ halqasında çıxıqlar siniflərinin tam sistemi olaraq $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ sistemini götürmək olar.

Tərif 2. A çıxıqlar sistemi o zaman çıxıqların *gətirilmiş sistemi* adlanır ki,

$$(\forall \overline{a} \in Z / mZ) (\partial BOB(a, m) = 1 \rightarrow \overline{a} \in A)$$

münasibəti doğru olsun.

Qeyd edək ki, $\partial BOB(a, m) = 1$ şərti sinfin hər hansı a elementi üçün ödənilərsə, onda bu şərt həmin sinfin bütün elementləri üçün də ödənilir. Beləliklə,

$$\partial BOB(a, m) = 1 \leftrightarrow (\forall b \in \overline{a}) (\partial BOB(b, m) = 1)$$

və yuxarıdakı tərifdə verilən şərt sinfi birqiymətli təyin edir. Deyilənlərə əsasən belə nəticəyə gəlmək olar ki, çıxıqlar sinifləri sistemi hər sinifdən bir element götürməklə alınan *çıxıqlar sistemi* ilə birqiymətli olaraq müəyyən olunur. Beləliklə, çıxıqların tam və gətirilmiş sistemləri *çıxıqlar siniflərinin* uyğun sistemlərini tamamilə əvəz edir.

Məsələn, $Z / 6Z$ halqasında çıxıqlar siniflərinin gətirilmiş sistemi əvəzinə $1, 5$ çıxıqlar sistemini götürmək olar (çünki, bütün siniflərdən ancaq 6 ilə ortaq vuruğu olmayan siniflər bu sistemə daxildir).

Teorem 1. $m \geq 1$ natural ədəd olduqda, $\overline{a} \in Z / mZ$ sinfinin tərsinin olması üçün $1 \in (a, m) = \{ax + my \mid x, y \in Z\}$ şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

İsbatı. $m=1$ olduqda teorem doğrudur. Buna görə də fərz etmək olar ki, $m > 1$. Şərtin zəruriliyini göstərmək üçün tutaq ki, $\overline{a}$ sinfinin tərsi vardır, yəni elə $\overline{b} \in Z / mZ$ sinfi var ki, $\overline{a}\overline{b} = \overline{1}$. Bu bərabərlik göstərir ki, ab hasili və 1 ədədi eyni qonşu sinifdə yerləşmişlər, yəni $ab - 1 \in mZ$, yaxud $ab \in 1 + mZ \rightarrow ab = 1 + mk$. Beləliklə, $1 = ab - mk \in (a, m)$.

İndi isə şərtin kafi olduğunu göstərək. Tutaq ki, $1 \in (a, m) \rightarrow 1 = ax + my$. Onda,

$$ax + my \rightarrow ax \in 1 + mZ \rightarrow \overline{ax} = \overline{1}.$$

Teorem 1 isbat olundu.

Teorem 2. Z/mZ halqasının bütün tərsi olan elementlər çoxluğu qrup təşkil edir.

İsbati. Z_m^* ilə $Z_m = Z/mZ$ halqasının bütün tərsi olan $\overline{a}$ çıxıqlar sinifləri çoxluğunu işarə edək. Göstərək ki, bu çoxluq çıxıqlar siniflərinin vurulması əməlinə görə qrup əmələ gətirir. $\overline{a}, \overline{b} \in Z_m^*$ kimi iki sinif götürək. Teorem 1-ə əsasən $1 \in (a, m) \wedge 1 \in (b, m)$. Deməli, elə $x, y \in Z$ tapmaq olar ki, $ax - my = 1$ və elə $z, t \in Z$ tapmaq olar ki, $bz - mt = 1$. Birinci bərabərliyin hər iki tərəfini $b \cdot y$ -yə vuraq: $b = abx - mby$. Alınmış qiyməti ikinci bərabərlikdə nəzərə alsaq, yazı bilərik: $ab(xz) - m(byz + t) = 1$. Bu bərabərlikdən görünür ki, yenə də teorem 1-ə əsasən $1 \in (ab, m)$. Deməli, Z_m^* çoxluğu vurma əməlinə görə qapalıdır. Asanlıqla görmək olar ki, qrupun bütün digər şərtləri də ödənilir. Teorem 2 isbat olundu.

Tərif 3. Z_m^* qrupu Z_m halqasının dönmə elementlər qrupu, yaxud *vahidlər qrupu* adlanır.

Qeyd edək ki, əgər hər hansı a tam ədədi m ilə vahiddən böyük d ortaq bölünənə malik olarsa, onda $ax - my = 1$ bərabərliyi mümkün ola bilməz. Doğrudan da, bərabərliyin sol tərəfi bu halda $d > 1$ ədədinə bölünür, sağ tərəf isə *bölünmür*. Deməli, $a \notin Z_m^*$. Beləliklə, biz aşağıdakı nəticəni alırıq.

Tutaq ki, sıfırdan fərqli ixtiyari a və b tam ədədləri verilmişdir.

Teorem 3. $A = (a, b) = \{ax + by \mid x, y \in Z\}$ baş idealının dövrü qrup kimi doğuranı bu ədədlərin ΘBOB -nə bərabərdir.

İsbati. §1, teorem 4-ə əsasən, mənfi olmayan elə d tam ədədi var ki, $A = (d)$. Aydınır ki, $d \neq 0$, çünki, a və b tam ədədlərinin hər ikisi sıfırdan fərqlidir. Asanlıqla görmək olar ki, $a = a \cdot 1 + b \cdot 0 \in A \wedge b = a \cdot 0 + b \cdot 1 \in A$. Deməli, elə iki a_1 və b_1 tam ədədləri tapmaq olar ki, $a = a_1 \cdot d \wedge b = b_1 \cdot d$. Digər tərəfdən $d \in A$ olduğu üçün elə $x, y \in Z$ tam ədədləri tapmaq olar ki, $d = ax + by$. Bu bərabərliklər göstərir ki, a və b ədədlərinin hər bir ortaq böləni d -nin bölənidir, yəni $d = \Theta BOB(a, b)$. Teorem 3 isbat olundu.

Yuxarıda isbat olunan teoremlərdən aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 1. $\overline{a} \in Z_m^*$ olması üçün $\Theta BOB(a, m) = 1$ olması zəruri və kafidir.

Nəticə 2. m sadə ədəd olarsa, Z_m halqası meydandır.

Doğrudan da, tutaq ki, m sadə ədəddir. Onda, bütün sıfırdan fərqli $a = 1, 2, \dots, p-1$ qalıqları üçün $(a, m) = 1$ şərtləri ödənilir. Deməli, Z_m halqasının bütün sıfırdan fərqli elementlərinin tərsi var, yəni Z_m halqası meydandır.

Nəticə 3. Z_m halqasının tamliq oblastı olması üçün m ədədinin sadə ədəd olması zəruri və kafidir.

V FƏSİL. Kompleks ədədlər meydanı

§1. Kompleks ədədin aksiomatik tərif

Riyaziyyatın inkişaf tarixində dəfələrlə ədəd anlayışının genişləndirilməsi zərurəti yaranmışdır. Tam əmsallı ən sadə xətti tənliklərin həlli zamanı rəasional ədədlərdən istifadə etməli oluruq. Həqiqi ədədlər meydanında ixtiyari həqiqi əmsallı $ax = b$ ($a \neq 0$) xətti tənliyinin həlli vardır. Lakin, diskriminantı mənfi olan kvadrat tənliyin, xüsusi halda, ən sadə $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin həqiqi ədədlər meydanında həlli yoxdur. Cəbri tənliklər nəzəriyyəsinin bir sıra məsələlərinin həlli həqiqi ədədlər meydanının elə genişləndirilməsini tələb edirdi ki, bu genişlənmədə həmin kvadrat tənliklərin həlli mümkün olsun.

Tərif 1. $\langle C, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ meydanı o zaman *kompleks ədədlər meydanı* adlanır ki, aşağıdakı şərtlər gəəənsin:

- a) $\langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ meydanı $\langle C, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ meydanının alt meydanıdır;
- b) elə $i \in C$ elementi var ki, $i^2 = -1$;
- c) ixtiyari $z \in C$ elementini yeganə qayda ilə $z = a + bi$ kimi yazmaq olar.

Teorem. Kompleks ədədlər meydanı vardır.

İsbatı. Əvvəlcə $U = R \times R$ hasilində aşağıdakı kimi iki binar əməl təyin edək:

$$\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle;$$

$$\langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle = \langle ac - bd, ad + bc \rangle.$$

Asanlıqla görmək olar ki, $\langle U, + \rangle$ cəbri kommutativ qrupdur. Göstərək ki, $\langle U^*, \cdot \rangle$ cəbri də kommutativ qrupdur. Vurma əməlinin tərifindən onun kommutativ əməl olduğu aydındır. Assosiativliyi yoxlayaq.

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle \cdot (\langle c, d \rangle \cdot \langle k, l \rangle) &= \langle a, b \rangle \cdot \langle ck - dl, cl + dk \rangle = \\ &= \langle a(ck - dl) - b(cl + dk), a(cl + dk) + b(ck - dl) \rangle \\ &= \langle ack - adl - bcl - bdk, acl + adk + bck - bdl \rangle. \end{aligned}$$

Digər tərəfdən,

$$\begin{aligned} (\langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle) \cdot \langle k, l \rangle &= \langle ac - bd, ad + bc \rangle \cdot \langle k, l \rangle = \\ &= \langle (ac - bd)k - (ad + bc)l, (ac - bd)l + (ad + bc)k \rangle = \\ &= \langle ack - adl - bcl - bdk, acl + adk + bck - bdl \rangle. \end{aligned}$$

Alınan bərabərliklər assosiativliyinin doğruluğunu göstərir. $\langle 1, 0 \rangle$ cütü vahid elementdir:

$$\langle a, b \rangle \cdot \langle 1, 0 \rangle = \langle a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1 \rangle = \langle a, b \rangle.$$

$\langle 0, 0 \rangle$ cütü toplama əməli üçün neytral elementdir.

Məlumdur ki, $U^* = U \setminus \{\langle 0, 0 \rangle\}$. $\langle a, b \rangle \neq \langle 0, 0 \rangle$ münasibəti yalnız və yalnız a və b ədədlərindən heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olduqda doğrudur. Bu halda asanlıqla yəqin etmək olar ki,

$$\langle a, b \rangle^{-1} = \langle a / (a^2 + b^2), -b / (a^2 + b^2) \rangle.$$

Doğrudan da,

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle \cdot \langle a / (a^2 + b^2), -b / (a^2 + b^2) \rangle &= \\ \langle a^2 / (a^2 + b^2) + b^2 / (a^2 + b^2), -ab / (a^2 + b^2) + ba / (a^2 + b^2) \rangle &= \langle 1, 0 \rangle. \end{aligned}$$

Beləliklə, $\langle U, +, \cdot \rangle$ cəbrinin meydan olması üçün ancaq distributivlik xassəsinin ödənildiyini yoxlamaq qalır. Bunun üçün ayrı-ayrılıqda $\langle a, b \rangle (\langle c, d \rangle + \langle k, l \rangle)$ və $\langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle + \langle a, b \rangle \cdot \langle k, l \rangle$ cəmlərini hesablayaraq, nəticələri müqayisə etməklə bərabərliyin doğruluğunu yoxlayaq.

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle + \langle a, b \rangle \cdot \langle k, l \rangle &= \langle ac - bd, ad + bc \rangle + \langle ak - bl, al + bl \rangle = \\ &= \langle ac - bd + ak - bl, ad + bc + al + bl \rangle. \end{aligned}$$

Digər tərəfdən, isə

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle (\langle c, d \rangle + \langle k, l \rangle) &= \langle a, b \rangle \langle c + k, d + l \rangle = \\ &= \langle a(c + k) - b(d + l), a(d + l) + b(c + k) \rangle = \langle ac - bd + ak - bl, ad + bc + al + bl \rangle. \end{aligned}$$

Göründüyü kimi alınmış ifadələr eynidir.

$\langle U, +, \cdot \rangle$ meydanında $\langle R, +, \cdot \rangle$ həqiqi ədədlər meydanı ilə izomorf olan alt meydan vardır.

$$H = \{ \langle a, 0 \rangle \mid a \in R \}$$

çoxluğu $\langle U, +, \cdot \rangle$ meydanında tələb olunan alt meydan əmələ gətirir. Doğrudan da, asanlıqla yoxlaya bilərik ki, $\langle a, 0 \rangle + \langle c, 0 \rangle = \langle a + c, 0 \rangle$ və $\langle a, 0 \rangle \cdot \langle c, 0 \rangle = \langle ac, 0 \rangle$.

İndi isə $i = \langle 0, 1 \rangle$ işarə edək. $\langle 0, 1 \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle = \langle 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \rangle = \langle -1, 0 \rangle$ bərabərliyi göstərir ki, $i^2 \in H$. Digər tərəfdən,

$$\langle a, b \rangle = \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle = \langle a, 0 \rangle + \langle b, 0 \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle \quad (1)$$

və bu göstərilmiş yeganədir. Doğrudan da,

$$\langle a, 0 \rangle + \langle b, 0 \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle = \langle a', 0 \rangle + \langle b', 0 \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle$$

olarsa, onda yazı bilərik: $\langle a, b \rangle = \langle a', b' \rangle \leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$.

Teoremin isbatını başa çatdırmaq üçün $\langle U, +, \cdot \rangle$ meydanı ilə izomorf olan elə $\langle C, +, \cdot \rangle$ meydanı quraq ki, $R \subset C$ olsun. Bu halda, C meydanı üçün tərif 1-in b) və c) şərtləri ilə birlikdə a) şərti də ödənməmiş olar, yəni tələb olunan meydan qurulmuş olar. (1) bərabərliyi göstərir ki, hər

bir $\langle a, 0 \rangle$ şəklində elementi a ilə əvəz etsək, biz yeni $C = \{a + bi \mid a, b \in R\}$ simvolik cəmlər çoxluğunu alırıq. C çoxluğunda toplama və vurma əməllərini aşağıdakı kimi təyin edək:

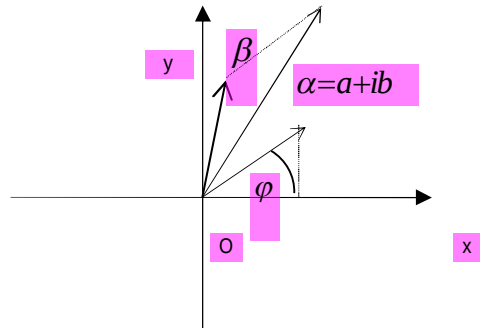
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Onda, U və C çoxluqları arasındakı $\langle a, b \rangle \mapsto a + bi$ inikası biyektivdir. Bu biyektiv inikas ilə yeni $\langle C, +, \cdot \rangle$ meydanını alırıq və o, $\langle U, +, \cdot \rangle$ meydanı ilə izomorfdur. Asanlıqla görmək olar ki, $\langle C, +, \cdot \rangle$ meydanında $0 = 0i = 0 + 0i$. Qurmayaya görə $R \subset C$. Teorem isbat olundu.

§2. Kompleks ədədlərin cəbri, həndəsi və triqonometrik şəkli

$\langle C, +, \cdot \rangle$ meydanının elementləri kompleks ədədlər adlanır. Tutaq ki, $z \in C$ hər hansı kompleks ədəddir. Əvvəlki paraqrafdakı teoremə əsasən bu ədədi yeganə qayda ilə $z = a + bi$ şəklində yazmaq olar. Kompleks ədədin belə yazılışı onun *cəbri şəkli* adlanır. a ədədinə z kompleks ədədinin həqiqi hissəsi deyilir və $\operatorname{Re} z$ kimi işarə olunur. b ədədinə isə z kompleks ədədinin xəyali hissəsinin əmsalı deyilir və $\operatorname{Im} z$ kimi işarə olunur. Kompleks ədədlərin müxtəlif göstərilişlərindən istifadə olunur. Bu və ya digər göstəriliş baxılan konkret məsələdən asılıdır.



Şəkil 2.

Bəzən kompleks ədədləri müstəvinin nöqtələri və ya vektorları şəklində təsvir etmək faydalı olur. Müstəvi üzərində düzbucalı Dekart koordinat sistemi götürək. Hər bir nöqtə onun koordinatları adlanan bir yeganə nizamlı cütə qarşı qoyulur və tərsinə. Beləliklə, müstəvinin nöqtələr çoxluğu ilə cütlər çoxluğu arasında qarşılıqlı biriyəmətli uyğunluq müəyyən olunur. Digər tərəfdən müstəvinin nöqtələri ilə onların radius vektorları arasında biyektiv uyğunluq mövcuddur. Hər bir kompleks ədəd isə bir nizamlı cütlə təyin olduğundan kompleks ədədlər çoxluğu ilə müstəvi nöqtələri və beləliklə, radius vektorları çoxluğu arasında qarşılıqlı biriyəmətli uyğunluq vardır. Buna görə də hər bir $z = a + bi$ kompleks ədədini koordinatları

(a, b) olan nöqtə və ya bu nöqtənin radius vektoru ilə (şəkil 2) göstərmək olar. Belə göstəriliş kompleks ədədin *həndəsi şəkli* adlanır.

Tutaq ki, cəbri şəkildə iki kompleks ədəd verilmişdir: $\alpha = a + bi, \beta = c + di$. Yuxarıda deyilənlərə əsasən bu iki kompleks ədəd o zaman bərabər olar ki, $a=c$ və $b=d$ bərabərlikləri doğru olsun. $\bar{\alpha} = a - bi$ ədədinə α ədədinin *kompleks qoşması* deyilir. Məsələn, $\alpha = 3 - 5i$ ədədinin kompleks qoşması $\bar{\alpha} = 3 + 5i$ ədədidir; $\beta = -3i$ üçün isə $\bar{\beta} = 3i$ olar. α həqiqi ədəd olduqda $\bar{\alpha} = \alpha$.

$\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ inikası $\langle C, +, \cdot \rangle$ meydanının özünə biyektiv inikasıdır.

Teorem 1. $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ inikası $\langle C, +, \cdot \rangle$ meydanının özünə izomorfizmidir.

İsbatı. Yuxarıda deyildiyi kimi, bu inikas biyektiv inikasdır. Göstərək ki, o, homomorfizmdir. $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ olarsa, onda,

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = (a - bi) + (c - di) = a + c - (b + d)i = \overline{\alpha + \beta}.$$

Eyni qayda ilə,

$$\alpha\beta = ac - bd + i(ad + bc) \rightarrow \overline{\alpha\beta} = ac - bd - (ad + bc)i;$$

$$\bar{\alpha}\bar{\beta} = (a - bi)(c - di) = ac - bd + (-ad - bc)i = \overline{\alpha\beta}.$$

Göründüyü kimi $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ inikası baş əməlləri saxlayır və deməli, izomorfizmdir. Teorem 1 isbat olundu.

Qeyd edək ki, $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ inikası $\langle C, +, \cdot \rangle$ meydanının özünə həqiqi ədədlər meydanını yerində saxlayan yeganə avtomorfizmdir.

Qoşma kompleks ədədlərin əsas xassələri içərisində aşağıdakı iki münasibəti qeyd edək:

- 1) İxtiyari $\alpha \in C$ kompleks ədədi üçün $\alpha + \bar{\alpha} = 2 \operatorname{Re} \alpha \in R$; $\alpha - \bar{\alpha} = 2i \operatorname{Im} \alpha$;
- 2) İxtiyari $\alpha \in C$ kompleks ədədi üçün $\alpha \cdot \bar{\alpha} = |\alpha|^2$.

Toplama əməlinin tərifinə görə iki kompleks ədədi, həndəsi olaraq, vektorların toplanması qaydası – paraleloqram qaydası – ilə toplamaq olar (şək. 2). Vurma əməli isə belə sadə həndəsi interpretasiyaya malik deyil. Lakin vurma əməlini də əyani olaraq təsvir etmək mümkündür. Bunun üçün kompleks ədədin triqonometrik şəkli daha əlverişlidir.

Tutaq ki $\alpha = a + bi$ kompleks ədədinin müstəvi üzərində həndəsi təsviri verilmişdir (şək. 2). Radius vektorun absis oxunun müsbət istiqamətli ilə əmələ gətirdiyi bucağı φ ilə işarə edək. Müstəvi üzərində polyar koordinat sistemini elə daxil edək ki, polyar ox absis oxunun müsbət yarım hissəsi ilə üst-üstə düşsün. Analitik həndəsədən məlum olduğu kimi müstəvinin koordinat başlanğıcından fərqli hər bir nöqtəsi bir cüt ədədlə (polyar koordinatlarla) birqiymətli təyin olunur: (r, φ) . Burada $r > 0$ həmin nöqtənin radius vektorunun uzunluğunu, φ isə bu radius

vektorla absis oxu arasındakı bucağı göstərir. Qeyd edək ki, φ polyar bucağı $[0, 2\pi)$ aralığında dəyişir. Məlumdur ki, radius vektorun uzunluğu $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ düsturu ilə hesablanır. a və b koordinatları üçün yaza bilərik:

$$a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi. \quad (2)$$

Onda alarıq:

$$\alpha = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (3)$$

Çox vaxt alınmış ifadədə φ bucağı üzərində yuxarıda qoyulan məhdudiyyət atılaraq, $-\infty < \varphi < \infty$ qəbul olunur.

Tərif 1. (3) bərabərliyində sonuncu ifadəyə kompleks ədədin *trigonometrik şəkli* deyilir; r ədədi kompleks ədədin *modulu*, φ isə onun *arqumenti* adlanır.

α kompleks ədədinin modulu $|\alpha|$ kimi işarə olunur. 0 ədədinin modulu 0-a bərabərdir, arqumenti isə təyin olunmamışdır. Trigonometrik şəkildə yazılış yeganə deyil. Verilən kompleks ədədin arqumenti (2) sistemindən 2π ədədinin tam misilləri dəqiqliyi ilə təyin olunur. Bu o deməkdir ki, əgər hər hansı φ ədədi (2) sistemini ödəyirsə, yəni arqumentdirsə, onda $\varphi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ədədlərinin hər biri də arqumentdir. Deməli, kompleks ədədin arqumenti bir qiymətli təyin olunmamışdır. Onu birciyyətli olaraq, yuxarıda olduğu kimi, ancaq 2π uzunluqda yarım intervalda təyin etmək olar. Belə yarım interval olaraq, məsələn, $[0, 2\pi)$ götürülə bilər. Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsində adətən belə interval olaraq $(-\pi, \pi]$ aralığı qəbul olunur. Arqumentin bu şərti ödəyən qiymətləri onun *baş qiyməti* adlanır və $\arg \alpha$ kimi işarə olunur. (2) bərabərliklərindən asanlıqla I və IV koordinat bucaqlarında yerləşmiş kompleks ədədlər üçün (ordinat oxu üzərində yerləşən nöqtələr istisna olmaqla):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \rightarrow \varphi = \arg \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

alınır. II və III koordinat bucaqları daxilində yerləşmiş kompleks ədədlər üçün isə uyğun olaraq,

$$\arg \alpha = \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, \arg \alpha = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

bərabərlikləri doğrudur.

Koordinat oxları üzərində (koordinat başlanğıcı istisna olmaqla) yerləşmiş ədədlər üçün isə arqument belə təyin olunur: müsbət həqiqi ədədin arqumenti 0-a, mənfi ədədin arqumenti π -yə bərabər qəbul olunur; xəyali ox üzərində yerləşən kompleks ədədin arqumenti xəyali hissənin əmsalı müsbət olduqda $\pi/2$ -yə, mənfi olduqda isə $-\pi/2$ -yə bərabərdir.

2π ədədinin tam misilləri çoxluğu həqiqi ədədlərin additiv qrupunda alt qrup təşkil edir.

$(-\pi, \pi]$ aralığından olan hər bir həqiqi ədəd bu alt qrupa görə bir qonşu sinif müəyyən edir və bu siniflər cüt-cüt kəsişmir. $\arg \alpha \in (-\pi, \pi]$ ədədinin doğurduğu qonşu sinif $Arg \alpha$ kimi işarə olunur.

Misallar. 2, -1, -i, -1+i kompleks ədədlərini triqonometrik şəkllə gətirək. Bunun üçün onların modulunu və arqumentini tapaq. Asanlıqla yəqin etmək olar ki,

$$|2| = 2, |-1| = 1, |-i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, |-1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Yuxarıdakı deyilənlərə əsasən:

$$\arg 2 = 0; \arg(-1) = \pi; \arg(-i) = -\pi/2; \arg(-1+i) = \pi + \arctg(-1) = \pi - \pi/4 = 3\pi/4.$$

Beləliklə, bu ədədlərin triqonometrik şəkli aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$2 = 2(\cos 0 + i \sin 0); -1 = \cos \pi + i \sin \pi;$$

$$-i = \cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2); -1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Modulun əsas xassələri aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

İxtiyari α və β kompleks ədədləri üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$1) |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|, \quad 2) \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad 3) |\alpha^m| = |\alpha|^m; m \in \mathbb{N}.$$

Arqumentin xassələrini ifadə edən aşağıdakı bərabərliklər isə 2π dəqiqliyi ilə ödənilir:

$$1) \arg(\alpha\beta) = \arg \alpha + \arg \beta, \quad 2) \arg \frac{\alpha}{\beta} = \arg \alpha - \arg \beta, \quad 3) \arg \alpha^n = n \arg \alpha.$$

§3. Muavr düsturu. Kompleks ədədin kökü

Kompleks ədədlərin vurulmasını triqonometrik şəkildə verilmiş ədədlər üzərində yerinə yetirmək daha sadədir.

Toorem 1. Tutaq ki, triqonometrik şəkildə iki kompleks ədəd verilmişdir:

$$\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \beta = \rho(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Onda,

$$\alpha\beta = r\rho(\cos(\varphi + \phi) + i \sin(\varphi + \phi)).$$

İsbatı. Verilən ədədlərin hasilini tapaq.

$$\alpha\beta = r\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \phi + i \sin \phi) = r\rho(\cos \varphi \cos \phi - \sin \varphi \sin \phi +$$

$$i(\cos \varphi \sin \phi + \sin \varphi \cos \phi)) = r\rho(\cos(\varphi + \phi) + i \sin(\varphi + \phi)).$$

Teorem 1 isbat olundu.

Nəticə. İxtiyari n natural ədədi üçün

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Alınan düstur *Muavr düsturu* adlanır.

Teorem 1-ə əsasən $Arg: \alpha \mapsto \arg \alpha + 2\pi Z$ inikası $\langle C^*, \cdot \rangle$ multiplikativ qrupunun $R/2\pi Z$ faktor-qrupuna süryektiv homomorfizmidir. Onun nüvəsi $\arg \alpha = 0, \alpha \in C^*$ şərtlərini ödəyən kompleks ədədlərdən ibarətdir, yəni $Ker Arg = R^*$. Homomorfizmlər haqqında əsas teoremə görə aşağıdakı izomorfizmi alırıq:

$$C^* / R^* \cong R / 2\pi Z .$$

Kompleks ədədin kökü. Tutaq ki, n natural ədəddir.

Tərif. u kompleks ədədi o zaman hər hansı z kompleks ədədinin n -ci dərəcədən kökü adlanır ki, $u^n = z$ bərabərliyi doğru olsun.

Məsələn, $i^4 = 1$ olduğu üçün i ədədi 1-in 4-cü dərəcədən köküdür. Eyni qayda ilə yoxlamaq olar ki, $\varepsilon = -1 + i\sqrt{3}$ ədədi 8-in 3-cü dərəcədən köküdür.

Muavr düsturunu tətbiq etməklə kompleks ədədin n -ci dərəcədən köklərini tapaq.

Teorem 2. Vahidin n -ci dərəcədən n sayda kökü vardır və bu köklər aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}; k = 0, 1, \dots, n-1 .$$

İsbatı. Aydındır ki, vahidin n -ci dərəcədən ixtiyari kökü sıfırdan fərqlidir. Buna görə də onu triqonometrik şəkildə yazmaq olar. Birqiymətli yazılışdan istifadə edərək onu

$$\varepsilon = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), 0 \leq \varphi < 2\pi$$

kimi göstərək. Şərtə əsasən $\varepsilon^n = 1$. Muavr düsturuna görə yazı bilərik:

$$r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = 1 .$$

Triqonometrik şəkildə göstərilişin yeganəliyinə əsasən $r^n = 1$. r müsbət ədəd olduğu üçün buradan $r = 1$ alırıq. Yenə də, yeganəliyə görə

$$\begin{cases} \cos n\varphi = 1, \\ \sin n\varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\varphi = 2\pi k, \\ n\varphi = \pi m \end{cases} \Rightarrow 2\pi k = \pi m \Rightarrow m = 2k .$$

Beləliklə,

$$n\varphi = 2\pi k \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi k}{n} .$$

$0 \leq \varphi < 2\pi$ olduğundan $0 \leq k < n \rightarrow k = 0, 1, \dots, n-1$. Deməli,

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}; k = 0, 1, \dots, n-1 .$$

Yoxlama göstərir ki, tapılan ədədlər vahidin n -ci dərəcədən kökləridir. Teorem 2 isbat olundu.

Tərif. Vahidin n -ci dərəcədən *ibtidai kökü* onun elə kökünə deyilir ki, yerdə qalan köklərin hər biri həmin kökün müəyyən natural qüvvətinə bərabərdir.

Vahidin n -ci dərəcədən köklərinin aşağıdakı xassələri vardır.

1°. Vahidin n -ci dərəcədən kökləri 1 radiuslu, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan düzgün n - bucaqlının təpə nöqtələrində yerləşmişdir.

2°. Vahidin n -ci dərəcədən kökləri üçün aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$\varepsilon_k = \varepsilon^k; \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}; k = 0, \dots, n-1.$$

3°. Vahidin n -ci dərəcədən kökləri doğuranı ε olan n tərtibli dövrü qrupdur. Bu qrup C_n kimi işarə olunur.

4°. Vahidin n -ci dərəcədən hər bir ibtidai kökü C_n qrupunun doğuranıdır.

5°. $(k, n) = 1$ olarsa, $\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ vahidin n -ci dərəcədən ibtidai köküdür.

Bu xassələr Muavr düsturu və teorem 2-nin bilavasitə nəticəsidir.

Teorem 3. Sıfırdan fərqli z kompleks ədədinin n -ci dərəcədən ixtiyari kökü onun hər hansı bir qeyd olunmuş kökü ilə vahidin n -ci dərəcədən müəyyən bir kökünün hasilinə bərabərdir.

İsbatı. Tutaq ki, w z ədədinin hər hansı qeyd olunmuş köküdür. Onda, $w^n = z$. Əgər w' n -ci dərəcədən başqa bir kök olarsa, onda $w'^n = z$. İkinci bərabərliyi birinciyə tərəf-tərəfə bölsək alırıq $\left(\frac{w'}{w}\right)^n = 1$. Beləliklə, $w'/w = \varepsilon$ vahidin n -ci dərəcədən müəyyən bir köküdür. Buradan alırıq: $w' = \varepsilon w$. Teorem 3 isbat olundu.

Nəticə. Triqonometrik şəkildə verilmiş sıfırdan fərqli $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ kompleks ədədinin n -ci dərəcədən n sayda kompleks kökü vardır və bu köklər

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

düsturları ilə hesablanır.

İsbatı. Muavr düsturuna əsasən

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right)^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z.$$

Deməli, $w = \sqrt[n]{r} (\cos(\varphi/n) + i \sin(\varphi/n))$ ədədi z -in n -ci dərəcədən köküdür. Əgər w' başqa kök olarsa, onda vahidin n -ci dərəcədən müəyyən kökü üçün $w' = \varepsilon w$ olmalıdır. Tərsinə, bilavasitə yoxlama ilə görmək olar ki, belə müəyyən olunan hər bir w' ədədi z -in n -ci dərəcədən köküdür. Deməli, w' üçün n sayda qiymət mümkündür və bunlar $\varepsilon = \varepsilon_k, k = 0, 1, \dots, n-1$ götürməklə alınır:

$$w_k = w\varepsilon_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos(\varphi/n) + i \sin(\varphi/n) \right) \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) = \\ = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right).$$

Nəticə isbat olundu.

Misal. 1. Vahidin 3-cü dərəcədən bütün köklərini tapaq. Teorem 2-yə əsasən yazı bilərik:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

k parametrinə göstərilən qiymətləri verərək üç müxtəlif kök tapırıq:

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cəbr olaraq $\langle G, \cdot \rangle$ cütünü götürək ki, burada, $G = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$;

baş əməl olaraq kompleks ədədlərin vurulması əməlini götürək. $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^2$, $\varepsilon^{-2} = \varepsilon$ olduğu üçün $\langle G, \cdot \rangle$ cəbri kommutativ qrup olacaqdır. Bu qrup vahidin 3-cü dərəcədən kökləri qrupu adlanır. Analoji olaraq

$$G = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}\},$$

olduqda (burada $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$), vahidin n -ci dərəcədən kökləri qrupu alınır.

2. $z = 1 - i\sqrt{3}$ ədədinin 4-cü dərəcədən bütün kompleks köklərini tapaq.

$$r = |z| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2.$$

Verilən ədəd IV koordinat bucağında yerləşir. Buna görə də onun argumenti

$$\varphi = \arctg(-\sqrt{3}) = -\pi/3$$

olacaqdır. Deməli,

$$w_k = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{2\pi k - \pi/3}{4} + i \sin \frac{2\pi k - \pi/3}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3.$$

k -ya uyğun qiymətləri verməklə bütün kökləri tapa bilərik:

$$w_0 = \sqrt[4]{2} (\cos(-\pi/12) + i \sin(-\pi/12)),$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2} (\cos(5\pi/12) + i \sin(5\pi/12)),$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2} (\cos(11\pi/12) + i \sin(11\pi/12)) = \sqrt[4]{2} (-\cos(\pi/12) + i \sin(\pi/12)),$$

$$w_3 = \sqrt[4]{2}(\cos(17\pi/12) + i\sin(17\pi/12)) = \sqrt[4]{2}(-\cos(5\pi/12) - i\sin(5\pi/12)).$$

§4. Kompleks ədədin kvadrat kökü.

Yuxarıda triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədəddən kökalma qaydası ilə tanış olduq. Burada cəbri şəkildə verilmiş kompleks ədəddən kvadrat kökalma qaydasını öyrənəcəyik.

Tutaq ki, $\alpha = a + bi$ kompleks ədədindən 2-ci dərəcədən kök almaq tələb olunur. Həmin köklərdən ixtiyari birini $z = x + yi$ kimi işarə edək. Onda:

$$z^2 = \alpha \Rightarrow (x + yi)^2 = a + bi \Rightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = a + bi.$$

Buradan:

$$x^2 - y^2 = a \wedge xy = b/2.$$

Beləliklə, x və y həqiqi ədədləri bu sistemdən təyin oluna bilər. Əgər ikinci bərabərliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldərək, əks işarə ilə götürsək aşağıdakı sistemi alırıq:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ -x^2 y^2 = b^2/4. \end{cases}$$

Deməli, Viyet teoreminə əsasən x^2 və $-y^2$ aşağıdakı kvadrat tənliyin kökləridir:

$$u^2 - au + \frac{b^2}{4} = 0.$$

Bu tənliyin iki kökü vardır:

$$u_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, u_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

$a + bi \neq 0$ olduqda birinci kök müsbət, ikinci kök isə mənfidir. Deməli,

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \text{ və } -y^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Buradan yazı bilərik:

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Əgər bütün mümkün hallara baxcaq $z = x + yi$ kökü üçün dörd müxtəlif qiymət alırıq ki, bunlardan ancaq ikisi götürülə bilər (bax §3). Hər şeydən əvvəl qeyd edək ki, əgər $z = x + yi$ kök olarsa, ikinci kök $-z = -x - yi$ olacaqdır. Deməli, yalnız bir kökü tapmaq lazımdır. Əgər $b \geq 0$ olarsa, α ədədi yuxarı yarımüstəvidə yerləşmişdir və buna görə də $0 \leq \arg \alpha \leq \pi$. Onda $0 \leq \arg z \leq \pi/2$, yəni $x \geq 0 \wedge y \geq 0$ olmalıdır. Əgər $b < 0$ olarsa, α ədədi aşağı yarımüstəvidə yerləşmişdir və buna görə də $-\pi < \arg \alpha < 0$. Onda $-\pi/2 < \arg z < 0$, yəni $x \geq 0 \wedge y < 0$ olmalıdır. Beləliklə, alırıq: 1) $b \geq 0$ olarsa, iki kompleks kök belə tapılır:

$$x + yi = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}; \quad (1)$$

2) $b < 0$ olduqda isə köklər

$$x + yi = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \mp i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \quad (2)$$

düsturları ilə tapılır (hər iki düsturda köklər üçün eyni zamanda üst işarələr və ya eyni zamanda alt işarələr götürülür).

Misal. $-5 - 12i$ kompleks ədədinin kvadrat köklərini tapaq. $b = -12 < 0$ olduğu üçün (2) düsturlarını tətbiq etmək lazımdır.

$$x + yi = \pm \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{25 + 144}}{2}} \mp i \sqrt{\frac{\sqrt{25 + 144} + 5}{2}} = \pm 2 \mp 3i.$$

Beləliklə, $-5 - 12i$ kompleks ədədinin iki kvadrat kökü vardır:

$$z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = -2 + 3i.$$

Yoxlama ilə yəqin etmək olar ki, bu ədədlər həqiqətən axtarılan kvadrat kökləridir.

VI FƏSİL. Əvəzləmələr qrupu

§1. İnduksiya aksiomu. Riyazi induksiya metodu

Natural ədəd riyaziyyatın ilkin anlayışlarından biridir. Çox qədim dövrlərdə yaranmış bu anlayış insanların saymaq tələbatı ilə əlaqədar meydana gəlmişdir. Natural ədədlər nəzəriyyəsinin qurulmasında induksiya aksiomu müstəsna əhəmiyyətə malikdir. Bu aksiom aşağıdakı şəkildə söylənir:

Tutaq ki, natural ədədlər çoxluğunun hər hansı $M \subset N$ alt çoxluğu iki şərti ödəyir:

1) $1 \in M$;

2) $(\forall n \in N)(n \in M \rightarrow n+1 \in M)$.

Onda $M = N$.

Beləliklə 1-dən başlayaraq, hər bir ədədi bir vahid artırmaqla biz bütün natural ədədlər sırasını ala bilərik. Bu aksiom natural ədədlərlə bağlı bir çox hökmlərin isbatı zamanı geniş istifadə olunur. Fərz edək ki, bütün natural ədədlər çoxluğunda hər hansı $T(n)$ predikatı verilmişdir.

Teorem. Əgər $T(n)$ predikatı üçün:

1) $T(1)$;

2) $(\forall n \in N)(T(n) \rightarrow T(n+1))$

mülhizələri doğrudursa, onda $T(n)$ eyniliklə doğru predikatdır.

İsbatı. M ilə $T(n)$ predikatının doğruluq qiymətləri çoxluğunu işarə edək. Teoremin 1-ci şərtinə əsasən $1 \in M$. İxtiyari $k \in M$ natural ədədi götürək və fərz edək ki, $T(k)$ təklifi doğrudur. 2-ci şərtə əsasən, $T(k) \rightarrow T(k+1)$ implikasiyası doğrudur. Onda implikasiyanın doğruluq cədvəlinə əsasən $T(k+1)$ təklifinin doğruluğu alınır. Deməli, $k+1 \in M$. İnduksiya aksiomuna əsasən, bu halda $M = N$ olacaqdır. Bu isə $T(n)$ predikatının eyniliklə doğru predikat olduğunu göstərir. Teorem isbat olundu.

Misal. Riyazi induksiya metodu ilə isbat edək ki, ixtiyari natural n ədədi üçün

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad (2)$$

bərabərliyi doğrudur.

Həlli. (2) bərabərliyini $T(n)$ predikatı kimi qəbul edək.

1) $T(1)$ təklifinin doğruluğunu yoxlayaq: $1^3 = \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2} \right)^2$ - təklif doğrudur.

2) $T(k) \rightarrow T(k+1)$ implikasiyasını ancaq $T(k)$ doğru olduqda yoxlamaq lazımdır (çünki, $T(k)$ yalan olduqda implikasiya doğrudur). Beləliklə, ikinci addımda fərz edirik ki,

$T(k)$ doğrudur (induktiv fərziyyə). İsbat etməliyik ki, bu fərziyyədən $T(k+1)$ təklifinin doğruluğu alınır. $T(k)$ təklifinin doğru olması

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2$$

bərabərliyinin doğru olması deməkdir. Bu şərt daxilində $T(k+1)$ təklifinə baxaq.

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 = \\ &= (k+1)^2 \left[\left(\frac{k}{2} \right)^2 + k+1 \right] = (k+1)^2 \frac{k^2 + 4k + 4}{2} = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{2}. \end{aligned}$$

$T(k)$

Beləliklə, $T(k+1)$ təklifi də doğrudur. Teoremə əsasən (2) bərabərliyi eyniliklə doğru predikatdır.

§2. Yerdəyişmə. İnversiya. Transpozisiya haqda teorem

1-dən n -ə qədər natural ədədlərin hər hansı ardıcılıqla düzülüşü *yerdəyişmə* adlanır. Məsələn, 1, 3, 6, 4, 2, 5 ardıcılığı yerdəyişmədir. Hər bir yerdəyişmədə natural ədədlər təkrarsız düzülür. Ən sadə düzülüş natural ədədlərin təbii ardıcılıqla düzülüşüdür. Belə düzülüş onunla xarakterizə olunur ki, burada kiçik ədəd böyükdən solda yerləşmişdir.

Deyilənlərdən aydın olur ki, hər bir yerdəyişmə nizamlı $1, 2, \dots, n$ çoxluğunun hər hansı $\varphi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ inikası ilə müəyyən olunur. Doğrudan da, əgər bu inikası qiymətlər çoxluğunda nizamı $\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)$ kimi müəyyən etsək yerdəyişmə alırıq. Əgər daha yığcam işarələmə üçün $\varphi(i) = \varphi_i$ qəbul etsək yerdəyişməni belə yazı bilərik: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Aydındır ki, bütün mümkün yerdəyişmələrin sayı $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ hasilinə bərabərdir.

Yerdəyişmə üçün vacib olan inversiya anlayışını verək. Tutaq ki, $1 \leq k < j \leq n$ şərtini ödəyən $\langle k, j \rangle$ cütü verilmişdir. Əgər $\varphi_k > \varphi_j$ şərti ödənilərsə, onda deyilir ki, $\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle$ cütü *inversiya* təşkil edir. Məsələn, 6 elementdən düzəlmiş yuxarıdakı yerdəyişmədə beş inversiya vardır və bunlar $\langle 3, 2 \rangle, \langle 6, 2 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 6, 4 \rangle, \langle 6, 5 \rangle$ cütləri ilə meydana gəlmişdir. Göründüyü kimi, əgər $\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle$ cütü inversiya təşkil edərsə, onda $k - j$ və $\varphi_k - \varphi_j$ fərqləri müxtəlif işarəlidir. Beləliklə, yerdəyişmədəki inversiyaların sayı üçün aşağıdakı düsturu alırıq:

$$s = \sum_{1 \leq k < j \leq n} \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \text{sign} \frac{k - j}{\varphi_k - \varphi_j} \right), \quad (1)$$

burada cəmləmə $n(n-1)/2$ sayda bütün mümkün $\langle k, j \rangle$ cütləri üzrə aparılır. Əgər $\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle$ cütü inversiya təşkil etmirsə, onda mötərizədəki cəm sıfıra bərabərdir, əks halda isə mötərizədəki ifadə 2-yə bərabərdir və hasilin qiyməti isə 1-ə bərabərdir. Məsələn, yuxarıdakı misalda $\varphi_1 = 1, \varphi_2 = 3, \varphi_3 = 6, \varphi_4 = 4, \varphi_5 = 2, \varphi_6 = 5$. Buna görə də, bu yerdəyişmədəki inversiyaların sayı yuxarıdakı düstura əsasən belə tapılır:

$$s = (0+0+0+0+0) + (0+0+1+0) + (1+1+1) + (1+0) + 0 = 5;$$

birinci mötərizədəki cəm $\langle 1, j \rangle, j = 2, 3, 4, 5, 6$ cütlərinə, ikinci mötərizədəki cəm $\langle 2, j \rangle, j = 3, 4, 5, 6$ cütlərinə və s. uyğundur. Yerdəyişmədə inversiyaların sayı cüt ədəd olarsa, belə inversiya *cüt*, tək olduqda isə *tək* yerdəyişmə adlanır.

(1) düsturundan inversiyaların sayını hesablamaq üçün aşağıdakı əlverişli üsul alınır. Yerdəyişmədən əvvəlcə 1-i ataraq, bütün ondan əvvəl gələn ədədlərin sayı yazılır. Bu (1) cəmində $\langle 1, j \rangle, j = 2, \dots, n$ cütlərinə uyğundur. Daha sonra, 2-nin üzərindən xətt çəkilərək, ondan əvvəl yerdəyişmədə qalan ədədlərin sayı hesablanaraq, birinci ədədə əlavə olunur və s., bu proses $n-1$ atılanadək davam etdirilir. İnrsiyaların sayı nəticədə alınan cəmə bərabərdir. Məsələn, 2,3,1,4 yerdəyişməsindəki inversiyaların sayını tapaq. Əvvəlcə 1-i ataq: 2,3,1,4; 1-dən əvvəl iki ədəd vardır. Daha sonra 2-ni atırıq: 2,3,1,4; ondan əvvəl heç bir ədəd yoxdur. Beləliklə, $2+0$ cəmi alınır. Üçüncü addımda 3-ü atırıq: 2,3,1,4. Beləliklə, inversiyaların sayı üçün $s=2+0+0=2$ alırıq.

Yerdəyişmədə iki ədədin yerinin dəyişdirilməsi *transpozisiya* adlanır. Transpozisiyadan sonra yeni yerdəyişmə alınır. Məsələn yuxarıdakı misalda 1və 5 ədədlərinin yerini dəyişsək 5, 3, 6, 4, 2, 1 yerdəyişməsi alınar. Asanlıqla görmək olar ki, bu yerdəyişmədəki inversiyaların sayı $s=5+4+1+2+0=12$ olar. Göründüyü kimi inversiyaların sayı transpozisiyadan əvvəl tək, sonra isə cüt oldu. Bunun həmişə belə olduğu aşağıdakı teoremdən aydın olur.

Teorem 1. $n!$ sayda bütün n elementli yerdəyişmələri, belə yerdəyişmələrin hər hansı birindən başlayaraq, elə ardıcılıqla düzmək olar ki, ikincidən başlayaraq hər bir yerdəyişmə özündən əvvəlki yerdəyişmədən bir transpozisiya ilə alınsın.

İsbatı. Teoremi riyazi induksiya metodu ilə isbat edək. $n=2$ olduqda teorem doğrudur. Belə ki, əgər biz 1,2 yerdəyişməsindən başlasaq, ikinci yerdəyişmə 2,1 olar. 2,1 yerdəyişməsindən başladıqda isə, ikinci yerdəyişmə 1,2 olacaqdır.

İndi fərz edək ki, teorem $n-1$ elementli yerdəyişmələr üçün doğrudur. Göstərək ki, buradan teoremin n elementli yerdəyişmələr üçün doğruluğu alınır. İxtiyari n elementli yerdəyişmə götürək: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. φ_1 elementini nəzərdən atsaq, qalan elementlər $n-1$ elementli yerdəyişmə əmələ gətirir. İnduktiv fərziyyəyə əsasən $\varphi_2, \dots, \varphi_n$ yerdəyişməsindən başlayaraq

bütün $n-1$ elementli yerdəyişmələri elə düzmək olar ki, ikincidən başlayaraq hər bir yerdəyişmə özündən əvvəlkindən bir transpozisiya ilə alınır. Bütün bu yerdəyişmələrdə 1-ci yerdə φ_1 elementini yazmaqla biz n elementli yerdəyişmələrin elə düzülüşünü alırıq ki, ikincidən başlayaraq hər bir yerdəyişmə özündən əvvəlki yerdəyişmədən bir transpozisiya ilə alınır. Sonuncu yerdəyişmədə bir transpozisiya apararaq φ_1 ilə φ_2 -nin yerini dəyişək. Alınan yerdəyişmə əvvəlkilərin hər birindən fərqlidir. Yuxarıda aparılan mühakimələri alınan yerdəyişmə üçün yerinə yetirək. Sonuncuda bir transpozisiya ilə φ_2 və φ_3 elementlərinin yerini dəyişək və bu qayda ilə prosesi davam etdirək. Beləliklə biz bütün $n!$ sayda yerdəyişmələri teoremin tələbinə uyğun düzmüş oluruq. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. Hər bir transpozisiya yerdəyişmənin cütlüyünü dəyişir.

İsbati. Əvvəlcə fərz edək ki, transpozisiya iki qonşu φ_i və φ_{i+1} elementlərinin yerini dəyişir. Bu halda bu elementlərin hər birinin digər elementlərlə əmələ gətirdiyi inversiyaların sayı dəyişmir. Buna görə də (2) düsturunda ancaq

$$1 - \text{sign} \frac{-1}{\varphi_i - \varphi_{i+1}}$$

ifadəsi dəyişir və bu ifadə

$$1 + \text{sign} \frac{-1}{\varphi_i - \varphi_{i+1}}$$

ilə əvəz olunur. Deməli, əgər $\langle \varphi_i, \varphi_{i+1} \rangle$ cütü inversiya təşkil edirsə, birinci ifadə 2-yə, ikinci isə 0-a bərabərdir. Deməli, inversiyaların sayı 1 vahid azalmış olur. Əgər $\langle \varphi_i, \varphi_{i+1} \rangle$ cütü inversiya təşkil etmirsə, birinci ifadə 0-a, ikinci isə 2-yə bərabərdir. Deməli, inversiyaların sayı 1 vahid artmış olur. Hər iki halda yerdəyişmə öz cütlüyünü dəyişir.

İndi fərz edək ki, transpozisiya φ_i və φ_{i+k} elementlərinin yerini dəyişir. Nəticədə alınan yerdəyişməni ardıcıl elementlərin yerini dəyişməklə də almaq olar. Bunun üçün φ_i elementi ilə φ_{i+1} -in yerini dəyişirik; sonra alınan yerdəyişmədə φ_i elementi ilə φ_{i+2} -nin yerini dəyişirik və s. Beləliklə, k sayda yerdəyişmədən sonra φ_i elementi ilə φ_{i+k} -nın yerinə gəlmiş olur: $\varphi_1, \dots, \varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \dots, \varphi_{i+k}, \varphi_i, \dots, \varphi_n$. İndi φ_{i+k} elementini əks istiqamətdə yerdəyişmə vasitəsi ilə φ_{i+1} -dən əvvələ gətirmək lazımdır. Bunun üçün $k-1$ sayda yerdəyişmə tələb olunur. Nəticədə, $2k-1$ sayda yerdəyişmə ilə biz φ_i və φ_{i+k} elementlərinin yerini dəyişdik. Yuxarıda baxılan hala əsasən, bu zaman əvvəlki yerdəyişmənin cütlüyü $2k-1$ dəfə dəyişmiş olur. Lakin $2k-1$ tək ədəd olduğu üçün nəticədə verilən yerdəyişmənin cütlüyü dəyişmiş olur. Teorem 2 isbat olundu.

§3. Əvəzləmə və onun işarəsi. Əvəzləmələr qrupu.

Hər bir yerdəyişmə müəyyən bir biyektiv $\varphi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ inikası ilə birqiymətli təyin olunur. Bu inikası çox vaxt aşağıdakı cədvəl şəklində yazırlar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_i & \dots & \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Bu şəkildə yazılış *əvəzləmə* adlanır. Əvəzləmənin ümumi tərfi belədir.

Tərif 1. n elementli çoxluğun özünə biyektiv inikasına n dərəcəli əvəzləmə deyilir.

Aydındır ki, n elementli çoxluq ilə $\{1, 2, \dots, n\}$ çoxluğu arasında biyektiv inikas vardır. Buna görə də hər bir n elementli çoxluğu $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kimi yazmaq olar. Beləliklə, hər bir biyektiv inikas elementin özünün və obrazının nömrəsi ilə tamam müəyyən olunur. Məsələn, hər hansı inikas vasitəsi ilə a_i elementi a_j elementinə çevrilirsə, onda bunu $i \mapsto j$ kimi yazmaqla göstərmək olar. Əgər birinci elementləri təbii ardıcılıqla (artan qaydada) düzsək, onda inikas onların obrazları ilə, yəni obrazlardan düzələn yerdəyişmə ilə birqiymətli təyin olunur. Deməli, hər bir inikası (1) əvəzləməsi şəklində yazmaq olar:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n-1 & n \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_i & \dots & \varphi_{n-1} & \varphi_n \end{pmatrix},$$

və burada $\varphi(i) = \varphi_i$ işarə olunmuşdur. Göründüyü kimi əvəzləməni göstərən cədvəlin 1-ci sətri dəyişmir və əvəzləmə tamamilə ikinci sətirdəki yerdəyişmə ilə müəyyən olunur. Qeyd etmək lazımdır ki, əvəzləmədə ixtiyari ədədin yerini öz obrazı ilə bir sütunda dəyişmək olar. Məsələn,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ əvəzləməsini belə də yazmaq olar: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

n elementən ibarət yerdəyişmələrin sayı $n!$ olduğu üçün n dərəcəli əvəzləmələrin də sayı $n!$ olacaqdır. Bütün n dərəcəli əvəzləmələr çoxluğu S_n kimi işarə olunur. S_n çoxluğunda vurma binar əməlini inikasların kompozisiyası kimi təyin olunur:

$$\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)).$$

Misal olaraq $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ və $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ əvəzləmələrinin hasilini tapaq. Bunun üçün 1, 2,

3, 4 ədədlərindən hər birinə ardıcıl olaraq ikinci və birinci əvəzləmələri “tətbiq” etmək lazımdır.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Əvəzləmələrin hasili kommutativ deyil.

Teorem 1. $\langle S_n, \cdot \rangle$ cəbri qrupdur.

İsbatı. İnikasların kompozitsiyası assosiativlik xassəsinə malikdir. Buna görə də S_n çoxluğunda vahid elementin və hər bir element ilə simmetrik elementin varlığını göstərmək qalır. Vahid element olaraq eynilik inikasını götürmək olar. Bu əvəzləmənin yazılışı belədir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Aydındır ki, σ əvəzləməsi üçün tərs əvəzləmə elə τ əvəzləməsi olmalıdır ki, istənilən i elementi üçün $\sigma(i) = \sigma_i$ elementini yenidən i -yə çevirsin. Bunun üçün σ əvəzləməsinin sətirlərinin yerini dəyişmək kifayətdir:

$$\tau = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_i & \cdots & \sigma_n \\ 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Deməli, $\langle S_n, \cdot \rangle$ cəbri qrupdur. Teorem 1 isbat olundu.

Misal. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ əvəzləməsinin tərsini tapaq. Bunun üçün sətirlərin yerini dəyişək

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, əvəzləmə özünün ikinci sətri ilə tamamilə müəyyən olunur. Əgər əvəzləmənin 2-ci sətrindəki yerdəyişmə cüt olarsa, əvəzləmə özü də cüt əvəzləmə adlanır. Əks halda isə o, tək əvəzləmə adlanır.

Tərif 2. Tutaq ki, s ədədi σ əvəzləməsinin ikinci sətrindəki inversiyaların sayıdır.

$$\text{sign}\sigma = (-1)^s$$

ədədinə bu əvəzləmənin *işarəsi* deyilir.

Məsələn, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ əvəzləməsinin ikinci sətrindəki yerdəyişmə 1,2,3,4

yerdəyişməsindən bir transpozisiya ilə alındığı üçün $\text{sign}\sigma = -1$ olacaqdır. Belə əvəzləmə *transpozisiya* adlanır. Transpozisiyanın ümumi şəkli belədir:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Yuxarıda biz gördük ki,

$$\text{sign}\varphi = \frac{k-i}{\varphi_k - \varphi_i}$$

ədədi $\langle \varphi_k, \varphi_i \rangle$ cütü inversiya təşkil etdikdə -1-ə, əks halda isə +1-ə bərabər qiymət alır. Buna görə də,

$$\text{sign}\varphi = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign} \frac{i-j}{\varphi_i - \varphi_j}.$$

Əvəzləmənin işarəsinin əsas xassəsi aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem 2. Əvəzləmələrin hasilinin işarəsi onların işarələrinin hasilinə bərabərdir.

İsbatı. İşarənin yuxarıda yazılan ifadəsinə əsasən yazı bilərik:

$$\begin{aligned} \text{sign}\varphi\tau &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign} \frac{i-j}{(\varphi\tau)_i - (\varphi\tau)_j} = \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign} \frac{i-j}{\tau(i) - \tau(j)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{\varphi(\tau(i)) - \varphi(\tau(j))} = \text{sign}\tau \cdot \text{sign}\varphi \end{aligned}$$

Teorem 2 isbat olundu.

Misal. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 4 & 1 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ əvəzləməsinin işarəsini təyin edək.

2,9,5,7,4,1,8,6,3 yerdəyişməsindəki inversiyaların sayını tapaq. 1-in üzərindən xətt çəkərək, ondan əvvəlki natural ədədləri sayaq. Onların sayı 5-dir. İndi isə 2-nin üzərindən xətt çəkərək, ondan əvvəlki natural ədədləri sayaq: 0. Daha sonra, 3-ün üzərindən xətt çəkərək, ondan əvvəlki xətlənməmiş natural ədədləri sayaq. Bu say 6-dır. Bu qayda ilə davam edərək, alınan sayları toplayaq:

$$5+0+6+3+1+3+1+1=20.$$

Beləliklə, əvəzləmə cüt əvəzləmədir və onun işarəsi 1-ə bərabərdir.

VII FƏSİL. Ədədi xətti fəza. Xətti tənliklər sistemi

§1. Ədədi xətti fəzalar. Xətti asılılıq

R^n düz hasilində n elementli kortejlər üzərində aşağıdakı kimi toplama əməli müəyyən etmək olar. Tutaq ki, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ və $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ R^n düz hasilindən götürülmüş ixtiyari iki kortejdır. Bu kortejlərin cəmi

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

kimi təyin olunan kortejə deyilir. Asanlıqla görmək olar ki, kortejlərin cəmi aşağıdakı xassələrə malikdir:

- 1) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ -kommutativlik;
- 2) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ -assosiativlik;
- 3) $0 = (0, 0, \dots, 0)$ işarə etsək, onda $\bar{x} + 0 = 0 + \bar{x} = \bar{x}$;
- 4) ixtiyari $\bar{x} \in R^n$ korteji üçün $\bar{x} + (-\bar{x}) = (-\bar{x}) + \bar{x} = 0$, burada $-\bar{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Bu xassələr göstərir ki, $\langle R^n, + \rangle$ cəbri kommutativ qrupdur.

İxtiyari $\lambda \in R$ həqiqi ədədi götürək və $\omega_\lambda : R^n \rightarrow R^n$ inikasını aşağıdakı kimi təyin edək:

$$(\forall \bar{x} \in R^n) (\omega_\lambda(\bar{x}) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)).$$

ω_λ inikası R^n qrupunda yeni unar əməl müəyyən edir. Bu əməl λ ədədinə (skalyara) vurma əməli adlanır. R^n qrupunun elementləri isə vektorlar adlanır. Məsələn, $\lambda = 3, n = 4$ olsun. $\bar{x} = (2, -1, 0, -2) \in R^4$ olarsa, onda

$$\omega_3(\bar{x}) = (6, -3, 0, -6).$$

$\omega_\lambda(\bar{x})$ çox vaxt sadəcə $\lambda \bar{x}$ kimi işarə olunur. Skalyara vurma əməlinin asanlıqla yoxlanılan aşağıdakı xassələri vardır:

- 1) ixtiyari λ, μ skalyarları üçün $(\forall \bar{x} \in R^n) (\lambda(\mu \bar{x}) = (\lambda \mu) \bar{x})$;
- 2) ixtiyari λ, μ skalyarları üçün $(\lambda + \mu) \bar{x} = \lambda \bar{x} + \mu \bar{x}$;
- 3) $(\forall \lambda \in R) (\forall \bar{x}, \bar{y} \in R^n) (\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y})$;
- 4) ixtiyari $\bar{x} \in R^n$ vektoru üçün $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$.

Misal. $n=2$ olarsa, onda R^2 çoxluğu alınır. Məlumdur ki, bu çoxluq müstəvi üzərində yerləşən vektorlar çoxluğu ilə biyektiv uyğunluqdadır. Bu uyğunluq $\langle R^2, + \rangle$ qrupu ilə təpəsi koordinat başlanğıcında olan istiqamətlənmiş parçalar çoxluğunun vektorların toplanması (paraleloqram qaydası ilə) əməlinə nəzərən təşkil etdiyi additiv qrup arasında izomorfizm müəyyən edir. Skalyara vurma əməli də bu izomorfizm zamanı saxlanılır.

Yuxarıdakı konstruksiyanı istənilən meydan üzərində də yerinə yetirmək olar. Tutaq ki, hər hansı $\langle K, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ meydanı verilmişdir. n natural ədəd olduqda K^n Dekart qüvvətində (yəni $K^n = K \times \dots \times K$ hasilində) yuxarıda olduğu kimi vektor anlayışı, onlar üzərində əməllər – toplama və skalyara vurma əməlləri təyin oluna bilər. Beləliklə, biz $\langle K^n, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$ cəbrini alırıq. Yuxarıda olduğu kimi, $\omega_\lambda(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$ işarə olunur. Təyin olunan bu əməllərin yuxarıda göstərilən xassələri vardır. Həmin xassələri daxil etdiyimiz işarələmə ilə aşağıdakı kimi yazmaq olar:

- 1) $(\forall \bar{x}, \bar{y} \in K^n)(\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x});$
- 2) $(\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in K^n)(\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z});$
- 3) $(\forall \bar{x} \in K^n)(\bar{x} + 0 = 0 + \bar{x} = \bar{x});$
- 4) $(\forall \bar{x} \in K^n)(\bar{x} + (-\bar{x}) = (-\bar{x}) + \bar{x} = 0);$
- 5) $(\forall \lambda, \mu \in K)(\forall \bar{x} \in K^n)((\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda \bar{x} + \mu \bar{x});$
- 6) $(\forall \lambda, \mu \in K)(\forall \bar{x} \in K^n)((\lambda \mu)\bar{x} = \lambda(\mu \bar{x}));$
- 7) $(\forall \bar{x}, \bar{y} \in K^n)(\forall \lambda \in K)(\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y})$
- 8) $(\forall \bar{x} \in K^n)(1 \cdot \bar{x} = \bar{x}).$

1)-8) xassələrini (aksiomlar) ödəyən $\langle K^n, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$ cəbri n ölçülü *ədədi (hesabi) xətti fəza* adlanır.

Tutaq ki, n ölçülü ədədi $\langle K^n, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$ xətti fəzasında ixtiyari $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ vektorlar sistemi verilmişdir, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ isə ixtiyari skalyarlardır.

Tərif 1. $\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_k \bar{x}_k$ cəminə $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ vektorlar sisteminin əmsalları $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ olan xətti kombinasiyası deyilir.

Aydındır ki, əgər bütün $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skalyarlarının hamısı 0-a bərabər olarsa, onda bu xətti kombinasiya sıfıra bərabərdir. Lakin ola bilər ki, əmsallar içərisində sıfırdan fərqli olanlar vardır, lakin xətti kombinasiya yenə də sıfıra bərabərdir. Məsələn, $\bar{a} = (-1, 3)$ və $\bar{b} = (-2, 6)$ vektorları üçün $2\bar{a} + (-1)\bar{b} = 0$.

Tərif 2. Hamısı sıfır olmayan müəyyən $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skalyarlar sistemi üçün

$$\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_k \bar{x}_k = 0 \quad (*)$$

münasibəti ödənilərsə, $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ vektorlar sistemi *xətti asılı sistem* adlanır. Əgər (*) münasibə-

tinin doğruluğundan $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ bərabərliyi alınarsa, onda sistemə xətti asılı olmayan sistem deyilir.

Tərifdən aydındır ki, verilən sistemin xətti asılı olmadığını isbat etmək üçün

$$\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_k \bar{x}_k = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \wedge \dots \wedge \lambda_k = 0$$

implikasiyasının doğruluğunu göstərmək lazımdır.

Misal. $\bar{e}_1 = (1, 0), \bar{e}_2 = (0, 1)$ vektorlar sistemi xətti asılı deyil. Doğrudan da, müəyyən λ_1, λ_2 ədədlər sistemi üçün $\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 = 0$ olarsa, onda $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$. Buradan $\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0$ alırıq. Deməli, bu sistem xətti deyil.

Xətti asılı olan və olmayan sistemlərin bəzi sadə xassələri vardır.

Xassə 1. Əgər $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ vektorlar sisteminə 0 vektor daxildirsə, onda bu sistem xətti asılıdır.

İsbati. Tutaq ki, $\bar{x}_1 = 0$. Onda, $1 \cdot \bar{x}_1 + 0 \cdot \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_k = 0$ olmaqla əmsallar içərisində sıfırdan fərqli olanı vardır. Deməli sistem xətti asılıdır.

Xassə 2. Əgər $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ vektorlar sistemi xətti asılı deyilsə, onda onun ixtiyari alt sistemi də xətti asılı deyil.

İsbati. Tutaq ki, verilən sistemin hər hansı $\bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_r}, 1 \leq r < k$ alt sistemi xətti asılıdır. Yəni hamısı sıfır olmayan elə $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}$ skalyarları var ki,

$$\lambda_{i_1} \bar{x}_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r} \bar{x}_{i_r} = 0.$$

Bu halda $j \neq i_1, \dots, i_r$ olduqda $\lambda_j = 0$ qəbul edərək, yenə də $\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_k \bar{x}_k = 0$ alırıq və əmsalların hamısı sıfır deyil. Lakin bu, sistemin xətti asılı olmaması şərti ilə ziddiyyət əmələ gətirir. Alınmış ziddiyyət göstərir ki, alt sistem xətti asılı deyil.

Kontrapozisiya qanunundan istifadə etməklə asanlıqla aşağıdakı xassəni isbat etmək olar.

Xassə 3. Xətti asılı sistemin istənilən genişlənməsi xətti asılıdır.

Xassə 4. Verilən sistemin xətti asılı olması üçün bu sistemin hər hansı vektorunun digər vektorların xətti kombinasiyası kimi göstərilə bilməsi zəruri və kafidir.

İsbati. Tutaq ki, $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ vektorlar sisteminin hər hansı bir vektoru məsələn, $\bar{x}_k$ vektoru qalan vektorların xətti kombinasiyası kimi göstərilə bilər:

$$\bar{x}_k = \lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_{k-1} \bar{x}_{k-1}.$$

Onda, $\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_{k-1} \bar{x}_{k-1} - \bar{x}_k = 0$. Deməli, sistem xətti asılıdır.

Tərsinə, əgər elə $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skalyarları tapmaq mümkün olsa ki,

$$\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_{k-1} \bar{x}_{k-1} + \lambda_k \bar{x}_k = 0$$

olmaqla, əmsallardan heç olmasa biri, məsələn, λ_k sıfırdan fərqlidir, onda alarıq:

$$\bar{x}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \bar{x}_1 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \bar{x}_{k-1}.$$

$\mu_i = -\lambda_i / \lambda_k$ işarə etsək sonuncu bərabərlikdən alarıq: $\bar{x}_k = \mu_1 \bar{x}_1 + \dots + \mu_{k-1} \bar{x}_{k-1}$, yəni vektorlardan biri qalan vektorların xətti kombinasiyası şəklində göstərilir. Xəssə 4 isbat olundu.

Tərif 3. $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ vektorlar sisteminin bütün mümkün

$$L(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) = \{ \lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_k \bar{x}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K \}$$

xətti kombinasiyalar çoxluğuna verilən sistemin *xətti örtüyü* deyilir.

Aydındır ki, əgər $\bar{x} \in L(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$ olarsa, onda $\bar{x}$ vektorunu $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ vektorlar sisteminin xətti kombinasiyası şəklində göstərmək olar. Deməli, bu halda $\bar{x}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ vektorlar sistemi xətti asılıdır.

Tərif. İki $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ və $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_s$ vektorlar sistemi o zaman *ekvivalent vektorlar sistemi* adlanır ki, bu sistemlərdən birinin sıfırdan fərqli hər bir vektorunu digər sistemin vektorlarının xətti kombinasiyası şəklində göstərmək mümkün olsun.

Teorem 1. Ekvivalent sistemlərin xətti örtükləri üst-üstə düşür.

İsbatı. Tutaq ki, $\bar{x} \in L(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$. Onda müəyyən $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skalyarları tapmaq mümkündür ki,

$$\bar{x} = \lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_k \bar{x}_k.$$

Şərtə əsasən

$$\bar{x}_i = \mu_{i1} \bar{y}_1 + \dots + \mu_{is} \bar{y}_s.$$

Deməli,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_k \bar{x}_k = \lambda_1 (\mu_{11} \bar{y}_1 + \dots + \mu_{s1} \bar{y}_s) + \dots + \lambda_k (\mu_{1k} \bar{y}_1 + \dots + \mu_{sk} \bar{y}_s) = \\ &= (\lambda_1 \mu_{11} + \dots + \lambda_k \mu_{1k}) \bar{y}_1 + \dots + (\lambda_1 \mu_{s1} + \dots + \lambda_k \mu_{sk}) \bar{y}_s \in L(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_s). \end{aligned}$$

Beləliklə, $L(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \subset L(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_s)$. Eyni qayda ilə əks münasibət göstərilə bilər. Teorem 1 isbat olundu.

§2. Matrislər və onlar üzərində əməllər

Cəbrin mühüm anlayışlarından biri matris anlayışıdır. Biz ədədi xətti fəzada vektor anlayışına düz hasilin elementləri kimi tərif verdik. K^n ədədi xətti fəzasında m sayda $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ vektorlar sistemi götürərək, onları sütun şəklində düzək:

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}) \\ (a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}) \end{pmatrix}.$$

Sətirlərdəki mötərizələri ataraq aşağıdakı cədvəli alırıq:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Tərif 1. $\langle K, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ meydanının elementlərindən düzəlmiş (1) şəklində cədvələ $m \times n$ ölçülü *matris* deyilir.

Matrislər böyük latın hərfləri ilə işarə olunur. Matrisin elementləri dedikdə (1) cədvəlinə daxil olan skalyarlar nəzərdə tutulur. Bu skalyarlar ikiqat indekslərlə işarələnmişdir. İndeksldən birincisi elementin yerləşdiyi sətirin, ikincisi isə sütunun nömrəsini göstərir. Məsələn,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3×2 ölçülü matrisdir. Bu matrisin sətirləri R^2 fəzasının vektorlarıdır.

Matrislər üçün (1) ifadəsi çox həcmli olduğu üçün bu yazılışı sadələşdirmək lazım gəlir. Buna görə də matris üçün bəzən $A = (a_{ij})$ kimi işarələmədən istifadə olunur. Əgər matrisin ölçüsünü də qeyd etmək tələb olunarsa, onda $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ və ya $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ kimi yazılışlardan istifadə olunur.

A matrisinin sətirlərini $A^1, A^2, \dots, A^m$ kimi işarə edəcəyik. Bunlar K^n fəzasının vektorlarıdır. Bu matrisin sütunlarını isə $A_1, A_2, \dots, A_n$ kimi işarə edəcəyik. Onlara K^m fəzasının vektorları kimi baxmaq olar. Elementləri K meydanının elementləri olan bütün $m \times n$ ölçülü matrislər çoxluğu $K^{m \times n}$ kimi işarə olunur. $K^{m \times n}$ çoxluğunda toplama və ədədə vurma əməlləri təyin edək.

Hər hansı iki $A, B \in K^{m \times n}$ matrisləri götürək və onları qısaca olaraq $A = (a_{ij})$ və $B = (b_{ij})$ kimi işarə edək. Bu matrislərin cəmi olaraq eyni ölçülü elə $C = A + B = (c_{ij})$ matrisi götürək ki, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ münasibəti ödənilsin. Göründüyü kimi matrislərin cəmini taparkən, onların eyni sətir və sütunlarda yerləşən elementləri toplanır. Deməli, hər bir sətir və sütun üçün də

$C_j = A_j + B_j$ və $C^i = A^i + B^i$ bərabərlikləri ödənilir.

Misallar.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Asanlıqla yəqin etmək olar ki, matrislərin toplama əməli kommutativlik, assosiativlik xassələrinə malikdir və bütün elementləri sıfıra bərabər olan matris neytral element rolunu oynayır. Hər bir matrisin əksi vardır və verilən matrisin elementlərinin əksini götürməklə alınır. Beləliklə, $\langle K^{m \times n}, + \rangle$ cəbri kommutativ qrupdur (additiv və ya Abel qrupudur).

Göründüyü kimi matrislərin toplanması əməli uyğun komponentləri cəmləməklə alınır. Komponentlərin skalyara vurulması vasitəsi ilə matrisin skalayara hasili əməli də (unar əməli) müəyyən oluna bilər. Tutaq ki, $\lambda \in K$ elementi və $A \in K^{m \times n}$ matrisi verilmişdir. λ ədədinin $A = (a_{ij})$ matrisinə hasili $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ matrisinə deyilir.

Misallar.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -9 & 3 \end{pmatrix};$$

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Matrislərin toplanması və ədədə vurulması əməllərinin aşağıdakı xassələrini (A, B, C matrisləri, λ, μ isə skalyarları göstərir) yazmaq olar:

$$1) A+B=B+A;$$

$$2) (A+B)+C=A+(B+C);$$

$$3) A+0=0+A=A;$$

$$4) A+(-A)=0;$$

$$5) \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A;$$

$$6) (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$$

$$7) \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B;$$

$$8) 1 \cdot A = A.$$

Bu xassələr göstərir ki, $\langle K^{m \times n}, + \rangle$ cəbri matrisin skalyara vurma əməli ilə birlikdə xətti fəza təşkil edir. Qeyd etmək lazımdır ki, skalyara vurma əməli dedikdə, ədədi xətti fəzalarda olduğu kimi,

$$\omega_\lambda : K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n}$$

inikalar ailəsi başa düşülür. Beləliklə, yuxarıda göstərilən xətti fəza (onun ümumi tərfi daha sonra veriləcəkdir) cəbr şəklində belə yazılır: $\langle K^{m \times n}, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$.

Matrislər üzərində vurma əməlinin daxil edilməsi bir qədər fərqlidir. Bu onunla əlaqədardır ki, matrislərin vurulması komponentlər üzrə deyil, tamam başqa əsaslarla və tamam başqa parametrlərə görə müəyyən olunur. Bu məsələlər xətti fəzalar və xətti operatorlar mövzularında daha müfəssəl şərh olunacaqdır. Burada yalnız qeyd edək ki, hər bir matris birqiymətli olaraq xətti fəzanın inikasını müəyyən edir. İnikaların hasili (kompozisiyası) ilə müəyyən olunan matris isə təbii olaraq matrislərin hasili kimi qəbul olunur.

Tutaq ki, eyni bir K meydanı üzərində (yəni elementləri K meydanından olmaqla) $A \in K^{m \times n}$ və $B \in K^{r \times s}$ matrisləri verilmişdir. Bu matrislərin hasili yalnız $n = r$ olduqda, yəni birinci matrisin sütunlarının sayı ikinci matrisin sətirlərinin sayına bərabər olduqda təyin olunur. Belə ki, məsələn,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisləri verilərsə, onda AB hasili təyin olunmuşdur, lakin BA hasili təyin olunmamışdır.

Beləliklə, tutaq ki, $A \in K^{m \times n}$ və $B \in K^{n \times s}$ matrisləri verilmişdir. Bu matrislərin hasili təyin olunmuşdur və $m \times s$ ölçülü matris müəyyən edir. Buna görə də matrislərin hasili

$$K^{m \times n} \times K^{n \times s} \rightarrow K^{m \times s}$$

inikasını təyin edir və deməli, cəbri əməl deyil (hər üç çoxluq müxtəlifdir). Lakin $m = n = r = s$ olduqda isə o, cəbri əməldir. Buna baxmayaraq, vurma əməli cəbri əməl kimi qəbul olunur.

Matrisin sətirlərinin sayı sütunlarının sayına bərabər olarsa belə matris *kvadrat matris* adlanır sətirlərin və sütunların ortaq sayı isə matrisin tərtibi adlanır. Məsələn, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ iki tərtibli kvadrat matrisdir.

İndi isə vurma əməlinin dəqiq tərifini verək.

Tərif. $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$ və $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 1 \leq i \leq n}}$ matrislərinin hasili elə $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 1 \leq i \leq m}}$ matrisinə deyilir ki, onun elementləri üçün

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

bərabərliyi doğru olsun.

Tərifdən göründüyü kimi hasil matrisin c_{ij} elementini tapmaq üçün birinci matrisin i -ci sətir elementlərini ikinci matrisin j -cu sütununun uyğun elementlərinə vuraraq toplamaq lazımdır. Məsələn,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \\ (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) & (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 2 & (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -13 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrislərin hasilinin əsas xassələrini göstərək.

Xassə 1. Matrislərin hasilı kommutativlik xassəsinə malik deyil.

Doğrudan da matrislərin hasilində vuruqların yerini dəyişsək ola bilər ki, onların hasilinin varlıq şərti pozulsun. Məsələn, yuxarıdakı misalda vuruqların yerini dəyişsək alınan matrislərdən birincinin sütunlarının sayı 3, ikinci matrisin sətirlərinin sayı isə 2 olar. Deməli, onların hasilı təyin olunmamışdır.

Aşağıdakı misal göstərir ki, yerdəyişmədən sonra hasilin varlıq şərti ödənsə də o, əvvəlki hasildən fərqlənə bilər:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vuruqların yerini dəyişsək alırıq:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Göründüyü kimi hasillər fərqlidir.

Xassə 2. Matrislərin vurulması assosiativlik xassəsinə malikdir, yəni

$$(AB)C = A(BC).$$

İsbatı. Tutaq ki, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ və sadəlik üçün fərz edək ki, bu matrislər eyni sayda sətir və sütunlara malikdirlər. Sol tərəfin d_{ij} elementi üçün yazıb bəzəyək:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n (A^i B_k) c_{kj} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rk} \right) c_{kj} = \sum_{r=1}^n a_{ir} \left(\sum_{k=1}^n b_{rk} c_{kj} \right) = \sum_{r=1}^n a_{ir} (B^r C_j).$$

Çünki cəm sağ tərəfin d'_{ij} elementini verir. Deməli, $d_{ij} = d'_{ij}$ və buna görə də xassə doğrudur.

Xassə 3. Vurma əməli toplanmaya nəzərən paylama qanununa tabedir, yəni:

$$A(B+C) = AB+AC; (A+B)C = AC+BC.$$

Xassənin isbatı sağ və sol tərəflərin uyğun elementlərinin hesablanması yolu ilə yerinə yetirilə bilər. Qısaca, yuxarıda olduğu kimi kvadrat matrislər üçün bu isbatı belə vermək olar: ixtiyari $1 \leq i, j \leq n$

$$A^i (B_j + C_j) = A^i B_j + A^i C_j.$$

Xassə 4. İxtiyari A və B matrisləri və λ skalyarı üçün

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

İndi isə matrislər çoxluğu ilə bağlı bəzi cəbrləri nəzərdən keçirək. Yuxarıda deyildiyi kimi $\langle K^{m \times n}, + \rangle$ cəbri kommutativ qrupdur. Skalyara vurma əməli ilə birlikdə $\langle K^{m \times n}, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$ cəbri, K –da təyin olunmuş toplama və sonsuz sayda skalyara vurma əməllərinə nəzərən xətti fəza təşkil edir.

Matrislər üzərində əməl kimi matrislərin transponirə olunması əməli də daxil edilir. Əslində isə o, $K^{m \times n} \rightarrow K^{n \times m}$ inikası kimi müəyyən olunur. $A \in K^{m \times n}$ matrisinin transponirə olunmuş matrisi dedikdə elə $A' \in K^{n \times m}$ matrisi başa düşülür ki, onun i , $1 \leq i \leq m$ nömrəli sütunu A matrisinin i nömrəli sətrini sütun vektor kimi yazmaqla alınır. Məsələn,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -13 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi üçün transponirə olunmuş matris

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -2 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi olacaqdır.

Transponirə etmə əməlinin əsas xassələri aşağıdakılardır:

- 1) $(cA)' = cA'$;
- 2) $(A+B)' = A' + B'$;
- 3) $(AB)' = B'A'$.

Deməli, hasili transponirə etmək üçün vuruqları transponirə edərək onların yerini dəyişmək lazımdır.

$m = n$ olduqda $\langle K^{m \times n}, + \rangle$ cəbri kvadrat matrislərin additiv qrupuna çevrilir. Bu qrup $M_n(K)$ kimi işarə olunur. Bu qrup əsasında alınan $\langle M_n(K), +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$ cəbrində vurma əməli təyin olunmuşdur. Xassə 2-yə əsasən, $\langle M_n(K), +, \cdot, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$ cəbri halqadır. Xassə 2-yə əsasən həmin halqa assosiativ halqadır. Göstərək ki, bu halqa vahidi olan halqadır. Əvvəlcə $n = 2$ xüsusi halına baxaq. Bu halda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi vahid element olacaqdır. Doğrudanda,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Deyilənlər n - in digər qiymətləri üçün də doğrudur. Bu halda vahid element olaraq

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

vahid matrisi götürülə bilər.

Xəssə 4 doğru olduğundan $\langle M_n(K), +, \cdot, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$ cəbri K meydanı üzərində xətti fəza olmaqla, assosiativ və vahidi olan binar əməl ilə *xətti cəbrə* çevrilir. O, n tərtibli matrislər cəbri adlanır. Matrislərlə bağlı digər cəbri strukturlarla daha sonra tanış olacağıq.

§3. Xətti tənliklər sistemi

Xətti tənliklər sistemi mövzusunun elementləri hələ orta məktəbdə tədris olunmağa başlayır. Ən sadə xətti tənliklər sistemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

şəklində olan sistemdir. Burada $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ verilmiş əmsallar, x və y isə dəyişənlərdir. Aydındır ki, hansı tənliyi birinci və hansını ikinci yazmağın əhəmiyyəti yoxdur. Ona görə də $a_1 \neq 0$ qəbul edə bilərik. Orta məktəbdə belə sistemin həlli üçün təklif olunan üsullardan biri cəbri toplama üsulu adlanan üsuldur. Bu üsulun mahiyyəti aşağıdakı kimidir. Birinci tənliyin hər iki tərəfini $-a_2a_1^{-1}$ ədədinə vuraq:

$$-a_2x - b_1a_2a_1^{-1}y = -c_1a_2a_1^{-1}$$

alınan tənliyi ikinci tənliklə toplayıb, hər tərəfi yenidən a_1 -ə vuraq. Əgər $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$ olarsa, alarıq:

$$(b_2a_1 - b_1a_2)y = c_2a_1 - c_1a_2$$

və ya

$$y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{b_2a_1 - b_1a_2}.$$

Alınan qiyməti birinci tənlikdə yerinə yazmaqla x -i də tapmaq olar. Bu üsul yuxarıdakı sistemi tamamilə araşdırmağa imkan verir.

Bir sıra praktik məsələlərlə əlaqədar daha mürəkkəb xətti tənliklər sistemi meydana çıxır. Belə sistemlərdə dəyişənlərin və tənliklərin sayı müxtəlif və böyük ədədlər ola bilər.

Ümumi şəkildə n dəyişəni olan m sayda tənlikdən ibarət olan xətti tənliklər sistemi aşağıdakı şəkildə yazılır:

burada $x_1, x_2, \dots, x_n$ dəyişənlərdir. a_{ij} ədədləri iqiqat indekslənmiş həqiqi ədədlərdir (yaxud hər hansı başqa meydana daxildir). Birinci indeks tənliyin nömrəsini ikinci indeks isə dəyişənin nömrəsini göstərir. Birinci indeks $i = 1, 2, \dots, m$ qiymətlərini, ikinci indeks isə $j = 1, 2, \dots, n$ qiymətlərini ala bilər. Məsələn, a_{23} simvolu ikinci tənlikdə 3-cü dəyişənin, yəni x_3 -ün əmsalını göstərir. Bərabərliklərin sağ tərəflərindəki $b_1, b_2, \dots, b_m$ ədədləri həqiqi ədədlər olub, şərbəst hədlər adlanır. Əgər hər hansı dəyişənin bütün tənliklərdə əmsalı sıfır olarsa, onda belə dəyişənin xətti tənliklər sistemində daxil olmadığını da qəbul etmək olar. Buna görə də (1) sisteminə baxarkən biz hesab edə bilərik ki, hər bir dəyişənin heç olmasa bir əmsalı sıfırdan fərqlidir. Məsələn, dörd məchulu olan 3 xətti tənlikdən ibarət aşağıdakı sistemi

biz, x_2 dəyişənini atıb, dəyişənləri yenidən nömrələməklə aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

(1) ümumi xətti tənliklər sisteminə qayıdaq.

Tərif 1. $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in R^n$ vektoru (1) sisteminin hər bir tənliyini doğru bərabərliyə çevirirsə, onda belə vektora (1) sisteminin həlli deyilir (bu kortej bir həll kimi qəbul olunur).

Məsələn, yoxlamaq olar ki, $(-2, 1, 0)$ üçlüyü aşağıdakı sistemin həllidir.

Sistemin bütün həlləri onun həllər çoxluğunu əmələ gətirir.

Tərif 2. Əgər (1) xətti tənliklər sistemində bütün sərbəst hədlər sıfıra bərabər olarsa, onda belə sistem *bircins* xətti tənliklər sistemi adlanır. Bircins olmayan sistemə *qeyri-bircins sistem* deyilir. Qeyri-bircins (1) sistemində sərbəst hədlərin sıfırla əvəz olunması nəticəsində alınan sistemə (1)-ə uyğun bircins xətti tənliklər sistemi deyilir.

Tərif 3. Həllər çoxluğu boş olmayan sistem *uyuşan sistem* (və ya *birgə sistem*), həlli olmayan sistem isə *uyuşmayan sistem* adlanır.

İndi fərz edək ki, (3) sistemi (1)-dən II növ elementar çevirmə ilə alınmışdır. Onda (3) sisteminin i -ci tənlikdən başqa qalan tənlikləri (1)-də olduğu kimi, i -ci tənliyi isə (4) şəklindədir. Bu halda $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ həlli (3) sisteminin bütün tənliklərini (i –cidən başqa) doğru bərabərliyə çevirir. Eyni zamanda

$$\begin{cases} a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \dots + a_{in}x_n^0 = b_i, \\ a_{k1}x_1^0 + a_{k2}x_2^0 + \dots + a_{kn}x_n^0 = b_k. \end{cases}$$

İkinci bərabərliyin hər iki tərəfini c ədədinə vursaq bərabərlik pozulmaz. Alınan bərabərliyi hədbəhəd birinciyə əlavə etsək (4) bərabərliyini alarıq.

Tutaq ki, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ (3) sisteminin hər hansı həllidir. Onda bu kortej (1) sisteminin i -cidən başqa bütün tənliklərini doğru bərabərliyə çevirəcəkdir. O cümlədən, (3) sisteminin aşağıdakı iki tənliyi ödənilir:

$$\begin{aligned} a_{k1}x_1^0 + a_{k2}x_2^0 + \dots + a_{kn}x_n^0 &= b_k, \\ (a_{i1} + ca_{k1})x_1^0 + (a_{i2} + ca_{k2})x_2^0 + \dots + (a_{in} + ca_{kn})x_n^0 &= b_i + cb_k \end{aligned}$$

Birinci bərabərliyin hər iki tərəfini $(-c)$ -yə vuraq və ikinci tənliyə əlavə edək. Onda (1)-in i -ci tənliyinin də ödənildiyini görürük. Deməli, (1)~(3). Teoremin isbatı başa çatdı.

Qeyd edək ki, ixtiyari iki uyşmayan sistem eynigüclüdür.

Tərif 5. Əgər (1) sisteminin yeganə həlli varsa, ona *müəyyən* sistem deyilir. Əks halda uyşan sistem *qeyri-müəyyən* sistem adlanır.

Məsələn,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

sistemi müəyyən sistemdir, çünki onun yeganə həlli vardır: $x_1 = 4, x_2 = 1$. Lakin yuxarıda baxdığımız (2) sistemi qeyri-müəyyən sistemdir, çünki onun daha bir həlli də var: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

(1) xətti tənliklər sisteminin araşdırılması üçün müxtəlif üsullar mövcuddur. Belə üsullardan ən sadəsi dəyişənlərin ardıcıl yox edilməsi üsulu və ya Qauss üsulu adlanır. Bu üsulun tarixi riyaziyyatın inkişafının çox qədim dövrlərinə gedib çıxır. Belə ki, müəllifi məlum olmayan «Riyazi incəsənət haqda doqquz kitab» adlı əsərdə qədim Çin riyaziyyatçıları xətti tənliklər sistemini məhz bu üsulla həll ediblər. Əsərin b.e.ə. 206- b.e. 220-ci illərində yazıldığı güman edilir və bu göstərir ki, bu üsulun tarixi daha qədimdir.

(1) sisteminə qayıdaq və fərz edək ki, x_1 -in əmsalı sıfır deyil. Əks halda biz I növ çevirmə vasitəsi ilə elə sistem ala bilərik ki, x_1 -in əmsalı sıfır olmasın. Bu mümkündür, çünki yuxarıda qeyd olunduğu kimi, x_1 -in əmsallarından heç olmasa biri sıfır deyil.

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \quad \quad \quad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \quad \quad a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{array} \right. \quad (4)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{11}x_1 + \dots + a'_{1s}x_s + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \quad \quad \quad a'_{2s}x_s + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \quad \quad a'_{ms}x_s + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{array} \right.$$

Beləliklə, biz aşağıdakı sistemi alacağıq:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{11}x_1 + \cdots + \bar{a}_{1s}x_s + \cdots + \bar{a}_{1k}x_k + \cdots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ \bar{a}_{2s}x_s + \cdots + \bar{a}_{2k}x_k + \cdots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{a}_{rk}x_k + \cdots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r, \\ 0 = \bar{b}_{r+1}, \\ 0 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

downloaded from KitabYurdu.org

dəyişənin əmsalları sıfıra bərabərdir. (5) sistemi pilləli şəkilli sistem adlanır. Əgər $r=n$ olarsa, (5) üçbucaq şəkilli, $r < n$ olduqda isə trapesşəkilli sistem adlanır.

Qeyd edək ki, tənliklər üzərində yerinə yetirilən elementar çevirmələr zamanı dəyişənlər heç bir rol oynamır və əməliyyatlar ancaq əmsallar üzərində aparılır. Buna görə də çevirmələri sadələşdirmək üçün sistem üzərində aparılan çevirmələri əmsallardan və sərbəst hədlərdən düzələn düzbucaqlı cədvəllər – matrislər üzərində yerinə yetirmək olar. Adətən, (1) sistemi ilə bağlı aşağıdakı iki matris daxil edilir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Bu matrislər, uyğun olaraq, (1) sisteminin (əmsallar) matrisi və genişlənməmiş matrisi adlanır. Qeyd edək ki, ikinci matrisdə şaquli xətt ancaq şərti olaraq sonuncu sütunu əmsallardan düzələn sütunlardan ayırmaq üçün işlədilən köməkçi vasitədir; belə ki, birinci matris $m \times n$, ikinci matris isə $m \times (n+1)$ ölçülü matrislərdir.

Pilləli şəkilli sistemin matrisi *pilləli matris* adlanır. Qeyd edək ki, sətirin ilk sıfırdan fərqli elementi onun *aparıcı* elementi adlanır. Pilləli matris aşağıdakı iki şərtlə müəyyən olunur:

1. Matrisin tamamilə sıfır olan sətirləri digər sətirlərdən aşağıda yerləşmişdir.
2. İkincidən başlayaraq, hər bir sətirin aparıcı elementi özündən əvvəlki sətirin aparıcı elementindən sağda yerləşmişdir. Məsələn, aşağıdakı matris pilləli matrisdir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorem 2. Hər bir xətti tənliklər sistemi müəyyən pilləli şəkilli xətti tənliklər sistemi ilə eynigüclüdür.

Bu teoremin isbatı yuxarıda aparılan çevirmələrdən alınır. (5) sistemi yeganə deyil və onun forması elementar çevirmələrdən asılıdır, lakin sistemin *ranqı* adlanan r ədədi isə dəyişmir. (5) sistemində aparıcı əmsallara uyğun olan $x_1, x_s, \dots, x_k$ dəyişənlərinə baş dəyişənlər, qalanlarına isə sərbəst dəyişənlər deyilir. Baş dəyişənlərin sayı r -ə bərabərdir.

Teorem 3. (1) Xətti tənliklər sistemini (5) pilləli şəkilli sistemə gətirdikdən sonra:

- 1) $m = r$ olarsa (1) sistemi uyuşandır;
- 2) $m > r$ olduqda $\bar{b}_{r+1} = 0$ olması sistemin uyuşan olması üçün zəruri və kafidir;
- 3) Sistem uyuşandırsa, onda $r=n$ olması sistemin müəyyən sistem olması (həllin yeganəliyi) üçün zəruri və kafidir.

(uyuşandır) və $(0,0,\dots,0)$ onun həllidir. Deməli, sistemin ən azı iki həlli vardır. Teorem 4 isbat olundu.

Qeyd edək ki, tənliklər üzərində yerinə yetirilən elementar çevirmələri genişlənməmiş matrisin sətirləri üzərində yerinə yetirsək, (5) sisteminə uyğun olan aşağıdakı pilləli matrisi alarıq:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1s} & \cdots & \bar{a}_{1k} & \cdots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ & & \bar{a}_{2s} & \cdots & \bar{a}_{2k} & \cdots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ & & & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \bar{a}_{rk} & \cdots & \bar{a}_{rn} & \bar{b}_r \\ & & & & & & 0 & \bar{b}_{r+1} \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & 0 & 0 \end{array} \right).$$

§4. Elementar matrislər

Sistemin matrisi üzərində elementar çevirmələri elementar matrislərə vurma ilə əvəz etmək olar.

I növ elementar matris i nömrəli sətirlə j nömrəli sətirlərin yerini dəyişən $\varphi:(i) \leftrightarrow (j)$ çevirməsinə uyğun olan aşağıdakı matrisə deyilir:

$$E_{(i) \leftrightarrow (j)} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Bu matris vahid matrisdə i və j nömrəli sətirlərin yerini dəyişməklə alınır. Məsələn, $\varphi:(2) \leftrightarrow (4)$ çevirməsinə uyğun 5 tərtibli matris belədir.

$$E_{(2) \leftrightarrow (4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II növ elementar matris i nömrəli sətiri c –yə vuraraq, j nömrəli sətirə əlavə etməkdən ibarət olan $\varphi:(j) + c(i)$ çevirməsinə uyğun olan aşağıdakı matrisə deyilir:

$$E_{(j)+c(i)} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots & c & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & (j) & & (i) & \end{pmatrix}.$$

Bu matris vahid matrisdə i -ci sətiri c -yə vuraraq j nömrəli sətirə əlavə etməklə alınır. Məsələn, 4-cü sətiri 3-ə vuraraq 2-ci sətirə əlavə etməkdən ibarət olan $\varphi: (2)+3(4)$ çevirməsinə uyğun 5 tərtibli matris belədir.

$$E_{(2)+3(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nəhayət, III növ elementar matris i nömrəli sətiri sıfırdan fərqli c ədədinə vurmaqdan ibarət olan $\varphi: c(i)$ çevirməsinə uyğun olan aşağıdakı matrisə deyilir:

$$E_{c(i)} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & c & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & (j) & & (i) & \end{pmatrix}.$$

Bu matris vahid matrisdə i -ci sətiri c -yə vurmaqla alınır. Məsələn, 4-cü sətiri 3-ə vurmaqdan ibarət olan $\varphi: 3(4)$ çevirməsinə uyğun 5 tərtibli matris belədir.

$$E_{3(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qeyd edək ki, hər hancı $m \times n$ ölçülü matrisin sətirləri üzərində elementar çevirmələr aparmaq üçün onu soldan uyğun m tərtibli elementar matrisə vurmaq lazımdır.

Misal. Aşağıda verilən 5×3 ölçülü matrisin 4-cü sətirini 3- vurmaqla 2-ci sətirə əlavə edək:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -12 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eyni matrisi soldan $E_{(2)+3(4)}$ elementar matrisinə vurmaqla da almaq olar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -12 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) sistemini aşağıdakı kimi matrisli formada yazmaq olar:

$$A\bar{x} = \bar{b},$$

burada

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

uyğun olaraq dəyişənlərdən və sərbəst hədlərdən ibarət sütun vektorlardır və ya uyğun olaraq, $n \times 1$ və $m \times 1$ ölçülü matrislərdir. Xətti tənliklərin matrisli yazılışından onun aşağıdakı vektor formada yazılışını da almaq olar:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \bar{b},$$

burada $A_1, A_2, \dots, A_n$ A matrisinin sütunlarıdır.

Misal. Aşağıdakı xətti tənliklər sistemini həll edək:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -7, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4. \end{cases}$$

Sitemin genişlənmiş matrisini yazaq:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -1 & -7 \\ 1 & -3 & 4 & -3 & -4 \end{array} \right).$$

Genişlənmiş matrisi elementar çevirmələr vasitəsi ilə pilləli şəkllə gətirək. Bunu üçün əvvəlcə birinci və üçüncü sətirlərin yerini dəyişək və sonra isə ikinci növ elementar çevirmələr yerinə yetirək:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -1 & -7 \\ 1 & -3 & 4 & -3 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & -3 & -1 & -7 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times 3 \downarrow \times (-2) \downarrow \\ \\ \end{array};$$

Yuxarıda göstərilən birinci ox işarəsi birinci sətirin 3-ə vurularaq, ikinci sətərə, ikinci ox isə birinci sətirin (-2)-yə vurularaq, 3-cü sətərə əlavə olunduğunu göstərir. Həmin əməliyyatlardan sonra aşağıdakı matris alınır:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & -8 & 9 & -10 & -19 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times 3 \uparrow \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times (-3) \downarrow \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -15 \end{array}\right).$$

Alınmış matrisə aşağıdakı sistem uyğundur:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= -4, \\ x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 14, \\ 5x_3 - 10x_4 &= -15. \end{aligned}$$

Sonuncu tənlikdən tapırıq: $x_3 = -3 + 2x_4$. Alınan ifadəni ikinci tənlikdə nəzərə alaraq, tapırıq: $x_2 = 14 + 3(-3 + 2x_4) - 5x_4 = 5 + x_4$. Nəhayət birinci tənlikdən yazı bilərik:

$$x_1 = -4 + 3(5 + x_4) - 4(-3 + 2x_4) + 3x_4 = 23 - 2x_4.$$

Burada x_4 sərbəst dəyişən olub, ixtiari həqiqi qiymətləri ala bilər. Beləliklə, biz verilən sistemin bütün həllərini tapmış olduq. Yuxarıda tətbiq olunan üsul, yəni sistemi pilləli şəkllə gətirərək, dəyişənləri ardıcıl olaraq tapmaq üsulu *Qauss üsulu* adlanır.

VIII FƏSİL. Determinantlar

§1. Determinantın tərfi və xassələri.

n tərtibli hər hansı

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi verilərsə, bu matrisin hər sətir və sütunundan ancaq bir element götürməklə müxtəlif n elementli hasillər düzəltmək olar. $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ kimi hasilin vuruqlarının matrisin müxtəlif sətir və sütunundan olması üçün ikinci indekclərdən düzələn yerdəyişmələrdə təkrar elementlər olmamalıdır. Bu halda hər bir hasil aşağıdakı kimi əvəzləmə müəyyən edir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

Tərsinə, hər bür əvəzləməyə qarşı yuxarıda olduğu kimi müəyyən bir hasil qarşı qoymaq olar. Bütün belə hasillərin sayı n dərəcəli əvəzləmələrin sayına, yəni $n!$ -a bərabərdir. Hər bir hasili uyğun əvəzləmənin işarəsi ilə götürsək aşağıdakı cəmi alarıq:

$$d(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \quad (1)$$

Tərif. (1) cəminə A matrisinin *determinantı* deyilir və $\det A$, $d(A)$, $|A|$ simvollarından biri ilə işarə olunur.

Determinant üçün daha aşkar yazılış belədir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$n = 2$ olduqda $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. S_2 qrupu bu halda iki əvəzləmədən ibarətdir: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ və

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Bunlardan birinci cüt, ikinci isə tək əvəzləmədir. Birinci əvəzləməyə $a_{11}a_{22}$ hasili,

ikinciyə isə $-a_{12}a_{21}$ hasili uyğundur. Deməli,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$n = 3$ olduqda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

S_3 qrupunda 6 əvəzləmə vardır:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Birinci, dördüncü və altıncı əvəzləmələr cüt, ikinci, üçüncü və beşinci əvəzləmələr isə təkdir.

Buna görə də,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Müsbət hasillərə uyğun elementlərin determinantın açılışında düzülüş yeri qara dairəciklərlə göstərilmişdir.

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Mənfi hasillərə uyğun elementlərin determinantın açılışında düzülüş yeri qara dairəciklərlə aşağıda göstərilmişdir.

$$- \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix}.$$

Misal. Göstərilən sxemlə aşağıdakı determinantı hesablayaq:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Birinci sxemə uyğun hasillər belədir: $2 \cdot 0 \cdot 2$, $(-1) \cdot 1 \cdot 1$, $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$. Bunlar müsbət işarə ilə götürülür. İkinci sxemə uyğun olan $(-1) \cdot 0 \cdot (-2)$, $2 \cdot (-3) \cdot 1$, $3 \cdot 1 \cdot 2$ hasilləri isə mənfi işarə ilə götürülür. Nəticədə alırıq:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 18 - (0 - 6 + 6) = 17.$$

Determinantların yuxarıda olduğu kimi bilavasitə tərifdən istifadə etməklə hesablanması determinantın tərtibi artdıqca olduqca çətinləşir. Məsələn, $n = 4, 5, 6$ olduqda, uyğun olaraq, 24,

120, 720 sayda hasilləri və onların həmin sayda əvəzləmələrlə təyin olunan işarələrini hesablamaq lazım gəlir ki, bu çox böyük hesablamalar tələb edir. Determinantların hesablanması və digər mühüm tətbiqləri üçün onların xassələri böyük rol oynayır.

Xassə 1. Matrisi transponirə etdikdə onun determinantı dəyişmir.

İsbatı. Tərifə əsasən

$$d(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Matrisi transponirə etdikdə hər bir $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ hasilinə transponirə olunmuş matrisin elementlərindən düzələn $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$ hasili uyğun gəlir və tərsinə. Deməli, matrisin və onun transponirə olunmuş matrisinin determinantı eyni hasillərin cəbri cəmidir. $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$ hasilini $a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$ kimi də yazmaq olar. Əgər $\text{sign} \sigma = \text{sign} \sigma^{-1}$ olduğunu nəzərə alsaq, onda yazmaqla:

$$d(A') = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign} \sigma \cdot a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign} \sigma^{-1} \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

$\tau = \sigma^{-1}$ işarə edək. τ əvəzləməsi də σ ilə birlikdə S_n qrupundan bütün qiymətləri alır (çünki $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ inikası S_n qrupunun özünə izomorfizmidir). Buna görə də,

$$d(A') = \sum_{\tau \in S_n} \text{sign} \tau \cdot a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} = \det(A).$$

Xassə 1 isbat olundu.

Misal. Yuxarıdakı misalda verilən determinantın transponirə olunmuş determinantını hesablayaq:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 18 + 6 - 6 = 17.$$

Bu xassə göstərir ki, matrisin determinantının sətirlər üçün söylənen hər bir xassəsi sütunlar üçün, sütunlar üçün isə söylənen xassəsi isə sətirlər üçün də doğrudur.

Xassə 2. Matrisin hər hansı iki sətirinin (sütunuun) yerini dəyişdikdə onun determinantı öz işarəsini dəyişir.

İsbatı. Yuxarıdakı qeydə əsasən teoremi ancaq sətirlər üçün isbat etmək kifayətdir. Tutaq ki, A matrisinin determinantında iki A^i və A^j sətirlərinin yeri dəyişilmişdir və beləliklə, A_1 matrisi alınmışdır. Tərifə əsasən yazmaqla:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Eyni ifadəni A_1 matrisi üçün də yazı bilərik. Lakin bu zaman $a_{i\sigma(i)}$ elementinin yerinə $a_{i\sigma(j)}$ və $a_{j\sigma(j)}$ elementinin yerinə isə $a_{j\sigma(i)}$ elementi yazılacaqdır, çünki, A^i və A^j sətirlərinin yeri dəyişilmişdir. Əgər τ ilə

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$$

transpozisiyasını işarə etsək, onda $a_{i\sigma(j)} = a_{i\sigma\tau(i)}$ və $a_{j\sigma(i)} = a_{j\sigma\tau(j)}$ olacaqdır. Beləliklə, transpozisiyanın işarəsi -1-ə bərabər olduğu üçün alırıq:

$$\det A_1 = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = - \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma\tau) \cdot a_{1\sigma\tau(1)} a_{2\sigma\tau(2)} \cdots a_{n\sigma\tau(n)}. \quad (1)$$

$\sigma\tau = \varepsilon$ işarə edək. $\sigma \mapsto \sigma\tau$ inikası S_n qrupunun izomorfizmidir. Buna görə də $\sigma\tau$ hasil σ əvəzləməsi ilə birlikdə S_n qrupundan bütün qiymətləri alır. Deməli, (1) cəmində $\sigma\tau = \varepsilon$ əvəzləməsi aparsaq toplananların ancaq yeri dəyişər, cəm isə dəyişməz. Bu səbəbdən

$$\det A_1 = - \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma\tau) \cdot a_{1\sigma\tau(1)} a_{2\sigma\tau(2)} \cdots a_{n\sigma\tau(n)} = - \sum_{\varepsilon \in S_n} \text{sign } \varepsilon \cdot a_{1\varepsilon(1)} a_{2\varepsilon(2)} \cdots a_{n\varepsilon(n)} = - \det A.$$

Xassə 2 isbat olundu.

Misal. Doğrudan da

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11.$$

Sətirlərin yerini dəyişək:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11.$$

Xassə 3. Determinantın hər hansı sətirinin elementləri sıfıra bərabər olarsa, determinant özü sıfıra bərabərdir.

İsbati. Əgər determinantın bir sətiri sıfırlardan ibarətdirsə, onda determinantın açılışında hər bir hasildə bu sətirdən element olduğu üçün bütün hasillər sıfıra bərabər olacaqdır. Deməli, determinant özü də sıfıra bərabərdir.

Xassə 4. Hər hansı iki sətiri eyni olan determinant sıfıra bərabərdir.

İsbati. Tutaq ki, d determinantının iki sətiri eynidir. Həmin sətirlərin yerini dəyişək. Onda determinant, bir tərəfdən dəyişməz, çünki yerdəyişmədən o dəyişməmişdir; digər tərəfdən isə xassə 2-yə əsasən onun işarəsi dəyişməlidir. Deməli, $d = -d$ və buradan $d = 0$ alırıq.

Misal. $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -12 - (-12) = 0.$

Xassə 5. Determinantın hər hansı sətirini müəyyən c elementinə vurduqda determinant həmin elementə vurular.

İsbatı. Tutaq ki, A determinantının i -ci sətiri c -yə vurulmuşdur. Onda yeni determinantın açılışında bütün hasillər eyni bir c vuruğuna malik olacaqdır ki, bu vuruğu mötərizə xaricinə çıxarsaq, onda $c \det A$ ifadəsini alarıq.

$$\text{Misal. } \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 12 = 24; 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (2 - (-2)) = 6 \cdot 4 = 24.$$

Xassə 6. İki sətiri mütənasib olan determinant sıfra bərabərdir.

İsbatı. Əgər determinantın bir sətiri digərindən ortaq vuruqla fərqlənərsə, onda bu vuruğu determinant işarəsi xaricinə çıxarmaqla iki sətiri eyni olan determinant alarıq ki, bu da sıfra bərabərdir.

Xassə 7. Determinantın baş diaqonal elementlərindən aşağıda (yaxud yuxarıda) yerləşən bütün elementləri sıfra bərabədirsə, onda bu determinant diaqonal elementlərinin hasilinə bərabərdir.

İsbatı. Determinantın tərifinə görə

$$d(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Hər bir əvəzləmənin ikinci sətirindəki yerdəyişmədə 1, 2, ..., n yerdəyişməsindən başqa qalanlarından hər birində elə k var ki, $k < \sigma(k)$. Doğrudan da, əgər belə bir k yoxdursa, onda hər bir k üçün $k \geq \sigma(k)$. Belə ki, $1 \geq \sigma(1) \rightarrow \sigma(1) = 1$, ..., $n \geq \sigma(n) \rightarrow \sigma(n) = n$, çünki σ biyektiv inikasdır və onun qiymətləri içərisində təkrar olunan ədədlər yoxdur. Biz yuxarıda deyilən yerdəyişməni aldıq. Lakin $k < \sigma(k)$ olarsa, onda $a_{k\sigma(k)}$ elementi baş diaqonaldan aşağıda yerləşir və buna görə də $a_{k\sigma(k)} = 0$. Deməli, determinantın açılışında ancaq $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ hasilindən başqa qalanları sıfra bərabərdir. Eyni qayda ilə baş diaqonaldan yuxarıda yerləşən elementlər sıfır olan hala baxıla bilər. Xassə 7 isbat olundu.

$$\text{Misal. } \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 16 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 16.$$

Xassə 8. Əgər determinantın hər hansı sətiri iki sətirin cəmi kimi göstərilərsə, onda determinant iki determinantın cəmi kimi göstərilə bilər: bu determinantlardan hər ikisinin qalan sətirləri verilən determinantda olduğu kimi qalmaqla, birinci determinantda həmin sətir birinci toplananlardan, ikinci determinantda isə həmin sətir ikinci toplananlardan ibarət olur.

Xassənin doğruluğu determinantın tərifindən və vurmanın distributivlik xassəsindən alınır.

$$\text{Misal. } \begin{vmatrix} 2+1 & -3+0 & 2+2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 18 - 6 + 8 - 1 - 6 + 4 = 15.$$

Xəssə 9. Determinantın hər hansı sətirini müəyyən c skalyarına vuraraq, başqa sətərə əlavə etsək determinantın qiyməti dəyişməz.

İsbat. Tutaq ki, A determinantının i nömrəli sətiri c skalyarına vurularaq, j nömrəli sətərə əlavə olunmuşdur. Onda yeni alınmış A' determinantının j -cu sətiri $A^j + cA^i$ şəklində olacaqdır. Xəssə 8-ə əsasən bu halda determinant iki determinantın cəminə bərabər olacaqdır:

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ A^j + cA^i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ A^j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ cA^i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ A^j \\ \vdots \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} \vdots \\ A^i \\ \vdots \end{pmatrix};$$

burada nöqtələrlə göstərilən sətirlər verilən determinantda olduğu kimidir. Nəticədə alınan determinantlardan birincisi verilən determinanta bərabərdir, ikinci determinantda isə i və j nömrəli sətirlər eynidir, buna görə də o, xəssə 4-ə görə, sıfıra bərabərdir. Xəssə 9 isbat olundu.

Misal. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ determinantına baxaq. Bu determinantın birinci sətirini 2-yə

vurub üçüncü sətərə əlavə etməklə aşağıdakı determinantı düzəldək.

$$\det A' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Yoxlamaq olar ki, $\det A = \det A' = 1$. Demək, hər iki determinant xəssənin hökm etdiyi kimi eyni qiymətə malikdir.

§2. Minor və cəbri tamamlayıcı. Tərs matris

n tərtibli $|A|$ determinantında a_{ij} elementinin yerləşdiyi sətir və sütunu determinantdan kənar etsək, $n-1$ tərtibli determinant alırıq.

Tərif 1. n tərtibli determinantda i nömrəli sətiri və j nömrəli sütunu atmaqla alınan $n-1$ tərtibli determinanta a_{ij} elementinin *minoru* deyilir və M_{ij} kimi işarə olunur.

Məsələn,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

determinantında M_{23} minorunu tapmaq üçün determinantın 2-ci sətirini və 3-cü sütununu ataraq, alınan 2 tərtibli determinantı hesablayaq:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4.$$

Tərif 2. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ifadəsinə a_{ij} elementinin *cəbri tamamlayıcısı* deyilir.

Məsələn, yuxarıdakı misalda $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot (-4) = 4$. Minor və cəbri tamamlayıcının əsas xassəsi aşağıdakı teorem ilə ifadə olunur.

Teorem 1. Determinant onun ixtiyari sətir elementlərinin öz cəbri tamamlayıcılarına hasillərinin cəminə bərabərdir:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

İsbatı. Teoremi əvvəlcə $i=1$ halı üçün isbat edək. 1-ci sətiri n sayda sətirlərin cəmi kimi yazaq:

$$A^1 = (a_{11} \ 0 \ \dots \ 0) + (0 \ a_{12} \ \dots \ 0) + \dots + (0 \ 0 \ \dots \ a_{1n}).$$

Onda xassə 8-ə görə, determinant n sayda determinantın cəminə ayrılır:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Əvvəlcə birinci determinantı hesablayaq. Tərifə əsasən,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \quad (1)$$

Bu cəmdə $\sigma(1) \neq 1$ olduqda uyğun hasil sıfıra bərabərdir, çünki, birinci sətirin birinci elementindən başqa, qalanları sıfıra bərabərdir. Beləliklə, sağ tərəfdəki cəmdə ancaq $\sigma(1)=1$ şərtini ödəyən toplananlar qalır. a_{11} vuruğu bu halda ortaq vuruq olacaqdır. (1) cəmini belə yazaq:

$$a_{11} \cdot \left(\sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1)=1} \text{sign} \sigma \cdot a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \right). \quad (2)$$

Hər bir $1, i_2, \dots, i_n$ şəklində yerdəyişmə $2, \dots, n$ simvollarının $n-1$ elementli yerdəyişməsini müəyyən edir, çünki, $i_2, \dots, i_n$ ədədləri içərisində 1 ədədi yoxdur. Tərsinə, $i_2, \dots, i_n$ ədədlərinin hər bir yerdəyişməsi, birqiymətli olaraq, $\sigma(1)=1$ şərtini ödəyən əvəzləmə təyin edir. Buna görə də (2) cəmini belə yazı bilərik:

$$a_{11} \cdot \sum_{\tau \in S_{n-1}} a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11}. \quad (3)$$

İndi isə $\det A$ üçün olan ifadədə ikinci determinanta baxaq. İkinci və birinci sütunların yerini dəyişək. Onda determinant işarəsini dəyişər. Alınan determinanta yenə də yuxarıda aparılan mühakimələri tətbiq etməklə, yazıb bəzək:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -a_{12}M_{12} = a_{12}A_{12}.$$

Eyni qayda ilə $\det A$ -nın ifadəsinə daxil olan k -cı determinant üçün $a_{1k}A_{1k}$ ifadəsini alırıq. Beləliklə, teorem $i=1$ halında isbat olundu.

Ümumi halda determinantın 1-ci sətiri ilə i -ci sətirinin yerini dəyişək və alınan D determinantına yuxarıdakı mühakimələri tətbiq edək. Bu halda aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\det A = -a_{i1}D_1 + a_{i2}D_2 + \cdots + (-1)^n a_{in}D_n;$$

burada D_k a_{ik} elementinin D determinantında minorudur. Həmin minorun, a_{ik} elementinin verilən determinantdakı minorundan fərqi bundan ibarətdir ki, birinci sətir D_k minorunda $i-1$ -ci yerdə dayanmışdır. Buna görə də, bu sətiri özündən əvvəlki sətirlərlə $i-2$ sayda ardıcıl yerdəyişmə ilə birinci yerə gətirmək olar. Bu zaman onun işarəsi $i-2$ dəfə dəyişəcək və beləliklə, biz a_{ik} elementinin M_{ik} minorunu alırıq. Deməli, $D_k = (-1)^{i-2} M_{ik}$. Buna görə də,

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2} \cdot (-1)^{i+2} M_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot (-1)^{i+n} M_{in} = \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}. \end{aligned}$$

Teorem 1 isbat olundu.

Misal. Teorem 1-in köməyi ilə determinantı hesablayaq:

$$d = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Determinantı 2-ci sətir elementləri üzrə ayırıq:

$$\begin{aligned} d &= 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 = \\ &= -2 \cdot 10 - (-9) = -11. \end{aligned}$$

Determinantın aşağıdakı xassəsini isbatsız qəbul edək.

Teorem 2. Determinantın ixtiyari sətir elementlərinin başqa sətirin uyğun elementlərinin cəbri tamamlayıcılarına hasillərinin cəmi sıfıra bərabərdir:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj} = 0, k \neq i.$$

Tərif 3. Əgər n tərtibli A və B matrisləri üçün $AB=BA=E$ bərabərliyi ödənilərsə onda deyilir ki, belə matrislərə qarşılıqlı *tərs matrislər* deyilir, burada E n tərtibli vahid matrisdir.

A matrisinin tərsi A^{-1} kimi işarə olunur və tərifə əsasən $B = A^{-1}$.

Tutaq ki, $A \in K^{n \times n}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, A_{ik} isə α_{ik} elementinin cəbri tamamlayıcısıdır.

$$A^\vee = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinə A matrisinin *birləşdirilmiş matrisi* deyilir. Teorem1 və teorem 2-yə görə A matrisinin i nömrəli sətri ilə $A^\vee$ matrisinin k nömrəli sütununun hasilı aşağıdakı kimidir:

$$A^i \cdot (A^\vee)_k = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}) \cdot \begin{pmatrix} A_{k1} \\ \vdots \\ A_{kn} \end{pmatrix} = \alpha_{i1}A_{k1} + \dots + \alpha_{in}A_{kn} = \begin{cases} |A|, i = k, \text{ olduqda;} \\ 0, i \neq k \text{ olduqda.} \end{cases}$$

Ona görə də

$$AA^\vee = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E.$$

Analoji hesablamalardan sonra aşağıdakı bərabərliklər alınır:

$$A^\vee A = |A| \cdot E.$$

Buradan görünür ki, əgər $|A| \neq 0$ olarsa, onda $A^{-1} = |A|^{-1} A^\vee$. Beləliklə, biz aşağıdakı teoremi isbat etdik.

Teorem 3. Əgər A kvadrat matrisinin determinantı sıfırdan fərqlidirsə, onda onun tərsi vardır və

$$A^{-1} = |A|^{-1} A^\vee.$$

Nəticə. Elementar matrisin tərsi vardır.

Asanlıqla aşağıdakı bərabərlikləri yoxlamaq olar.

$$E_{c(i)}^{-1} = E_{c^{-1}(i)}; E_{(i) \leftrightarrow (j)}^{-1} = E_{(j) \leftrightarrow (i)}; E_{(j)+c(i)}^{-1} = E_{(j)-c(i)}.$$

Beləliklə, elementar matrisin tərsi də elementar matrisdir.

Misal. Aşağıdakı matrisin tərsini tapaq:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Həlli. Əvvəlcə matrisin determinantını hesablayaq:

$$\det A = 18 - 8 + 6 = 16 \neq 0$$

olduğu üçün tərs matris vardır.

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 = -5; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4; \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4; \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8; \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Yoxlama:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = E.$$

Determinantın tərifinə əsasən hər bir $A \in M_n(K)$ matrisinin determinantı vardır. Buna görə də determinanta inikas kimi baxmaq olar: $\det : M_n(K) \rightarrow K$. Bu inikas bir qədər ətraflı tədqiq edək. Yuxarıda isbat etdik ki, determinantı sıfır olmayan matrisin tərsi vardır. $GLM_n(K)$ ilə $M_n(K)$ halqasının sıfırdan fərqli determinantı olan matrisləri çoxluğunu işarə edək. Deyilənlərə əsasən, $A \in GLM_n(K) \rightarrow A^{-1} \in GLM_n(K)$.

Tərif. Determinantı sıfırdan fərqli olan matris qeyri- məxsusi matris adlanır.

Teorem 4. $A \in M_n(K)$ matrisinin tərsi olması üçün onun determinantının sıfırdan fərqli olması zəruri və kafidir.

İsbatı. Yuxarıda göstərdik ki, əgər $A \in GLM_n(K)$ olarsa, onda A matrisinin tərsi vardır.

Zəruriliyi isbat etmək üçün fərz edək ki A matrisinin tərsi vardır. Göstərək ki, onun determinantı sıfır deyil. Şərtə əsasən elə B matrisi vardır ki, $AB = E = BA$. Aydındır ki, A

Nəticə 1. Qeyri-məxsusi matrisi sətirlər üzərində I və II növ elementar çevirmələr aparmaqla yuxarı üçbucaq matrisə gətirmək olar.

burada $\bar{x}$ dəyişənlərdən, $\bar{b}$ isə sistemin sağ tərəflərindəki sərbəst hədlərdən düzələn sütun vektorlardır.

Teorem 5. (1) sisteminin müəyyən olması üçün onun determinantının sıfırdan fərqli olması zəruri və kafi şərtidir.

İsbati. Tutaq ki, $\det A \neq 0$. Onda A matrisinin tərsi vardır və (2) bərabərliyinin hər iki tərəfini A^{-1} matrisinə vuraraq alırıq:

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b} = (\det A)^{-1} A^\vee \bar{b}. \quad (3)$$

Aydındır ki, bu düsturla müəyyən olunan vektor yeganədir. O sistemin həllidir, çünki,

$$A((\det A)^{-1} A^\vee \bar{b}) = (\det A)^{-1} (\det A) E \bar{b} = \bar{b}.$$

Deməli, sistem uyuşandır. Göstərək ki, onun başqa həlli yoxdur. Doğrudan da əgər $\bar{x}_1$ və $\bar{x}_2$ sistemin ixtiyari iki həlli olarsa, onda yazı bilərik:

$$A(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 0 \rightarrow \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0 \rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2.$$

Beləliklə, həllər üst-üstə düşür, yəni sistem müəyyəndir.

İndi fərz edək ki, sistem müəyyəndir. Xətti tənliklər sisteminin həlləri haqqında VII fəsil §3, teorem 3-ə əsasən xətti tənliklər sistemini pilləli şəkllə gətirdikdən sonra $r = n$ olacaqdır. Deməli, sistemin matrisini pilləli şəkllə gətirdikdə diaqonqal matris alınır və buna görə də o, qeyri-məxsusidir. Teorem 5 isbat olundu.

Nəticə. Əgər (1) sisteminin matrisi qeyri-məxsusi olarsa onun yeganə həlli aşağıdakı düsturların köməyi ilə tapıla bilər:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

burada Δ_j Δ determinantından j -cu sütunu $\bar{b}$ vektoru ilə əvəz etməklə alınır.

İsbati. (3) bərabərliyinə əsasən

$$x_j = (\det A)^{-1} (A^\vee)^j \bar{b} = \frac{b_1 A_{j1} + b_2 A_{j2} + \dots + b_n A_{jn}}{\Delta}.$$

Kəsrin surətinə A matrisinin j -cu sütununu $\bar{b}$ vektoru ilə əvəz etməklə alınan determinantın açılışı kimi baxmaq olar. Deməli, nəticə doğrudur.

§4. Matrislərin hasillinin determinantı

Teorem 1. Qeyri-məxsusi matrisi elementar matrislərin hasili şəklində yazmaq olar.

İsbati. Verilən matrisi sətirlər üzərində I və II növ elementar çevirmələrlə yuxarı üçbucaq şəkllə gətirmək olar. Yəni elə $E_{\varphi_1}, \dots, E_{\varphi_n}$ elementar matrisləri var ki,

$$E_{\varphi_n} \cdot \dots \cdot E_{\varphi_1} A = A';$$

burada A' matrisi aşağıdakı şəkildədir:

$$A' = \begin{pmatrix} c_1 & * & \dots & * \\ 0 & c_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}.$$

Bütün diaqonal elementlər sıfırdan fərqlidir. Ancaq ikinci növ elementar çevirmələr yerinə yetirməklə sonuncu sütunda axırıncı elementdən başqa qalanlarını sıfır çevirmək olar. Anloji olaraq, digər sütunlarda da diaqonal elementlərdən yuxarıda dayanmış elementləri sıfırlamaq olar. Beləliklə, biz alırıq:

$$E_{\varphi_m} \cdot \dots \cdot E_{\varphi_1} A = A_0;$$

burada

$$A_0 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}.$$

Nəhayət n sayda III növ $E_{c_i^{-1}(i)}$ kimi elementar çevirmələr yerinə yetirməklə matrisi vahid matrisə çevirmək olar. Son nəticədə elə k natural ədədi tapırıq ki,

$$E_{\varphi_k} \cdot \dots \cdot E_{\varphi_1} A = E.$$

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini ardıcıl olaraq soldan $E_{\varphi_k}^{-1}, \dots, E_{\varphi_1}^{-1}$ matrislərinə vursaq, alırıq:

$$A = E_{\varphi_1}^{-1} \cdot \dots \cdot E_{\varphi_k}^{-1}. \text{ Teorem 1 isbat olundu.}$$

Teorem 1-dən istifadə edərək matrisin tərsinin hesablanması üçün 2-ci paraqrafta göstərilən üsuldan fərqli üsul vermək olar. Yuxarıda göstərdik ki,

$$A = E_{\varphi_1}^{-1} \cdot \dots \cdot E_{\varphi_k}^{-1}.$$

Bu bərabərlik göstərir ki,

$$A^{-1} = E_{\varphi_k} \cdot \dots \cdot E_{\varphi_1} E;$$

başqa sözlə, verilən matrisi vahid matrisə çevirmək üçün istifadə olunan elementar çevirmələr eyni ardıcılıqla vahid matris üzərində yerinə yetirildikdə, bu matrisin tərsini verir.

Bunu nəzərə alaraq verilən qeyri-məxsusi matrisin tərsini tapmaq üçün ona sağdan vahid matris qoşurlar. Verilən matrisi vahid matrisə çevirmək üçün istifadə olunan elementar çevirmələr eyni ardıcılıqla qoşulan vahid matris üzərində yerinə yetirilir. Nəticədə qoşulmuş vahid matris axtarılan tərs matrisə çevrilir.

Misal. Yuxarıda baxdığımız

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

matrisinin tərsini deyilən üsulla hesablayaq.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Matrisin sətirləri üzərində elementar çevirmələr yerinə yetirməklə birinci matrisi (bloku) vahid matrisə gətirək. Əvvəlcə 1-ci və ikinci sətirlərin yerini dəyişək və sonra yeni birinci sətiri 2-yə vuraraq ikinciyə əlavə edək.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

Alınmış matrisin ikinci sətirini -0,5-ə, üçüncü sətirini isə -0,125-ə vuraq və elementar çevirmələri davam edərək birinci blok-matrisi vahid matrisə gətirək:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & | & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1,5 & | & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & | & -0,125 & -0,25 & -0,5 \end{pmatrix} \rightarrow \\
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1,5 & | & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & | & -0,125 & -0,25 & -0,5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 0,25 & 1,5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0,1875 & 0,375 & 0,25 \\ 0 & 0 & 1 & | & -0,125 & -0,25 & -0,5 \end{pmatrix} \rightarrow \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -0,3125 & 0,375 & 0,25 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0,1875 & 0,375 & 0,25 \\ 0 & 0 & 1 & | & -0,125 & -0,25 & -0,5 \end{pmatrix}.$$

Beləliklə,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,3125 & 0,375 & 0,25 \\ 0,1875 & 0,375 & 0,25 \\ -0,125 & -0,25 & -0,5 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Alınan nəticə yuxarıdakı ilə üst-üstə düşür.

Teorem 2. $A, B \in M_n(K)$ matrislərinin hasilinin determinantı onların determinantlarının hasilinə bərabərdir: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

İsbatı. Övvəlcə fərz edək ki, hər iki matris qeyri-məxsusdur. Yuxarıda deyilənlərə əsasən, elə elementar matrislər var ki,

$$E_{\varphi_m} \cdot \dots \cdot E_{\varphi_1} A = A_0$$

olmaqla, $\det A = \varepsilon \det A_0$; $\varepsilon = \pm 1$ və

$$E_{\phi_m} \cdot \dots \cdot E_{\phi_1} B' = A_1$$

olmaqla, $\det B = \det B' = \delta \det A_1$; $\delta = \pm 1$. Burada A_0 və A_1 diaqonal matrislərdir. Buna görə də onları transponirə etdikdə dəyişməz qalacaqdırlar. Beləliklə,

$$\det A \cdot \det B = \varepsilon \delta \det A_0 \cdot \det A_1 = \varepsilon \delta \det(A_0 A_1).$$

Digər tərəfdən,

$$A_1' = A_1 = B E_{\phi_1}' \cdot \dots \cdot E_{\phi_m}'.$$

Elementar matrisi transponirə etdikdə yenə də elementar matris alınır. Elementar matrisi hər hansı matrisə sağdan vurduqda həmin matrisin sütunları üzərində elementar çevirmələr yerinə yetirilmiş olur. Beləliklə,

$$A_0 A_1 = E_{\varphi_m} \cdot \dots \cdot E_{\varphi_1} A B E'_{\phi_1} \cdot \dots \cdot E'_{\phi_m}$$

bərabərliyi göstərir ki, $A_0 A_1$ hasil AB matrisinin (bu matrislərin hasilinin distributivlik xassəsindən alınır) sətir və sütunları üzərində elementar çevirmələr yerinə yetirməklə alınır. Asanlıqla yəqin etmək olar ki, determinantın işarəsinin dəyişməsinə səbəb olan sətir və ya sütunların yerinin dəyişdirilməsi yuxarıda A və B matrisləri üzərində yerinə yetirilən elementar çevirmələrdə olan işarədəyişmələrin ümumi sayına bərabərdir. Beləliklə, $\det A_0 A_1 = \varepsilon \delta \det(AB)$. Deməli, teorem qeyri- məxsusi matrislər üçün isbat olundu.

İndi isə fərz edək ki, verilən matrislərdən biri, məsələn, A matrisi qeyri-məxsusi deyil. Asanlıqla yəqin etmək olar ki,

$$A_0 A_1 = E_{\varphi_m} \cdot \dots \cdot E_{\varphi_1} A B E'_{\phi_1} \cdot \dots \cdot E'_{\phi_m}$$

bərabərliyi yenə də doğrudur, lakin bu halda A_0 və A_1 matrislərinin diaqonal elementləri içərisində sonuncusu sıfır olcaqdır. Beləliklə, sol tərəfdəki matrisin determinantı sıfıra bərabərdir. Sağ tərəfdə elementar çevirmələrdən sonra alınan matrisin determinantı AB hasilinin determinantından ancaq işarə ilə fərqlənə bilər. Deməli, $\det(AB) = \det A \det B = 0$. Teorem 2 isbat olundu.

Teorem 3. Matrisin məxsusi olması üçün onun sətir və ya sütunlarının xətti asılı olması zəruri və kafi şərtidir.

İsbatı. Kafi şərti sətirlər üçün göstərmək kifayətdir, çünki sütunlar üçün eyni nəticəni transponirə olunmuş matrisə baxmaqla almaq olar. Beləliklə, tutaq ki, verilmiş A matrisinin sətirləri xətti asılıdır. Onda xətti asılı olan vektorların məlum xassəsinə görə (VII fəsil, §1, xassə 4) hər hansı sətir, məsələn n -ci sətir qalan sətirlərin xətti kombinasiyası kimi yazıla bilər:

$$A^n = c_1 A^1 + \dots + c_{n-1} A^{n-1}.$$

A matrisi üzərində ikinci növ aşağıdakı elementar çevirmələri aparaq. 1-ci sətiri c_1 -ə, 2-ci sətiri c_2 -yə və i. a., $n-1$ -ci sətiri c_{n-1} -ə vuraraq n -ci sətirdən çıxaraq. Onda sıfır sətir alırıq. Determinantın xassəsinə əsasən o dəyişməz. Lakin, alınan determinantın sonuncu sətiri sıfıra bərabər olduğundan o, və eyni zamanda $\det A$, sıfıra bərabər olacaqdır, yəni matris məxsusidir.

İndi isə fərz edək ki, $\det A = 0$. Göstərək ki, onun sətirləri və sütunları xətti asılıdır. Əvvəlki paragrafda verilmiş Teorem 5-ə əsasən

$$A\bar{x} = 0$$

bircins xətti tənliklər sisteminin qeyri-trivial həlli vardır. Deməli, hamısı sıfır olmayan elə $x_1, \dots, x_n$ skalyarları var ki,

$$x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = 0$$

yəni matrisin sütunları xətti asılıdır. Teorem 4 isbat olundu.

Yuxarıda deyilənləri belə bir teoremdə ümumiləşdirmək olar.

Teorem 4. Tutaq ki, $A \in M_n(K)$ hər hansı n tərtibli matrisdir. Onda aşağıdakı təkliflər eynigüclüdür:

- 1) A matrisinin sətirləri xətti asılı deyil;
- 2) $\det A \neq 0$;
- 3) A matrisini elementar matrislərin hasili kimi göstərmək olar.

§5. Bazis minor. Matrisin ranqı

Minor anlayışını ixtiyari matris üçün ümumiləşdirmək olar. Tutaq ki, $A \in K^{m \times n}$ ixtiyari $m \times n$ ölçülü matrisdir. Bu matrisdə hər hansı k sayda sətir qeyd edək. Onların nömrələrini $i_1, i_2, \dots, i_k$ ilə işarə edək. Eyni sayda sütun qeyd edək və nömrələrini $j_1, j_2, \dots, j_k$ ilə işarə edək.

Tərif 1. k tərtibli $M = (a_{i_r j_s})_{\substack{1 \leq r \leq k \\ 1 \leq s \leq k}}$ matrisinin determinantına verilən matrisin k tərtibli minoru deyilir və $M \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ kimi işarə olunur.

Yəni verilmiş matrisin k tərtibli minoru dedikdə yuxarıda qeyd olunan sətrlərlə sütunların kəsişməsində yerləşən elementlərin əmələ gətirdiyi determinant başa düşülür. Məsələn,

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisində 1-ci və 3-cü sətirlərlə, 2-ci və 4-cü sütunların kəsişməsindəki elementləri qeyd etsək aşağıdakı iki tərtibli minor alınır:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Tərif 2. Matrisin sıfırdan fərqli minorları içərisində ən yüksək tərtibli minorların hər biri *bazis minor* adlanır.

Aydındır ki, $A \in K^{m \times n}$ matrisinin bazis minorunun tərtibi r olarsa, $r \leq \min(m, n)$ sətir ödənilməlidir. Yuxarıdakı matrisin bazis minoru olaraq, aşağıdakı 3 tərtibli minor götürülə bilər:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Bazis minorun əsas xassəsi aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem 1. Matrisin hər bir sətiri (sütunu) bazis minor yerləşən sətirlərin (sütunların) xətti kombinasiyası kimi göstərilə bilər. Bazis minor yerləşən sətirlər isə xətti asılı deyil.

İsbatı. Tutaq ki, hər hansı $m \times n$ ölçülü $A = (a_{ij})$ matrisi verilmişdir. Müəyyənlik üçün fərz edə bilərik ki, onun bazis minoru sol yuxarı küncdə yerləşmişdir. Əks halda sətir və sütunların yerdəyişməsi ilə bazis minoru sol yuxarı küncə gətirmək olar (bu yerdiyişmədə minorun ancaq işarəsi dəyişə bilər ki, bu da teoremin hökmünə təsir etmir). Aydındır ki, teoremi ancaq sətirlər üçün isbat etmək kifayətdir.

Əgər baxılan sətir bazis minor yerləşən sətirlərdən olarsa, teoremin hökmü doğrudur. Tutaq ki, bazis minorun tərtibi r -dir və $i > r$ nömrəli $A^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}, a_{i,r+1}, \dots, a_{in})$ sətiri qeyd olunmuşdur. Göstərək ki, elə $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ skalyarları var ki,

$$A^i = \alpha_1 A^1 + \dots + \alpha_r A^r.$$

Bazis minoru M ilə işarə edək. Bazis minoru haşiyələməklə, yəni ona aşağıdan i nömrəli sətirin, sağdan isə ixtiyari j nömrəli sütunun elementlərini əlavə etməklə $r + 1$ tərtibli minora çevirək:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Bu minorun tərtibi bazis minorun tərtibindən böyük olduğu üçün o, sıfır bərabərdir. Bu minoru sonuncu $(r+1)$ -ci sütun elementləri üzrə ayıraq:

$$\Delta = a_{1j}A_{1,r+1} + a_{2j}A_{2,r+1} + \cdots + a_{rj}A_{r,r+1} + a_{ij}A_{r+1,r+1} = 0. \quad (1)$$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$A_{r+1,r+1} = M \neq 0.$$

Digər minorlar bu minordan sonuncu sütunu və uyğun bir sətri atmaqla alınır. Başqa sözlə, Δ determinantının ifadəsinə daxil olan cəbri tamamlayıcılar j -dan asılı deyil və ancaq sətrin i nömrəsindən asılıdır. (1) bərabərliyindən alırıq:

$$a_{ij} = -M^{-1} (a_{1j}A_{1,r+1} + a_{2j}A_{2,r+1} + \cdots + a_{rj}A_{r,r+1}) = \alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \cdots + \alpha_r a_{rj};$$

burada $\alpha_k = -M^{-1}A_{k,r+1}$ işarə olunmuşdur. Beləliklə, i -ci sətrin hər bir komponenti bazis minor

yerləşən sətrilərin uyğun komponentlərinin əmsalları $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ olan funksiyasıdır. Deməli,

$$A^i = \alpha_1 A^1 + \cdots + \alpha_r A^r \text{ bərabərliyi doğrudur.}$$

İndi göstərək ki, bazis minor yerləşən sətrilər xətti asılı deyil. Ümumiliyi pozmadan fərz etmək olar ki, bazis minor ilk r sətirdə yerləşmişdir. Göstərək ki, $A^1, \dots, A^r$ vektorlar sistemi xətti asılı deyildir. Əksini fərz edək: tutaq ki, hamısı sıfır olmayan elə $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ skalyarları var ki,

$$\alpha_1 A^1 + \cdots + \alpha_r A^r = 0.$$

Onda bu bərabərliyi koordinatlar üçün də yazmaq olar:

$$\alpha_1 a_{1j} + \cdots + \alpha_r a_{rj} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Deməli, bazis minorun sətriləri xətti asılıdır. Bu isə onun sıfırdan fərqli olması şərtinə ziddir. Alınan ziddiyyət göstərir ki, bazis minor yerləşən sətrilər sistemi xətti asılı deyil. Teorem 1 isbat olundu.

Tərif 3. Matrisin basis minorunun tərtibinə matrisin *minorlar üzrə rəngi* deyilir. Matrisin xətti asılı olmayan sətirlərinin (sütunlarının) maksimal sayına matrisin *sətirlər (sütunlar) üzrə rəngi* deyilir.

Teorem 2. Matrisin sətirlər, sütunlar və minorlar üzrə rəngləri bərabərdir.

İsbatı. Teoremi isbat etmək üçün göstərmək kifayətdir ki, matrisin sətirlər üzrə s rəngi basis minorun tərtibinə bərabərdir. Basis minorun sol yuxarı küncdə yerləşdiyini fərz edək. Teorem 1-ə əsasən basis minor yerləşən sətirlər xətti asılı deyil. Buna görə də, xətti asılı olmayan sətir vektorlarının maksimal s sayı basis minorun r tərtibindən kiçik deyil: $s \geq r$. Göstərək ki, $s \leq r$. Əksini fərz edək, yəni tutaq ki, xətti asılı olmayan s sayda $B_1, \dots, B_s$ sətirlər sistemi vardır və $s > r$. Teorem 1-ə əsasən bu sətirlərin hər birini basis minor yerləşən sətirlərin xətti kombinasiyası kimi yazmaq olar:

$$B_i = a_{i1}A^1 + a_{i2}A^2 + \dots + a_{ir}A^r, \quad i = 1, \dots, s.$$

Onda, $\lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_s B_s = 0$ bərabərliyində yuxarıdakı münasibətləri nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\begin{aligned} \lambda_1(a_{11}A^1 + a_{12}A^2 + \dots + a_{1r}A^r) + \dots + \lambda_s(a_{s1}A^1 + a_{s2}A^2 + \dots + a_{sr}A^r) = \\ = (a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{s1}\lambda_s)A_1 + \dots + (a_{1r}\lambda_1 + \dots + a_{sr}\lambda_s)A_r = 0. \end{aligned}$$

Basis minor yerləşən sətirlər xətti asılı olmadığından buradan aşağıdakı sistemi alırıq:

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{s1}\lambda_s = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{1r}\lambda_1 + \dots + a_{sr}\lambda_s = 0.$$

Bu sistemdə dəyişənlərin sayı tənliklərin sayından çoxdur. Deməli, onun qeyri-trivial həlli vardır, yəni $\lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_s B_s = 0$ bərabərliyində əmsallardan bəziləri sıfıra bərabər deyil. Alınan ziddiyyət göstərir ki, $s > r$ ola bilməz. Beləliklə, $s \leq r$ və $s \geq r$. Onda, $s = r$ və bununla teorem 2 isbat olundu.

Bu teorem göstərir ki, matrisin bir yolla, məsələn sətirlər üzrə təyin olunan rəngi digərləri ilə eynidir. Bu ümumi qiymət *matrisin rəngi* adlanır və $\text{rang} A$ kimi işarə olunur. Eyni zamanda buradan verilən matrisin rəngini hesablamaq üçün əlverişli üsul alınır. Bu üsul aşağıdakı kimidir. Verilmiş matrisi sətirlər üzərində I və II növ elementar çevirmələr vasitəsi ilə pilləli şəkllə gətirmək lazımdır. Pilləli matrisin rəngi sıfırdan fərqli sətirlərin sayın bərabərdir. Elementar

çevirmələr zamanı bazis minor mütləq qiymətcə dəyişməz qaldığı üçün, alınan pilləli matrisin rəngi verilən matrisin rənginə bərabər olacaqdır.

Nəticə. Xətti tənliklər sistemini n pilləli şəkllə gətirdikdə alınan pilləli matrisin sıfır olmayan sətirlərinin sayı elementar çevirmələrdən asılı olmayıb, sistemin matrisinin rənginə bərabərdir.

Misal . Aşağıda verilən matrisin rəngini tapaq:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & -9 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisi elementar çevirmələr vasitəsi ilə pilləli şəkllə gətirək. Bunun üçün əvvəlcə birinci sətiri -3 -ə vuraraq ikinci sətirə və -1 -ə vuraraq, üçüncü sətirə əlavə edək:

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & -13 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & -13 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

ikinci sətiri -1 -ə vuraraq, üçüncü sətirə əlavə etsək, aşağıdakı pilləli matrisi alırıq:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & -13 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisin iki sıfırdan fərqli sətiri olduğuna görə $\text{rang}A = 2$ olacaqdır.

Matrisin rəngi anlayışının böyük əhəmiyyəti vardır. Kroneker –Kapelli teoremi adlanan aşağıdakı teorem tənliklər sisteminin uyğun olması üçün əlamət verir.

Teorem 3. Əsas matrisi A , genişlənmiş matrisi isə B olan

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

xətti tənliklər sisteminin uyğun olması üçün $\text{rang}A = \text{rang}B$ olması zəruri və kafidir.

İsbatı. Əvvəlcə fərz edək ki, sistem uyğundur, yəni onun $\bar{x}'_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ həlli vardır.

Onda, genişlənmiş matrisin sonuncu sütununu A matrisinin sütunlarının xətti kombinasiyası kimi yazmaq olar:

$$\bar{b} = x_1^0 A_1 + x_2^0 A_2 + \dots + x_n^0 A_n.$$

Onda bu matrislərin sütunlar üzrə ranqları eynidir. Deməli, $\text{rang}A = \text{rang}B$.

Tərsinə, əgər $r = \text{rang}A = \text{rang}B$ olarsa, onda A matrisinin r sayda xətti asılı olmayan sütun vektorlar sistemi vardır. Tutaq ki, bu sistem $A_1, A_2, \dots, A_r$ -dir. Şərtə əsasən onlar B matrisinin sütunları içərisində də maksimal sayda xətti asılı olmayan sistem olacaqdır. Əgər bu sistemə genişlənməmiş matrisin sonuncu $\bar{b}$ vektorunu əlavə etsək xətti asılı sistem alarıq. Onda hamısı sıfır olmayan $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda$ ədədləri var ki, $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r + \lambda \bar{b} = 0$ olur. Burada $\lambda \neq 0$, əks halda $A_1, \dots, A_r$ vektorlarının xətti asılı olduğu alınır ki, bu da ziddiyyət əmələ gətirir. Beləliklə, $\bar{b}$ vektorunu əvvəlki vektorların xətti kombinasiyası kimi yazmaq olar:

$$\bar{b} = x_1^0 A_1 + x_2^0 A_2 + \dots + x_r^0 A_r = x_1^0 A_1 + x_2^0 A_2 + \dots + x_r^0 A_r + 0 \cdot A_{r+1} + \dots + 0 \cdot A_n.$$

Bu bərabərlik göstərir ki, sistem uyuşandır. Teorem 3 isbat olundu.

§6. Laplas teoremi və onun tətbiqləri

§2-də determinantın sətir və ya sütun elementləri üzrə ayrılış düsturu verilmişdir. Bu düstur Laplas teoreminin xüsusi halıdır. Bu teoremin ifadəsini vermək üçün cəbri tamamlayıcı anlayışının ümumiləşməsinə ehtiyac vardır. Tutaq ki, n tərtibli $|A|$ determinantı verilmişdir. Bu determinantda hər hansı k ($1 \leq k \leq n$) sayda sətir və həmin sayda da sütun qeyd edək. Sətirlərin nömrələri $i_1, i_2, \dots, i_k$, sütunların nömrələri isə $j_1, j_2, \dots, j_k$ olsun.

Tərif. k tərtibli $M \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ minorunun yerləşdiyi sətir və sütunları atdıqdan sonra

qalan $n-k$ tərtibli minorun $(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}$ ədədi ilə hasilinə bu minorun cəbri tamamlayıcısı deyilir.

Tərifdən görünür ki, $k=1$ olduqda bir tərtibli minorlar matrisin elementləri ilə, onların cəbri tamamlayıcıları isə adi cəbri tyamamlayıcılarla üst-üstə düşür.

Teorem 1. Matrisin determinantı onun ixtiyari k sayda seçilmiş sətirlərində yerləşən bütün mümkün k tərtibli minorları ilə onların cəbri tamamlayıcılarının hasilləri cəminə bərabərdir.

İsbatı. Əvvəlcə fərz edək ki, minor 1-ci, 2-ci, ..., k -cı sətirlər üzərində yerləşmişdir. Belə minorların sayı C_n^k -ya bərabərdir. Determinantın ifadəsindəki cəmi bütün belə minorlar üzrə cəmlərə parçalayaq:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=i_1, \dots, \sigma(k)=i_k}} \text{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=i_1, \dots, \sigma(k)=i_k}} \text{sign} \sigma (a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ki_k}) \cdot (a_{k+1\sigma(k+1)} a_{k+2\sigma(k+2)} \cdots a_{n\sigma(n)}). \quad (1) \end{aligned}$$

Göründüyü kimi determinantın açılışına daxil olan hər bir hasil iki vuruqdan ibarətdir. Bunlardan biri qeyd olunmuş sətirlərdə yerləşən minorlarda, qalanları isə “tamamlayıcı” minorlarda yerləşən elementlərdən təşkil olunmuşdur. Əvvəlcə qeyd olunmuş sətirlərdə yerləşən minorlardan sol yuxarı küncdə olanı götürək. Onun üçün $1 \leq \sigma(1), \dots, \sigma(k) \leq k$. Bu şərt daxilində σ əvəzləməsinin işarəsi iki əvəzləmənin işarələrinin hasilinə bərabərdir:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_k & k+1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

və

$$\tau = \begin{pmatrix} k+1 & \cdots & n \\ \sigma(k+1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & k & \sigma(k+1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

çünki, $\sigma = \varphi \tau$. φ və τ əvəzləmələri, əslində, bir –birindən asılı olmadan S_k və S_{n-k} qruplarından istənilən qiymətləri ala bilərlər. Deməli, (1) cəminin sol yuxarı küncdə yerləşən minora uyğun olan hissəsi

$$\sum_{\varphi \in S_k} \text{sign} \varphi \cdot a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{k\varphi(k)} \sum_{\substack{\tau \in S_n \\ \tau(1)=i_1, \dots, \tau(k)=i_k}} \text{sign} \tau \cdot a_{k+1\tau(k+1)} a_{k+2\tau(k+2)} \cdots a_{n\tau(n)} \quad (2)$$

ifadəsinə bərabərdir.

Tutaq ki, k tərtibli minor başqa sütunlarda yerləşmişdir. Hər bir minora daxil olan sütunların nömrələrinin, yəni σ əvəzləməsinin ikinci sətirində yerləşən elementlərin, bir-birinə nəzərən nizamını pozmadan σ əvəzləməsinin ikinci sətirində ardıcıl transpozisiyalar yerinə yetirərək, sütunların yerini elə dəyişək ki, j_r nömrəli sütun r -ci yeri tutsun. j_1 nömrəli sütunu 1-ci yerə gətirmək üçün $j_1 - 1$ sayda ardıcıl yerdəyişmə yerinə yetirmək lazımdır. Analoji olaraq, j_r nömrəli sütunu r -ci yerə gətirmək üçün $j_r - r$ sayda ardıcıl yerdəyişmə yerinə yetirmək lazımdır. Göstərilən transpozisiyalara uyğun olan əvəzləmələri $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_T; T = j_1 + \cdots + j_k - 1 - \cdots - k$ kimi işarə edək. Məsələn, birinci və ikinci elementlərin yerini dəyişən əvəzləmə belə olacaqdır:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Onda, alarıq:

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_T (\varphi \cdot \tau).$$

Yuxarıda olduğu kimi, bu halda, baxılan k təribli minora uyğun olan (2) cəmi aşağıdakı kimi olar:

$$\sum_{\varphi \in S_k} \text{sign} \varphi \cdot a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{k\varphi(k)} \times \\ \times (-1)^{j_1 + j_2 + \cdots + j_k - 1 - 2 - \cdots - k} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=j_1, \dots, \sigma(k)=j_k}} \text{sign} \sigma \cdot a_{k+1\sigma(k+1)} a_{k+2\sigma(k+2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \quad (3)$$

çünki transpozisiyaların işarəsi -1 -ə bərabərdir. Beləliklə,

$$\det A = \sum_{1 \leq j_1, j_2, \dots, j_k \leq n} \sum_{\varphi \in S_k} \text{sign} \varphi \cdot a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{k\varphi(k)} \times \\ \times (-1)^{\varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(k) + 1 + 2 + \cdots + k} \sum_{\sigma \in S_{n-k}} \text{sign} \sigma \cdot a_{k+1\sigma(k+1)} a_{k+2\sigma(k+2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Əvəzləmələr üzrə birinci cəm $j_1, j_2, \dots, j_k$ nömrəli sütunlarda yerləşən minora, uyğun işarə ilə götürülmüş ikinci cəm isə bu minorun cəbri tamamlayıcısının bərabərdir. Beləliklə, əgər $i_1, i_2, \dots, i_k$

nömrəli sətirlərdə və $j_1, j_2, \dots, j_k$ nömrəli sütunlarda yerləşmiş minoru $M \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$, onun

cəbri tamamlayıcısını isə $A \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ kimi işarə etsək alarıq:

$$\det A = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n} M \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \cdot A \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Beləliklə, teorem ilk k sətirlərdə yerləşən minorlar üçün isbat olundu.

Ümumi halda sütunlarla olduğu kimi, sətirlərin ardıcıl yerdəyişməsi ilə onları ilk k sətirin yerinə gətirə bilərik. Bu zaman determinant $(-1)^{i_1 + \cdots + i_k - 1 - \cdots - k}$ ədədinə vurular və biz nəticədə yenə də (3) bərabərliyini alırıq və artıq cəmin daxilindəki işarə $(-1)^{i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k}$ vuruğu ilə müəyyən olunacaqdır.

Deməli (4) bərabərliyi bu halda da doğrudur. Teorem 1 isbat olundu.

Misal. Aşağıdakı dörd tərtibli determinantı Laplas teoreminin köməyi ilə hesablayaq.

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Laplas teoremini tətbiq etmək üçün 1-ci və 2-ci sətirləri qeyd edək. Bu sətirdə altı 2 tərtibli minor yerləşir:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Uyğun cəbri tamamlayıcıları hesablayaq:

$$(-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$(-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

Beləliklə, $d = 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-6) + 0 \cdot 4 = 4 - 6 = -2$.

Laplas teoreminin kömyi ilə hasilin determinantı haqda teoremi daha bir yolla isbat etmək olar.

Teorem 2. n tərtibli matrislərin hasilinin determinantı onların determinantlarının hasilinə bərabərdir.

İsbatı. Aşağıdakı $2n$ tərtibli determinanta baxaq:

$$d = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix}.$$

Göründüyü kimi, determinantın matrisi hər biri n tərtibli matris olan dörd blokdan ibarətdir. Bu matrisin açıq şəkli belədir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinantı iki müxtəlif üsulla hesablayaq. Əvvəlcə onu Laplas teoreminin köməyi ilə hesablayaq. 1-ci, 2-ci, ..., n -ci sətirləri qeyd edək. Bu sətirlərdə yerləşən n tərtibli minorların hər birinə, yuxarı sol küncdə yerləşən minor istisna olmaqla, heç olmasa bir sıfır sütun daxildir. Buna görə də bütün belə minorlar sıfıra bərabərdir. Sol yuxarı küncdə yerləşən minor isə $\det A$ -ya, onun cəbri tamalayıcısı isə $(-1)^{1+\cdots+n+1+\cdots+n} \det B = \det B$ -yə bərabərdir. Laplas teoreminə əsasən, yazı bilərik:

$$d = (-1)^n \det A \cdot \det B.$$

Eyni determinantı başqa üsulla hesablamaq üçün onun üzərində elementar çevirmələr yerinə yetirək. Əvvəlcə determinantın $n+1$ -ci sətirini a_{11} -ə vuraraq birinci sətirə, a_{12} -yə vuraraq 2-ci sətirə və i. a., a_{1n} -vuraraq n -ci sətirə əlavə etsək, A matrisinin yerləşdiyi blokda birinci sütun sıfıra çevrilər. Analoji olaraq, $n+2$ -ci sətirin koməyi ilə ikinci, üçüncü, və i. a., sonuncu sütunu sıfıra çevirmək olar. Bu çevirmələr nəticəsində sağ yuxarı küncdəki blokda $C = (c_{ij})$ matrisi alınar. c_{ij}

elementi $n+1, \dots, 2n$ nömrəli sətirləri, uyğun olaraq, $a_{i1}, \dots, a_{in}$ elementlərinə vuraraq, i -ci sətərə əlavə etməklə alınır, yəni

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = A^i B_j.$$

Beləliklə biz aşağıdakı determinantı alırıq:

$$d = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{vmatrix}.$$

Yenə də Laplas teoremini tətbiq edək və yenə də n sətir olaraq $1, \dots, n$ nömrəli sətirləri götürək.

İndi isə sağ yuxarı küncdə yerləşən minordan başqa qalan minorlar sıfıra bərabərdir. Deməli,

$$d = \det(AB) \cdot (-1)^{1+\dots+n+(n+1)+\dots+2n} \det(-E) = (-1)^{n(n+1)} \det(AB) = \det(AB).$$

Alınmış bərabərlikləri tutuşdursaq teoremin hökmünü alırıq: $\det(AB) = \det A \det B$.

IX FƏSİL. XƏTTİ FƏZA

§1. Xətti fəzanın əsas anlayışları

Tutaq ki, hər hansı X çoxluğu və bu çoxluqda “+” kimi işarə olunan binar əməl verilmişdir. K meydanı götürək və $K \times X$ düz hasilində $\omega: \langle \lambda, x \rangle \mapsto \lambda x \in X$ kimi təyin olunan inikasa baxaq.

Tərif. Aşağıdakı şərtlər ödənilərsə $\langle X, K \rangle$ cütü xətti fəza adlanır:

- 1) $\langle X, + \rangle$ cəbri kommutativ qrupdur;
- 2) ω inikası aşağıdakı şərtləri ödəyir:
 - a) $(\forall \lambda, \mu \in K)(\forall x \in X)((\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x)$;
 - b) $(\forall x, y \in X)(\forall \lambda \in K)(\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y)$;
 - c) $(\forall \lambda, \mu \in K)(\forall x \in X)((\lambda \mu)x = \lambda(\mu x))$;
 - d) $(\forall x \in X)(1 \cdot x = x)$.

Qeyd etmək lazımdır ki, baxılan $\omega: K \times X \rightarrow X$ inikası ixtiyari $\lambda \in K$ skalyarı üçün $\omega_\lambda: \langle \lambda, x \rangle \mapsto \lambda x \in X$ inikasını təyin edir. Bu inikas X çoxluğunda unar əməl müəyyən edir. Buna görə də xətti fəzanı 1) və 2) şərtlərini ödəyən $\langle X, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$ cəbri kimi də təyin etmək olar.

Misallar.1. Hər bir meydan özü üzərində xətti fəzadır.

2. Müstəvi üzərində hər hansı O nöqtəsi qeyd edək. Başlanğıcı bu nöqtədə olan bütün mümkün istiqamətlənmiş parçalar çoxluğu (bağlı vektorlar çoxluğu), əvvəlki mövzulardan məlum olduğu kimi, kommutativ qrup əmələ gətirir. Bu vektorlar çoxluğu xətti fəza təşkil edir.

3. R^n ədədi xətti fəza R həqiqi ədədlər meydanı üzərində xətti fəza təşkil edir. Bu xətti fəza n -ölçülü ədədi xətti fəza adlanır.

4. Elementləri hər hansı K meydanından olan bütün $m \times n$ ölçülü matrislər çoxluğu həmin meydan üzərində xətti fəza təşkil edir.

5. $C[0,1]$ ilə $[0,1]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyalar çoxluğunu işarə edək. Bu çoxluq funksiyaların toplanması əməlinə görə kommutativ qrup əmələ gətirir. Aydındır ki, kəsilməz funksiyanın sabitə hasili də kəsilməzdir. Yoxlamaq olar ki, xətti fəzanın bütün aksiomları ödənilir. Beləliklə, $[0,1]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyalar çoxluğu xətti fəza təşkil edir.

Xətti fəzanın bilavasitə tərifdən alınan sadə, lakin mühüm xassələri vardır. Tutaq ki, $\langle X, K \rangle$ xətti fəzası verilmişdir.

Xassə 1. İxtiyari $x \in X$ elementi üçün $0 \cdot x = 0$.

İsbati. Tərifdə 2), a) şərtinə əsasən $0 \cdot x + 0 \cdot x = (0 + 0)x = 0 \cdot x = 0 \cdot x + 0$. X qrupunda ixtisar qanununa görə buradan $0 \cdot x = 0$ münasibəti alınır.

Xassə 2. İxtiyari $x \in X$ elementi üçün $-x = (-1) \cdot x$.

İsbati. $x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1-1)x = 0x = 0$ olduğundan əks elementin tərifinə əsasən $-x = (-1) \cdot x$.

Xassə 3. İxtiyari $\alpha \in K$ elementi üçün $\alpha \cdot 0 = 0$.

İsbati. Tərifdə 2), b) şərtinə əsasən $\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot x = \alpha(0 + x) = \alpha \cdot x = 0 + \alpha \cdot x$. X qrupunda ixtisar qanununa görə buradan $\alpha \cdot 0 = 0$ münasibəti alınır.

Xassə 4. İxtiyari $\alpha \in K$ elementi və ixtiyari $x \in X$ vektoru üçün

$$\alpha x = 0 \rightarrow \alpha = 0 \vee x = 0.$$

İsbati. Tutaq ki, $\alpha \neq 0$. Onda α^{-1} tərs elementi vardır və verilən bərabərliyin hər iki tərəfini bu elementə vursaq alarıq:

$$\alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1}0 \rightarrow 1x = x = 0.$$

Xassə 5. İxtiyari $\alpha \in K$ elementi və ixtiyari $x \in X$ vektoru üçün

$$(-\alpha)x = \alpha(-x) = -\alpha x.$$

İsbati. Doğrudan da,

$$\alpha x + (-\alpha)x = (\alpha - \alpha)x = 0x = 0$$

və

$$\alpha x + \alpha(-x) = \alpha(x - x) = \alpha 0 = 0.$$

Bu münasibətlərdən isə tələb olunan bərabərliklər alınır.

Analoji olaraq aşağıdakı iki xassə də isbat olunur.

Xassə 6. İxtiyari $\alpha, \beta \in K$ elementləri və ixtiyari $x \in X$ vektoru üçün

$$(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x.$$

Xassə 7. İxtiyari $\alpha \in K$ elementi və ixtiyari $x, y \in X$ vektorları üçün

$$\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y.$$

Xətta fəza anlayışı ilə bağlı olan ən mühüm anlayışlardan biri xətti kombinasiya anlayışıdır.

Tutaq ki, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ vektorlar və $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ skalyarlar sistemi verilmişdir.

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ cəminə verilən vektorlar sisteminin əmsalları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olan *xətti kombinasiyası* deyilir. Aydın ki, bütün əmsallar sıfıra bərabədirsə, onda xətti kombinasiya özü də sıfıra bərabərdir. Belə xətti kombinasiyanı *trivial* xətti kombinasiya adlandıraraq.

Tərif 1. $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ vektorlar sisteminin sıfıra bərabər olan qeyri trivial xətti kombinasiyası varsa, onda belə vektorlar sistemi *xətti asılı* sistem adlanır.

Tərif 2. $(\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K)(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0 \leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0)$ mülahizəsi doğrudursa, onda $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ vektorlar sisteminə *xətti asılı olmayan* sistem deyilir.

Ədədi xətti fəzada olduğu kimi xətti asılı olan və olmayan sistemlərin aşağıdakı mühüm xassələri vardır.

Xassə 1. Əgər $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ vektorlar sisteminə 0 vektor daxilirsə, onda bu sistem xətti asılıdır.

Xassə 2. Əgər $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ vektorlar sistemi xətti asılı deyilsə, onda onun ixtiyari alt sistemi də xətti asılı deyil.

Xassə 1 və 2 -nin isbatları tamamilə ədədi xətti fəzalarda olduğu kimidir. Kontrapozisiya qanunundan istifadə etməklə asanlıqla aşağıdakı xassəni isbat etmək olar.

Xassə 3. Xətti asılı sistemin istənilən genişlənməsi xətti asılıdır.

Xassə 4. Verilən sistemin xətti asılı olması üçün bu sistemin hər hansı vektorunun digər vektorların xətti kombinasiyası kimi göstərilə bilməsi zəruri və kafidir.

İsbatı. Tutaq ki, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ vektorlar sisteminin hər hansı bir vektoru məsələn, x_k vektoru qalan vektorların xətti kombinasiyası kimi göstərilə bilər:

$$x_k = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k-1} x_{k-1}.$$

Onda,

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k-1} x_{k-1} - x_k = 0$$

və sistem xətti asılıdır.

Tərsinə, əgər hamısı sıfır olmayan elə $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ skalyarları tapmaq mümkün olsa ki,

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \alpha_k x_k = 0$$

olmaqla əmsallardan heç olmasa biri, məsələn, α_k sıfırdan fərqlidir. Onda alarıq:

$$x_k = -(\alpha_1 / \alpha_k) x_1 - \dots - (\alpha_{k-1} / \alpha_k) x_{k-1},$$

vektorlardan biri qalan vektorların xətti kombinasiyası şəklində göstərilir. Xassə 4 isbat olundu.

Tərif 2. $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ vektorlar sisteminin bütün mümkün

$$L(x_1, \dots, x_k) = \{ \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in K^k \}$$

xətti kombinasiyalar çoxluğuna verilən sistemin *xətti örtüyü* deyilir.

Aydındır ki, əgər $x \in L(x_1, \dots, x_k)$ olarsa, onda x vektorunu $x_1, \dots, x_k$ vektorlar sisteminin xətti kombinasiyası şəklində göstərmək olar. Deməli, bu halda $x_1, \dots, x_k, x$ vektorlar sistemi xətti asılıdır.

Tərif 3. İki $x_1, \dots, x_k$ və $y_1, \dots, y_s$ vektorlar sistemi o zaman *ekvivalent vektorlar sistemi*

adlanır ki, bu sistemlərdən hər birinin *sıfırdan fərqli* hər bir vektorunu digər sistemin vektorlarının xətti kombinasiyası şəklində göstərmək mümkün olsun.

Teorem 1. Ekvivalent sistemlərin xətti örtükləri bərabərdir.

İsbatı. Tutaq ki, $x \in L(x_1, \dots, x_k)$. Onda müəyyən $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ skalyarları tapmaq mümkündür ki,

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k.$$

Şərtə əsasən (aydındır ki, $x_i \neq 0, i = 1, \dots, k$, əks halda sıfır vektoru xətti örtüyü dəyişmədən sistemdən kənar etmək olar)

$$x_i = \beta_{i1} y_1 + \dots + \beta_{is} y_s.$$

Deməli,

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = (\alpha_1 \beta_{11} + \dots + \alpha_k \beta_{k1}) y_1 + \dots + (\alpha_1 \beta_{s1} + \dots + \alpha_k \beta_{sk}) y_s \in L(y_1, \dots, y_s).$$

Buradan alırıq, $L(x_1, \dots, x_k) \subset L(y_1, \dots, y_s)$. Eyni qayda ilə əks münasibət göstərilə bilər. Teorem 1 isbat olundu.

Teorem 2. $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ vektorlar sisteminin xətti örtüyü xətti fəzadır.

İsbatı. İxtiyari iki $x, y \in L(x_1, \dots, x_k)$ vektorlarının cəmi xətti örtüyə daxildir. Doğrudan da, $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$ və $y = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$ olarsa, onda

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1) x_1 + \dots + (\alpha_k + \beta_k) x_k \in L(x_1, \dots, x_k).$$

Deməli, $\langle L(x_1, \dots, x_k), + \rangle$ cəbri müəyyən olunmuşdur və asanlıqla yəqin etmək olar ki, o, kommutativ qrupdur.

$$\alpha x = \alpha \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha \alpha_k x_k$$

bərabərliyi ilə xətti örtükdə skalyara vurma əməli təyin olunmuş olur. Beləliklə, biz $\langle L(x_1, \dots, x_k), +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$ cəbrini alırıq. Xətti fəzanın tərifinə daxil olan aksiomlar $\langle L(x_1, \dots, x_k), +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$ cəbrində də ödənilir. Deməli, o xətti fəzadır. Teorem 2 isbat olundu.

Tərif. Tutaq ki, $\langle X, K \rangle$ xətti fəza, $Y \subset X$ boş olmayan alt çoxluqdur. Əgər $\langle X, K \rangle$ cütü X -də təyin olunan əməlləri görə xətti fəza əmələ gətirərsə, bu xətti fəza $\langle X, K \rangle$ fəzasının *alt fəzası* adlanır.

Nəticə. İxtiyari $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ vektorlar sistemi üçün $\langle L(x_1, \dots, x_k), +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$ cəbri xətti alt fəza təşkil edir.

Misallar. 1. Müstəvi üzərində düzbucaqlı Dekart koordinat sistemində koordinatları ilə verilmiş vektorlar çoxluğu, yəni $\langle x, y \rangle$ cütlər çoxluğu xətti fəza əmələ gətirir. $\alpha \in R$ olduqda

$\{\langle x, \alpha x \rangle \mid x \in R\}$ kimi cütlər çoxluğu koordinat başlanğıcından keçən düz xətt müəyyən edir. Bu düz xətt alt fəza əmələ gətirir.

2. Yuxarıda gördük ki, $(0,1)$ aralığında təyin olunmuş kəsilməz funksiyalar çoxluğu xətti fəza təşkil edir. Bu aralıqda hər bir diferensiallanan funksiya kəsilməzdir. Bütün belə diferensiallanan funksiyaların $C^1(0,1)$ çoxluğu alt fəza əmələ gətirir.

Teorem 3. $x_1, \dots, x_k \in X$ sistemi xətti asılı deyilsə və $l > k$ olmaqla $y_1, \dots, y_l \in L(x_1, \dots, x_k)$ olarsa, onda $y_1, \dots, y_l$ vektorlar sistemi xətti asılıdır.

İsbatı. Şərtə əsasən ixtiyari $1 \leq i \leq l$ indeksi üçün

$$y_i = \alpha_{1i}x_1 + \alpha_{2i}x_2 + \dots + \alpha_{ki}x_k.$$

$y_1, \dots, y_l$ vektorlar sisteminin sıfıra bərabər olan hər hansı xətti kombinasiyasını götürək:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_l y_l = 0. \quad (1)$$

Yuxarıdakı bərabərlikləri nəzərə alsaq, yazı bilərik:

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_l y_l &= \sum_{i=1}^l (\alpha_{1i}x_1 + \alpha_{2i}x_2 + \dots + \alpha_{ki}x_k) \lambda_i = \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l \lambda_i \alpha_{ji} x_j = 0. \end{aligned}$$

$x_1, \dots, x_k \in X$ sistemi xətti asılı olmadığı üçün buradan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ skalyarları üçün aşağıdakı xətti bərabərliklər sisteminin alırıq:

$$\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \dots + \alpha_{1l}\lambda_l = 0,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\alpha_{k1}\lambda_1 + \alpha_{k2}\lambda_2 + \dots + \alpha_{kl}\lambda_l = 0.$$

Bu sistemdə dəyişənlərin sayı tənliklərin sayından az deyil. Deməli, elementar çevirmələr vasitəsi ilə bu sistemi pilləli şəkllə gətirdikdə $r \leq k < l$ olacaqdır. Bu isə o deməkdir ki, sistem qeyri-müəyyəndir, yəni onun trivial sıfır həllindən başqa həlli də vardır. Bu isə o deməkdir ki, (1) xətti kombinasiyasında bütün əmsallar sıfır deyil. Onda $y_1, \dots, y_l$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. Teorem 3 isbat olundu.

§2. Xətti fəzanın ölçüsü və bazisi.

Teorem 1. Əgər $x_1, \dots, x_k \in X$ vektorlar sistemi xətti asılı deyilsə və hər hansı $x \in X$ vektoru üçün isə $x_1, \dots, x_k, x$ sistemi xətti asılıdırsa, onda x vektoru yeganə qayda ilə $x_1, \dots, x_k$ vektorlarının xətti kombinasiyası kimi göstərilə bilər.

İsbatı. Şərtə əsasən hamısı sıfır olmayan elə $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda$ skalyrları tapmaq olar ki,

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda x = 0$$

bərabərliyi ödənilir. Qeyd edək ki, $\lambda = 0$ bərabərliyi mümkün deyil, əks halda

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0$$

bərabərliyi ödənməklə əmsallardan heç olmasa biri sıfırdan fərqli olardı. Bu isə $x_1, \dots, x_k$ vektorlarının xətti asılı olmayan sistem təşkil etməsi şərtinə ziddir. Beləliklə, $\lambda \neq 0$ və (1) bərabərliyindən alırıq:

$$x = -(\lambda_1 / \lambda)x_1 - \dots - (\lambda_k / \lambda)x_k.$$

Deməli, x vektoru üçün tələb olunan göstəriliş vardır. Bu göstərilişin yeganəliyini isbat etmək üçün iki belə göstəriliş olduğunu fərz edək:

$$x = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k = \mu'_1 x_1 + \dots + \mu'_k x_k.$$

Bu bərabərlikdən

$$(\mu_1 - \mu'_1)x_1 + \dots + (\mu_k - \mu'_k)x_k = 0$$

yaza bilərik. Xətti asılı olmayan sistemin tərifindən sonuncu bərabərlikdən $\mu_1 = \mu'_1$, $\mu_2 = \mu'_2, \dots, \mu_k = \mu'_k$ alırıq ki, bu da ayrılışların eyni olduğunu göstərir. Teorem 1 isbat olundu.

Tərif 1. Əgər $\langle X, K \rangle$ xətti fəzasında xətti asılı olmayan sistem təşkil edən n sayda vektor varsa, və ixtiyari $n+1$ vektordan ibarət sistem xətti asılıdırsa, onda deyilir ki, $\langle X, K \rangle$ n ölçülü xətti fəzadır.

Xətti fəzanın ölçüsünün n olması simvolik olaraq $n = \dim X$ kimi yazılır.

Teorem 2. n ölçülü xətti fəzada n sayda vektordan ibarət xətti asılı olmayan sistem vardır və fəzanın hər bir vektorunu yeganə qayda ilə bu sistemin xətti kombinasiyası şəklində göstərmək olar.

İsbatı. Fəzada n sayda vektordan ibarət xətti asılı olmayan $x_1, \dots, x_n$ sisteminin olması fəzanın ölçüsünün tərifindən alınır. İxtiyari $x \in X$ vektoru götürərək, onu xətti asılı olmayan sistemə əlavə edək. Əgər bu vektor xətti asılı olmayan sistemə daxil olan vektorlardan biri ilə üst-üstə düşərsə, onda teoremin hökmü doğrudur. Əks halda biz $n+1$ vektordan ibarət sistem alırıq. Şərtə əsasən bu sistem xətti asılıdır. Teorem 1-ə görə x vektorunu yeganə qayda ilə $x_1, \dots, x_n$ vektorlarının xətti kombinasiyası kimi yazmaq olar. Teorem 2 isbat olundu.

Tərif 2. Əgər xətti fəzada xətti asılı olmayan $x_1, \dots, x_n$ vektorlar sistemi varsa və fəzanın hər bir vektorunu bu sistemin xətti kombinasiyası şəklində göstərmək olarsa, onda belə vektorlar sisteminə xətti fəzanın *bazisi* deyilir.

Teorem 2-yə əsasən ixtiyari vektorun bazis vektorlar üzrə ayrılışı yeganədir.

Tərif 3. Tutaq ki, $x_1, \dots, x_n$ bazisində x vektorunun ayrılışı aşağıdakı kimidir:

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

Onda $\bar{x}' = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n) \in K^n$ vektoruna x -in *koordinat sətri*,

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

vektoruna isə x -in *koordinat sütunu*, deyilir.

Teorem 2-yə əsasən koordinat sətri və sütunu yeganədir. Vektorun koordinat sütunu seçilmiş bazisdən asılıdır və bazis dəyişdikdə o dəyişir.

Teorem 3. n ölçülü xətti fəzada hər bir $x \in X$ vektoruna onun koordinat sütununu (sətrini) qarşı qoyan

$$x \mapsto \bar{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

inikası $\langle X, K \rangle$ və $\langle K^n, K \rangle$ xətti fəzalarının izomorfizmidir: $\langle X, K \rangle \cong \langle K^n, K \rangle$.

İsbatı. Koordinat sütununun yeganə olmasından göstərilən inikası biyektiv olması alınır. Beləliklə, ancaq bu inikası baş əməlləri saxladığını göstərmək qalır. Fərz edək ki, x və y vektorlarının verilən bazisdə ayrılışları aşağıdakı kimidir:

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \quad y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n.$$

Onda $x + y$ vektorunun həmin bazisdə ayrılışı

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$$

kimi olar. Koordinat sütununun yeganəliyindən alırıq: $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$. Beləliklə, $x \mapsto \bar{x}$ inikası toplama əməlini saxlayır. Analogi olaraq göstərmək olar ki, o, skalyara vurma əməlini də saxlayır. Teorem 3 isbat olundu.

Teorem 4. n ölçülü xətti fəzada verilmiş xətti asılı olmayan ixtiyari $x_1, \dots, x_k$ ($1 \leq k < n$) vektorlar sistemini fəzanın bazisinə dək tamamlamaq olar.

İsbatı. Verilmiş vektorlar sisteminin $L(x_1, \dots, x_k)$ xətti örtüyünə baxaq. Onun ölçüsü bazis elementlərin sayına, yəni k -yə bərabərdir. Lakin $k < n$ olduğu üçün xətti örtük bütün fəza ilə üst-üstə düşə bilməz. Deməli, $x_{k+1} \in X \setminus L(x_1, \dots, x_k)$ vektoru vardır. $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}$ sistemi xətti asılı ola bilməz. Doğrudan da, fərz edək ki,

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} = 0$$

olmaqla əmsallardan heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidir. $\alpha_{k+1} = 0$ ola bilməz, əks halda $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$ alardıq. Lakin $x_1, \dots, x_k$ sistemi xətti asılı olmadığı üçün buradan $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ alınardı ki, bu yuxarıdakı fərziyyəməizə ziddir. Beləliklə, $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}$

sistemi xətti asılı deyil və əgər $k+1 < n$ olarsa, onda eyni mühakimələri tətbiq etməklə $x_{k+2} \in X \setminus L(x_1, \dots, x_{k+1})$ vektoru tapmaq olar. Bu prosesi $x_{k+s}, (k+s=n)$ vektoru tapılanadək davam etdirə bilərik. Teorem 1-ə əsasən hökm etmək olar ki, $X = L(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+s})$. Teorem 4 isbat olundu.

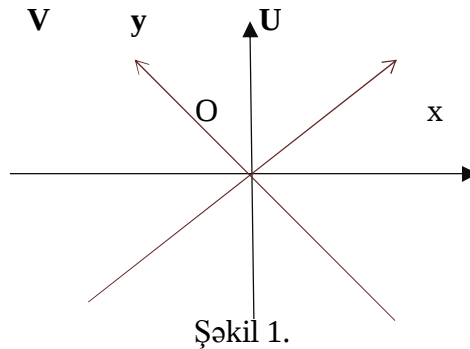
§3. Alt fəzaların cəmi və düz cəmi

Tutaq ki, $\langle X, K \rangle$ xətti fəzası və onun iki X_1 və X_2 alt fəzaları verilmişdir. $\langle X, + \rangle$ cəbri kommutativ qrupdur. Buna görə də $X_1 + X_2$ cəmi alt qrup olacaqdır. İxtiyari $\alpha \in K$ üçün $\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$ olduğu üçün $X_1 + X_2$ cəmi skalyara vurma əməlinə görə qapalıdır. Beləliklə, $\langle X_1 + X_2, K \rangle$ cütü xətti alt fəzadır. Bu fəza X_1 və X_2 alt fəzalarının cəmi adlanır.

Tərif. Əgər hər bir $x \in X_1 + X_2$ vektoru yeganə qayda ilə $x = u + v$, ($u \in X_1$ və $v \in X_2$) cəmi şəklində göstərilə bilərsə, onda $X_1 + X_2$ cəmi X_1 və X_2 alt fəzalarının düz cəmi adlanır və $X_1 \oplus X_2$ kimi işarə olunur.

Misallar. 1. Müstəvi üzərində verilmiş düzbucaqlı Dekart koordinat sistemində koordinat başlanğıcından keçən və qarşılıqlı perpendikulyar iki düz xətt götürək (bu düz xətlər uyğun olaraq U və V xətti alt fəzalarını doğurur (şəkil 1.)). Analitik həndəsədən məlum olduğu kimi $R^2 = U \oplus V$.

2. F hərfi ilə bütün $ax + b$ şəklində həqiqi əmsallı xətti funksiyalar çoxluğunu



işarə edək. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, F toplama və ədədə vurma əməllərinə nəzərən xətti fəzadır. $y = ax$ kimi xətti funksiyalar və $y = b$ kimi sabit funksiyalar çoxluqları F -də xətti alt fəzalardır. F fəzası bu iki fəzanın düz cəmidir: $F = Rx + R$.

Teorem 1. Alt fəzaların kəsişməsi alt fəzadır.

Bu teorem daha ümumi teoremin – alt cəbrlərin kəsişməsinin alt cəbr olması haqda teoremin xüsusi halıdır və ayrılıqda da asanlıqla isbat oluna bilər.

Aşağıdakı teorem iki alt fəzanın cəminin düz cəm olması əlamətini verir.

Teorem 2. X_1 və X_2 eyni bir X fəzasının alt fəzaları olarsa, onda $X_1 + X_2$ cəminin düz cəm olması üçün $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ olması zəruri və kafi şərtədir.

İsbati. Əvvəlcə fərz edək ki, $X_1 + X_2 = X_1 \oplus X_2$. Göstərək ki, $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Bunun üçün əvvəlcə qeyd edək ki, kəsişmə boş deyil və həmişə 0 elementinə malikdir. İxtiyari $a \in X_1 \cap X_2$ elementi qeyd edək. $a = a + 0 = 0 + a$ bərabərlikləri göstərir ki, $a = 0$ olmalıdır, əks halda, a elementi üçün iki müxtəlif göstəriliş mövcud olardı.

İndi isə fərz edək ki, $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Əgər $x_1 + y_1, x_1 \in X_1 \wedge y_1 \in X_2$ cəmi üçün başqa belə göstəriliş olarsa, onda yazı bilərik: $x_1 + y_1 = x_2 + y_2, x_2 \in X_1 \wedge y_2 \in X_2$ və ya $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$. Brabərliyin sol tərəfindəki fərq X_1 -ə, sağ tərəfindəki fərq isə X_2 -yə daxildir. Lakin hər iki fərq eyni bir elementi göstərir və buna görə də hər iki alt fəzaya daxildir. Lakin bu alt fəzaların ancaq bir ortaq elementi var və bu element 0-dır. Beləliklə, $x_1 - x_2 = y_2 - y_1 = 0$ və yaxud $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$. Teorem 2 isbat olundu.

Teorem 3. Tutaq ki, n -ölçülü X xətti fəzası özünün iki alt fəzasının düz cəmidir:

$$X = X_1 \oplus X_2; \dim X_1 = k, \dim X_2 = s.$$

Əgər $x_1, \dots, x_k$ sistemi X_1 fəzasının, $x_{k+1}, \dots, x_{k+s}$ sistemi isə X_2 fəzasının bazisi olarsa, onda $n = k + s$ olmaqla, $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+s}$ sistemi X xətti fəzasının bazisi olar.

İsbati. İxtiyari $x \in X$ vektoru götürək. Bu vektoru yeganə qayda ilə

$$x = u + v; u \in X_1, v \in X_2$$

şəklində göstərmək olar. Bazisin tərifinə görə $u = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$ və $v = \alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_{k+s} x_{k+s}$ göstərilişləri vardır və yeganədir. Beləliklə,

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_{k+s} x_{k+s},$$

yəni $x \in L(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+s})$. Deməli,

$$X \subset L(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+s}).$$

Asanlıqla əks münasibətin, yəni $X \supset L(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+s})$ daxil olmasının doğruluğu isbat oluna bilər. İndi göstərək ki, $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+s}$ sistemi xətti asılı deyil. Fərz edək ki,

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_{k+s} x_{k+s} = 0.$$

$u = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$ və $v = \alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_{k+s} x_{k+s}$ işarə edək. Düz cəmin tərifinə əsasən, $0 = u + v$ bərabərliyindən $u = v = 0$ alırıq. Lakin, $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0 \rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ və $\alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_{k+s} x_{k+s} = 0 \rightarrow \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_{k+s} = 0$. Alınan münasibətlər göstərir ki,

$x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+s}$ sistemi xətti asılı deyil və $X = L(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ olduğundan o, bazis təşkil edir. Beləliklə, $n = k + s$. Teorem 3 isbat olundu.

§4. Bir bazisdən digərinə keçid.

X xətti fəzasında hər hansı $x_1, x_2, \dots, x_n$ bazisi və bununla birlikdə başqa $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ bazisi götürək. $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ vektorlarını əvvəlki bazisin vektorları üzrə ayıraq:

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_{11}x_1 + f_{21}x_2 + \dots + f_{n1}x_n, \\ x'_2 &= f_{12}x_1 + f_{22}x_2 + \dots + f_{n2}x_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x'_n &= f_{1n}x_1 + f_{2n}x_2 + \dots + f_{nn}x_n. \end{aligned} \quad (1)$$

(1) ayrılışının əmsallarından düzələn transponirə edilmiş aşağıdakı matrisi yazaq:

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Əgər simvolik $(x) = (x_1, \dots, x_n)$, $(x') = (x'_1, \dots, x'_n)$ sətrlərini daxil etsək, onda (1) bərabərliklərini aşağıdakı simvolik bərabərliklə əvəz etmək olar:

$$(x') = (x)F.$$

Tərif. F matrisi birinci bazisdən ikinci bazisə keçid matrisi adlanır.

İxtiyari x vektorunun $x_1, \dots, x_n$ bazisində koordinat sütununu $\bar{x}$, $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ bazisində isə koordinat sütununu $\bar{x}'$ ilə işarə edək. Onda yazı bilərik:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \\ x &= \lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2 + \dots + \lambda'_n x'_n. \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$$

olacaqdır. (1) düsturlarını $x = \lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2 + \dots + \lambda'_n x'_n$ bərabərliyində yerinə yazaq.

$$\begin{aligned} x &= \lambda'_1 (f_{11}x_1 + f_{21}x_2 + \dots + f_{n1}x_n) + \lambda'_2 (f_{12}x_1 + f_{22}x_2 + \dots + f_{n2}x_n) + \dots + \\ &\quad + \lambda'_n (f_{1n}x_1 + f_{2n}x_2 + \dots + f_{nn}x_n). \end{aligned}$$

Mötərizələri açaraq bazis vektorlar üzrə yenidən qruplaşdırma aparaq:

$$x = (f_{11}\lambda'_1 + f_{12}\lambda'_2 + \dots + f_{1n}\lambda'_n)x_1 + (f_{21}\lambda'_1 + f_{22}\lambda'_2 + \dots + f_{2n}\lambda'_n)x_2 + \dots + \\ + (f_{n1}\lambda'_1 + f_{n2}\lambda'_2 + \dots + f_{nn}\lambda'_n)x_n.$$

Vektorun basisdə koordinat sütunu yeganə olduğu üçün alınan koordinatları əvvəlki koordinatlarla bərabərləşdirərək, koordinatların aşağıdakı çevirmə düsturlarını alırıq:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= f_{11}\lambda'_1 + f_{12}\lambda'_2 + \dots + f_{1n}\lambda'_n, \\ \lambda_2 &= f_{21}\lambda'_1 + f_{22}\lambda'_2 + \dots + f_{2n}\lambda'_n, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \lambda_n &= f_{n1}\lambda'_1 + f_{n2}\lambda'_2 + \dots + f_{nn}\lambda'_n. \end{aligned} \quad (2)$$

(2) düsturları koordinatlar üçün *çevirmə düsturları* adlanır. Bu düsturlar ikinci bazis üzrə koordinatlarından birinci bazis üzrə koordinatlara keçməyə imkan verir. Keçid matrisinin köməyi ilə (2) bərabərliklər sistemini belə yazmaq olar:

$$\bar{x} = F\bar{x}'.$$

Misal. Müstəvi üzərində düzbucaqlı Dekart koordinat sistemini götürək. Koordinat oxlarını O nöqtəsi ətrafında φ bucağı qədər döndərməklə alınan yeni $\{e'_1, e'_2\}$ bazisinə keçək.

Keçid matrisi yuxarda olduğu kimi e'_1, e'_2 vektorlarının $\{e_1, e_2\}$ bazisində koordinat sütunları ilə müəyyən olunur. e'_1 vektorunun e_1 üzərində proyeksiyası $\cos \varphi$ olan vektordur. Onun e_2 üzərində proyeksiyası isə

$$\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin \varphi$$

olacaqdır. Deməli, e'_1 vektorunun koordinat sütunu

$$\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

şəklindədir. Analoji olaraq tapırıq:

$$\bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Beləliklə, keçid matrisi aşağıdakı kimidir:

$$F = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Eyni zamanda

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Beləliklə, hər hansı x vektorunun $\{e_1, e_2\}$ bazisində λ_1, λ_2 koordinatları ilə $\{e'_1, e'_2\}$ bazisində λ'_1, λ'_2 koordinatları arasında aşağıdakı əlaqə vardır:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda'_1 \cos \varphi - \lambda'_2 \sin \varphi, \\ \lambda_2 &= \lambda'_1 \sin \varphi + \lambda'_2 \cos \varphi.\end{aligned}$$

və ya

$$\begin{aligned}\lambda'_1 &= \lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi, \\ \lambda'_2 &= -\lambda_1 \sin \varphi + \lambda_2 \cos \varphi.\end{aligned}$$

Teorem 1. Keçid matrisi qeyri-məxsusidir.

İsbati. İxtiyari x vektorunun həm birinci və həm də ikinci bazisdə koordinat sütunları birqiymətli təyin olunmuşdur. Deməli, $\bar{x} = F\bar{x}'$ bərabərliyi bu koordinat sütunları arasında biyektiv uyğunluq müəyyən edir. Eyni qayda ilə ikinci bazisi əsas qəbul edərək, bundan birinci bazisə keçid matrisini G ilə işarə edək. Yuxarıda deyilənlərə əsasən $\bar{x}' = G\bar{x}$. Onda

$$\bar{x} = FG\bar{x}$$

bərabərliyi ixtiyari $\bar{x}$ koordinat sütunu üçün doğrudur. Xüsusi halda $\bar{x} = \bar{e}_1$ götürərək, tapırıq:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (FG)_1.$$

Eyni qayda ilə, $\bar{x} = \bar{e}_i$ olarsa, onda $\bar{e}_i = (FG)_i$. Deməli, $FG = E$ və ya $1 = \det F \cdot \det G$. Beləliklə, həm F və həm də G matrisləri qeyri-məxsusidir. Teorem 1 isbat olundu.

Biz eyni zamanda aşağıdakı teoremi isbat etdik.

Teorem 2. Əgər birinci bazisdən ikinciye keçid matrisi F olarsa, onda ikinci bazisdən birinciye keçid matrisi F^{-1} olar.

Teorem 3. Əgər birinci bazisdən ikinciye keçid matrisi F , ikinci bazisdən üçüncüyə keçid matrisi isə G olarsa, onda birinci bazisdən üçüncüyə keçid matrisi FG olar.

Teoremin isbatı teorem 1-in mühakimələrinin bir qədər dəyişdirilməsi yolu ilə alınır.

§5. Bircins xətti tənliklər sistemi.

Bircins xətti tənliklər sistemi aşağıdakı şəkildə sistemə deyilir:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0.\end{aligned} \quad (3)$$

Bu sistem

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (4)$$

xətti tənliklər sistemində $\bar{b}$ vektorunu 0 vektorla əvəz etməklə alınır. (4) sistemi qeyri-bircins sistem, (3) isə ona uyğun olan bircins sistem adlanır. Bu iki sistemin həllər çoxluqları arasında sıx əlaqə vardır. Bu əlaqəni öyrənmək üçün əvvəlcə (3) sisteminin həllər çoxluğunun quruluşunu aydınlaşdırırıq.

Hər şeydən əvvəl qeyd edək ki, (4) sistemindən fərqli olaraq, (3) sistemi həmişə uyşandır, çünki onun trivial (sıfır) həlli vardır. M ilə (3) sisteminin həllər çoxluğunu işarə edək. Bu çoxluğun əsas xassələri aşağıdakı teoremlərlə ifadə olunur.

Teorem 1. Əgər $\bar{x}_1$ və $\bar{x}_2$ bircins sistemin həllidirsə, onda onların cəmi də həmin sistemin həllidir, yəni

$$\bar{x}_1 \in M \wedge \bar{x}_2 \in M \rightarrow \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in M.$$

İsbati. Şərtə əsasən yazıla bilər: $A\bar{x}_1 = 0 \wedge A\bar{x}_2 = 0$. Bu bərabərlikləri tərəf –tərəfə toplasaq alırıq:

$$A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = 0.$$

Bu isə o deməkdir ki, $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ cəmi də sistemin həllidir. Teorem 1 isbat olundu.

Eyni qayda ilə asanlıqla aşağıdakı teorem də isbat oluna bilər.

Teorem 2. Əgər $\bar{x}_0$ bircins sistemin həllidirsə, onda onun skalyara hasili də həmin sistemin həllidir, yəni

$$\bar{x}_0 \in M \rightarrow (\forall c \in K)(c\bar{x}_0 \in M).$$

Teorem 3. n dəyişənli bircins sistemin M həllər çoxluğu K^n fəzasının alt fəzasıdır.

İsbati. Tutaq ki, $\bar{x}, \bar{y} \in M$. Onda yuxarıdakı teoremlərə əsasən, $\bar{x} - \bar{y} \in M$, yəni M çoxluğu additiv alt qrupdur. O həm də skalyara vurma əməlinə nəzərən qapalıdır. Deməli, M çoxluğu alt fəzadır. Teorem 3 isbat olundu.

Sonlu ölçülü xətti fəzanın alt fəzası kimi M həllər alt fəzası sonlu ölçülü xətti fəzadır. Buna görə də onun ölçüsünü və bazisini müəyyən etmək mümkündür. Bu məsələlər bir –biri ilə sıx bağlıdır və aşağıdakı teoremin köməyi ilə həll oluna bilər.

Teorem 4. Tutaq ki, (3) sisteminin matrisinin rəngi r -dir. Onda həllər alt fəzasının ölçüsü $n - r$ -ə bərabərdir: $\dim M = n - r$.

İsbati. Tutaq ki, A matrisini bazis minoru sol yuxarı küncdə yerləşmişdir, əks halda sistemin tənliklərinin yerini dəyişərək və lazım gələrsə dəyişənləri yenidən nömrələyərək, buna nail olmaq olar. Bazis minorun tərtibi r -ə bərabərdir. Bazis minorun əsas xassəsinə görə A

matrisinin bütün sətirləri bazis minor yerləşən sətirlərin, yəni $A^1, \dots, A^r$ sətirlərinin xətti kombinasiyasıdır. Tutaq ki, hər hansı i nömrəli sətir üçün ($i > r$)

$$A^i = c_1 A^1 + \dots + c_r A^r.$$

Sistemin 1-ci tənliyini c_1 -ə, 2-ci tənliyini c_2 -yə, və i. a., r -ci tənliyini c_r -ə vuraraq, i nömrəli sətirdən çıxsaq, bu sətir tamamilə sıfır çevrilər. Beləliklə, verilən (3) sistemi ilk r tənlikdən ibarət sistem ilə eynigüclüdür. Həmin sistemi açıq şəkildə yazaq:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Əgər $x_{r+1}, \dots, x_n$ dəyişənləri daxil olan bütün hədləri (5) sisteminin bütün tənliklərində bərabərliklərin sağ tərəfinə keçirsək, onda aşağıdakı yeni sistemi alarıq:

$$A_1 \bar{x}_1 = -A_2 \bar{x}_2; \quad (6)$$

burada A_1 bazis minorun matrisi, A_2 isə aşağıdakı matrisdir

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{1,r+1} & a_{1,r+2} & \dots & a_{1n} \\ a_{2,r+1} & a_{2,r+2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,r+1} & a_{r,r+2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix};$$

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$\bar{x}_2 \in K^{n-r}$ vektorunun hər bir qiymətində Kramer qaydasına əsasən (6) sisteminin yeganə həlli vardır və bu həll

$$\bar{x}_1 = -A_1^{-1} A_2 \bar{x}_2 \quad (7)$$

düsturu ilə tapıla bilər. Bu bərabərlik M həllər çoxluğu ilə K^{n-r} ədədi xətti fəzası arasında biyektiv inikas müəyyən edir (çünki müxtəlif x -lər üçün eyni $\bar{x}_1$ vektoru alınsa belə $\bar{x}' = (\bar{x}'_1, \bar{x}'_2)$ vektoru müxtəlif qiymətlər alır). M həllər çoxluğunu isə aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$M = \{ \bar{x}' = (\bar{x}'_1, \bar{x}'_2) \mid \bar{x}_1 = -A_1^{-1} A_2 \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_2 \in K^{n-r} \}. \quad (8)$$

K^{n-r} fəzasının bazisi belə bir sistemdir: $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{e}_{n-r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Asanlıqla yəqin etmək

olar ki, $\bar{x}_j = \bar{e}_j, j = 1, \dots, n-r$ götürsək, onda

$$\bar{x}_1 = -(A_1^{-1}A_2)_j$$

alırıq, yəni $\bar{x}_2$ vektoru bazis vektorlara bərabər qiymət aldıqda $\bar{x}_1$ vektoru $A_1^{-1}A_2$ matrisinin

uyğun sütununa bərabər qiymət alır. Beləliklə, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_{n-r}$ bazis vektorlarına uyğun olan həllərdən ibarət sütun vektorları bir sütunda yazsaq, aşağıdakı matrisi alırıq:

$$\begin{pmatrix} -A_1^{-1}A_2 \\ E_{n-r} \end{pmatrix};$$

bu matrisin aşağıda yerləşən bloku $n-r$ tərtibli vahid matrisdir. Onun rəngi E_{n-r} bazis minorunun tərtibinə, yəni $n-r$ -ə bərabərdir. Deməli, bu matrisin sütunları xətti asılı deyil. Beləliklə, onların xətti örtüyü $n-r$ ölçülü xətti fəza kimi K^{n-r} fəzasına izomorfdur. Lakin bu xətti örtük teorem 1, və 2-yə əsasən M alt fəzasına daxildir. (8) münasibəti göstərir ki, tərsinə hər bir həll həmin xətti örtüyə daxildir. Deməli, $\dim M = n-r$. Teorem 4 isbat olundu.

Bircins xətti tənliklər sisteminin matrisinin bazis minoruna daxil olan sütunlara uyğun olan (yəni eyni nömrəyə malik olan) dəyişənlər baş dəyişənlərdir, qalan dəyişənlərə isə sərbəst dəyişənlərdir. Baş dəyişənlər də, bazis minor kimi, birqiymətli təyin olunmur, lakin onların sayı bazis minorun tərtibinə, yəni sistemin matrisinin rənginə bərabərdir.

Tərif. Bircins xətti tənliklər sisteminin həllər alt fəzasının bazisi onun *fundamental həllər sistemi* adlanır.

Misal. Aşağıdakı bircins xətti tənliklər sisteminin həllər fəzasının ölçüsünü və fundamental həllər sistemini tapaq:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Sistemin matrisinin rəngini tapaq:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beləliklə, rang 2-yə bərabərdir. Bazis minor olaraq sol yuxarı küncdəki minoru götürmək olar. Onun matrisi belədir:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\det A_1 = -1$. Asanlıqla görmək olar ki, $A_1^{-1} = -\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Digər tərəfdən $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

$$-A_1^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Beləliklə, həllər alt fəzasının ölçüsü $4-2=2$ olmaqla, fundamental həllər sistemi aşağıdakı matrisin sütunlarıdır:

$$\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -6 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, onlar həqiqətən sistemin həlləridir.

Tutaq ki, qeyri-bircins $A\bar{x} = \bar{b}$ xətti tənliklər sistemi verilmişdir. Fərz edək ki, bu sistem uyuşandır və $\bar{x}_0$ onun hər hansı həllidir. $\det A \neq 0$ olarsa, həm bu sistemin və həm də uyğun bircins sistemin yeganə həlli vardır. Umumi halda isə sistem qeyri-müəyyən ola bilər və bu halda sistemin başqa bir $\bar{x}$ həlli də vardır. Beləliklə, $A\bar{x} = \bar{b}$ və $A\bar{x}_0 = \bar{b}$. Bu iki bərabərlikləri tərəf-tərəfə çıxsaq alarıq:

$$A(\bar{x} - \bar{x}_0) = 0.$$

Beləliklə, $\bar{x} - \bar{x}_0$ vektoru verilmiş sistemə uyğun olan bircins sistemin həllidir. Onda, bircins sistemin elə $\bar{a} \in M$ həlli var ki, $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{a}$. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, tərsinə, əgər $\bar{x}_0$ qeyri-bircins sistemin hər hansı qeyd olunmuş həlli, $\bar{a}$ isə uyğun bircins sistemin ixtiyari həlli olarsa, onda $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{a}$ vektoru qeyri-bircins sistemin həllidir. Biz aşağıdakı teoremi isbat etdik.

Teorem 5. Qeyri-bircins xətti tənliklər sisteminin ixtiyari $\bar{x}_0$ həlli verilərsə, onda $\bar{x} \in K^n$ vektorunun bu sistemin həlli olması üçün onun qeyd olunmuş $\bar{x}_0$ həlli ilə uyğun bircins sistemin müəyyən bir həllinin cəmi şəklində göstərilə bilməsi zəruri və kafi şərtidir.

Teoremi bir misala tətbiq edək. Yoxlamaq olar ki, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 4, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 10, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 10, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 16. \end{aligned}$$

sisteminin bir həllidir. Uyğun bircins sistemin fundamental həllər sistemi yuxarıda tapılmışdır:

$$\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -6 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deməli, sistemin ümumi həlli belədir: $x_1 = 1 + 8u - 7t, x_2 = 1 - 6u + 5t, x_3 = 1 + u, x_4 = 1 + t$.

Asanlıqla bu ədədlərin sistemi ödədiyini yoxlamaq olar.

II Hissə

I FƏSİL. Xətti inikaslar və operatorlar

§1.Xətti inikaslar

Sonlu ölçülü X və Y xətti fəzalarının eyni bir K meydanı üzərində verildiyini fərz edək. $f : X \rightarrow Y$ ilə X çoxluğunda təyin olunmuş hər hansı inikası işarə edək.

Tərif 1. Aşağıdakı iki şərt ödənərsə, onda f inikası xətti inikas adlanır:

$$1)(\forall a, b \in X)(f(a+b) = f(a) + f(b))$$

$$2)(\forall \lambda \in K)(\forall a \in X)(f(\lambda a) = \lambda f(a))$$

X və Y xətti fəzalar olduğu üçün, onlar $+$ əməllərinə görə (qeyd edək ki, hər iki fəzanın əməli eyni cür işarə olunmuşdur və bu ümumiliyi pozmadan sadəlik üçün edilir) komutativ qrup təşkil edir.

1)şərti onu göstərir ki, f inikası additiv qrupların homomorfizmidir. Hər bir $\lambda \in K$ üçün $a \rightarrow \lambda a$ inikası unar əməldir və 2) şərti göstərir ki, f inikası skalyara vurma əməlini də saxlayır. Buna görə də xətti inikas bəzən X və Y xətti fəzalarının cəbrlər kimi homomorfizmi də adlanır. Bütün belə inikaslar çoxluğu $Hom(X, Y)$ kimi işarə olunur.

Misallar. 1. İxtiyari $x \in X$ vektoru üçün $f(x) = 0$ kimi təyin olunan inikas xətti inikasdır. Bu inikas *sıfır inikas* adlanır.

2. $X = Y$ olduqda $f : X \rightarrow Y$ inikasını $f(a) = a$ kimi təyin edək. Bu inikas xətti inikasdır və X fəzasının özünə *vahid inikas* və ya *eynilik inikas* adlanır. Bu inikas ε kimi işarə olunur: $\varepsilon(a) = a$.

3. X fəzasının özünə $f(x) = \lambda x$ $\lambda \neq 0$ kimi verilən inikas xətti inikasdır. Doğrudan da,

$$f(a+b) = \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b = f(a) + f(b)$$

Bu inikas əmsalı λ olan *homotetiya* adlanır. $\lambda = 0$ olarsa, 0 inikas, $\lambda = 1$ olarsa isə vahid inikas alınır.

4. $X = R^n$ ədədi xətti fəzasında ixtiyari $\bar{x} \in R^n$ vektoru üçün

$$f(\bar{x}) = A\bar{x}$$

kimi xətti inikas müəyyən edək; burada A n tərtibli matrisdir.

5. Koordinat müstəvisində hər bir a vektoruna onun Ox oxu üzərində proyeksiyasını qarşı qoyaq. Belə inikas xətti inikasdır (bax şəkl.1).

Bu hökmün doğruluğunu göstərmək üçün daha ümumi şəkildə mühakimə aparaq. Fərz edək ki, X fəzası iki U və V fəzalarının düz cəmi şəklində göstərilmişdir: $X = U \oplus V$. Deməli, X fəzasının hər bir a vektoru yeganə qayda ilə $a = u + v$ kimi göstərilə bilər ki, burada $u \in U, v \in V$. Hər bir a vektoruna onun birinci komponentini, yəni u -nu qarşı qoyaq. Bu zaman $u = f(a)$ kimi işarə olunan $f : X \rightarrow U$ xətti inikasını alırıq. Doğrudan da, ixtiyari a və b elementləri üçün yeganə göstərişləri yazaq

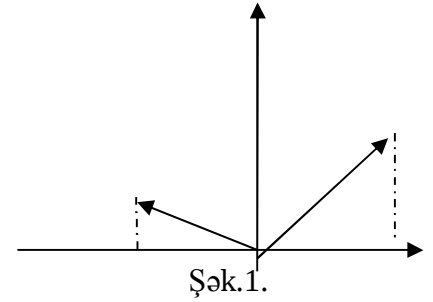
$$a = u + v, b = u' + v',$$

yəni $f(a) = u, f(b) = u'$. Onda,

$$a + b = (u + u') + (v + v').$$

Deməli,

$$f(a + b) = u + u' = f(a) + f(b).$$



Bu inikas X fəzasının U alt fəzasına proyeksiyası adlanır.

6. İki ölçülü R^2 fəzasında hər hansı $\bar{a} = (1;1)$ vektorunu qeyd edək. İxtiyari $\bar{x} = (x_1; x_2) \in R^2$ vektoru üçün $f : R^2 \rightarrow R$ inikasını $f(\bar{x}) = \bar{a} \cdot \bar{x}$ skalyr hasilı kimi təyin edək. Onda biz R^2 fəzasının birölçülü R fəzasına $f(\bar{x}) = x_1 + x_2$ kimi verilən xətti inikasını alırıq.

7. A ilə 2×3 ölçülü

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

matrisini işarə edək. $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}$ bərabərliyi ilə təyin olunan inikas R^3 fəzasının R^2 xətti fəzasına xətti inikasındır.

8. Ümumi halda $A \in R^{m \times n}$ ixtiyari $m \times n$ ölçülü mtris olarsa, onda istənilən $\bar{x} \in R^n$ vektorunu $\bar{y} = f(\bar{x}) = A\bar{x} \in R^m$ vektoruna çevirən f inikası xətti inikasdır. Doğrudan da, mat-

rislər üzərində əməllərin xssələrinə əsasən

$$A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2 \quad \text{və} \quad A(\lambda\bar{x}) = \lambda A\bar{x}.$$

9. $C^1(0,1)$ ilə $(0,1)$ aralığında diferensiallanan həqiqi funksiyalar çoxluğunu işarə edək. Məlumdur ki, $\langle C^1(0,1), R \rangle$ cütü həqiqi ədədlər meydanı üzərində xətti fəzadır. $f \in C^1(0,1)$ həqiqi funksiyası üçün $D: f \mapsto f'$ inikası $\langle C^1(0,1), R \rangle$ fəzasının kəsilməz funksiyaların $\langle C(0,1), R \rangle$ xətti fəzasına xətti inikasıdır. Doğrudan da, bu inikasın xətti olması diferensillamanın aşağıdakı xassələrindən alınır:

$$1) D(f + g) = D(f) + D(g);$$

$$2) D(\lambda f) = \lambda D(f).$$

Diferensialların funksiya kəsilməz olduğu üçün bu inikasın qiymətlər oblastı həqiqətən $C(0,1)$ çoxluğudur.

§2. Xətti inikasın varlıq teoremi.

Teorem 1. X və Y uyğun olaraq, n və m ölçülü xətti fəzalar və $x_1, x_2, \dots, x_n$ X fəzasının bazisi olarsa, ixtiyari $c_1, \dots, c_n \in Y$ vektorları üçün elə yeganə $f: X \rightarrow Y$ xətti inikası var ki,

$$f(x_1) = c_1, f(x_2) = c_2, \dots, f(x_n) = c_n.$$

İsbati: Əvvəlcə $f(x_1) = c_1, f(x_2) = c_2, \dots, f(x_n) = c_n$ qəbul edərək, teoremin şərtini ödəyən heç olmasa bir f xətti inikasını quraq. İxtiyari $x \in X$ vektoru götürək və onu bazis vektorlar üzrə ayıraq. Qeyd edək ki, bu ayrılış yeganə qayda ilə yerinə yetirilə bilər:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

f inikasının x vektorunda aldığı qiyməti (xəttiliyinə əsasən) belə təyin edək:

$$f(x) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_n c_n.$$

Beləkilə, biz ixtiyari x vektoruna yeganə bir $f(x) \in Y$ vektorunu qarşı qoymuş oluruq və deməli, $f: X \rightarrow Y$ inikasını alırıq. Əvvəlcə göstərək ki, bu inikas xətti inikasdır. Buna görə başqa bir

$$x' = \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \dots + \lambda'_n x_n$$

vektoru götürək. Xəttiliyə əsasən yazı bilərik:

$$f(x+x') = f((\lambda + \lambda'_1)x_1 + \dots + (\lambda_n + \lambda'_n)x_n) =$$

$$= (\lambda_1 + \lambda'_1)c_1 + \dots + (\lambda_n + \lambda'_n)c_n = f(x) + f(x'),$$

$$f(\lambda x) = f(\lambda \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda \lambda_n x_n) = \lambda \lambda_1 c_1 + \lambda \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda \lambda_n c_n = \lambda f(x).$$

Deməli, teoremin şərtini ödəyən heç olmasa bir xətti inikas vardır. Fərz edək ki, başqa belə f_1 xətti inikası da vardır. Onda

$$f_1(x) = f_1(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f_1(x_1) + \dots + \lambda_n f_1(x_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n = f(x).$$

Beləliklə, $f_1 = f$. Teorem 3 isbat olundu.

Nəticə. Əgər $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorlar sistemi X fəzasının bazisi olarsa və f, g xətti inikasıları üçün

$$f(x_1) = g(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_n) = g(x_n)$$

bərabərlikləri doğru olarsa, onda f və g xətti inikasıları bir-birinə bərabərdir.

§3. Xətti inikaslar üzərində əməllər

Tutaq ki, K meydanı üzərində n ölçülü X xətti fəzası və m ölçülü Y xətti fəzası verilmişdir. və $f, g \in \text{Hom}(X, Y)$ ixtiyari iki xətti inikasdır.

Tərif 1. f və g xətti inikalarının cəmi elə $h = f + g$ inikasına deyilir ki, ixtiyari $x \in X$ vektoru üçün

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

bərabərliyi doğru olsun; f xətti inikasının $\lambda \in K$ skalyarına hasili elə $h = \lambda f$ inikasına deyilir ki, ixtiyari $x \in X$ vektoru üçün

$$h(x) = \lambda f(x)$$

bərabərliyi doğru olsun.

Tərif 1 vasitəsi ilə müəyyən olunan hər iki inikas xətti inikasdır. Bunu cəm üçün göstərək. İxtiyari $x, y \in X, \lambda \in K$ elementləri üçün

$$\begin{aligned} h(x+y) &= f(x+y) + g(x+y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = \\ &= h(x) + h(y); \end{aligned}$$

Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, $h(\lambda x) = \lambda h(x)$.

Teorem 1. Xətti iniksların cəminin və skalyara hasilinin aşağıdakı xassələri vardır:

- 1) $f + g = g + f$;
- 2) $f + (g + h) = (f + g) + h$;
- 3) $f + 0 = 0 + f = f$;
- 4) $f + (-f) = 0$;
- 5) $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$;
- 6) $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$;
- 7) $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$;
- 8) $1 \cdot f = f$.

Teorem 1-in isbatı bilavasitə xətti inikslar üzərində təyin olunan əməllərin tərifindən alınır. Beləliklə, $Hom(X, Y)$ çoxluğunda toplama və skalyara vurma əməlləri təyin etdik. Sıfır xətti inikası toplama əməli üçün neytral element rolunu oynayır. $-f$ olaraq ixtiyari $x \in X$ elementini $-f(x)$ elementinə inikas edən xətti inikas qəbul olunur. Deməli, $Hom(X, Y)$ çoxluğu K meydanı üzərində xətti fəzaya çevrilmiş olur.

Tərif 1. f və g xətti operatorlarının hasili onların kompozisiyasına yəni elə $h = f \circ g$ inikasına deyilir ki, ixtiyari $x \in X$ vektoru üçün

$$h(x) = f(g(x))$$

bərabərliyi doğru olsun.

Aydındır ki, xətti iniksların hasili o zaman təyin oluna bilər ki, g inikasının qiymətlər oblastı f inikasının təyin oblastına daxil olsun. Qeyd etmək lazımdır ki, burada vuruqlar, iniksların kompozisiyası kimi ancaq göstərilən ardıcılıqla götürülməlidir.

Göstərək ki, xətti inikasların hasili xətti inikasdır. İxtiyari $f : X \rightarrow Y$ və $g : Y \rightarrow Z$ xətti inikasları üçün $x_1, x_2 \in X$ olduqda, xəttiliyə əsasən yazı bilərik:

$$f \circ g(x_1 + x_2) = f(g(x_1 + x_2)) = f(g(x_1) + g(x_2)) = f \circ g(x_1) + f \circ g(x_2).$$

Analoji olaraq:

$$f \circ g(\lambda x) = f(g(\lambda x)) = f(\lambda g(x)) = \lambda f \circ g(x).$$

Deməli, xətti inikasların kompozisiyası da xətti inikasdır. Xətti inikasların hasilini kompozisiya işarəsindən istifadə etmədən, adi hasil kimi işarə etmək qəbul olunmuşdur, yəni $f \circ g$ əvəzinə, sadəcə olaraq, fg yazılır.

§4. Xətti inikası matrisi.

Vektorların obrazının koordinat sütunları arasında əlaqə

Tutaq ki, n ölçülü X xətti fəzasından m ölçülü Y fəzasına təsir edən $f : X \rightarrow Y$ xətti inikası verilmişdir və $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorlar sistemi X fəzasının, $y_1, y_2, \dots, y_m$ sistemi isə Y fəzasının bazisidir. $f(x_1), \dots, f(x_n)$ vektorları, §2, teorem 1-ə əsasən, f xətti inikasını birqiymətli təyin edir. Bu vektorları $y_1, y_2, \dots, y_m$ bazis vektorları üzrə ayıraq:

$$f(x_1) = f_{11}y_1 + f_{21}y_2 + \dots + f_{m1}y_m,$$

$$f(x_2) = f_{12}y_1 + f_{22}y_2 + \dots + f_{m2}y_m, \quad (1)$$

.....

$$f(x_n) = f_{1n}y_1 + f_{2n}y_2 + \dots + f_{mn}y_m,$$

İxtiyari x vektorunun bazis vektorlar üzrə ayrılışını yazaq:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Bu ayrılışla həmin vektorun koordinat sütunu birqiymətli təyin olunur:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Xəttiliyə əsasən,

Beləliklə, biz aşağıdakı teoremi isbat etdik.

Teorem 1. f xətti inikasının verilmiş bazisdə matrisi F olarsa, onda ixtiyari $x \in X$ vektorunun bu bazisdə koordinat sütunu ilə onun obrazının koordinat sütunu arasında aşağıdakı münasibət vardır:

$$\overline{f(x)} = F\bar{x}.$$

Xüsusi halda, əgər $X=Y$ olarsa, onda xətti operatorun matrisi kvadrat matris olacaqdır. (5)-ə əsasən alırıq:

$$F_i = F\bar{e}_i;$$

burada

$$\bar{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Deməli, F matrisinin i nömrəli sütunu $f(x_i)$ vektorunun koordinat sütunudur. F matrisi f xətti inikası ilə birqiymətli təyin olunur.

Teorem 2. İxtiyari $x \in X$ vektoru üçün (5) bərabərliyini ödəyən matris yeganədir.

İsbatı. Tutaq ki, (5) bərabərliyini ödəyən başqa bir F' matrisi vardır. Beləliklə,

$$\overline{f(x)} = F\bar{x}, \quad \overline{f(x)} = F'\bar{x}.$$

Bu bərabərlikləri tərəf -tərəfə çıxaraq:

$$(F - F')\bar{x} = 0.$$

Sonuncu bərabərlik istənilən $\bar{x}$ vektoru üçün doğrudur. Xüsusi halda o, (6) ilə təyin olunan $\bar{e}_i$ vektorları üçün də doğrudur, yəni

$$(F - F')\bar{e}_i = (F - F')_i = 0.$$

Deməli, $F - F'$ matrisinin hər bir sütunu sıfır bərabərdir, yəni o sıfır bərabərdir. Teorem 2 isbat olundu.

§3, teorem 3 -dən istifadə etməklə görmək olar ki, tərsinə, F matrisi ilə f xətti inikası birqiymətli müəyyən olunur. Bu aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem 3. İxtiyari $F \in M^{m \times n}(K)$ matrisi üçün elə yeganə f xətti inikası tapmaq olar ki, verilmiş bazisdə onun matrisi F ilə üst-üstə düşsün.

İsbatı. Tutaq ki, X fəzasının bazisi $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorlar sistemi, Y fəzasının bazisi isə $y_1, y_2, \dots, y_m$ vektorlar sistemidir.

$$c_j = f_{1j}y_1 + f_{2j}y_2 + \dots + f_{mj}y_m; \quad j = 1, \dots, n$$

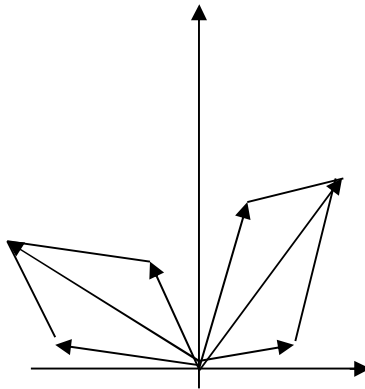
vektorlar sisteminə baxaq. Bu vektorların koordinat sütunları verilən matrisin sütunları ilə eynidir. Teorem 3-ə əsasən, elə yeganə f xətti inikası tapmaq olar ki, $f(x_j) = c_j$ olsun. Onda, yuxarıda deyilənlərə əsasən, bu xətti inikasın matrisinin sütunları c_j vektorlarının koordinat sütunları ilə, yəni F_j -lar ilə üst-üstə düşür. Teorem 3 isbat olundu.

§5. Xətti operator və onun matrisi

Tərif 1. $X=Y$ olduqda $f: X \rightarrow Y$ xətti inikası *xətti operator* adlanır.

§2, nəticə 1 və §4, teorem 1-3-ün hökmləri xətti operatorlar üçün də doğrudur. Bütün $f: X \rightarrow Y$ xətti inikaslar çoxluğunu $Hom(X, Y)$ kimi, X xətti fəzasında verilmiş bütün xətti operatorlar çoxluğunu isə $Hom(X)$ kimi işarə edəcəyik.

§1-də göstərilən misallar içərisində 1-5 bəndləri ilə təyin olunan xətti inikaslar uyğun fəzalarda təyin olunan xətti operatorlardır. Misal 6 –da müəyyən olunan xətti inikas isə tərif 1 mənada xətti operator deyil. Xətti operatorlara aid digər misalları nəzərdən keçirək.

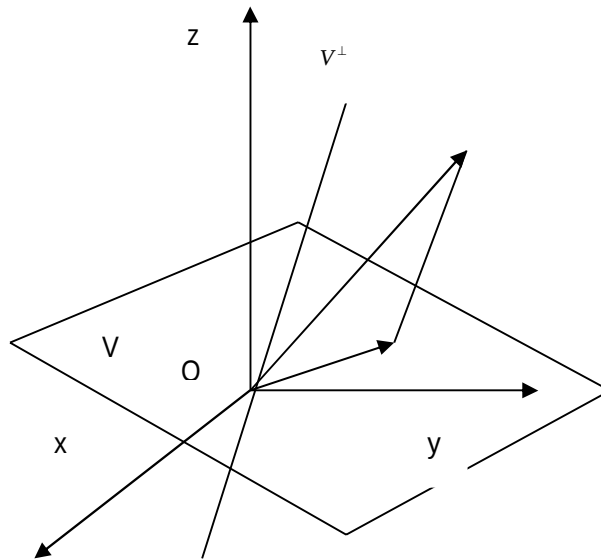


Şək. 1.

1. M hərfi ilə müstəvi üzərində iki ölçülü xətti fəzanı işarə edək. Fərz edək ki, f inikası koordinat müstəvisini koordinat başlanğıcı ətrafında α bucağı qədər döndərən xətti operatorudur. Belə dönmə zamanı təpəsi koordinat başlanğıcında olan paraleloqramın tərəfləri arasındakı bucaq dəyişmədiyindən iki vektorun cəmi onların obrazlarının cəminə inikas olunacaqdır. Deməli, baxılan inikas xətti operatorudur (şək.1). Aydın ki, bu inikas zamanı ancaq 0 vektor özünə inikas olunur. Buna görə də $\text{Ker} f = 0$. Hər bir vektor müəyyən bir vektorun (məhz bu vektordan $-\alpha$ bucağı qədər dönmə ilə alınan vektorun) obrazıdır. Deməli, $\text{Im } f$ bütün baxılan fəza ilə üst-üstə düşür.

2. Üçölçülü R^3 fəzasında koordinat başlanğıcından keçən hər hansı müstəvi götürək və onu V ilə işarə edək. Hər bir $\bar{x} \in R^3$ vektoruna V müstəvisi üzərində onun ortoqonal proyeksiyasını qarşı qoyaq (bax şək. 2). Asanlıqla bu inikası xətti inikas olduğunu yoxlamaq olar. Məsələn, $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ (burada A proyeksiya inikasını göstərir) bərabərliyi o deməkdir ki, iki vektorun cəminin proyeksiyası onların proyeksiyalarının cəminə bərabərdir.

Eyni qayda ilə sadə həndəsi mülahizələrlə göstərmək olar ki, $A(\lambda x) = \lambda Ax$. Qurulan inikası π_V kimi işarə edək. V müstəvisi üzərində düzbucaqlı Dekart koordinat sistemini elə götürək ki, koordinat başlanğıcı $(0,0,0)$ nöqtəsi ilə üst-üstə düşsün. Tutaq ki, $V^\perp(0,0,0)$ nöqtəsindən keçərək, V müstəvisinə perpendikulyar olan düz xətti göstərir. Bu halda yazı bilərik: $\text{Ker} \pi_V = V^\perp$ və $\text{Im } \pi_V = V$.



Şək.2

3. n -ölçülü ədədi xətti fəzaya baxaq. Məlumdur ki, burada hər bir vektor n elementli kortej kimi təyin olunur. Tutaq ki, A hər hansı n tərtibli matrisdir. Hər bir $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ vektoruna qarşı $y = Ax = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ vektorunu uyğun qoyaq. Burada η_i -lər

$$\eta_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k$$

düsturları basitəsi ilə hesablanır. Belə inikas xətti inikasdır.

4. Əvvəlki paraqrafda 5-ci bənddə müəyyən olunan D diferensiallama operatorunun nüvəsi $y' = 0$ diferensial tənliyinin $K[x]$ halqasında həllər çoxluğuudur. Bu bərabərliyi ancaq sıfır dərəcələ çoxhədlilər ödəyir. Deməli, $\text{Ker} D = K$. $\text{Im} D = K[x]$, çünki çoxhədlinin ibtidai funksiyası yenə də çoxhədlidir.

5. Dərəcəsi $n-1$ -i aşmayan çoxhədlilər çoxluğunun əmələ gətirdiyi xətti fəzaya baxaq. Bu fəzada 4-cü bənddə təyin olunan inikas xətti operatorudur.

$f: X \rightarrow X$ hər hansı xətti operator $x_1, x_2, \dots, x_n$ isə X xətti fəzasının bazisi olsun. $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ vektorları teorem 3-ə əsasən f operatorunu birqiymətli təyin edir. Bu vektorları X fəzasının bazis vektorları üzrə ayırıq:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f_{11}x_1 + f_{21}x_2 + \dots + f_{n1}x_n, \\ f(x_2) &= f_{12}x_1 + f_{22}x_2 + \dots + f_{n2}x_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f(x_n) &= f_{1n}x_1 + f_{2n}x_2 + \dots + f_{nn}x_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Xətti inikaslarda olduğu kimi, (1) bərabərliklərinin sağ tərəfindəki f_{ij} əmsallarından düzələn

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinin sütunları bazis vektorların obrazlarının koordinat sütunlarıdır.

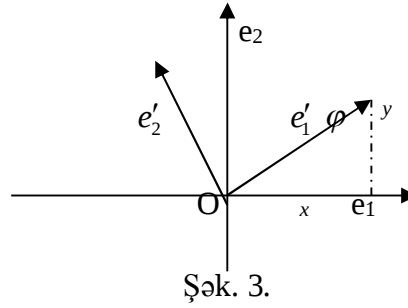
Tərif 2. F matrisinə f xətti operatorunun matrisi deyilir.

Xətti inikaslarda olduğu kimi, xətti operatorun da matrisi bazisdən asılıdır. Yalnız bazis verildikdən sonra xətti operatorun bu bazisdə matrisini yazmaq olar və bu matris bazisin dəyişməsi ilə dəyişir (bu dəyişmənin forması aşağıda müəyyən olunacaqdır).

Misal. Müstəvi üzərində hər hansı düzbucaqlı Dekart koordinat sistemi götürək. Müstəvini O koordinat başlanğıcı ətrafında φ bucağı qədər döndərən f inikasına baxaq. Bu inikas xətti operatorudur və onun matrisi, yuxarıda deyildiyi kimi, $\{e_1, e_2\}$ bazisində $\{\overline{f(e_1)}, \overline{f(e_2)}\}$ koordinat sütunları ilə müəyyən olunur.

Şəkil 3-dən görüldüyü kimi, $e'_1 = f(e_1)$ vektorunun koordinat sütunu aşağıdakı kimidir:

$$\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$



Eyni qayda ilə kimi, $e'_2 = f(e_2)$ vektorunun koordinat sütunu belədir:

$$\bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \pi/2) \\ \sin(\varphi + \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Deməli, baxılan xətti operatorun matrisi aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$F = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Biz daha ətraflı ancaq xətti operatorları öyrənəcəyik. Əvvəlcə xətti operatorların cəminin və skalyara hasilinin matrislərini tapaq.

Teorem 1. Xətti operatorların cəminin matrisi onların *matrislərinin cəminə* bərabərdir.

İsbatı. Tutaq ki, $A = (a_{ij})$ və $B = (b_{ij})$ matrisləri $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisində uyğun olaraq f və g xətti operatorlarının matrisləridir. Onda, ixtiyari $k=1, \dots, n$ üçün

$$A\bar{e}_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \bar{e}_i = A_k, B\bar{e}_k = \sum_{i=1}^n b_{ik} \bar{e}_i = B_k$$

yazmaq olar. Bu bazisə nəzərən $h = f + g$ xətti operatorunun matrisini $C = (c_{ij})$ kimi işarə etsək, yaza bilərik:

$$\overline{he_k} = C\bar{e}_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} \bar{e}_i,$$

$$\overline{he_k} = \overline{fe_k} + \overline{ge_k} = A\bar{e}_k + B\bar{e}_k = \sum_{i=1}^n (a_{ik} + b_{ik}) \bar{e}_i.$$

Buradan isə

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$

bərabərliyi alınır, çünki ixtiyari vektorun koordinat sütunu yeganədir. Teorem 1 isbat olundu.

Aşağıdakı teorem də eyni qayda ilə isbat olunur.

Teorem 2. Xətti operatorun skalyara hasilinin matrisi onun matrisinin skalyara hasilinə bərabərdir.

Teorem 3. Xətti operatorların hasilinin matrisi *bu operatorların matrisilərinin hasilinə* bərabərdir.

İsbatı. Məlumdur ki, verilən $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisində hər bir xətti operatora yeganə bir matris uyğun gəlir. Tutaq ki, f operatoruna (a_{ik}) matrisi, g operatoruna isə (b_{ik}) matrisi uyğundur. $h=fg$ operatoruna uyğun olan matrisi (c_{ik}) kimi işarə edək. Yuxarıda olduğu kimi, yaza bilərik:

$$\overline{he_k} = C\bar{e}_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} \bar{e}_i.$$

Bu sütun vektor üçün başqa ifadə də yazmaq olar:

$$\overline{he_k} = \overline{f(g(e_k))} = A(\overline{g(e_k)}) = A(B\bar{e}_k) = A \sum_{j=1}^n b_{jk} \bar{e}_j = \quad (2)$$

$$= \sum_{j=1}^n b_{jk} A\bar{e}_j = \sum_{j=1}^n b_{jk} \sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{e}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) \bar{e}_i.$$

Alınmış iki bərabərlikdə uyğun əmsallar bərabər olmalıdır. Buna görə də aşağıdakı münasibəti alırıq:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} . \quad (3)$$

Teorem 3 bununla isbat olundu.

Xətti operatorun matrisinin təyin olunmasına aid başqa misallar göstərək.

1. Tutaq ki, R –üç ölçülü fəzadır. A – operatoru olaraq, ixtiyari vektoru XOY müstəvisinə proyeksiyalayan inikası götürək. Bazis olaraq, koordinat oxları boyunca yönələn e_1, e_2, e_3 vektorlarını götürək. Onda

$$Ae_1 = e_1, Ae_2 = e_2, Ae_3 = 0$$

və beləliklə, A operatorunun bu bazisə nəzərən matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şəklində olar.

2. İndi isə vahid operatorun ixtiyari $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisində matrisini tapaq.

$$Ae_i = e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

olduğu üçün vahid operatorun ixtiyari bazisə nəzərən matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

şəklində olar.

3. Tutaq ki, X –fəzası dərəcəsi $n-1$ -i aşmayan çoxhədlilər çoxluğudur. f isə differensiallama operatorudur. Belə ki,

$$fP(t) = P'(t)$$

X fəzasında aşağıdakı bazisi seçək:

$$e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = \frac{t^2}{2!}, \dots, e_n = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Bu birhədlilərin bazis təşkil etməsi onların həqiqi ədədlər meydanı üzərində xətti asılı olmaması və onların xətti örtüyünün dərəcəsi $n-1$ -i aşmayan çoxhədlilər çoxluğuna bərabər olmasından alınır. Aşağıdakı bərabərliklər diferensiallama operatorunun tərifindən alınır:

$$fe_1 = 1' = 0, \quad fe_2 = t' = 1 = e_1, \quad fe_3 = \left(\frac{t^2}{2}\right)' = t = e_2, \dots, Ae_n = \left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)' = e_{n-1}.$$

Beləliklə, bu bazisdə operatorun matrisi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

şəklində olar.

§6. Xətti operatorun nüvəsi və obrazı.

Operatorun ranqı və defekti.

Tərif 1. X fəzasında $f(x) = 0$ şərtini ödəyən bütün x vektorlar çoxluğuna f xətti inikasının nüvəsi deyilir.

Tərifdən göründüyü kimi, f xətti inikasının nüvəsi X additiv qrupunda f homomorfizminin nüvəsi ilə üst-üstə düşür. Nüvə $\text{Ker } f$ kimi işarə olunur.

Teorem 1. f xətti inikasının nüvəsi X fəzasının alt fəzasıdır.

İsbatı. f xətti inikası additiv qrupların homomorfizmidir. Buna görə də onun nüvəsi X additiv qrupunda alt qrupdur. Deməli, göstərmək kifayətdir ki, bu alt qrup skalyara vurma əməlinə nəzərən qapalıdır. İxtiyari $x \in \text{Ker } f$ vektoru və $\lambda \in K$ skalyarı götürək.

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \cdot 0 = 0$$

olduğu üçün buradan tələb olunan $\lambda x \in \text{Ker } f$ münisibətini alırıq. Teorem 1 isbat olundu.

Fərz edək ki, $f : X \rightarrow Y$ xətti inikası verilmişdir. X fəzasında ixtiyarı $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorları götürək. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ skalyarlar olarsa, onda

$$f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n). \quad (1)$$

Tərif 2. $f(X)$ çoxluğuna f xətti inikasının *obrazı* deyilir.

Teorem 2. Xətti operatorun obrazı bazis vektorların obrazlarının xətti örtüyünə bərabərdir.

İsbatı. $a_1, a_2, \dots, a_n$ sistemi X fəzasının bazisi olarsa, onda onun hər bir x vektoru $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ şəklində yazıla bilər. (1) münasibətindən, xüsusi halda, görünür ki, bütün $f(x)$ vektorlar çoxluğu $\lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n)$ cəmləri çoxluğu ilə üst-üstə düşür. Deməli,

$$F(X) = L(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$$

Beləliklə, teorem 2 isbat olundu.

Nəticə. $F(X) \subset Y$ Y fəzasının alt fəzasıdır.

İsbatı. Teorem 1-ə əsasən, X fəzasının obrazı Y fəzasından olan vektorların xətti örtüyünə bərabərdir. Lakin vektorlar sisteminin xətti örtüyü alt fəzadır. Nəticə buradan alınır.

Tərif 3. f xətti operatorunun nüvəsinin ölçüsünə f xətti operatorunun *defekti*, obrazının ölçüsünə isə onun *ranqı* deyilir.

Defekti d , ranqı r ilə işarə etsək yazsa bilərik:

$$d = \dim(\text{Ker } f), \quad r = \dim(\text{Im } f).$$

Teorem 3. Əgər f n ölçülü X fəzasında təyin olunan xətti operator dursa, onda bu operatorun ranqı ilə defektinin cəmi n -ə bərabərdir.

İsbatı. Tutaq ki, f operatorunun N nüvəsinin ölçüsü k -ya bərabərdir. N -də $e_1, e_2, \dots, e_k$ bazisini götürək və bu bazisi fəzanın $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ bazisinədək tamamlayaq. $f(e_{k+1}), f(e_{k+2}), \dots, f(e_n)$ vektorlarına baxaq. Göstərək ki, $M = f(X)$ çoxluğu bu vektorların xətti örtüyü ilə üst-üstə düşür. Doğrudan da,

$$y \in L(f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)) \leftrightarrow (\exists \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K)(y = \lambda_{k+1} f(e_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(e_n)).$$

Buradan yazı bilirik:

$$y = f(\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n x_n) \in f(M).$$

İxtiyari

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n x_n$$

vektoru üçün

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k) + f(\lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n x_n) = \\ &= f(\lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_{k+1} f(e_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(x_n) \in \\ &\in L(f(e_{k+1}), \dots, f(x_n)), \end{aligned}$$

çünki, $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$ cəmi nüvəyə daxildir. Beləliklə, $M = L(f(e_{k+1}), \dots, f(x_n))$. Lakin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ skalyarları ixtiyari qiymətlər alarsa, onda $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n x_n$ cəmi xətti fəzanın bütün vektorlarını verir. Yuxarıdakı bərabərlikdən görünür ki, y vektoru ancaq $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ əmslləri ilə müəyyən olunur. Göstərək ki, $f(e_{k+1}), \dots, f(x_n)$ sistemi xətti asılı deyil. Fərz edək ki,

$$\lambda_{k+1} f(e_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0$$

və ya

$$f(\lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n x_n) = 0.$$

Onda, $\lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n x_n$ vektoru nüvəyə daxildir. Bu halda elə $\mu_1, \dots, \mu_k$ skalyarları tapmaq olar ki,

$$\lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n x_n - \mu_1 e_1 - \dots - \mu_k e_k = 0.$$

Sonuncu bərabərlik ancaq $\mu_1, \dots, \mu_k = \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n = 0$ olduqda mümkündür. Deməli, $f(e_{k+1}), f(e_{k+2}), \dots, f(e_n)$ vektorlar sistemi xətti asılı deyil. Onda, $\dim M = n - k$. Deməli, $\text{rang} f = \dim M = r = n - d$. Teorem 3 isbat olundu.

§7. Bir bazisdən digərinə keçid zamanı

xətti operatorun matrisinin dəyişməsi

f xətti operatoru n – ölçülü X xətti fəzasında, ümumiyyətlə, müxtəlif bazislərdə müxtəlif matrislərə malikdir. Bu matrislər arasında əlaqə yaradaq.

Teorem1. Əgər X fəzasında iki $x_1, x_2, \dots, x_n$ və $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ bazisləri verilərsə və birinci bazisdən ikinciyə keçid matrisi C olarsa, onda f xətti operatorunun birinci və ikinci bazisdə, uyğun olaraq, F və F' matrisləri arasında aşağıdakı münasibət vardır :

$$F' = C^{-1}FC$$

İsbatı. X fəzasında ixtiyari iki $x_1, x_2, \dots, x_n$ və $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ bazislərini götürək . Birinci bazisdə xətti operatorun matrisini F , ikinci bazisdə isə xətti operatorun matrisini F' ilə işarə edək. Birinci bazisdən ikinci bazisə keçid matrisini isə C ilə işarə edək:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Tutaq ki, birinci və ikinci bazislərdə xətti operatorun matrisləri uyğun olaraq,

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}, F' = \begin{pmatrix} f'_{11} & f'_{12} & \dots & f'_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & \dots & f'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{n1} & f'_{n2} & \dots & f'_{nn} \end{pmatrix}$$

şəklindədir. Məlumdur ki, keçid matrisindən istifadə etməklə ikinci bazisin vektorlarının birinci bazisdə aşağıdakı ayrılışlarını yazmaq olar:

$$\begin{aligned} x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \dots + c_{n1}x_n, \\ x'_2 &= c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{n2}x_n, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ x'_n &= c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \dots + c_{nn}x_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Yeni bazisdə isə koordinat sütunu

$$\overline{\xi'} = \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix}$$

olan vektorun 1- ci bazisdə koordinat sütunu

$$\overline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = C \overline{\xi'}$$

olacaqdır. İndi isə ixtiyari $x \in X$ vektorunu götürək və onun birinci və ikinci bazislərdə koordinat sütunlarını uyğun olaraq $\overline{x}$ və $\overline{x'}$ ilə işarə edək. $f(x)$ vektorunun isə koordinat sütunlarını uyğun olaraq $\overline{f(x)}$ və $\overline{f(x)'}'$ ilə işarə edək. Məlumdur ki, birinci bazisdə

$$\overline{f(x)} = F \overline{x}$$

və ikinci bazisdə isə

$$\overline{f(x)'} = F' \overline{x'}. \quad (1)$$

Lakin

$$\overline{x} = C \overline{x'}$$

və

$$\overline{f(x)} = C \overline{f(x)'}$$

olduğu üçün, yazı bilərik (C qeyri -məxsusi olduğundan)

$$C^{-1} \overline{f(x)} = \overline{f(x)'}.$$

(1) – dən alırıq:

$$C^{-1} \overline{f(x)} = C^{-1} F \overline{x} = C^{-1} F C \overline{x'}$$

$$\overline{f(x)'} = F' \overline{x'}$$

Nəticədə ixtiyari $\overline{x'}$ koordinat sütunu üçün

$$F'\overline{x'} = C^{-1}FC\overline{x'}$$

münasibətini alırıq. Xüsusi halda $\overline{x'} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ olarsa,

$$(F')_1 = (C^{-1}FC)_1$$

bərabərliyini alırıq. Bu göstərir ki, F' və $C^{-1}FC$ matrislərinin birinci sütunları eynidir. Anoloji olaraq, onların digər sütunların da eyni olduğunu göstərə bilərik. Deməli,

$$F' = C^{-1}FC$$

Beləliklə teorem 1 isbat olundu.

Misal. F xətti operatorunun $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bazisində matrisi verilmişdir:

$$F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu operatorndan

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bazisində matrisini tapaq. Bunun üçün əvvəlcə keçid matrisini müəyyən edək. Keçid matrisinin sütunları yeni bazisin verilən bazisdə koordinat sütunlarıdır. Deməli, keçid matrisi

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kimidir. Yuxarıdakı teoremə əsasən, $F' = C^{-1}FC$. $\det C = 1$ olduğunu nəzərə alaraq tərs matrisi tapaq:

$$A_{11} = 0, A_{21} = 0, A_{31} = 1,$$

$$A_{12} = 0, A_{22} = 1, A_{32} = -1,$$

$$A_{13} = -1, A_{23} = 1, A_{33} = 0.$$

Beləliklə,

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Onda,

$$\begin{aligned} F' = C^{-1}FC &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

§8. Xəttili cəbr. Xəttili operatorlar cəbri

K meydanı üzərində sonlu ölçülü X xətti fəzasının verildiyini fərz edək. Bu halda $\langle X, K \rangle$ fəzasında təyin olunmuş toplama əməlinə nəzərən $\langle X, + \rangle$ cəbri kommutativ qrup olacaqdır. $\omega : K \times X \rightarrow X$ inikası ixtiyari $\lambda \in K$ skalyarı üçün vektorun skalyara hasilini müəyyən edən $\omega_\lambda : X \rightarrow X$ inikasını doğurur. Beləliklə, biz, xətti fəzanın cəbr şəklində yazılışını alırıq: $\langle X, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$.

Fərz edək ki, X çoxluğunda bu inikaslardan başqa $\langle x, y \rangle \mapsto xy$ kimi işarə olunan $X \times X \rightarrow X$ binar əməli verilmişdir.

Tərif 1. $X = \langle X, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\}, \cdot \rangle$ cəbri aşağıdakı şərtləri ödəyərsə, onda o, *xəttili cəbr* adlanır:

- 1) $\langle X, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\} \rangle$ cəbri K meydanı üzərində xətti fəzadır;
- 2) $\langle x, y \rangle \mapsto xy$ binar əməli bixəttili əməldir, yəni

$$a(b + c) = ab + ac \wedge (a + b)c = ac + bc$$

(bu xassə distributivlik kimi məlumdur);

3) ω_λ unar əməli hər bir $\lambda \in K$ üçün

$$\omega_\lambda(ab) = (\omega_\lambda(a))b = a\omega_\lambda(b)$$

şərtini ödəyir.

X xətti fəzası sonlu ölçülü olduqda onun $\dim X$ ölçüsü *cəbrin rəngi* adlanır.

Misallar. 1. $a + bi, (i^2 = -1)$ şəklində kompleks ədədlər meydanı həqiqi ədədlər meydanı üzərində rəngi 2 olan kommutativ cəbrdir.

2. Bütün n tərtibli matrislərin $K^{n \times n}$ çoxluğu rəngi n^2 olan assosiativ (və kommutativ olmayın) cəbrdir. Matrislərin vurulması əməli 2) və 3) xassələrini ödəyir. Bu cəbr K meydanı üzərində *tam matrislər cəbri* adlanır.

3. Tutaq ki, H həqiqi ədədlər meydanı üzərində ölçüsü 4 olan xətti fəzadır. Bazis elementləri $1, i, j, k$ ilə işarə edək. Bazis elementlərin vurulmasını aşağıdakı bərabərliklərlə təyin edək:

i) a simvolu $1, i, j, k$ elementlərindən ixtiyari birini işarə edərsə, onda $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

ii) $i^2 = j^2 = k^2 = -1; ij = -ji = k; jk = -kj = i; ki = -ik = j$.

H fəzasının hər bir elementi yeganə qayda ilə $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ şəklində göstərildiyi üçün bu bərabərliklər vasitəsi ilə vurma əməli “çoxhədlilərin vurulması” qaydası ilə H fəzasının ixtiyari iki elementi üçün təyin olunmuş olur:

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha' + \beta' i + \gamma' j + \delta' k) = (\alpha\alpha' + \beta\beta' i^2 + \gamma\gamma' j^2 + \delta\delta' k^2) + \\ & + (\alpha\beta' i + \beta\alpha' i + \gamma\delta' jk + \delta\gamma' kj) + (\alpha\gamma' j + \gamma\alpha' j + \beta\delta' ik + \delta\beta' ki) + (\alpha\delta' k + \delta\alpha' k + \beta\gamma' ji + \gamma\beta' ij) = \\ & = (\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta') + \\ & + (\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma')i + (\alpha\gamma' + \gamma\alpha' - \beta\delta' + \delta\beta')j + (\alpha\delta' + \delta\alpha' - \gamma\beta' + \beta\gamma')k. \quad (1) \end{aligned}$$

Artıq ii) bərabərlikləri göstərir ki, təyin olunan vurma əməli kommutativ deyil. Göstərək ki, bu əməl vasitəsi ilə, qurulmuş xətti fəza, xətti cəbrə çevrilir. Bunun üçün 2) və 3) şərtlərini yoxlamaq lazımdır.

2) şərtinin doğruluğunu yoxlayaq. $z_1 = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, $z_2 = \alpha' + \beta' i + \gamma' j + \delta' k$ və $z_3 = \alpha'' + \beta'' i + \gamma'' j + \delta'' k$ kimi üç element götürək. Göstərmək kifayətdir ki,

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Sol və sağ tərəfləri ayrı-ayrılıqda hesablayaq. Yuxarıdakı düstura əsasən,

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)[\alpha' + \alpha'' + (\beta' + \beta'')i + (\gamma' + \gamma'')j + (\delta' + \delta'')k] = \\ & (\alpha(\alpha' + \alpha'') - \beta(\beta' + \beta'') - \gamma(\gamma' + \gamma'') - \delta(\delta' + \delta''))e + \\ & + (\alpha(\beta' + \beta'') + \beta(\alpha' + \alpha'') + \gamma(\delta' + \delta'') - \delta(\gamma' + \gamma''))i + \\ & + (\alpha(\gamma' + \gamma'') + \gamma(\alpha' + \alpha'') - \beta(\delta' + \delta'') + \delta(\beta' + \beta''))j + \\ & + (\alpha(\delta' + \delta'') + \delta(\alpha' + \alpha'') - \gamma(\beta' + \beta'') + \beta(\gamma' + \gamma''))k = \\ & = (\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta')e + \\ & + (\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma')i + (\alpha\gamma' + \gamma\alpha' - \beta\delta' + \delta\beta')j + (\alpha\delta' + \delta\alpha' - \gamma\beta' + \beta\gamma')k + \\ & + (\alpha\alpha'' - \beta\beta'' - \gamma\gamma'' - \delta\delta'')e + \\ & + (\alpha\beta'' + \beta\alpha'' + \gamma\delta'' - \delta\gamma'')i + (\alpha\gamma'' + \gamma\alpha'' - \beta\delta'' + \delta\beta'')j + (\alpha\delta'' + \delta\alpha'' - \gamma\beta'' + \beta\gamma'')k = \\ & = (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha' + \beta' i + \gamma' j + \delta' k) + (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha'' + \beta'' i + \gamma'' j + \delta'' k). \end{aligned}$$

Tərif 1-in digər şərtlərinin də ödəndiyi eyni qayda ilə göstərilə bilər.

Qurulmuş bu cəbr *kvaternionlar cəbri*, onun elementləri isə *kvaternionlar* adlanır. Bu cəbrin bir sıra mühüm tətbiqləri vardır.

H Kvaternionlar cəbri 1843-cü ildə U. R. Hamilton tərəfindən daxil edilmişdir. Hər bir $z = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ kvaternionuna qarşı onun qoşması adlanan və $\bar{z} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$ kimi təyin olunan kvaternion qoyulur. (1) düsturuna əsasən,

$$N(z) = z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

$N(z)$ həqiqi ədədi kvaternionun *norması* adlanır. Bu düstura əsasən, hər bir sıfırdan fərqli $z = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ kvaternionunun tərsi vardır və

$$z^{-1} = (N(z))^{-1} \bar{z} = \frac{\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}.$$

Kvaternionlar cəbri, beləliklə, rəqəmi 4-ə bərabər olan bölməli (yəni bölmə əməli olan) cəbrdir. Bu istiqamətdə XIX əsrdə aparılan tədqiqatlar 1878-ci ildə Q. Frobenius tərəfindən icbat olunmuş aşağıdakı teorem ilə nəticələndi:

***R** həqiqi ədədlər meydanı üzərində sonlu rəqəmi ancaq üç bölməli cəbr vardır: **R**- həqiqi ədədlər meydanı, **C**-kompleks ədədlər meydanı və **H**-kvaternionlar cəbri.*

Bu teoremin isbatı cəbrin əsas teoreminə (bu haqda III hissədə ətraflı deyiləcəkdir) söykənir. Yoxlamaq olar ki, əslində bu teorem cəbrin əsas teoremi ilə ekvivalentdir.

Tutaq ki, hər hansı $X = \langle X, K \rangle$ -xəttili fəzası verilmişdir. Məlumdur ki, $Hom(X)$ – xətti operatorlar fəzası – K meydanı üzərində xətti fəzadır. Xəttili operatorların hasilili ilə bu xətti fəza xətti cəbrə çevrilir. Həmin xətti cəbr $EndX$ kimi işarə olunur. Fərz edək ki, X fəzası n ölçülü fəza, $x_1, x_2, \dots, x_n$ isə onun bazisidir. Yuxarıda biz, bazis seçildikdə hər bir xətti operatora müəyyən bir matris qarşı qoyulmasının mümkünliyünü göstərdik. Eyni zamanda göstərdik ki, hər bir $\varphi \in Hom(X)$ xətti operatoruna onun $M(\varphi)$ matrisini qarşı qoyan $\varphi \mapsto M(\varphi)$ inikası $Hom(X)$

fəzasının n^2 ölçülü $K^{n \times n}$ fəzasına biyektiv inikasıdır. Matrislərin vurulması əməli ilə bu fəza

$$L(n, K) = \langle K^{n \times n}, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in K\}, \cdot \rangle$$

xəttili cəbrinə çevrilir. Bu xətti cəbrə *tam matrislər cəbri* deyilir. Yuxarıda deyilənləri aşağıdakı teorem şəklində ifadə etmək olar.

Teorem. $\varphi \mapsto M(\varphi)$ inikası $EndX$ cəbrinin n tərtibli matrislərin $L(n, K)$ tam matrislər cəbrinə izomorfizmdir.

Tutaq ki, K meydanı üzərində iki H və H' xətti cəbrləri verilmişdir.

Tərif 2. $\Phi : H \rightarrow H'$ inikası o zaman H və H' xətti cəbrlərinin izomorfizmi adlanır ki, aşağıdakı şərtlər ödənsin:

- 1) Φ biyektiv inikasıdır;
- 2) Φ bütün baş əməlləri saxlayır:
 - a) $(\forall x, y \in H)(\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y))$;
 - b) $(\forall \lambda \in K)(\forall x \in H)(\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x))$;

$$c) (\forall x, y \in H)(\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)).$$

Cəbrlərin izomorf olması aşağıdakı kimi işarə olunur: $H \cong H'$.

Misal. $\tilde{C}$ ilə bütün

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in R$$

şəklində matrislər çoxluğunu işarə edək. Asanlıqla yoxlama olar ki, matrislərin toplanması, vurulması və ədədə vurulması əməlləri ilə bu çoxluq 2 rəngli cəbr təşkil edir. Onun bazisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

elementləridir. $\tilde{C}$ cəbrinin hər bir elementi yeganə qayda ilə $a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ kimi göstə-

rilə bilir. Deməli,

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

uyğunluğu ilə doğrulan

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

inikası C və $\tilde{C}$ cəbrlərinin izomorfizmidir.

§9. Qeyri-məxsusi operatorlar. Xətti operatorun tərsi

Tərif 1. f xətti operatoru o zaman qeyri-məxsusi (cırılşmayan) adlanır ki,

$$f(x) = 0$$

olmasından $x=0$ bərabərliyi alınsın.

Teorem 1. f xətti operatorunun qeyri-məxsusi olması üçün fəzanın ixtiyari bazisində onun matrisinin qeyri-məxsusi olması zəruri və kafidir.

İsbatı. Əgər f qeyri-məxsusi xətti operator dursa, onda tərifə əsasən

$$f(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$$

Bu münasibəti sütun vektorlar üçün yazaq:

$$F\bar{x} = 0 \leftrightarrow \bar{x} = 0$$

Deməli, $F\bar{x} = 0$ bircins xətti tənliklər sisteminin yeganə həlli vardır. Kramer qaydasına əsasən, bu, yalnız və yalnız o zaman mümkündür ki, $\det F \neq 0$ olsun. Eyni mehakimələri əks qaydada aparsaq teoremin hökmünü alırıq.

Tərif 2. g xətti operatoru o zaman f xətti operatorunun tərsi adlanır ki,

$$fg = \varepsilon$$

olsun.

Teorem 2. f xətti operatorunun tərsinin olması üçün onun qeyri-məxsusi olması zəruri və kafidir.

İsbatı. Əgər hər hansı bazisdə f xətti operatorunun matrisi F , g xətti operatorunun matrisi isə G olarsa, onda

$$fg = \varepsilon \leftrightarrow FG = E$$

olar ki, burada E vahid matrisdir. Bu isə məlum olduğu kimi F və G matrislərinin qeyri-məxsusi olması ilə eyni güclüdür. Bu halda teoremin hökmü teorem 1-dən alınır. Teorem 2 isbat olundu.

Yuxarıda deyilənləri yekunlaşdıraraq aşağıdakı teoremi söyləyə bilərik.

Teorem 3. Tutaq ki, sıfır olmayan xətti $\langle X, K \rangle$ fəzasında $f : X \rightarrow X$ xətti operatoru verilmişdir. Aşağıdakı şərtlər eynigüclüdür:

- 1) f operatoru qeyri-məxsusidir;
- 2) f operatorunun tərsi vardır;
- 3) $\text{Ker } f = \{0\}$;
- 4) f operatoru izomorfizmdir;
- 5) f operatorunun defekti sıfıra bərabərdir;

6) $\text{rang} f = \dim X$;

7) f operatorunun istənilən bazisdə matrisi tərsi olan matrisdir.

Teorem 3-ə əsasən bütün qeyri-məxsusi operatorların $\text{Aut} X$ çoxluğu fəzanın özünə izomorfizmlərindən təşkil olunmuşdur. Hər bir qeyri-məxsusi operator tərsi olan operatorudur və asanlıqla görmək olar ki, o operatorların vurulması əməlinə nəzərən qrup təşkil edir. Bu qrup $X = \langle X, K \rangle$ fəzasının avtomorfizmlər qrupu adlanır və $\text{Aut} X$ kimi işarə olunur.

Teorem 4. Tutaq ki, $\langle X, K \rangle$ n ölçülü xətti fəzadır, $\text{Aut} X$ isə onun avtomorfizmlər qrupudur. Onda bu qrup qeyri-məxsusi n -tətibli matrislərin tam xətti qrupu ilə izomorfdur:

$$\text{Aut} X \cong GL(n, K).$$

Teorem 4 asanlıqla teorem 3-dən alınır.

§10. Xətti operatorun ranqının xassələri

Xətti operatorun ranqının onun matrisinin ranqı ilə eyni olmaslı xətti operatorların və matrislərin ranqının bəzi əhəmiyyətli xassələrini müəyyənləşdirməyə imkan verir.

Tutaq ki, sonluölçülü $X = \langle X, K \rangle$ xətti fəzasında $f \in \text{End} X$ xətti operatoru verilmişdir. Məlum olduğu kimi $H = \text{Ker} f$ nüvəsi xətti fəzanın alt fəzasını müəyyən edir. Bu çoxluq eyni zamanda, additiv qrup kimi X -də alt qrupdur və deməli, X/H faktor qrupunu təyin edir. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu faktor qrupda X xətti fəzasının baş əməlləri, yəni, toplama və skalyara vurma əməlləri ilə aşağıdakı kimi əməllər daxil etmək olar:

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}, \quad \lambda \bar{x} = \overline{\lambda x}.$$

Bu əməllər ilə X/H faktor fəzaya çevrilir.

Teorem 1. Sonluölçülü $X = \langle X, K \rangle$ xətti fəzasında verilmiş $f \in \text{End} X$ xətti operatoru üçün $\dim X / H = \text{rang } f$.

İsbatı. Homomorfizmlər haqda teoremlərə əsasən, $\text{Im } f \subset X$ alt qrupdur və $f : X \rightarrow \text{Im } f$ inikası sürəktiv homomorfizmdir və biz, əsas teoremə əsasən, additiv qrupların aşağıdakı izomorfizmini alırıq:

$$X/H \cong \text{Im } f.$$

$\lambda \bar{x} = \overline{\lambda x}$ münasibəti göstərir ki, $\bar{x} \mapsto f(x)$ inikası xətti fəzalar kimi $X/H, \text{Im } f$ fəzalarının xətti inikasıdır. Bu inikas izomorfizm olduğundan $\dim X/H = \dim(\text{Im } f) = \text{rang } f$. Teorem 1 isbat olundu.

Bu teoremdən və xətti operatorun rangının tərifindən onun xətti əməllərlə əlqəsi haqda nəticələr əldə etmək olar.

Teorem 2. $\lambda \neq 0$ olduqda $\text{rang}(\lambda f) = \text{rang } f$.

İsbatı. Yəqin etmək olar ki, $\lambda \neq 0$ olduqda $\text{Im}(\lambda f) = \text{Im } f$ və $\text{Ker}(\lambda f) = \text{Ker } f$. İndi teoremin hökmü teorem 1-dən alınır.

Teorem 3. $f, g \in \text{End } X$ olarsa, onda

$$\text{rang}(f + g) \leq \text{rang}(f) + \text{rang}(g).$$

İsbatı. Tərifə əsasən, $\text{rang}(f + g) = \dim \text{Im}(f + g)$. Lakin $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ olduğu üçün

$$\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g; \quad (1)$$

burada bərbərliyin sağ tərəfində uyğun alt fəzaların (alt qruplar kimi) cəmi dayanmışdır. Məlumdur ki, cəmin ölçüsü alt fəzaların ölçülərinin cəmindən böyük deyil. Teorem 1-in doğruluğu buradan alınır.

Aşağıdakı teorem teorem 3-ün dəqiqləşməsidir.

Teorem 4. $f, g \in \text{End } X$ olrsa, onda

$$\text{rang}(f + g) \leq \text{rang}(f) + \text{rang}(g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g).$$

İsbatı. $H = \text{Im } f \cap \text{Im } g$ kəsişməsi X fəzasının altfəzasıdır. $\text{Im } f/H$ və $\text{Im } g/H$ faktor-fəzaları $(\text{Im } f + \text{Im } g)/H$ faktor-fəzasının alt fəzalarıdır. İxtiyari

$$\bar{x} \in (\text{Im } f/H) \cap (\text{Im } g/H)$$

elementi götürək. Onda, alırıq $x + H \subset \text{Im } f, x + H \subset \text{Im } g$ yaxud,

$$x + H \subset (\operatorname{Im} f) \cap (\operatorname{Im} g) = H.$$

Deməli, $x \in H \vee \bar{x} = \bar{0}$. Bu isə göstərir ki, $(\operatorname{Im} f / H) \cap (\operatorname{Im} g / H) = \{\bar{0}\}$. Deməli,

$$(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) / H = (\operatorname{Im} f / H) \oplus (\operatorname{Im} g / H). \quad (2)$$

Lakin $\dim(\operatorname{Im} f / H) = \operatorname{rang}(f) - \dim H$ və $\dim(\operatorname{Im} g / H) = \operatorname{rang}(g) - \dim H$. Onda, (2)-yə əsasən, yazı bilərik:

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) &= \dim((\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) / H) + \dim H = \\ &= \operatorname{rang} f - \dim H + \operatorname{rang} g - \dim H + \dim H = \\ &= \operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g - \dim H. \end{aligned}$$

(1)-ə əsasən, buradan alırıq:

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(f + g) &= \dim(\operatorname{Im}(f + g)) \leq \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) = \\ &= \operatorname{rang}(f) + \operatorname{rang}(g) - \dim H. \end{aligned}$$

Teorem 4 isbat olundu.

İndi isə xətti operatorların hasilinin rangı ilə bağlı teoremlərə baxaq.

Teorem 5. $f, g \in \operatorname{End} X$ olrsa, onda

$$\operatorname{rang}(fg) \leq \min\{\operatorname{rang}(f), \operatorname{rang}(g)\}.$$

İsbatı. $\operatorname{Im} g \subset X$ olduğu üçün asanlıqla yəqin etmək olar ki,

$$\operatorname{Im} fg \subset \operatorname{Im} f.$$

Deməli,

$$\operatorname{rang}(fg) \leq \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang} f.$$

Tutaq ki, $r = \operatorname{rang} g$ və $x_1, x_2, \dots, x_r \in \operatorname{Im} g$ alt fəzasının bazisidir. Aydındır ki, f xətti operator olduğu üçün, $\operatorname{Im} fg = L\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_r)\}$. Deməli,

$$\operatorname{rang}(fg) = \dim \operatorname{Im} fg = \dim L\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_r)\} \leq r.$$

Alınan münasibətlər teoremin hökmünün doğru olduğunu göstərir. Teorem 5 isbat olundu.

Yuxarıdakı teoremlərin hökmləri matrislər üçün də ifadə oluna bilər. Belə ki, ixtiyari düzbucaqlı və ya kvadrat matrislər üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

1) $\text{rang}(A + B) \leq \text{rang}A + \text{rang}B;$

2) ixtiyari $\lambda \in K, \lambda \neq 0$ skalyarı üçün $\text{rang}(\lambda A + B) \leq \text{rang}A + \text{rang}B;$

3) ixtiyari A və B matrislərinin hasilini təyin edilmişsə, onda

$$\text{rang}(AB) \leq \min\{\text{rang}A, \text{rang}B\}.$$

II FƏSİL. Məxsusi qiymətlər və məxsusi vektorlar

§1. İnvariant alt fəzalar.

Məxsusi qiymətlər və məxsusi vektorlar

n ölçülü xətti X fəzasında $f : X \rightarrow X$ xətti operatoruna baxaq. $A \subset X$ isə xətti alt fəza olsun.

Tərif 1. A alt fəzası o zaman f xətti operatorunun *invariant alt fəzası* adlanır ki, $f(A) \subset A$ olsun.

1. Müstəvi üzərində koordinat (düzbucaqlı) sistemi götürək. OY oxına fəzərən siumetriya xətti operatorudur. OY oxu üzərində yerləşən vektorlar çoxluğu alt fəza təşkil edir. Bu alt fəza baxılan xətti inkasın invariant alt fəzasıdır.

2. $X = U \oplus V$ olsun. U alt fəzasına proyeksiyalanma xətti inikasıdır və U onun invariant alt fəzasıdır. İnvariant alt fəzalar içərisində ən sadəsi məxsusi alt fəzalardır. Belə fəzalar məxsusi qiymət və məxsusi vektor anlayışları ilə sıx bağlıdır.

Tərif 2. $\lambda \in K$ skalyarı o zaman f xətti operatorunun *məxsusi qiyməti* adlanır ki, elə $x \neq 0$ vektoru tapmaq olsun ki,

$$f(x) = \lambda x$$

bərabərliyi doğru olsun. Bu şərti ödəyən x vektoru λ məxsusi qiymətinə uyğun *məxsusi vektor* adlanır.

Bu anlayışlar xətti operatorlar nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır. Həndəsi şərhdən istifadə etsək, demək olar ki, məxsusi vektor xətti inkasın təsiri ilə “kollinear” vektora çevrilir olunur. Məxsusi qiymətlərin və məxsusi vektorların aşağıdakı xassələri vardır:

1) Eyni məxsusi qiymətə uyğun olan x_1, x_2 məxsusi vektorları üçün

$$x_1 + x_2 \neq 0$$

olarsa, onda $x_1 + x_2$ vektoru da məxsusi vektordur. Doğrudan da,

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2)$$

$x_1 + x_2 \neq 0$ olduğunda buradan xassənin hökmü alınır. Aydındır ki, $x_1 + x_2 = 0$ olarsa, onda o,

məxsusi vektor ola bilməz.

2) Əgər x λ məxsusi qiymətinə uyğun məxsusi vektor olarsa ixtiyari $\mu \neq 0$ skalyarı üçün μx vektoru da eyni məxsusi qiymətə uyğun olan məxsusi vektor olacaqdır.

Doğrudan da,

$$f(\mu x) = \mu f(x) = \mu(\lambda x) = \lambda(\mu x)$$

$\mu \neq 0$ və $x \neq 0$ olduğu üçün $\mu x \neq 0$ və deməli, o, məxsusi vektordur.

3) 1) və 2) - ni birləşdirərək hökm edə bilərik ki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ eyni məxsusi qiymətə uyğun olan məxsusi vektorlar olarsa, onda onların sıfırdan fərqli hər bir

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

xətti kombinasiyası da eyni məxsusi qiymətə uyğun olan məxsusi vektor olacaqdır.

Teorem 1. λ məxsusi ədədinə uyğun olan məxsusi vektorlar çoxluğu sıfır vektorla birlikdə alt fəza təşkil edir; bu alt fəzanın ixtiyari x vektoru üçün

$$f(x) = \lambda x$$

münasibəti ödənilir.

İsbatı. Tutaq ki, x_1 ixtiyari məxsusi vektordur (λ məxsusi ədədinə uyğun). Əgər onunla xətti asılı olmayan sistem təşkil edən başqa x_2 məxsusi vektoru varsa, onda $\{x_1, x_2\}$ vektorlar sistemini götürək. Xəssə 3-ə əsasən $L(x_1, x_2)$ xətti örtüyünün hər bir sıfırdan fərqli vektoru məxsusi vektordur. Bu xətti örtüyə daxil olmayan məxsusi vektor varsa, onda onu əvvəlki iki vektora əlavə etməklə yeni xətti örtük alırıq və prosesi bu qayda ilə maksimal sayda xətti asılı olmayan və eyni bir λ məxsusi ədədinə uyğun olan $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ vektorlar sistemi alınadək davam etdirmək olar. 3) xəssəyə görə hər bir

$$x \in L(x_1, \dots, x_k) \setminus \{0\}$$

vektoru məxsusi vektordur və f xətti operatorunun λ məxsusi qiymətinə məslək başqa məxsusi vektoru yoxdur. Əks halda belə bir vektor xətti örtüyə daxil olmazdı və bu $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ vektorlar sisteminin maksimallığına zidd olardı. Əgər sıfır vektorun da

$$f(x) = \lambda x$$

bərabərliyini ödədiyini də nəzərə alsaq, onda $L(x_1, x_2, \dots, x_k)$ xətti örtüyü axtarılan alt fəza olacaqdır. Teorem 1 isbat olundu.

Tərif 3. Teorem 1- in şərtini ödəyən alt fəza λ məxsusi qiymətinə uyğun *məxsusi alt fəza* adlanır.

Teorem 2. Məxsusi alt fəza invariant alt fəzadır .

İsbatı. alixiyari $x \in M$ vektorunu götürək (burada M λ ədədinə uyğun məxsusi alt fəzanı göstərir) $x=0$ olarsa, onda $f(x) = 0 \in M$. Əks halda x məxsusi vektordur və

$$f(x) = \lambda x \in M$$

Deməli, $f(M) \subset M$ Teorem 2 isbat olundu.

İndi isə müxtəlif məxsusi qiymətlərə uyğun olan məxsusi vektorların xassələri ilə tanış olaq.

Teorem 3. F xətti operatorunun cüt-cüt müxtəlif $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ məxsusi qiymətlərinə uyğun olan $x_1, \dots, x_k$ məxsusi vektorları xətti asılı deyil .

İsbatı. Teoremin isbatının k – ya nəzərən induksiya ilə aparaq. $k=1$ olduqda $x_1 \neq 0$ alırıq və bir sıfırdan fərqli vektor xətti asılı deyil, yəni, $\lambda x = 0 \rightarrow \lambda = 0$. Fərz edək ki, teorem $k-1$ üçün doğrudur: yəni $x_1, \dots, x_{k-1}$ müxtəlif məxsusi ədədlərə uyğun məxsusi vektorlar olarsa , onda onlar xətti asılı deyil .

Tutaq ki, $x_1, x_2, \dots, x_k$ cüt – cüt müxtəlif $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ məxsusi qiymətlərinə uyğun olan məxsusi vektorlardır və

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k = 0. \quad (1)$$

Göstərək ki, $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. (1) bərabərliyinin hər iki tərəfinə f operatoru ilə təsir etsək alırıq:

$$f(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k) = \lambda_1 c_1 x_1 + \lambda_2 c_2 x_2 + \dots + \lambda_k c_k x_k = 0. \quad (2)$$

(1) bərabərliyinin hər iki tərəfini λ_k -ya vuraq və (2) –dən tərəf-tərəfə çıxaraq:

$$(\lambda_1 - \lambda_k) c_1 x_1 + (\lambda_2 - \lambda_k) c_2 x_2 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) c_{k-1} x_{k-1} = 0$$

İnduktiv fərziyyəyə əsasən

$$(\lambda_1 - \lambda_k)c_1 = (\lambda_2 - \lambda_k)c_2 = \dots = (\lambda_{k-1} - \lambda_k)c_k = 0.$$

Lakin məxsusi qiymətlər cüt-cüt müxtəlif olduğu üçün sonuncu münasibətlərdən $c_1 = c_2 = \dots = c_{k-1} = 0$ alırıq. Onda (1)-ə əsasən $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k = 0$ və, deməli, $c_kx_k = 0$. Nəzərə alsaq ki, $x_k \neq 0$ onda buradan $c_k = 0$ alırıq. Deməli, teoremin hökmü doğrudur. Teorem 3 isbat olundu.

Misallar. 1) Yuxarıdakı 1-ci misalda e_2 vektoru (ordinat oxu üzərində yerləşən vahid vektor) 1 məxsusi qiymətinə malik olan məxsusi vektordur.

2) U alt fəzasına proyeksiyalanma inkası zamanı U alt fəzasının özü 1 məxsusi qiymətinə uyğun məxsusi alt fəzadır.

3) O nöqtəsi ətrafında (müstəvidə) dönmə operatorunun məxsusi vektoru yoxdur (dönmə bucağı φ , $0 < \varphi < \pi$ şərtini ödəyərsə). $\varphi = \pi$ olduqda isə məxsusi vektor vardır: həqiqi ox üzərindəki hər bir sıfırdan fərqli vektor $\lambda = -1$ qiymətinə uyğun olan məxsusi vektor olacaqdır.

§2. Xarakteristik tənlik və onun invariantlığı

Xətti operatorun məxsusi qiymətləri və məxsusi vektorları ilə bağlı iki sual meydana çıxır: 1) verilən xətti operatorun məxsusi qiymətləri varmı? 2)əgər məxsusi qiymətlər varsa, uyğun məxsusi vektorları necə tapmaq olar?

Qeyd edək ki, ikinci məsələnin hər bir meydana həlli olduğu halda 1-ci məsələnin həlli əsas meydandan asılıdır. Beləliklə, əsas məsələ 1-ci məsələdir və onun həlli 2-ci məsələyə təsir göstərir. Xətti operatorun strukturunun öyrənilməsi üçün hər iki məsələnin eyni dərəcədə mühüm əhəmiyyəti vardır. Onların tam həlli isə meydanlar və cəbri tənliklər nəzəriyyəsində gerçəkləşir.

Fərz edək ki, f xətti operatorunun λ məxsusi qiyməti vardır. Onda elə $x \neq 0$ vektoru tapmaq olar ki,

$$f(x) = \lambda x. \quad (1)$$

X fəzasında hər hansı bazis götürək. f operatorunun bu bazisdə matrisini F ilə işarə edək. (1) bərabərliyini matrisi şəklində yazaq:

$$F\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad (2)$$

və ya

$$F\bar{x} = \lambda E\bar{x},$$

$$(F - \lambda E)\bar{x} = 0. \quad (3)$$

Sonuncu bərabərlik göstərir ki, $x \neq 0$ vektoru uyğun bircins xətti tənliklər sisteminin həllidir. Kramer əlamətinə əsasən bu, yalnız və yalnız o zaman mümkündür ki, (3) sisteminin deferminantı sıfıra bərabər olsun

$$\det(F - \lambda E) = 0. \quad (4)$$

(4) bərabərliyini açıq şəkildə yazaq. Bunun üçün

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

işarə edərək, yaza bilərik:

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sonuncu bərabərlik λ -dan asılı n dərəcəli tənlikdir. Bu tənliyi belə də yaza bilərik:

$$(-\lambda)^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0. \quad (5)$$

Tərif. (5) tənliyi f xətti operatorunun *xarakteristik tənliyi*, (5) bərabərliyinin sol tərəfindəki çoxhədli isə onun *xarakteristik çoxhədlisi* adlanır.

Əsas meydan ədədi meydan olduqda xarakteristik tənliyin kökləri, yəni xətti operatorun məxsusi qiymətləri *xarakteristik ədədlər* də adlanır.

Teorem 1. $\lambda \in K$ skalyarının f xətti operatorunun məxsusi qiyməti olması üçün onun (5) xarakteristik tənliyinin kökü olması zəruri və kafi şərtidir.

İsbatı. Zəruri şərtin isbatı yuxarıda verilmişdir. Yəni λ məxsusi qiymətdirsə, onda o, (5)

tənliyinin köküdür. Tərsinə, fərz edək ki, λ skalyarı (5) tənliyini ödəyir. Onda

$$\det(F - \lambda E) = 0.$$

Kramer əlamətinə əsasən (3) sisteminin sıfırdan fərqli həlli vardır. Bu həlli $\bar{x}_0$ ilə işarə edək. Onda koordinat sütunu $\bar{x}_0$ olan vektor (2) bərabərliyini ödəyir və uyğun vektor məxsusi vektordur. Teorem 1 isbat olundu.

Misal. Hər hansı bazisdə

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisinə malik xətti operatorun məxsusi qiymətlərini və məxsusi vektorlarını tapaq. Bunun üçün xarakteristik tənliyi yazaq:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Determinantı açaq.

$$4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = 0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1,$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$$

Əvvəlcə birinci kökü götürək: $\lambda = 3$. Onda (3) sistemi aşağıdakı tənliklə eynigüclüdür:

$$-x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1.$$

Məxsusi vektor (1;1) vektorudur.

$\lambda = 1$ olduqda

$$x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1.$$

Məxsusi vektor (1; -1) – dir.

Məlumdur ki, bazis dəyişdikdə xətti operatorun matrisi dəyişir. Buna görə də yuxarıda

məxsusi qiymətlərin və ya onların kökü olduğu xarakteristik tənliyin bazisdən asılı olub-olmaması məsələsi meydana çıxır. Aşağıdakı teorem xarakteristik tənliyin *invariantlığını*, yəni onun bazisdən asılı olmadığını (dəyişmədiyini) göstərir.

Teorem 2. Xətti operatorun xarakteristik tənliyi bazisdən asılı deyil.

İsbatı. Tutaq ki, f xətti operatorunun hər hnsı bazisdə matrisi F -dir. Göstərək ki, bu bazisdə onun

$$\det(F - \lambda E) = 0 \quad (1)$$

xarakteristik tənliyi bazis dəyişdikdə dəyişmir. Bunun üçün başqa bir bazis götürək və fərz edək ki, bu bazisdə xətti operatorun matrisi F' , birinci bazisdən ikinciye keçid mtrisi isə C -dir. I fəsil, §6, Teorem 1-ə əsasən yeni bazisdə xətti operatorun F' matrisi üçün aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$F' = C^{-1}FC.$$

Deməli, §2-də göstərildiyi kimi yeni bazisdə xətti operatorun xarakteristik tənliyi

$$\det(C^{-1}FC - \lambda E) = 0$$

olacaqdır. Sol tərəfi belə yazmaq olar:

$$\begin{aligned} \det(C^{-1}FC - \lambda C^{-1}EC) &= \det C^{-1}(F - \lambda E)C = \\ &= \det C^{-1} \det C \det(F - \lambda E) = \det(F - \lambda E). \end{aligned}$$

Beləliklə, xarakteristik çoxhədli əvvəlki bazisdə xarakteristik çoxhədli ilə üst-üstə düşür. Teorem 1 isbat olundu.

Teorem 1-in mühüm əhəmiyyəti vardır. Bu teoremə əsasən xətti operatorun xarakteristik çoxhədlisini hesablamaq üçün onun ixtiyari bazisdəki matrisindən istifadə etmək olar.

Nəticə. Xətti operatorun məxsusi qiymətləri bazisdən asılı deyil.

Teorem 1 və onun nəticəsi göstərir ki, xarakteristik tənlik və məxsusi qiymətlər xətti operatorun xətti fəzada mühüm daxili xüsusiyyətləridir, onların hesablanması isə bazis vasitəsi ilə həyata keçirilir. (5) bərabərliyindən göründüyü kimi məxsusi ədədlərin və məxsusi vektorların tapılması məsələsi cəbri tənliklərin həllinə gətirilir.

§3. Sadə spektrli və sadə strukturlu xətti operatorlar.

Sonlu ölçülü fəzalarda verilmiş xətti operatorlar ilə bağlı məsələlər bir çox hallarda onun müəyyən bazisdə matrisinin köməyi ilə həll olunur. Buna görə də bazisin elə seçilməsi tələb olunur ki, bu zaman xətti operatorun matrisi mümkün qədər sadə şəkildə olsun. Bu məsələ sadə spektrli xətti operatorlar üçün daha asan yolla öyrənilir. Xətti operatorun məxsusi qiymətlərinin çoxluğu bəzən onun *spektri* adlanır.

Tərif. n ölçülü $X = \langle X, K \rangle$ xətti fəzasında verilmiş f xətti operatoru o zaman *sadə spektrli* xətti operator adlanır ki, onun n sayda cüt-cüt müxtəlif məxsusi qiymətləri olsun.

Teorem 1. n ölçülü $X = \langle X, K \rangle$ xətti fəzasında verilmiş f xətti operatoru sadə spektrli xətti operator olarsa, onda fəzanın, bu operatorun məxsusi vektorlarından düzələn bazisi vardır.

İsbatı. Şərtə əsasən f xətti operatoru n sayda cüt-cüt müxtəlif $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ məxsusi qiymətlərinə malikdir. Məxsusi qiymətlərin xassələri haqda §1, teorem 3-ə əsasən, onlara uyğun olan ixtiyari $x_1, x_2, \dots, x_n$ məxsusi vektorları xətti asılı deyil. Lakin, vektorların sayı n olduğu üçün bu sistem fəzanın bazisini təşkil edir. Teorem 1 isbat olundu.

Teorem 2. Sadə spektrli xətti operatorun məxsusi vektorlardan düzələn bazisdə matrisi diaqonal matris olmaqla, diaqonal elementləri məxsusi qiymətlərdən təşkil olunmuşdur.

İsbatı. Şərtə əsasən, xətti operatorun n sayda cüt-cüt müxtəlif $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ məxsusi qiymətləri vardır. Teorem 1-ə əsasən operatorun bu məxsusi qiymətlərə uyğun olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ məxsusi vektorları xətti fəzada bazis təşkil edir. Bu bazisdə xətti operatorun matrisini tapaıq. i ($i = 1, 2, \dots, n$) indeksinin ixtiyari qiymətində

$$f(x_i) = \lambda_i x_i.$$

Bu bərabərlik göstərir ki,

$$\overline{f(x_i)} = \lambda_i \bar{x}_i.$$

Lakin $\bar{x}_i$ vektorunun baxılan bazisdə koordinat sütunu,

$$x_i = 0 \cdot x_1 + \dots + 1 \cdot x_i + \dots + 0 \cdot x_n$$

bərabərliyindən göründüyü kimi,

$$\bar{x}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

şəklindədir. Deməli,

$$\overline{f(x_i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beləliklə, xətti operatorun matrisi aşağıdakı kimidir:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Teorem 2 isbat olundu.

Nəticə. Sadə spektrli xətti operatorun ixtiyari bazisdə matrisi diaqonal matrisə oxşardır.

İsbatı. Xətti fəzanın ixtiyari bir bazisdə matrisini F ilə işarə edək. Yuxarıdakı teoremlərə əsasən xətti fəzanın məxsusi vektorlardan təşkil olunmuş bazisi vardır və həmin bazisdə xətti operatorun F' matrisi diaqonal matrisdir. Əvvəlki bazisdən məxsusi vektorlardan düzələn bazisə keçid matrisi C olarsa, onda yazı bilərik:

$$F' = C^{-1}FC.$$

Buradan alırıq:

$$F = CF'C^{-1}.$$

Deməli, xətti operatorun F matrisi F' -ə, yəni diaqonal matrisə oxşardır. Nəticə isbat olundu.

Beləliklə, teorem 1, 2 və teorem 2-nin nəticəsi sadə spektrli xətti operatorun quruluşunu tamamilə müəyyən edir. Belə ki, sadə spektrli xətti operatorlar hər bir vektoru elə dəyişir ki, bu zaman verilən vektorun məxsusi vektorlardan ibarət bazisdə koordinatları uyğun məxsusi qiymətə vurulmuş olur.

Lakin hər bir xətti operator həmişə cüt-cüt müxtəlif məxsusi qiymətlərə malik olmur. Bəzi xətti operatorlar təkrarlann məxsusi qiymətlərə malik olurlar. Məsələn, hər hansı bazisdə

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

matrisinə malik olan xətti operatorun ancaq bir (təkrarlanan) məxsusi qiyməti vardır: $\lambda_{1,2} = -1$. Asanlıqla yəqin edə bilərik ki, məxsusi alt fəza birölçülüdür, yəni xətti fəzanın bu operatorun məxsusi vektorlarından ibarət bazisi yoxdur. Vahid operatorun da iki ölçülü fəzda iki təkrarlanan məxsusi qiyməti vardır. Lakin sonuncu halda məxsusi vektorlardan ibarət bazis vardır.

Teorem 3. n ölçülü fəzada xətti operatorun yalnız və yalnız o zaman fəzanın bazisini təşkil edən məxsusi vektorları vardır ki, bu operatorun matrisi diaqonal matrisə oxşar olsun.

İsbatı. Tutaq ki, xətti fəzanın məxsusi vektorlardan təşkil olunmuş bazisi vardır. Xətti operatorun hər hansı bazisdə matrisini F ilə işarə edək. Xətti operatorun bazis təşkil edən məxsusi vektorları $x_1, x_2, \dots, x_n$ olsun. Fərz edək ki, bu məxsusi vektorlar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ məxsusi qiymətlərinə uyğundur (bunların içərisində təkrar olunanları da ola bilər).

$$f(x_i) = \lambda_i x_i$$

bərabərlikləri göstərir ki, bu bazisdə xətti operatorun F' matrisi diaqonal şəkildədir:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Əvvəlki bazisdən məxsusi vektorlardan ibarət bazisə keçid matrisini C ilə işrə etsək, yaza bilərik:

$F' = C^{-1}FC$. Deməli, xətti operatorun matrisi diaqonal matrisə oxşardır.

İndi fərz edək ki hər hansı $x_1, x_2, \dots, x_n$ baizisində xətti operatorun matrisi diqonal matrisə oxşardır, yəni qeyri-məxsusi elə C matrisi var ki, $F = CF'C^{-1}$ olmaqla, F' matrisi diaqonal matrisdir:

$$F' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Koordinat sütunları $C_1, C_2, \dots, C_n$ olan $c_1, c_2, \dots, c_n$ vektorları xətti asılı deyil (əks halda C matrisi məxsusi olardı). Aydıdır ki,

$$\overline{f(c_i)} = FC_i = FC\bar{e}_i = CF'C^{-1}C\bar{e}_i = CF\bar{e}_i = \lambda_i C\bar{e}_i = \lambda_i C_i = \lambda_i \bar{c}_i,$$

yəni $f(c_i) = \lambda_i c_i$ və $c_1, c_2, \dots, c_n$ vektorları məxsusi vektorlardır. Teorem 3 isbat olundu.

Tərif. n ölçülü $X = \langle X, K \rangle$ xətti fəzasında verilmiş f xətti operatoru o zaman *sadə strukturlu* xətti operator adlanır ki, onun ixtiyari bazisdə matrisi diaqonal matrisə oxşar olsun.

Teorem 4. Xətti operatorun sadə strukturlu olması üçün onun n sayda xətti asılı olmayan məxsusi vektorlarının olması zəruri və kafidir.

Teoremin isbatı yuxarıda isbat olunmuş teoremlərdən asanlıqla alınır.

Misal. Rəqiqi R^3 fəzasında hər hansı bazisdə matrisi

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

olan xətti operatorun məxsusi qiymətlərini və məxsusi vektorlarını tapmaq.

Həlli. Xarakteristik tənliyi yazmaq:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Determinantı açmaq.

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 - 16)(5 - \lambda) + 180 - 28(\lambda + 4) + 5(5 - \lambda) = \\ & = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13 = -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 13\lambda + 13 = \\ & = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 13) = 0 \end{aligned}$$

Xarakteristik tənliyin ancaq bir həqiqi kökü vardır: $\lambda = 1$. Beləliklə, bir məxsusi qiymət vardır. Bu məxsusi qiymətə uyğun olan məxsusi vektoru tapmaq üçün aşağıdakı bircins xətti tənliklər sistemini həll edək:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 & \quad \quad 4x_3 = 0. \end{aligned}$$

Sistemin matrisinin bazis minoru sol yuxarı küncdə yerləşmişdir. Deməli, x_3 sərbəst dəyişəndir.

Sonuncu tənlik atıla bilər. $x_3 = 1$ qəbul edərək, tapırıq: $x_2 = 5, x_1 = 6$. Beləliklə, biz, verilmiş

bazisdə aşağıdakı koordinat sütununa malik məxsusi vektoru alırıq: $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

§4. Jordan hücrəsi. Matrisin Jordan normal şəkli.

Xətti operatorların müfəssəl öyrənilməsi cəbrin vacib bölmələrindən biri olan çoxhədlilər, cəbri tənliklər nəzəriyyəsi ilə sıx bağlıdır və olduqca geniş mövzudur. Burada biz ancaq bu nəzəriyyənin mühüm nəticələrinin sxematik isbatını verməklə kifayətlənirik.

Sadə spektrli və sadə strukturlu xətti operatorlar haqda alınmış nəticələr xətti operatorların quruluşu haqda tam təsəvvür yaratmır. Sadə strukturlu xətti operatorların həmişə fəzanın ölçüsü sayda məxsusi qiymətləri (təkrar istisna deyil) və eyni sayda xətti asılı olmayan məxsusi vektorları vardır. Lakin təkrar məxsusi qiymətlərə malik xətti operatorun məxsusi vektorlarının sayı müxtəlif xətti operatorlar üçün müxtəlif ola bilər. Məsələn, hər hansı bazisdə

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi ilə verilən xətti operatorun xarakteristik çoxhədlisi

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3$$

şəklindədir. Onun üç təkrar məxsusi qiyməti vardır. Məxsusi vektorlar aşağıdakı bircins xətti tənliklər sistemindən tapılır:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Burada x_1 dəyişəni sərbəst dəyişəndir və $x_1 = 1$ qəbul etməklə yeganə məxsusi vektor (sabit vuruq dəqiqliklə) alırıq: $\bar{x}_1 = (1 \ 0 \ 0)$. Deməli, bu operatorun fəzanın bazisini təşkil edən məxsusi vektorları yoxdur. Bu operator sadə strukturlu xətti operator deyil və onun matrisi heç

bir bazisdə diaqonal matrisə oxşar ola bilməz.

Məsələyə daha ümumi nöqteyi nəzərdən yanaşaq. Tutaq ki, n ölçülü $\langle X, K \rangle$ xətti fəzasında f xətti operatoru verilmişdir və onun n sayda məxsusi qiymətləri vardır: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Fərz edək ki, məxsusi qiymətlər içərisində xarakteristik çoxhədlinin təkrarlanan kökləri vardır. Bu təkrarlıq dərəcələri cəbri xarakter daşıyır və xarakteristik çoxhədli ilə müəyyən olunur. Lakin təkrar məxsusi qiymətə uyğun olan məxsusi alt fəzanın ölçüsü cəbri təkrarlıqdan fərqli ola bilər. Məxsusi alt fəzanın ölçüsü məxsusi qiymətin *həndəsi təkrarlığı* adlanır. Göstərmək olar ki, h həndəsi təkrarlığı məxsusi qiymətin (cəbri) təkrarlığından böyük deyil.

Fərz edək ki, K meydanı cəbri qapalı meydandır, yəni əmsalları bu meydandan olan istənilən çoxhədlinin bu meydanda heç olmasa bir kökü vardır. Belə meydana misal olaraq kompleks ədədlər meydanını göstərmək olar (bu hökm cəbrin əsas teoremi adlanır və gələcəkdə bu haqda ətraflı deyiləcəkdir).

İsbat etmək olar ki, ümumi halda, n sayda məxsusi qiymətə malik olan xətti operatoru, həmişə, müxtəlif məxsusi qiymətlərə uyğun olan məxsusi alt fəzalarda təyin olunan xətti operatorların *düz cəmi* kimi göstərmək olar. Buna görə də, ümumiliyi pozmadan, məxsusi qiymətinin (cəbri) təkrarlığı fəzanın ölçüsünə bərabər olan operatorlara baxmaqla kifayətlənmək olar.

Tərif. k tərtibli

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

matrisi k tərtibli *Jordan hücrəsi* adlanır.

Xüsusi halda $k=1$ olarsa, (λ) matrisi alınır. $k=2$ olduqda isə

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

matrisi alınır.

Cəbri qapalı meydan üzərində verilmiş $\langle X, K \rangle$ xətti fəzasında aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. Tutaq ki, xətti operatorun 0 məxsusi qiyməti vardır və onun təkrarlığı fəzanın ölçüsünə bərabərdir. Onda bu məxsusi qiymətin h həndəsi təkrarlığına malik olması üçün xətti operatorun matrisinin aşağıdakı matrisə oxşar olması zəruri və kafi şərtidir:

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_h \end{pmatrix};$$

burada hər bir $r = 1, \dots, h$ üçün

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi $n_r + 1$ ($n_r \geq 0$) tərtibli Jordan hücrəsidir və

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_h + h = n.$$

İsbatı. Kafi şərtin doğruluğu asanlıqla bilavasitə yoxlana bilər. Ona görə də zəruri şərtin isbatına baxaq. Tutaq ki, xətti f operatorunun məxsusi qiyməti 0-dır və onun təkrarlığı fəzanın ölçüsünə bərabərdir. Deməli, onun xarakteristik çoxhədlisi $c(\lambda) = (-\lambda)^n$ -ə bərabərdir. Tutaq ki, kökün həndəsi təkrarlığı h -dir, yəni onun h sayda xətti asılı olmayan məxsusi vektorları vardır. Bu məxsusi vektorlar, 0 məxsusi qiymətinə uyğun olan məxsusi vektorlar kimi, nüvənin bazisini təşkil edir. Həmin bazisi fəzanın bazisinədək tamamlayaq. Tamamlayıcı vektorların obrazlarının xətti örtüyü xətti operatorun obrazıdır. Aydındır ki,

$$f(\text{Im } f) \subset f(X) = \text{Im } f$$

və deməli, $\text{Im } f$ invariant alt fəzadır. İxtiyari $0 \neq x \in \text{Im } f$ vektoru götürsək, hökm edə bilərik ki, x və $f(x)$ vektorları xətti asılı deyil. Əks halda elə $\lambda \neq 0$ skalyarı tapmaq olar ki,

$$f(x) = \lambda x$$

olardı ki, bu da mümkün deyil (çünkü xətti operatorun ancaq bir məxsusi qiyməti vardır: $\lambda = 0$).

İnduksiya metodu ilə göstərək ki, əgər $f^k(x) \neq 0$ münasibəti hər hansı $0 \neq x \in \text{Im } f$ vektoru

üçün ödənersə, onda $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k-1}(x), f^k(x)$ vektorlar sistemi xətti asılı deyil.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, məsələn, ($k=2$ halı) $f^2(x) \neq 0$ olmaqla, $x, f(x), f^2(x)$ sistemi xətti asılıdır. Onda elə $\alpha, \beta, \gamma \in K$ skalyarları var ki,

$$\alpha f(x) + \beta x + \gamma f^2(x) = 0.$$

$\gamma = 0$ ola bilməz, əks halda, $f(x) \neq 0$ olduğundan, yuxarıda göstərildiyi kimi $\alpha f(x) + \beta x = 0$ olardı ki, bu da mümkün deyil. Deməli, $\gamma \neq 0$ və biz yuxarıdakı bərabərliyin hər iki tərəfini γ -ya bölməklə onu $\alpha' f(x) + \beta' x = f^2(x)$ şəklində yazı bilərik. Sonuncu bərabərliyi

$$f(f(x) + ux) = (\alpha' + u)[f(x) + ux]$$

kimi yazmaq olar ki, burada u parametri $\alpha' u + u^2 = \beta'$ şərtindən təyin olunur. K meydanı cəbri qapalı olduğu üçün bu tənliyin u kökü vardır. Lakin $f(x) + ux \neq 0$ olduğu üçün, bu münasibət, yenə də, xətti operatorun

$$0 \neq y = f(x) + ux \in \text{Im } f$$

məxsusi vektorunun olduğunu göstərir. Deməli, fərziyyəmiz doğru deyil və $x, f(x), f^2(x)$ sistemi xətti asılı deyil.

İnduktiv fərziyyə olaraq $0 \neq x \in \text{Im } f$ vektoru üçün $x, f(x), f^2(x), \dots, f^k(x)$ vektorlar sisteminin xətti asılı olmadığını ($k < n - h - 1$) və $f^{k+1}(x) \neq 0$ olduğunu qəbul edək. Göstərək ki, bu halda $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k+1}(x)$ sistemi də xətti asılı deyil. Əksini fərz edək. Tutaq ki,

$$f^{k+1}(x) = c_0 x + c_1 f(x) + \dots + c_k f^k(x) \quad (1)$$

münasibəti ödənilir. Yuxarıda olduğu kimi, $u_1, \dots, u_k, t$ dəyişənlərini elə seçək ki,

$$t = c_k + u_1; c_{k-1} + u_2 = tu_1; c_{k-2} + u_3 = tu_2; \dots; c_1 + u_k = tu_{k-1}; c_0 = tu_k; \quad (2)$$

münasibətləri doğru olsun. Onda, (1) münasibətini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$f(f^k(x) + u_1 f^{k-1}(x) + \dots + u_k x) = t[f^k(x) + u_1 f^{k-1}(x) + \dots + u_{k-1} f(x) + u_k x]. \quad (3)$$

Göstərək ki, (2) münasibətlərinin ödəyən $u_1, \dots, u_k, t \in K$ elementləri vardır. (2) bərabərliklərini belə yazı bilərik:

$$u_2 = u_1 t - c_{k-1}, \quad u_3 = u_1 t^2 - c_{k-1} t - c_{k-2}, \dots, u_k = u_1 t^{k-1} - c_{k-1} t^{k-2} - \dots - c_2 t - c_1.$$

Sonuncu bərabərlikdən isə aşağıdakı tənlik alınır:

$$c_0 = (t - c_k) t^k - c_{k-1} t^{k-1} - \dots - c_1 t$$

və ya

$$-t^{k+1} + c_k t^k + \dots + c_1 t + c_0 = 0.$$

K meydanı cəbri qapalı olduğu üçün bu tənliyin K meydanında kökü vardır ki, buradan (3) –ə əsasən t məxsusi qiymətini və ona uyğun olan

$$y = f^k(x) + u_1 f^{k-1}(x) + \dots + u_k x$$

(induktiv fərziyyəyə görə $y \neq 0$) məxsusi vektorunu alırıq ki, bu, yenə də ziddiyyətdir. Deməli, göstərdik ki, $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k+1}(x)$ sistemi xətti asılı deyil.

Aydınır ki, xətti asılı olmayan $x, f(x), f^2(x), \dots, f^k(x)$ vektorlarının sayı $\text{Im } f$ fəzanın ölçüsündən böyük ola bilməz, yəni $k \leq \text{rang } f = n - h$. Deməli, müəyyən k natural ədədi üçün $f^{k+1}(y) = 0$ olmalıdır.

İndi isə tutaq ki, müəyyən $k \leq n$ natural ədədi və hər hansı $0 \neq x \in \text{Im } f$ vektoru üçün $f^k(x) \neq 0$, lakin hər bir $0 \neq y \in \text{Im } f$ üçün isə $f^{k+1}(y) = 0$. $X_1 = L(x, f(x), f^2(x), \dots, f^k(x))$ işarə edək. Qeyd edək ki, $f(f^k(x)) = 0$ olduğu üçün $f^k(x) \in \text{Ker } f$. Bu vektor məxsusi vektordur. $0 \neq x \in \text{Im } f$ olduğu üçün elə $z \notin \text{Ker } f$ var ki, $x = f(z)$. Əgər $X'_1 = L(z, x = f(z), f(x), \dots, f^k(x))$ işarə etsək, asanlıqla göstərə bilərik ki, (isbat edin) $z, x = f(z), f(x), \dots, f^k(x)$ vektorlar sistemi xətti asılı deyil və aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$f(X'_1) = X_1, X = X'_1 \oplus X', \text{Im } f = X_1 \oplus Y', f(X') = Y'.$$

Artıq X' alt fəzasında f xətti operatorunun məxsusi vektorlarının sayı $h-1$ olacaqdır.

Mühakimələri davam etdirərək, yeni $0 \neq y \in Y'$ vektoru tapmaq olar. Həmin vektor üçün yuxarıda yerinə yetirilmiş qurma işlərini x vektorunu y vektoru ilə, X fəzasını X' , Y fəzasını isə

Y' ilə əvəz etməklə yerinə yetirə bilərik. Beləliklə biz yeni $X_2 = L(y, f(y), f^2(y), \dots, f^l(y))$ alt fəzasını alırıq. Yenə də sonuncu vektor məxsusi vektordur, yəni $f^l(y) \in \text{Ker} f$.

Göstərmək olar ki, bu qayda ilə davam etməklə biz, h sayda addımdan sonra $\text{Im } f = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_h$ alaracağıq. $Y_1 = L(x, f(x), f^2(x), \dots, f^k(x))$ şəklində alt fəza dövrü alt fəza adlanır. Asanlıqla yəqin etmək olar ki, f xətti operatorunun X'_1 alt fəzasına məhdudlaşmasından törənmiş f_1 operatorunun $z, x = f(z), f(x), \dots, f^k(x)$ bazisində matrisi

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

olacaqdır. Deməli, xətti operatorun $\text{Im } f = X_1 \oplus \dots \oplus X_s$ invariant alt fəzasının və nüvənin qurulmuş bazislərində matrisi aşağıdakı şəkildə olacaqdır:

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_h \end{pmatrix};$$

burada hər bir blokda sonuncu sətir f xətti operatorunun bir məxsusi vektoruna uyğundur və blokların sayı məxsusi qiymətin həndəsi təkrarlığına bərabərdir. Teorem 1 isbat olundu.

Göstərmək olar ki, əgər xarakteristik çoxhədli iki qarşılıqlı sadə çoxhədlinin hasili şəklində göstərilirsə, onda xətti operatorun matrisi diaqonal şəkilli blok matrisə oxşar olacaqdır.

Nəticə. Cəbri qapalı K meydanı üzərində n -ölçülü xətti fəzada verilmiş xətti operatorun cüt-cüt müxtəlif məxsusi qiymətləri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, onların təkrarlığı isə, uyğun olaraq, $m_1, m_2, \dots, m_k$ olarsa, onda xətti operatorun matrisi aşağıdakı matrisə oxşardır:

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

burada $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{s-1}$ elementləri 0 və ya 1-ə bərabərdir, $J_s(\lambda)$ isə s tərtibli, diaqonal elementləri λ olan belə bir matrisdir:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_{s-1} & \lambda \end{pmatrix}.$$

(5) şəklində matris xətti operatorun matrisinin *Jordan normal şəkli* adlanır.

Misal. Hər hansı bazisdə matrisi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şəklində olan xətti operatorun Jordan normal şəklini müəyyən edək.

Həlli. Xarakteristik tənliyi yazaq:

$$c(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Determinantı açmaq üçün 3 və 4-cü sətirləri götürərək, Laplas teoremini tətbiq edək:

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2-\lambda & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+2+3} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+2+4} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+3+4} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(-1+2-\lambda) + (\lambda-1)(-1+2-\lambda) + (-1+\lambda)(-\lambda+1) + \\ &+ (1-\lambda)(-\lambda+1) + (1-\lambda)^2(1-2\lambda+\lambda^2) = (1-\lambda)^4 = 0. \end{aligned}$$

$F - \lambda E$ matrisi bu halda aşağıdakı kimi olacaqdır (burada $\lambda = 1$ olduğunu nəzərə almaq lazımdır):

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisin rənkı 2-yə bərabərdir. Deməli, $h = 2$ və Jordan normal şəklini müəyyənləşdirmək üçün $F - \lambda E$ matrisinin qüvvətlərinə baxaq.

$$(F - \lambda E)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beləliklə, $n_1 = 1$ və hər bir məxsusi vektor bir Jordan hücrəsi doğurur. Onda xətti operatorun matrisinin Jordan normal şəkli

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

kimi olacaqdır.

III FƏSİL. Evklid fəzaları.

§1. Xətti funksiyalar. Qoşma fəza və dual bazis.

Xətti inikaslar içərisində sonlu ölçülü xətti fəzanın skalyrlar meydanına inikası böyük əhəmiyyətə malikdir. Belə inikaslar bəzən xətti funksiya, xətti funksional və ya xətti forma da adlandırılır (sonuncu ifadə çox zaman xətti funksiyanın verilmiş bazisdə ifadəsi üçün işlədilir).

Tutaq ki, K meydanı üzərində $\langle X, K \rangle$ n ölçülü xətti fəzası verilmişdir.

Tərif. $f : X \rightarrow K$ inikası o zaman *xətti funksiya* və ya *xətti funksional* adlanır ki, aşağıdakı şərtlər ödənsin:

1) İxtiyari iki $x, y \in X$ elementləri üçün $f(x + y) = f(x) + f(y)$;

2) İxtiyari $x \in X$ və $\alpha \in K$ elementləri üçün $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Tərifdən görünür ki, xətti funksiya birölçülü xətti fəzaya xətti inikasdır. Tərifdə göstərilən iki şərti bir şərtlə əvəz etmək olar: $\langle X, K \rangle$ xətti fəzasında verilmiş $f : X \rightarrow K$ inikası o zaman xətti funksiya adlanır ki, aşağıdakı şərt ödənsin:

$$(\forall \alpha, \beta \in K)(\forall x, y \in X)(f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)).$$

Doğrudan da, tərifin birinci şərti $\alpha = \beta = 1$ olduqda, ikinci şərti isə $\beta = 0$ olduqda alınır.

$\langle X, K \rangle$ fəzasında hər hansı $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ bazisi verilərsə, onda bu bazisdə xətti funksiyanın, xətti inikas kimi, matrisini yazmaq olar. Bunun üçün bazis vektorların obrazlarının verilməsi kifayətdir (xətti inikasın varlıq teoreminə əsasən belə xətti funksiya yeganədir):

$$f(x_1) = \lambda_1, f(x_2) = \lambda_2, \dots, f(x_n) = \lambda_n.$$

Deməli, xətti inikasın verilmiş bazisdə matrisi

$$F = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

olacaqdır. Məlum olduğu kimi, ixtiyari $x \in X$ vektorunun koordinat sütunu (bu halda o ancaq bir komponentdən ibarətdir)

$$\overline{f(x)} = F\overline{x} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n). \quad (1)$$

düsturu ilə tapılır. Bəzən xətti funksiyanın koordinatlar vasitəsi ilə bu ifadəsi *xətti forma* adlandırılır. F matrisinin komponentləri xətti formanın əmsalları adlanır. Bəzi müəlliflər isə xətti funksiyanın özünü xətti forma adlandırırlar. Biz xətti forma dedikdə xətti funksiyanın koordinatlarla (1) ifadəsini başa düşəcəyik.

Misallar 1. n ölçülü K^n ədədi xətti fəzasında hər bir $\bar{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ elementinə qarşı onun birinci koordinatını, yəni x_1 -i qarşı qoyan inikas xətti funksiyadır.

2. $C[0,1]$ kəsilməz funksiyalar fəzasında

$$f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$

kimi təyin olunan inikas xətti funksiyadır.

3. Koordinat müstəvisində $a \cdot x$ skalyar hasili müəyyən olunmuşdur. a qeyd olunarsa, $a \cdot x$ skalyar hasili $X \rightarrow K$ xətti formasını təyin edir ki, burada X müstəvi üzərindəki vektorlar çoxluğuudur.

İndi isə bazis dəyişdikdə xətti formanın necə dəyişdiyini müəyyən edək. Tutaq ki, xətti fəzanın yuxarıda seçilmiş bazisi ilə birlikdə başqa bir $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ bazisi verilmişdir. Birinci bazisdən ikinciye keçid matrisini C ilə işarə edək. Onda eyni bir $x \in X$ vektorunun birinci və ikinci bazisdə koordinat sütunları arasında belə bir əlaqə vardır: $\bar{x} = C\bar{x}'$. Deməli, (1)-ə əsasən

$$\overline{f(x)} = FC\bar{x}'.$$

İndi isə yeni bazisdə f xətti funksiyanın matrisini F' ilə işarə etsək alarıq:

$$F'\bar{x}' = FC\bar{x}'.$$

Bu bərabərlik istənilən $\bar{x}'$ koordinat sütunu üçün doğru olduğundan sonuncu bərabərlikdən yazıb bilərik:

$$F' = FC.$$

Deməli, bir bazisdən digərinə keçdikdə xətti formanın əmsalları

$$(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)C$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

$\langle X, K \rangle$ xətti fəzasında təyin olunan bütün xətti funksiyalar çoxluğu $Hom(X, K)$ (və ya sadəcə $Hom(X)$) kimi işarə olunur. Məlumdur ki, bu çoxluq xətti inikaslar üzərində toplama və skalyra vurma əməllərinə görə xətti fəza təşkil edir.

Teorem 1. $\langle X, K \rangle \cong Hom(X, K)$.

İsbatı. Tutaq ki, X fəzasında hər hansı $x_1, x_2, \dots, x_n$ bazisi qeyd olunmuşdur. Aşağıdakı xətti funksiyalara baxaq:

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ olduqda,} \\ 0, & i \neq j \text{ olduqda.} \end{cases}$$

Bu bərabərliklər n sayda xətti funksiyaları birqiymətli təyin edir.

Əvvəlcə göstərək ki, bu funksiyalar xətti asılı deyil. Tutaq ki,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0.$$

Onda ixtiyari $x \in X$ vektoru üçün $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n)(x) = 0$. Xüsusi halda,

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n)(x_i) = 0.$$

Sol tərəfi belə yazmaq olar:

$$\lambda_1 f_1(x_i) + \dots + \lambda_i f_i(x_i) + \dots + \lambda_n f_n(x_i) = \lambda_i = 0.$$

Beləliklə, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ və buna görə də $f_1, f_2, \dots, f_n$ xətti funksiyalar sistemi xətti asılı deyil.

Göstərək ki, $Hom(X, K) = L(f_1, f_2, \dots, f_n)$. İxtiyari $f \in Hom(X, K)$ xətti funksiyası götürək. Bu funksiya öz matrisi ilə birqiymətli təyin olunur. Bu matrisi $F = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ kimi işarə edək və $\varphi = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$ cəminə baxaq. Onda $\varphi(x_i) = \lambda_i f_i(x_i) = \lambda_i = f(x_i)$. Beləliklə, bazis vektorlarda f və φ xətti funksiyaları eyni qiymətlər alır. Deməli, onlar üst – üstə düşür. Bu göstərir ki, $f_1, f_2, \dots, f_n$ xətti funksiyalar sistemi $Hom(X, K)$ fəzasının bazisidir. Eyni zamanda biz $x_i \mapsto f_i$ uyğunluğunun izomorfizm olduğunu da göstərmiş olduq. Teorem 1 isbat olundu.

Tərif. $Hom(X, K)$ fəzası $\langle X, K \rangle$ xətti fəzasına nəzərən *qoşma fəza* (və ya *dual fəza*),

$\hat{x}_i = f_i$ bazisi isə verilən bazisə nəzərən *dual bazis* adlanır. Qoşma fəza $\hat{X}$ kimi də işarə olunur.

§2. Skalyar hasilli xətti fəzalar. Ortoqonal bazis.

Yuxarıda biz xətti funksiya anlayışı müəyyən etdik və onun xətti formalarla sıx əlaqəsini aydınlaşdırdıq. İndi isə düz hasildə təyin olunan funksiya – skalyar hasil anlayışını verək. Bunun üçün hər hansı K meydanı üzərində verilmiş n ölçülü $\langle X, K \rangle$ xətti fəzası və bu xətti fəzada verilmiş $f : X \times X \rightarrow K$ inikası götürək.

Tərif 1. $f : X \times X \rightarrow K$ inikası o zaman *skalyar hasil* adlanır ki, aşağıdakı şərtlər ödənsin:

- 1) $(\forall x, y \in X)(f(x, y) = f(y, x));$
- 2) $(\forall x, y, z \in X)(f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z));$
- 3) $(\forall x, y \in X)(\forall \alpha \in K)(f(\alpha x, z) = \alpha f(x, z)).$

Bəzən skalyar hasil üçün $f(x, y) = x \cdot y$ və ya $f(x, y) = (x, y)$ yazılışlarından da istifadə olunur.

Tərif 2. Əgər ixtiyari $x \neq 0$ vektoru üçün $x \cdot x \neq 0$ olarsa, onda skalyar hasil *qeyri-məxsusi* və ya *cırılşmayan* adlanır.

Skalyar hasilin bir çox mühüm xassələri qeyri-məxsusi skalyar hasillər üçün doğru olduğundan biz ancaq belə hasillərə baxacağıq.

Qeyri-məxsusi skalyar hasillərin aşağıdakı xassələri vardır.

Xassə 1. İxtiyari $x \in X$ vektoru üçün $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ (qeyd edək ki, sonuncu 0 K meydanının elementi, digərləri isə sıfır vektorlardır).

İsbatı. İstənilən $y \in X$ vektoru üçün tərifə əsasən yazıb bilərik:

$$0 \cdot x = (y - y) \cdot x = y \cdot x - y \cdot x = 0.$$

Xassə 2. İxtiyari $x \in X$ vektoru üçün $x \cdot x = 0 \leftrightarrow x = 0$.

İsbati. $x = 0$ olduqda xassə 1-ə əsasən $0 \cdot 0 = 0$. $x \neq 0$ olduqda isə qeyri - məxsusilik şərtinə görə $x \cdot x \neq 0$. Deməli, xassə doğrudur.

Tərif 3. Əgər $x, y \in X$ vektorları üçün $x \cdot y = 0$ olarsa, onda belə vektorlar *ortoqonal* vektorlar adlanır.

Misallar. 1. R^2 iki ölçülü həqiqi ədədi xətti fəzada iki $\bar{u}_1 = (x_1, y_1)$ və $\bar{u}_2 = (x_2, y_2)$ vektorlarının skalyar hasilı

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

kimi təyin olunur.

2. $C[0,1]$ kəsilməz funksiyalar fəzasında aşağıdakı kimi skalyar hasil təyin etmək olar:

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

3. K^n n ölçülü ədədi xətti fəzada iki $\bar{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ və $\bar{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorlarının skalyar hasilı

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

kimi təyin oluna bilər.

Tərif 4. Əgər $x_1, x_2, \dots, x_k$ vektorlar sisteminin ixtiyari iki x_i, x_j ($i \neq j$) sistemi ortoqonal olarsa, onda belə sistem *ortoqonal vektorlar sistemi* adlanır.

Teorem 1. Ortoqonal vektorlar sistemi xətti asılı deyil.

İsbati. Tutaq ki, $x_1, x_2, \dots, x_k$ vektorlar sistemi ortoqonal sistemdir. Bu sistemin sıfır bərabər hər hansı xətti kombinasiyasını götürək:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0.$$

Bərabərliyin hər iki tərəfini x_1 vektoruna skalyar vuraq:

$$x_1 \cdot (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = x_1 \cdot 0 = 0.$$

Skalyar hasilin xassəsinə və ortoqonallığa əsasən, sol tərəfi belə çevirmək olar:

$$\lambda_1 x_1 \cdot x_1 + \lambda_2 x_1 \cdot x_2 + \dots + \lambda_n x_1 \cdot x_n = x_1 \cdot x_1 + 0 + \dots + 0 = \lambda_1 x_1^2.$$

Lakin skalyar hasil qeyri-məxsusi olduğundan $x_1^2 \neq 0$. Onda, $\lambda_1 x_1^2 = 0$ şərtindən $\lambda_1 = 0$ alarıq.

Eyni qayda ilə verilən bərbərliyi skalyar olaraq $x_2, \dots, x_k$ vektorlarına vursaq, ardıcıl olaraq, $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ almaq olar. Deməli, ortoqonal sistem xətti asılı deyil. Teorem 1 isbat olundu.

Nəticə 1. n ölçülü xətti fəzada ortoqonal sistem təşkil edən n sayda vektor varsa, onda belə sistem fəzanın bazisidir.

Nəticə 2. n ölçülü xətti fəzada ortoqonal sistem təşkil edən vektorların sayı n -dən çox deyil.

Tərif 5. Xətti fəzanın bazisi ortoqonal sistem olarsa, belə bazis *ortoqonal bazis* adlanır.

Teorem 2. İxtiyari ortoqonal vektorlar sistemini ortoqonal bazisə dək tamamlamaq olar.

İsbatı. Verilən ortoqonal vektorlar sistemini $x_1, x_2, \dots, x_k$ kimi işarə edək. Bu sistem teorem 1-ə əsasən xətti asılı deyil. $k = n$ olarsa, teoremin hökmü nəticə 1-dən alınır. Buna görə də hesab etmək olar ki, $k < n$. Onda məlum olduğu kimi (IX fəsil, §2, teorem 4) bu xətti asılı olmayın sistemi fəzanın hər hansı $x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n$ bazisinə dək tamamlamaq olar. Alınmış sistemdən istifadə edərək yeni ortoqonal $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ sistemini quraq.

$$x_{k+1} = y_{k+1} - \lambda_1 x_1 - \dots - \lambda_k x_k \quad (1)$$

işarə edək və $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skalyarlarını elə seçək ki, alınan x_{k+1} vektoru $x_1, x_2, \dots, x_k$ sisteminin hər bir vektoruna ortoqonal olsun. (1) bərabərliyinin hər iki tərəfini ardıcıl olaraq $x_1, \dots, x_k$ vektorlarına skalyar vuraq. Onda ortoqonallığa əsasən alarıq:

$$0 = x_i \cdot x_{k+1} = x_i \cdot y_{k+1} - \lambda_i x_i^2, i = 1, \dots, k.$$

Burdan tapırıq:

$$\lambda_i = \frac{x_i \cdot y_{k+1}}{x_i \cdot x_i};$$

$x_i \cdot x_i > 0$ olduğu üçün kəsrin mənası vardır. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skalyarlarının bu bərabərliklərlə təyin olunmuş qiymətlərində x_{k+1} vektoru $x_1, x_2, \dots, x_k$ sisteminin hər bir vektoruna ortoqonaldır. (1) münasibəti göstərir ki,

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = L(x_1, x_2, \dots, y_{k+1})$$

və deməli, y_{k+1} vektorunu x_{k+1} vektoru ilə əvəz etdikdə, yenə də xətti örtüyün bazisini alırıq. İndi yuxarıda aparılan mühakimələri təkrar edə bilərik (əgər $k+1=n$ olarsa, proses başa çatır, əks halda isə o davam edir). Bu qayda ilə biz nəticədə $x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n$ bazisini ortoqonal $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ bazisi ilə əvəz etmiş olarıq. Teorem 2 isbat olundu.

Teorem 2-nin isbatı eyni zamanda ortoqonal bazisin qurulması üçün alqoritm verir. Bu qurma prosesi *ortoqonallaşdırma (Qram – Şmid) prosesi* adlanır.

Misal. R^4 fəzasında $(1;2;1;3), (4;1;1;1), (3;1;1;0)$ vektorlar sistemi verilmişdir. Ortoqonallaşdırma prosesini tətbiq edərək, bu sistemi ortoqonal bazislə əvəz edək.

Həlli. Əvvəlcə verilən sistemin rəngini müəyyənləşdirək. Verilən sətir vektorlardan matris tərtib edək və onun rəngini tapaq.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sonuncu üç sütunun əmələ gətirdiyi minoru hesablayaq:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 3 - 2 = -1 \neq 0.$$

Beləliklə, verilən vektorlar sistemi xətti asılı deyil. Əgər bu sistemə yeni $(1;0;0;0)$ vektorunu əlavə etsək asanlıqla görmək olar ki,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

yəni genişlənmiş sistem həqiqətən bazisdir. $\bar{x}_1 = (1;2;1;3)$, $\bar{y}_2 = (4;1;1;1)$ qəbul edək və

$$\bar{x}_2 = \bar{y}_2 - \lambda \bar{x}_1$$

yazaq. Teorem 2-nin isbatında olduğu kimi

$$\lambda = \frac{\bar{x}_1 \cdot \bar{y}_2}{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Onda, (kəsrdən azad olmaq üçün $\bar{x}_2$ vektorunu, onun yazılışını dəyişmədən $3\bar{x}_2$ ilə əvəz edək;

bu vektorlar sisteminin xətti örtüyünü dəyişmir) yaza bilərik:

$$\bar{x}_2 = 3(\bar{y}_2 - \lambda\bar{x}_1) = 3 \cdot \left[(4;1;1) - \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3} \right) \right] = (10; -1; -3).$$

Prosesi davam edək. $\bar{y}_3 = (3;1;0)$ qəbul edək və

$$\bar{x}_3 = \bar{y}_3 - \alpha\bar{x}_1 - \beta\bar{x}_2$$

yazaq. Yuxarıda olduğu kimi,

$$\alpha = \frac{\bar{x}_1 \cdot \bar{y}_3}{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}; \quad \beta = \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_3}{\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_2} = \frac{30}{111} = \frac{10}{37}.$$

Beləliklə,

$$\begin{aligned} 185(\bar{y}_3 - \alpha\bar{x}_1 - \beta\bar{x}_2) &= 185\bar{y}_3 - 74\bar{x}_1 - 50\bar{x}_2 = \\ &= (555 - 74 - 500; 185 - 148 + 50; 185 - 74 - 50; 0 - 222 + 150) = \\ &= (-19; 87; 61; -72). \end{aligned}$$

$\bar{x}_3 = (-19; 87; 61; -72)$ qəbul edək. Nəhayət, $\bar{y}_4 = (1; 0; 0; 0)$ olduğunu nəzərə alaraq,

$$\bar{x}_4 = \bar{y}_4 - \alpha\bar{x}_1 - \beta\bar{x}_2 - \gamma\bar{x}_3$$

yazaq və əmsalları hesablayaq.

$$\alpha = \frac{\bar{x}_1 \cdot \bar{y}_4}{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1} = \frac{1}{15}; \quad \beta = \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_4}{\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_2} = \frac{10}{111}; \quad \gamma = \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_4}{\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_3} = \frac{-19}{\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_3};$$

$\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_3 = 19^2 + 87^2 + 61^2 + 72^2 = 361 + 7569 + 3721 + 5184 = 16835$. Deməli,

$$\gamma = \frac{-19}{37 \cdot 455}$$

və beləliklə, $\bar{x}_1 = (1; 2; 1; 3)$ $\bar{x}_2 = (10; -1; 1; -3)$ $\bar{x}_3 = (-19; 87; 61; -72)$

$$\begin{aligned}\bar{x}_4 &= \bar{y}_4 - \alpha \bar{x}_1 - \beta \bar{x}_2 - \gamma \bar{x}_3 = \\ &= (1; 0; 0; 0) - \frac{1}{15} (1; 2; 1; 3) - \frac{10}{111} (10; -1; 1; -3) + \frac{19}{5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37} (-19; 87; 61; -72) = \\ &= \left(\frac{555}{50505}; \frac{2775}{50505}; \frac{-4440}{50505}; \frac{-555}{50505} \right) = \left(\frac{1}{91}; \frac{5}{91}; \frac{-8}{91}; \frac{-1}{91} \right).\end{aligned}$$

Axtarılan bazis belədir:

$$\bar{x}_1 = (1; 2; 1; 3), \bar{x}_2 = (10; -1; 1; -3), \bar{x}_3 = (-29; 42; 26; -27), \bar{x}_4 = (1; 5; -8; -1).$$

§3. Evkilid fəzası. Ortonormal bazis.

Evkilid fəzası anlayışını skalyar hasil verilmiş başqa xətti fəza anlayışından fərqləndirən cəhət əsas meydanın həqiqi ədədlər meydanı olmasıdır. Həqiqi skalyar hasil vastəsi ilə Evkilid müstəvisinə və fəzasına xas olan bir sıra anlayışları ümumi Evkilid fəzalarına köçürmək olar. Evkilid fəzalarının üstünlüklərindən biri ortonormal bazisin varlığıdır. Mühüm anlayışlar sırasına vektorun norması və iki vektor arasındakı bucaq daxildir.

Tərif 1. Həqiqi ədədlər meydanı üzərində verilmiş skalyar hasilli $\langle X, R \rangle$ xətti fəzasında skalyar hasil müsbət təyin olunmuş olarsa, yəni

$$(\forall x \in X)(x \neq 0 \rightarrow (x, x) > 0)$$

olarsa, onda belə xətti fəza *Evkilid fəzası* adlanır.

Qeyd edək ki, tərifə əsasən skalyar hasil qeyri-məxsusudur. Tutaq ki, $\langle X, R \rangle$ Evkilid fəzasında ixtiyari x vektoru verilmişdir. Tərifə əsasən $x \cdot x \geq 0$.

Tərif 2. $x \cdot x$ hasilinin hesabi kvadrat kökünə x vektorunun *norması* deyilir və belə işarə olunur: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$.

Teorem 1. Vektorun normasının aşağıdakı xassələri vardır:

$$1) (\forall x \in X)(\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0);$$

$$2) (\forall \lambda \in R)(\forall x \in X)(\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|);$$

3) $(\forall x, y \in X) \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Koşı – Bunyakovski bərabərsizliyi);

4) $(\forall x, y \in X) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçbucaq bərabərsizliyi).

İsbati. 1) $x \cdot x$ mənfi olmayan ədəddir və onun hesabi kvadrat kökü mənfi deyil . Evkild

fəzasında skalyar hasil qeyri-məxsusi olduğundan $x \neq 0$ olduqda $x \cdot x > 0$ və deməli,

$$x \neq 0 \rightarrow \|x\| > 0.$$

$\|0\| = 0$ olduğu isə aydındır. Deməli, xassə 1) doğrudur.

2) $\|\lambda x\|^2 = (\lambda x) \cdot (\lambda x) = \lambda^2 x \cdot x = \lambda^2 \|x\|^2$ olduğu üçün hər tərəfdən hesabi kvadrat kök almaq olar:

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

3) $a = \lambda x - y$ işarə edək. Onda, $0 \leq aa = (\lambda x - y)(\lambda x - y) = \lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda xy + y^2$ alarıq. Bu bərabərsizliklər ixtiyari λ həqiqi ədədi üçün doğrudur. Deməli,

$$\|x\|^2 \lambda^2 - 2\lambda x \cdot y + \|y\|^2 \geq 0 \quad (1)$$

kvadrat üçhədlisinin ya bir həqiqi kökü var və ya həqiqi kökü yoxdur, yəni bu kvadrat üçhədlinin diskriminatı müsbət deyil:

$$4(x \cdot y)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow (x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Hər iki tərəfdən hesabi kvadrat kök alaq. Onda

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

alarıq.

4) İxtiyari x və y vektorları üçün

$$\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2$$

və xassə 3) -ə əsasən

$$2|x \cdot y| \leq 2\|x\| \cdot \|y\|.$$

Deməli,

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|x \cdot y| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Buradan isə tələb olunan bərabərsizlik alınır:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Teorem 1 isbat olundu.

1. Bir neçə misala baxaq. R^n fəzasında $x = (x_1, \dots, x_n)$ və $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorlarının skalyar hasili $xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ kimi təyin olunur. Bu hasil ilə R^n fəzası Euklid fəzasına çevrilir. Vektorun norması üçün

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

ifadəsi alınır. Əgər 3) bərabərsizliyini kvadrata yüksəlsək alarıq $(xy)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$. Yaxud

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

Bu bərabərsizlik Koşi – Bunyakovski bərabərsizliyi kimi tanınır.

2. Tutaq ki, $[a, b]$ parçasında həqiqi, kəsilməz $C[a, b]$ funksiyalar fəzası verilmişdir. Bu fəzada f və g kəsilməz funksiyalarının skalyar hasili

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

kimi təyin olunur. Asanlıqla yoxlamaq olarm ki, bu hasil skalyar hasilin bütün şərtlərini ödəyir (isbat edin). Göstərək ki, o, qeyri-məxsusudur. Tutaq ki, $f(x) \neq 0$. Onda, kəsilməzliyə əsasən, elə $x \in (a, b)$ nöqtəsi var ki, $f(x_0) \neq 0$. Yenə də kəsilməzliyə əsasən x_0 nöqtəsinin elə

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$$

ətrafı var ki, bu ətrafın bütün nöqtələrində $f(x_0) > 0$. Deməli, elə ətraf tapmaq olar ki, bu ətrafın

bütün nöqtələri üçün $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) > 0$ olar. Beləliklə,

$$\int_a^b f^2(x)dx = \|f\|^2 > 0.$$

3) bərabərsizliyindən alırıq:

$$\left(\int_a^b fg dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 dx \right) \left(\int_a^b g^2 dx \right).$$

Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə əsasən

$$\left| \frac{xy}{\|x\| \cdot \|y\|} \right| \leq 1.$$

Deməli, ixtiyari x və y vektorları üçün elə $0 \leq \varphi \leq \pi$ ədədi var ki, $\frac{xy}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos \varphi$ və ya

$$xy = \|x\| \cdot \|y\| \cos \varphi.$$

Bu şərtlə təyin olunan φ bucağı x və y vektorları arasındakı bucaq adlanır. İki ölçülü və üç ölçülü halda bu anlayış adi bucaq anlayışı ilə üst-üstə düşür. Sıfırdan fərqli x və y vektorlarının skalyar hasili yalnız və yalnız o zaman sıfır ola bilər ki, $\cos \varphi = 0$ və ya $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olsun.

Tərif 3. $\|x\| = 1$ şərtini ödəyən x vektoru normalaşmış vektor adlanır. Bütün elementləri normalaşmış vektorlar olan bazisə *ortonormal bazis* deyilir.

Teorem 2. n -ölçülü Evkilid fəzasında ortonormal bazis vardır.

İsbatı. İxtiyari (sıfır olmayan) e_1 normalaşmış vektoru götürək. §2, teorem 2-yə əsasən onu $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortoqonal bazisinə tamamlamaq olar.

$$e'_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$$

işarə etsək, $e'_1, \dots, e'_n$ sistemi ortonormal sistem olacaqdır. Teorem 2 isbat olundu.

İsbatsız olaraq ortonormal sistemin bəzi xassələrini göstərək. Bu xassələr asanlıqla isbat oluna bilər.

Xassə1. n -ölçülü X Evkilid fəzasında ixtiyari n sayda normalaşmış ortoqonal vektorlar sistemi ortonormal bazis təşkil edir.

Xassə2. Bazis təşkil etməyən normalaşmış vektorlar sistemini ortonormal bazisə tamamlamaq olar.

Xəssə3. Əgər $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormal sistem olarsa və

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

$$y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$$

olarsa, onda,

$$x \cdot y = \lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_n \mu_n.$$

§4. Bixətti və kvadratik formalar.

Tutaq ki, $\langle X, K \rangle$ xətti fəzası verilmişdir.

Tərif 1. $f : X \times X \rightarrow K$ inikası o zaman *bixətti forma* adlanır ki, o, hər iki dəyişənə nəzərən xətti funksiya olsun, yəni:

$$1) (\forall \alpha, \beta \in K) (x, y, z \in X) (f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z));$$

$$2) (\forall \alpha, \beta \in K) (x, y, z \in X) (f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z))$$

münasibətləri doğru olsun.

$\langle X, K \rangle$ fəzası n ölçülü xətti fəza olarsa, hər hansı $x_1, x_2, \dots, x_n$ bazisi götürmək olar. Onda, hər bir vektoru bazis vektorlar üzrə ayırmaq olar. Belə ki, yazı bilərik:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n,$$

$$y = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n.$$

Onda tərif 1-in münasibətlərini bir neçə dəfə təkrar tətbiq etməklə aşağıdakı bərabərliyi ala bilərik:

$$f(x, y) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_n y_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, x_j) \lambda_i \mu_j. \quad (1)$$

$f(x_i, x_j)$ vuruqları ancaq bazis vektorlardan asılıdır. $a_{ij} = f(x_i, x_j)$ işarə etməklə (1) bərabərliyi-

nin sağ tərəfini belə yazmaq olar:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_i \mu_j = (A\bar{x}, \bar{y}); \quad (2)$$

burada $A = (a_{ij})$ əmsallardan düzəlmiş n tərtibli matris $(A\bar{x}, \bar{y}) = A\bar{x} \cdot \bar{y}$ isə skalyar hasilidir. Çox zaman bixətti forma dedikdə (2) bərabərliyinin sol tərəfi başa düşülür. Göründüyü kimi (2) ifadəsi yuxarıdakı tərif mənada kvadratik formanın bazisdə ifadəsidir.

$x = y$ olduqda biz $X \rightarrow K$ inikasını alırıq ki, bu inikas hər bir $x \in X$ vektoruna $f(x, x) \in K$ skalyarını qarşı qoyur.

Tərif 2. $x \mapsto f(x, x)$ kimi təyin olunan funksiya kvadratik forma adlanır. Yuxarıdakı bərabərliklərdə $x = y$ yazılırsa, kvadratik formanın verilən bazisdə aşağıdakı ifadəsini alırıq:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, x_j) \lambda_i \lambda_j.$$

$A = (a_{ij})$ matrisi kvadratik formanın matrisi adlanır. Xüsusi halda, əgər bu matris diaqonal matris olarsa, kvadratik forma ən sadə şəkllə düşür:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \lambda_i^2 \quad (3)$$

yəni kvadratlar vasitəsi ilə ifadə olunur. Göstərmək olar ki, həmişə elə bazis tapmaq olar ki, həmin bazisdə kvadratik forma (3) şəklində yazılır. (3) yazılışı kvadratik formanın *kanonik şəkli*, uyğun bazis isə *kanonik bazis* adlanır.

Qeyd etmək lazımdır ki, eyni kvadratik formanı müxtəlif matrislərlə vermək olar. Lakin əgər kvadratik forma simmetrik olarsa, yəni ixtiyari $x, y \in X$ vektorları üçün $f(x, y) = f(y, x)$ münasibəti ödənərsə, onda $a_{ij} = a_{ji}$ bərabərliyi ödənilir və buna görə də formanın matrisi birqiymətli təyin olunur. Əgər matrisin elementləri üçün $a_{ij} = a_{ji}$ şərti ödənərsə, onda belə matris *simmetrik matris* adlanır. (3) kvadratik formasını doğuran $f(x, y)$ bixətti forması həmin kvadratik formanın *polyarı* adlanır. Simmetrik formalar üçün kvadratik forma öz polyarını birqiymətli təyin edir. Bunu göstərmək üçün ixtiyari $x, y \in X$ vektorları götürək və qeyd edək ki,

$$f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y).$$

Buradan alırıq:

$$f(x, y) = \frac{f(x+y, x+y) - f(x, x) - f(y, y)}{2}.$$

Kvadratik formanı müxtəlif üsullarla kanonik şəkə gətirmək olar. Belə üsullardan biri Laqranj üsuludur. Bu üsulun əsasını tam kvadratların ayrılması təşkil edir.

Teorem 1. $\langle X, K \rangle$ xətti fəzasında kanonik bazis vardır, yəni elə bazis vardır ki, bu bazisdə kvadratik forma (3) bərabərliyi ilə verilir.

İsbati. Tutaq ki, kvadratik forma hər hansı bazisdə

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j \quad (4)$$

şəklində yazılmışdır. Teoremi dəyişənlərin sayına görə induksiya üsulu ilə aparaq. Dəyişənlərin sayı 1 olarsa, onda o kanonik şəkildədir. Fərz edək ki, teorem $n-1$ dəyişənli istənilən kvadratik forma üçün doğrudur. Göstərək ki, o, n dəyişənli hal üçün də doğrudur.

Əvvəlcə fərz edək ki, a_{ii} əmsalları içərisində heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Ümumiliyi pozmadan $a_{11} \neq 0$ yazmaq olar. (4) bərabərliyinin sağ tərəfində ancaq λ_1 daxil olan hədləri götürək:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{1j} \lambda_1 \lambda_j &= a_{11} \left(\lambda_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \lambda_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} \lambda_n \right) \lambda_1 = \\ &= a_{11} \left(\lambda_1 + \frac{a_{12}}{2a_{11}} \lambda_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{2a_{11}} \lambda_n \right)^2 - \varphi(\lambda_2, \dots, \lambda_n); \end{aligned} \quad (5)$$

burada $\varphi(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$ λ_1 dəyişənindən asılı olmayan kvadratik formadır. Yeni bazisi elə müəyyən edək ki, bu bazisdə koordinatların çevrilməsi aşağıdakı düsturlarla müəyyən olunur:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda_1 + \frac{a_{12}}{2a_{11}} \lambda_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{2a_{11}} \lambda_n, \\ \xi_2 &= \lambda_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \xi_n &= \lambda_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Aydındır ki, keçid matrisi qeyri məxsusudur, yəni belə bazis həqiqətən vardır. Bu bazisdə kvadratik forma aşağıdakı şəkllə düşür:

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j = a_{11} \xi_1^2 + \varphi(\xi_2, \dots, \xi_n);$$

burada $\varphi(\xi_2, \dots, \xi_n)$ ancaq $\xi_2, \dots, \xi_n$ dəyişənlərindən asılı kvadratik formadır. Dəyişənlərin sayı $n-1$ olduğundan induktiv fərziyyəyə görə elə bazis vardır ki, bu bazisdə

$$\varphi(\xi_2, \dots, \xi_n) = b_{22} \eta_2^2 + \dots + b_{nn} \eta_n^2.$$

(6) düsturlarından görüldüyü kimi, bu düsturlarla təyin olunan xətti çevirmə $\xi_2, \dots, \xi_n$ dəyişənlərinə uyğun alt fəzada eynilik operatoru kimi təsir göstərir. Buna görə də əvvəlcə (6) bərabərlikləri ilə təyin olunan xətti operatoru, sonra isə alt fəzada yeni bazisə keçid operatorunu tətbiq etsək, nəticədə axtarılan kanonik bazisi alarıq.

İndi isə ikinci halı nəzərdən keçirək; yəni tutaq ki, a_{ii} əmsalları içərisində sıfırdan fərqli əmsal yoxdur. Aydındır ki, qalan əmsallar içərisində heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Ümumiliyi pozmadan $a_{12} \neq 0$ yazmaq olar. Bu halda,

$$2a_{12}x_1x_2 = \frac{1}{2}a_{12}[(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2] = \frac{1}{2}a_{12}[\xi_1^2 + \xi_2^2]$$

bərabərliyi göstərir ki,

$$x_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), x_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)$$

əvəzləməsindən sonra kvadratik forma

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{1}{2}a_{12}[\xi_1^2 + \xi_2^2] + \dots$$

şəkilinə düşür. Aydındır ki, ξ_1^2 həddi ancaq $2a_{12}x_1x_2$ ifadəsindən alınır. Buna görə də bu hədd digər hədlər ilə islah ola bilməz. Beləliklə, biz birinci hala dönmüş oluruq. Deməli, teorem 1-in hökmü bu halda da doğrudur. Teorem 1 isbat olundu.

Teorem 1-in isbatında tətbiq olunan üsul Laqranj üsulu adlanır.

Misal. Aşağıdakı kvadratik formanı kanonik şəkllə gətirək:

$$f(x, y, z) = 3x^2 - 2xy + y^2 + 4xz - 6yz - 3z^2.$$

Ancaq x dəyişəni daxil olan hədləri götürək.

$$3x^2 - 2xy + 4xz = 3\left(x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right)^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{4}{3}yz - \frac{4}{3}z^2.$$

Alınan ifadəni verilmiş formada nəzərə alaq.

$$f(x, y, z) = 3\xi^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{4}{3}yz - \frac{4}{3}z^2;$$

burada $\xi = x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z$. Daha sonra, yazı bilərik:

$$-\frac{1}{3}y^2 + \frac{4}{3}yz - \frac{4}{3}z^2 = -\frac{1}{3}(y^2 - 4yz + 4z^2) = -\frac{1}{3}(y - 2z)^2 = -\frac{1}{3}\eta^2.$$

Beləliklə, alırıq:

$$f(x, y, z) = 3\xi^2 - \frac{1}{3}\eta^2.$$

Yeni dəyişənlərlə əvvəlki dəyişənlər arasında əlaqə aşağıdakı bərabərliklərlə verilir:

$$\xi = x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z,$$

$$\eta = y - 2z,$$

$$\theta = z.$$

Bu bərabərliklər yeni bazisdən əvvəlkinə keçid matrisi $C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ olan çevirmə

müəyyən edir. Onun tərsi $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ isə yeni bazisə keçid matrisidir.

§5. Kvadratik formanın Yakobi üsulu ilə kanonik şəkə gətirilməsi.

Tutaq ki, $f(x, x)$ kvadratik forması hər hansı $x_1, x_2, \dots, x_n$ bazisində simmetrik A matrisinə malikdir. Deməli, bu bazisdə

$$f(x, x) = (A\bar{x}, \bar{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j.$$

Yeni $y_1, y_2, \dots, y_n$ basini aşağıdakı düsturlarla təyin edək:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= \alpha_{21}x_1 + x_2, \\ y_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + x_3, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n &= \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} + x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Göründüyü kimi keçid matrisi

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots & \alpha_{n1} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{n2} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

kimidir. Məlumdur ki, kvadratik formanın matrisi onun bazis vektorlar cütlərində qiymətləri ilə müəyyən olunur. Buna görə də yeni bazisin kanonik bazis olması üçün k indeksinin hər bir qiymətində $f(y_i, y_k) = 0, i = 1, \dots, k-1$ olmalıdır. (1) münsibətlərini nəzərə alsaq, görürük ki, bu bərabərliklərin doğruluğu üçün

$$f(x_i, y_k) = 0, i = 1, \dots, k-1 \tag{2}$$

bərabərliklərinin ödənilməsi *kafidir*. Deməli, hər bir k üçün aşağıdakı xətti bərabərliklər sistemi doğru olmalıdır (qeyd edək ki, (2) münsibətləri $(Ay_k, x_i) = 0$ kimi yazıla bilər). Bu bərabərliklər verilmiş bazisdə aşağıdakı sistem şəklinə düşür:

$$a_{11}\alpha_{k1} + a_{21}\alpha_{k2} + \dots + a_{k-1,1}\alpha_{k,k-1} + a_{k,1}\alpha_{k,k} = 0,$$

$$\begin{aligned}
a_{12}\alpha_{k1} + a_{22}\alpha_{k2} + \dots + a_{k-1,2}\alpha_{k,k-1} + a_{k,2}\alpha_{k,k} &= 0, \\
\dots \quad \dots \quad \dots &
\end{aligned} \tag{3}$$

$$a_{1k-1}\alpha_{k1} + a_{2k-1}\alpha_{k2} + \dots + a_{k-1,k-1}\alpha_{k,k-1} + a_{k,k-1}\alpha_{k,k} = 0,$$

çünkü, y_k vektorunun verilən bazisdə koordinat sətri belədir: $(\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{k,k-1}, \alpha_{k,k})$. (3) sistemi-

nə sonuncu şərti əlavə edək: $(Ay_k, x_k) = 1$. Yeni sistem belə olacaqdır:

$$\begin{aligned}
a_{11}\alpha_{k1} + a_{21}\alpha_{k2} + \dots + a_{k-1,1}\alpha_{k,k-1} + a_{k,1}\alpha_{k,k} &= 0, \\
a_{12}\alpha_{k1} + a_{22}\alpha_{k2} + \dots + a_{k-1,2}\alpha_{k,k-1} + a_{k,2}\alpha_{k,k} &= 0, \\
\dots \quad \dots \quad \dots &
\end{aligned} \tag{4}$$

$$a_{1k-1}\alpha_{k1} + a_{2k-1}\alpha_{k2} + \dots + a_{k-1,k-1}\alpha_{k,k-1} + a_{k,k}\alpha_{k,k} = 0,$$

$$a_{1k}\alpha_{k1} + a_{2k}\alpha_{k2} + \dots + a_{k-1,k}\alpha_{k,k-1} + a_{k,k}\alpha_{k,k} = 1.$$

Kramer düsturlarına əsasən, (3) sistemindən tapırıq:

$$\alpha_{kk} = \frac{1}{\Delta_k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{k-1,1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1,k-1} & \dots & a_{k-1,k-1} & 0 \\ a_{1,k} & \dots & a_{k-1,k} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$

Asanlıqla yəqin etmək olar ki,

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{\Delta_k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{k-1,1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1,k-1} & \dots & a_{k-1,k-1} & 0 \\ a_{1,k} & \dots & a_{k-1,k} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_{k-1}^j}{\Delta_k}$$

və burda Δ_{k-1}^j minorunun matrisi (3) sisteminin matrisindən j -cu sütunu atmaqla alınır. Bu əmsallar koordinatlar arasında asılılığı yazmağa imkan verir. Yeni bazisdə verilən kvadratik forma isə aşağıdakı kanonik şəkllə gətirilmiş olur:

$$f(x, x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \mu_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \mu_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \mu_n^2. \tag{5}$$

Burada $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ skalyarları isə kvadratik formanın A matrisinin sol yuxarı künclərində yerləşən, uyğun olaraq, $1, 2, \dots, n$ tərtibli minorlardır. Bu cür kanonik şəkə gətirmə üsulu *Yakobi üsulu* adlanır. Yakobi üsulu ancaq $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ minorlarının hamısının sıfırdan fərqli olduğu halda mümkündür.

Təbiiqlər üçün qeyd edək ki, əgər biz koordinatlar arasında əlaqəni yazmaq istəsək, onda aşağıdakı bərabərliklərdən istifadə etməliyik. Dəyişənlərin koordinat sütunları arasındakı asılılıq belə olacaqdır:

$$\bar{x} = C\bar{y};$$

burada

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

Misal. Aşağıdakı kvadratik formanı Yakobi üsulu ilə kanonik şəkə gətirək:

$$3x^2 - 2xy + y^2 + 4xz - 6yz - 3z^2.$$

Kvadratik formanın matrisi belədir:
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Onda, $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ və

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -25.$$

Beləliklə, aşağıdakı kanonik şəkli alırıq:

$$f(x, x) = \frac{1}{3}u^2 + \frac{3}{2}v^2 - \frac{2}{25}w^2.$$

u, v, w dəyişənləri əvvəlki dəyişənlərlə məlum

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

münasibətləri ilə bağlıdır. Tamlıq üçün C matrisinin ifadəsini yazaq:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\Delta_1} = \frac{1}{3}, \alpha_{21} = \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2} = \frac{-1}{2}, \alpha_{31} = \frac{\Delta_1^3}{\Delta_3} = \frac{1}{-25}$$

$$\alpha_{22} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{3}{2}, \alpha_{32} = \frac{\Delta_2^2}{\Delta_3} = \frac{7}{25}, \alpha_{33} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = -\frac{2}{25}.$$

IV FƏSİL. Qrupun çoxluqda təsiri

§1. Qrupun çoxluqda təsiri.

Qrupun çoxluqda təsiri anlayışı ixtiyari çoxluqda verilən qrup vasitəsi ilə çevirmələr ailəsi daxil etməyə və çoxluğun bir sıra mühüm xassələrini müəyyən etməyə imkan verən və geniş tətbiqlər malik olan bir anlayışdır. Müasir cəbrin bir çox sahələrində baxılan məsələlərin həlli bu anlayışa gətirir və onun vasitəsi ilə sadə yollarla həll olunur.

Tutaq ki, hər hansı G qrupu və Ω çoxluğu verilmişdir. $f : G \times \Omega \rightarrow \Omega$ inikası hər bir $\langle g, s \rangle \in G \times \Omega$ cütünə qarşı müəyyən bir $f(g, s) \in \Omega$ elementini qoyur. Bu elementi sadəcə gs kimi işarə etmək əlverişlidir. Bu, sanki Ω çoxluğunun elementlərinin G qrupunun elementlərinə hasilini müəyyən edir.

Tərif 1. $f : G \times \Omega \rightarrow \Omega$ inikası o zaman G qrupunun Ω çoxluğunda təsiri adlanır ki, aşağıdakı şərtlər ödənsin:

$$1) (\forall g, h \in G) (\forall x \in \Omega) (g(hx) = (gh)x);$$

$$2) (\forall x \in \Omega) (ex = x).$$

Misallar. 1. $G = S_3$ və $\Omega = \{1, 2, 3\}$ olsun. S_3 əvəzləmələr qrupunun Ω çoxluğunda təsiri təbii olaraq, hər bir $\langle \sigma, i \rangle$ cütünə qarşı $\sigma(i) \in \Omega$ elementinin qarşı qoyulması ilə yerinə yetirilir.

2. Tutaq ki, Φ müstəvi üzərində koordinat başlanğıcı ətrafında dönmələr qrupudur. R^2 fəzasından olan ixtiyari x vektor üçün və φ bucağı qədər H_φ dönməsi üçün x vektoruna qarşı $H_\varphi(x)$ vektorunu qarşı qoyan inikas dönmələr (fırlanmalar) qrupunun R^2 çoxluğunda təsirini müəyyən edir.

3. $\{T_x \mid x \in R^2\}$ ilə müstəvi üzərində x vektoru qədər paralel köçürmələr çoxluğunu işarə edək. Bu çevirmələr çoxluğu qrup əmələ gətirir. $\langle T_x, a \rangle \mapsto x + a$ inikası bu qrupun müstəvidə təsirini müəyyən edir.

4. İxtiyari $\langle G, \cdot \rangle$ qrupu verilərsə, onda $h_x : \langle x, y \rangle \mapsto xyx^{-1}$ inikası $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunun G çoxluğunda təsirini təyin edir. Doğrudan da,

$$h_{xz}(y) = (xz)y(xz)^{-1} = x(zyz^{-1})x^{-1} = (h_x \circ h_z)(y)$$

və $h_e(x) = exe^{-1} = x$. Beləliklə, qrupun çoxluqda təsirinin şərtləri ödənilir. Qeyd edək ki, bu təsir *qoşmalar* vasitəsi ilə təsir adlanır.

5. $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunda təsir aşağıdakı inikas vasitəsi ilə də verilə bilər:

$$T_a : \langle a, g \rangle \mapsto ag.$$

Bu təsir sol *köçürmələrlə* (*translyasiyalarla*) təsir adlanır. Eyni qayda ilə sağ köçürmələrlə təsiri də müəyyən etmək olar.

Qrupun çoxluqda təsirinin əsas xassəsi aşağıdakı teorem vasitəsi ilə verilir.

Teorem 1. Tutaq ki, $f : G \times \Omega \rightarrow \Omega$ inikası G qrupunun hər hansı Ω çoxluğunda təsiridir. Onda bu inikas hər bir $g \in G$ elementi üçün

$$f_a : \Omega \rightarrow \Omega$$

əvəzləməsini (biyektiv inikasını) təyin edir.

İsbatı. İxtiyari $x \in \Omega$ elementi üçün yeganə $f_a(x) = f(a, x) \in \Omega$ elementi qarşı qoyulmuşdur. Deməli, f_a inikası birgiymətli təyin olunmuşdur. Göstərək ki, o suryektiv və inyektivdir. Bunun üçün ixtiyari $y \in \Omega$ elementi götürək. Əgər $x = f_{a^{-1}}(y)$ işarə etsək, onda təsirin tərifinə əsasən yazı bilərik:

$$f_a(x) = (f_a \circ f_{a^{-1}})(y) = f_e(y) = y.$$

Beləliklə, f_a inikası suryektivdir. Bu inikasın inyektiv olduğunu göstərmək üçün

$$f_a(x) = f_a(x')$$

münasibətinə nəzər salaq. Bərabərliyin hər iki tərəfinə $f_{a^{-1}}$ inikası ilə təsir etsək alırıq: $x = x'$.

Bu nəticə onu göstərir ki, f_a inikası inyektivdir. Teorem 1 isbat olundu.

Teorem 2. Əgər $f : G \times \Omega \rightarrow \Omega$ inikası G qrupunun Ω çoxluğunda təsiri olarsa, onda $g \mapsto f_g$ inikası G qrupunun $S(\Omega)$ əvəzləmələr qrupuna inyektiv homomorfizmdir (inyektiv daxilolmasıdır).

İsbatı. Birinci hökm, yəni $g \mapsto f_g$ inikasının homomorf inikas olması

$$f_{gh} = f_g \circ f_h = f_g f_h$$

münasibətindən alınır. Onun inyektivliyi isə $f_g f_{g^{-1}} = f_e = \varepsilon$ münasibətindən alınır. Teorem 2 isbat olundu.

Nəticə. (Keli teoremi). İxtiyari sonlu n tərtibli qrupun S_n əvəzləmələr qrupuna izomorf daxilolması vardır.

İsbtı. G qrupunun özündə köçürmələrlə təsirinə baxaq. Teorem 1 və 2-yə əsasən $g \mapsto T_g$ inikası G qrupunun $S(G) = S_n$ qrupuna izomorf daxilolmasıdır. Nəticə isbat olundu.

Teorem 3. Əgər $f : G \times \Omega \rightarrow \Omega$ inikası G qrupunun Ω çoxluğunda təsiri olarsa, onda

$$x \varphi y \leftrightarrow (\exists g \in G)(gx = y)$$

münasibəti Ω çoxluğunda ekvivalentlik münasibəti müəyyən edir.

İsbatı. $\varepsilon x = x$ münasibəti refleksivliyin doğruluğunu göstərir.

$$gx = y \rightarrow g^{-1}y = x$$

implikasiysı simmetrikliliyin doğru olduğunu göstərir. Nəhayət,

$$gx = y \wedge hy = z \rightarrow hgx = z$$

münasibətindən isə tranzitivlik xassəsi alınır. Teorem 3 isbat olundu.

Tərif 2. Teorem 3 ilə müəyyən olunan ekvivalentlik münasibətində $x \in \Omega$ elementinin ekvivalentlik sinfinə bu elementin *orbiti* deyilir və $G(x)$ kimi işarə olunur. Sonlu halda orbitin elementlərinin sayına *orbitin uzunluğu* deyilir.

Misallar. 1. Müstəvidə fırlanmalar qrupunun təsiri zamanı koordinat başlanğıcından fərqli ixtiyari A nöqtəsinin orbiti mərkəzi O nöqtəsində olan OA radiuslu çevrədir.

2. Müstəvidə və ya üçölçülü fəzada paralel köçürmələrlə təsir zamanı vektorun orbiti bərabər vektorlar çoxluğundan ibarətdir.

Teorem 4. G qrupunun Ω çoxluğunda ixtiyari $x \in \Omega$ elementini tərpənməz saxlayan bütün mümkün elementlərinin

$$St(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$$

çoxluğu G qrupunda alt qrup əmələ gətirir.

İsbatı. Məlumdur ki, $St(x)$ alt çoxluğunun alt qrup olduğunu göstərmək üçün aşağıdakı mülahizənin doğruluğunu göstərmək lazımdır:

$$(\forall g, h \in St(x))(hg^{-1} \in St(x)).$$

Bunun üçün qeyd edək ki, $gx = x$ olarsa, onda $g^{-1}x = x$. Deməli,

$$(hg^{-1})x = h(g^{-1}x) = hx = x.$$

Teorem 4 isbat olundu.

Təfiri 2. Teorem 4 ilə müəyyən olunan alt qrup x elementinin *stasionar alt qrupu* (yaxud *stabilizatoru* və ya *izotropiya qrupu*) adlanır və G_x kimi də işarə olunur.

Teorem 5. Sonlu Ω çoxluğunda təsir edən ixtiyari G qrupu üçün $x \in \Omega$ elementinin stasionar alt qrupunun indeksi onun orbitinin uzunluğuna bərabərdir.

İsbatı. Qeyd edək ki, stasionar alt qrupun indeksi G qrupunun bu alt qrupa görə qonşu siniflərinin sayına bərabərdir. Tutaq ki, $g \in G$ və $h_1, h_2 \in gSt(x)$ eyni qonşu sinfin elementləridir. Onda

$$(g^{-1}h_1)x = (g^{-1}h_2)x = x.$$

Yaxud,

$$h_1x = h_2x = gx.$$

Bu hökmün tərsi də doğrudur, yəni $h_1x = h_2x$ olarsa, onda h_1 və h_2 elementləri eyni qonşu sinfə daxildir. Beləliklə, orbitin müxtəlif elementləri ilə qonşu sinflər arasında qarşılıqlı birqıymətli uyğunluq vardır. Teoremin hökmü buradan alınır.

§2. Silov teoremləri.

Qrup nəzəriyyəsinin əsas məsələlərindən biri onların quruluşunun öyrənilməsidir. Kommutativ halda bu məsələ tamamilə həll olunmuşdur. Belə ki, isbat olunmuşdur ki, hər bir kommutativ qrupu dövrü qrupların düz hasilə şəklində göstərmək olar. Lakin kommutativ olmayan qruplar üçün bu nəticə doğru deyil. Belə qrupların quruluşu Silov teoremləri vasitəsi ilə öyrənilir.

Laqranj teoreminə əsasən $H \subset G$ alt çoxluğunun sonlu $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunun alt qrupu olması üçün zəruri şərt onun tərtibinin qrupun tərtibinin böləni olmasından ibrətdir. Lakin $n:k$ olması heç də həmişə n tərtibli qrupun k tərtibli alt qrupunun olmasını göstərmir. Məlumdur ki, sadə tərtibli qrup dövrü qrupdur. Tutaq ki, p sadə ədəddir.

Tərif 1. $\langle H, \cdot \rangle < \langle G, \cdot \rangle$ alt qrupunun tərtibi p ədədinin qüvvəti olarsa, onda $\langle H, \cdot \rangle$ p - alt qrup adlanır. Tərtibi p ədədinin $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunun tərtibinin kanonik ayrılışına daxil olan qüvvətinə bərabər olan p - alt qrupa Silov p - alt qrupu deyilir.

Məsələn, tərtibi 54-ə bərabər olan qrupun Silov 3-alt qrupu tərtibi 27 olan alt qrupdur. Silov (Norveç riyaziyyatçısıdır) tərəfindən bu alt qrupların əsas xassələri isbat olunmuşdur. Aydındır ki, hər bir qrup öz alt çoxluqlar çoxluğunda qoşmalar vasitəsi ilə təsir edir.

Tutaq ki, $\langle H, \cdot \rangle < \langle G, \cdot \rangle$ hər hansı alt qrup, $x \in G$ isə ixtiyari elementdir.

$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$$

işarə edək.

Lemma 1. $xHx^{-1} \subset G$ alt çoxluğu alt qrupdur.

İsbatı. İxtiyari iki elementə baxaq: $xhx^{-1}, xsx^{-1} \in xHx^{-1}$. Aşağıdakı münasibət lemmanın doğruluğunu göstərir:

$$xhx^{-1}(xsx^{-1})^{-1} = xhx^{-1}xs^{-1}x^{-1} = x(hs^{-1})x^{-1} \in xHx^{-1}.$$

Lemma 1 isbat olundu.

Beləliklə, G qrupu öz alt qruplar çoxluğunda da qoşmalarla təsir edir.

Tərif 2. xHx^{-1} və H alt qrupları qoşma alt qruplar adlanır.

Aydındır ki, $(\forall x \in G)(xHx^{-1} = H)$ yalnız və yalnız o zaman doğru olar ki, H alt qrupu normal bölən olsun. Normal bölən qoşmalarla təsir zamanı tərpənməz qalır və G qrupu onun stasionar alt qrupudur. Ümumi halda $St(H)$ alt qrupu G qrupundan fərqlidir və bu alt qrup H alt qrupunun *normalizatoru* adlandırılaraq, $N(H)$ kimi işarə olunur. Aydındır ki, əgər G qrupu öz alt qruplar çoxluğunda da qoşmalarla təsir edirsə, onda H alt qrupunun orbitinin uzunluğu §1, teorem 5-ə əsasən $(G : N(H))$ indeksinə bərabərdir.

Tərif 3. $\langle Z, \cdot \rangle \triangleleft \langle G, \cdot \rangle$ alt qrupu o zaman G qrupunun mərkəzi adlanır ki, onun ixtiyari elementi G qrupunun hər bir elementi ilə yerdəyişən olsun, yəni

$$(\forall x \in Z)(\forall y \in G)(xy = yx).$$

Lemma 2. Tutaq ki, $\langle Z, \cdot \rangle$ alt qrupu $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunun mərkəzidir. Onda aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$(G : 1) = |Z| + \sum_x (G : G_x), \quad (1)$$

burada cəmləmə $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunun bütün elə elementləri üzrə götürülür ki, həmin elementlərin orbitləri bir elementli deyil.

İsbatı. $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunun özündə qoşmalarla təsirinə baxaq. G qrupu cüt –cüt kəsişməyən orbitlərə bölünür. Ancaq mərkəzə daxil olan elementlər uzunluğu 1-ə bərabər orbit doğurur. Qalan orbitlərin uzunluğu 1-dən böyükdür. Yuxarıdakı qeydə əsasən (§1, teorem 5) $x \in G$ elementinin orbitinin uzunluğu stasionar alt qrupun $(G : G_x)$ indeksinə bərabərdir. Beləliklə, (1) doğrudur və lemma 2 isbat olundu.

(1) düsturu *siniflər düsturu* adlanır.

Lemma 3. Tutaq ki, p sadə ədədi sonlu kommutativ $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunun tərtibinin bölənidir. Onda onun p tərtibli alt qrupu vardır.

İsbatı. Əvvəlcə induksiya metodu ilə göstərək ki, tərtibi p -yə bölünən element vardır. Əgər $(G : 1) = p$ isə lemma doğrudur (bu halda $\langle G, \cdot \rangle$ dövrü qrupdur). Tutaq ki, $(G : 1) = pk, k > 1$ və lemma bütün kiçik tərtibli qruplar üçün doğrudur. İxtiyari $e \neq x \in G$ elementi götürək. Əgər onun tərtibi p ilə qarşılıqlı sadə olarsa, onda $G / \langle x \rangle$ faktor qrupunun

tərtibi p -yə bölünür. İnduktiv fərziyyəyə görə elə $y \in G/\langle x \rangle$ var ki, onun tərtibi p -yə bölünür. Onda, $y^{p^r} = 1$ və bu münasibət kiçik qüvvət üstləri üçün doğru deyil. Bu halda y^r elementinin tərtibi p olacaqdır. Deməli, $\langle y^r \rangle$ axtarılan alt qrupdur.

İkinci hala baxaq, yəni fərz edək ki, x elementinin tərtibi p -yə bölünür. İndi əgər $G = \langle x \rangle$ isə teorem yuxarıdakı mülahizəyə əsasən doğrudur. Əks halda,

$$(\langle x \rangle : 1) : p \wedge (\langle x \rangle : 1) < (G : 1)$$

və teoremin hökmü induktiv fərziyyədən alınır. Lemma 3 isbat olundu.

Silov teoremləri aşağıdakı teoremlərdir.

Teorem 1. (Silovun I teoremi). Tutaq ki, n tərtibli $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunun tərtibi p sadə ədədinə bölünür. Onda onun Silov p - alt qrupu vardır.

Teorem 2. (Silovun II teoremi). $\langle G, \cdot \rangle$ qrupunun ixtiyari iki Silov p - alt qrupu qoşmadır. Əgər P Silov p - alt qrupu olarsa, onda Silov p - alt qruplarının N_p sayı üçün aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$N_p = (G : N(P)).$$

Teorem 3. (Silovun III teoremi). Bütün Silov p - alt qruplarının N_p sayı üçün aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$N_p \equiv 1 \pmod{p}.$$

Teorem 1-in isbatı. Aydındır ki, teorem sadə tərtibli qruplar üçün doğrudur. Teoremin isbatını induksiya metodu ilə aparaq. Fərz edək ki, teoremin hökmü bütün kiçik tərtibli p –alt qruplar üçün doğrudur. Əgər G qrupunun indeksi p sadə ədədi ilə qarşılıqlı sadə olan məxsusi alt qrupu olarsa, onda bu alt qrupda induktiv fərziyyəyə görə Silov p alt qrupu vardır və teorem bu halda doğrudur. İndi fərz edək ki, bütün məxsusi alt qrupların indeksləri p -yə bölünür. (1) düsturuna əsasən $(Z : 1)$ tərtibi p -yə bölünür. Onda Lemma 3-ə əsasən onun tərtibi p olan H dövrü alt qrupu var (o mərkəzdə yerləşdiyi üçün normal alt qrupdur). Əgər $(G : 1) = p^2$ -na bölünmürsə, onda bu alt qrup Silov p alt qrupudur. Əks halda G/H faktor qrupunun tərtibi p -yə bölünür. İnduktiv fərziyyəyə görə onun P Silov p alt qrupu vardır. Bu alt qrupun kanonik

$f : G \rightarrow G/H$ inikası zamanı proobrazı A olsun. f inikasının A –ya məhdudlaşması nüvəsi H olan $f' : A \rightarrow P$ süryektiv homomorfizmidir. Homomorfizmlər haqda haqda əsas teoremə görə

$$P \cong A/H .$$

Onda A alt qrupu üçün $(A:1) = p(P:1)$ və buna görə də o, axtarılan Silov p alt qrupudur. Teorem 1 isbat olundu.

Silovun 2-ci və 3-cü teoremlərinin də isbatları grupun çoxluqda təsiri nəzəriyyəsinin nəticələrinə əsaslanır və onların isbatı daha müfəssəl kurslarda verilir. Teorem 1-in isbatı da kifayət qədər geniş kursa aiddir. Burada biz onu ancaq qrup nəzəriyyəsi metodlarının nümayişi məqsədi ilə verdik.

V FƏSİL. Kommutativ halqalar.

§1. İdeallar və onlar üzərində əməllər.

Fərz edək ki, $K = \langle K, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ halqası tamlıq oblastıdır. Hər hansı $a \in K$ elementi götürək. Məlumdur (I hissə, III fəsil, §8) ki, $(a) = aK$ baş idealı bütün ab ($b \in K$) şəklində hasillərdən təşkil olunmuşdur. Əgər iki (a) və (b) baş idealları üçün $(a) \subset (b)$ münasibəti ödənərsə, onda hər bir $x \in (a)$ elementi üçün $x = ar$ olmaqla, eyni zamanda, $x \in (b)$ yəni $x = br'$. Xüsusi halda, $a = br'$. Deməli, $a \in (b)$. Bu nəticəyə əsasən ixtiyari iki I_1, I_2 idelları üçün $I_1 \subset I_2$ münasibəti ödənərsə, onda hesab olunur ki, I_1 idealı I_2 idealına bölünür.

İdeallar üzərində əməllərlə tanış olaq. Tutaq ki, $K = \langle K, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ halqasında iki ideal verilmişdir: I_1 və I_2 .

Teorem 1. I_1 və I_2 ideallarının kəsişməsi də idealdır.

İsbati. I_1 və I_2 ideallarının kəsişməsi $\langle K, + \rangle$ qrupunun alt qrupudur. $x \in I_1 \cap I_2$ və $y \in K$ ixtiyari iki element olarsa, onda $x \in I_1$ və $x \in I_2$. İdealın tərifinə əsasən $xy \in I_1$ və $xy \in I_2$. Deməli, $xy \in I_1 \cap I_2$. Teorem 1 isbat olundu.

Tərif 1. I_1 və I_2 ideallarının cəmi bu alt qrupların cəminə deyilir.

Teorem 1. I_1 və I_2 ideallarının cəmi K halqasında idealdır.

İsbati. I_1 və I_2 ideallarının cəmi $\langle K, + \rangle$ qrupunun alt qrupudur. Vurma əməlinin distributivliyinə əsasən yazı bilərik:

$$(\forall x \in K)(x(I_1 + I_2) = xI_1 + xI_2 \subset I_1 + I_2).$$

Deməli, $I_1 + I_2$ cəmi idealdır. Teorem isbat olundu.

Tərif 2. I_1 və I_2 ideallarının hasili aşağıdakı çoxluğa deyilir:

$$I_1 \cdot I_2 = \{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \mid x_i \in I_1, y_i \in I_2, n \in N\}.$$

Teorem 2. I_1 və I_2 ideallarının hasili idealdır.

İsbatı. Əvvəlcə göstərək ki, $I_1 \cdot I_2$ hasili alt qrupdur. Bunun üçün ixtiyari iki element götürək:

$$x = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

və

$$y = x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + \dots + x'_m y'_m.$$

Onda,

$$x - y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n + x'_1 (-y'_1) + x'_2 (-y'_2) + \dots + x'_m (-y'_m) \in I_1 \cdot I_2$$

və deməli, $I_1 \cdot I_2$ hasili alt qrupdur. Aidındır ki, distributivliyə əsasən,

$$a(I_1 \cdot I_2) = \{ax_1 y_1 + ax_2 y_2 + \dots + ax_n y_n \mid x_i \in I_1, y_i \in I_2, n \in N\} \subset I_1 \cdot I_2.$$

Teorem 2 isbat olundu.

§2. Halqada bölünmə münasibəti.

Kommutativ halqaların müxtəlif növlərinin geniş tətbiqləri vardır. Belə halqalar, xüsusi ilə tamlıq oblastları, öz xassələrinə görə tam ədədlər halqasına bənzəyir. Halqa iki cəbri əməlin təyin olunduğu cəbri strukturdur. Bu əməllərdən birinciyə nəzərən onun kommutativ qrup olduğu tələb olunur. İkinci əmələ görə və ikinci əməl ilə birincinin qarşılıqlı münasibətinə görə isə şərtlər müxtəlif ola bilər. Bu şərtlərdən asılı olaraq halqanın xüsusiyyətləri dəyişir. İkinci əmələ görə qrup aksiomlarından simmetrik elementin olmasının tələb olunmaması halqada tərsi olan elementlər ilə tərsi olmayan elementlərin müxtəlif xassələrə malik olmasını şərtləndirir. Təbii olaraq, burada, tam ədədlər halqasında olduğu kimi, bölünmə münasibəti meydana gəlir.

Tutaq ki, hər hansı assosiativ və vahidi olan $K = \langle K, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ halqası verilmişdir.

Tərif 1. $\varepsilon \in K$ elementi o zaman *dönən element* (tərsi olan element) və ya *vahid* adlanır ki, $(\exists \varepsilon' \in K)(\varepsilon \varepsilon' = \varepsilon' \varepsilon = 1)$ münasibəti ödənsin.

Misal. n tərtibli matrislərin $M_n(K)$ halqası vahidi olan assosiativ halqadır və yuxarıda verilən tərif bu halqaya da aiddir. Asanlıqla göstərmək olar ki, determinantı 1-ə bərabər olan istənilən n tərtibli matris $M_n(K)$ halqasının dönən elementidir.

Teorem 1. K halqasının dönən elementlərinin K^* çoxluğu bu halqada təyin olunmuş vurma əməlinə nəzərən qrup əmələ gətirir.

İsbatı. Hər şeydən əvvəl qeyd edək ki, $1 \in K^*$. Digər tərəfdən, əgər $\varepsilon, \delta \in K^*$ dönən elementləri verilərsə, onda aşağıdakı münasibətlər ödənilir:

$$\varepsilon \delta \in K^*, \varepsilon^{-1} \in K^*.$$

Doğrudanda, tərifə əsasən yazı bilərik: $\varepsilon \eta = 1 \wedge \delta \chi = 1$. Bu iki bərabərliyi tərəf-tərəfə vuraq: $(\varepsilon \delta)(\eta \chi) = 1$. Sonuncu bərabərlik göstərir ki, vurma əməlinə nəzərən qapalıdır. Analogi olaraq, $\varepsilon \eta = 1 \rightarrow \eta^{-1} \varepsilon^{-1} = 1$; Deməli, $\varepsilon^{-1} \in K^*$. Teorem 1 isbat olundu.

Tərif 2. Əgər $a, b \in K$ elementləri üçün elə $c \in K$ elementi tapmaq mümkün olsa ki, $a = bc$ bərabərliyi doğtu olsun, onda deyilir ki, a elementi b -yə *bölünür* və ya b elementi a -nın *bölənidir*.

a elementinin b -yə bölünməsi simvolik olaraq $a:b$ və ya $b \setminus a$ kimi işarə olunur. A elementi bölünən, b isə bölən adlanır. c elementi qismət adlanır. Ədədi halqalarda çox zaman bölən sıfırdan fərqli qəbul olunur. Ümumi halda isə, $b = 0$ istisna olunmur. Qeyd etmək lazımdır ki, sonuncu halda $a = bc = 0$ olmalıdır, yəni 0-a bölünən element ancaq 0-dır və bu halda c ixtiyari qiymət ala bilər. Bölünmə münasibətinin bilavasitə tərifdən alınan aşağıdakı xassələri vardır (xassələrin isbatı oxucuya təklif olunur).

1. $a : a$ (refleksivlik).
2. Əgər $a : b$ və $b : c$ olarsa, onda $a : c$ olar (tranzitivlik).

Doğrudan da elə q və q' elementləri var ki, $a = bq$ və $b = cq'$. Deməli,

$$a = (cq')q = cq'', q'' = qq',$$

yəni $a : c$.

3. Əgər a_1 və a_2 elementləri b -yə bölünərsə, onda $a_1 \pm a_2$ elementləri də b -yə bölünər .

4. a b -yə bölünərsə, onda ixtiyari k elementi üçün ka da b –yə bölünər.

Tərif 3. $a, b \in K$ elementləri o zaman K halqasının *assosiyalanmış elementləri* adlanır ki, elə ε dönən elementi tapmaq mümkün olsun ki, $a = b\varepsilon$ bərabərliyi doğru olsun.

$a, b \in K$ elementlərinin assosiyalanmış elementlər olması belə işarə olunur: $a \sim b$. Bu anlayış bölünmə münasibətinin daha bir xassəsini söyləməyə imkan verir:

5. a və b elementləri üçün $a : b \wedge b : c \Rightarrow a \sim b$.

Teorem 2. İki elementin assosiyalanmış olması münsibəti K halqasında ekvivalentlik münasibətidir.

Teoremin isbatı trivialdır.

Ekvivalentlik münasibətinin əsas xassəsinə görə, bu münsibəti K çoxluğunda bölgü müəyyən edir.

Teorem 3. Aşağıdakı təkliflər doğrudur:

1) $\sim$ münasibəti $\langle K, \cdot \rangle$ monoidində konquensiya münasibətidir, yəni əgər $a \sim b$ və $c \sim d$ olarsa, onda $ac \sim bd$.

2) vurma əməli $K/\sim$ faktor çoxluğunda monoid strukturu doğurur (onunla monoid strukturu əxz olunur).

İsbatı. Göstərmək kifayətdir ki, $a \sim b$ olarsa, onda $ac \sim bc$. Doğrudan da, şərtə əsasən elə ε dönən elementi vardır ki, $a = b\varepsilon$. Hər iki tərəfi c -yə vursaq, onda $ac \sim bc$ münasibətini alırıq. Deməli, $bc \sim cd$ və tranzitivliyə əsasən $ac \sim bc$ münasibətini alırıq. Bu o deməkdir ki, əgər ekvivalentlik sinifləri üzərində vurma əməli $(a/\sim)(b/\sim) = ab/\sim$ kimi təyin olunarsa, onda bu əməl konkret elementlərdən deyil, siniflərdən asılı olacaqdır. Teorem 3 isbat olundu.

Qeyd edək ki, $K/\sim$ faktor monoidində 5-ci xassə antisimmetrikliklə əvəz oluna bilər, yəni

$$(\forall a, b \in K/\sim)(b \neq a \wedge a : b \wedge b : c \Rightarrow a = b)$$

(isbat edin).

§3. Tamlıq oblastı və onun nisbətlər meydanı.

Məlumdur ki, tamlıq oblastı kommutativ, sıfırdan fərqli vahid elementə malik olan və sıfırların bölənlərindən azad halqadır. $K = \langle K, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ halqası tamlıq oblastı olarsa, onda $\langle K^*, \cdot, 1 \rangle$ monoidi kommutativdir. Bu monoid qrup olarsa, onda halqa meydana çevrilir.

Tərif 1. $F = \langle F, +, \cdot, 1, 0 \rangle$ meydanı o zaman $K = \langle K, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ tamlıq oblastının nisbətə meydanı adlanır ki:

- 1) K halqası F -də alt halqa olsun;
- 2) İxtiyari $\alpha \in F$ elementi üçün elə $a, b \in K$ elementləri tapmaq olsun ki, $\alpha = ab^{-1}$ münasibəti doğru olsun.

Misal. $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 1, 0 \rangle$ tam ədədlər halqasının nisbətə meydanı $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 1, 0 \rangle$ rəasional ədədlər meydanıdır.

Teorem 1. İxtiyari tamlıq oblastının nisbətə meydanı vardır.

İsbatı. $A = K \times K^*$ hasilində aşağıdakı kimi binar əməllər daxil edək:

$$(\forall (a, b), (a', b') \in K \times K^*) ((a, b) + (a', b') = (ab' + ba', bb')),$$

$$(\forall (a, b), (a', b') \in K \times K^*) ((a, b) \cdot (a', b') = (a'b', bb')).$$

$\langle A, +, \cdot \rangle$ cəbri hər iki əmələ görə kommutativdir. A çoxluğunda aşağıdakı kimi binar münasibət daxil edək:

$$(a, b) \varphi (a', b') \leftrightarrow ab' = a'b.$$

Bu münasibətin refleksiv və simmetrik olduğu aşkardır. Göstərək ki, bu münasibət tranzitivdir.

Fərz edək ki, $(a, b) \varphi (a', b')$ və $(a', b') \varphi (a'', b'')$. Onda φ münasibətinin tərifinə görə

$$ab' = a'b \wedge a'b'' = a''b'.$$

Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə vuraq və ortaq $a'b'$ hasilinə ixtisar edək. Qeyd edək ki, belə ixtisar $a' \neq 0$ olduqda mümkündür, çünki $b' \neq 0$. $a' = 0$ olduqda isə φ münasibətindən $a = a'' = 0$ alınır.

Beləliklə, hər iki halda $ab'' = a''b$. Deməli, $(a,b)\varphi(a'',b'')$, yəni φ münasibəti tranzitiv münasibətdir. Bununla biz φ münasibətinin ekvivalentlik münasibəti olduğunu göstərmiş olduq.

φ münasibəti, ekvivalentlik münasibəti kimi, A çoxluğunda bölgü müəyyən edir. Uyğun faktor çoxluğu $F' = A/\varphi$ kimi işarə edək və bu çoxluqda binar əməllər müəyyən edək. $(a,b) \in A$ elementinin daxil olduğu sinfi $\overline{(a,b)}$ kimi işarə edək. Hər bir sinif bir cüt vasitəsi ilə birqiymətli təyin olunur. Göstərək ki, φ münasibəti A çoxluğunda təyin olunan əmələrə nəzərən konquensiya münasibətidir. Yəni, $(a,b)\varphi(a',b')$ və $(c,d)\varphi(c',d')$ olarsa, onda

$$(a,b) + (c,d) \varphi (a',b') + (c',d') \quad (1)$$

və

$$(a,b) \cdot (c,d) \varphi (a',b') \cdot (c',d'). \quad (2)$$

Beləliklə, toplama və vurma əməllərini faktor çoxluqda ixtiyari iki elementin cəmi və hasilinin ekvivalentlik sinifləri kimi təyin etməklə onu (2,2) tipli cəbrə çevirmiş oluruq. (1) və (2) münasibətlərinin isbatına qayıdaq. (1) münasibətini belə yazmaq olar:

$$(ad + bc, bd) \varphi (a'd' + b'c', b'd').$$

Bu münasibətin doğru olduğunu yoxlayaq. Bunun üçün

$$(ad + bc)b'd' = (a'd' + b'c')bd$$

Bərabərliyində $ab' = ba' \wedge cd' = c'd$ olduğunu sol tərəfdə nəzərə alaq.

$$(ad + bc)b'd' = adb'd' + bcb'd' = ba'dd' + bb'c'd = (a'd' + b'c')bd.$$

Deməli, (1) doğrudur. Eyni qayda ilə (2) bərabərliyini də doğruluğu isbat olunur. Nəticə etibarlı ilə,

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a,b) + (c,d)}$$

və

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(a,b) \cdot (c,d)}$$

bərabərlikləri $F' = A/\varphi$ faktor çoxluğunda binar əməllər müəyyən edir. A çoxluğunda təyin olunmuş əməllərin kommutativliyindən F' çoxluğunda müəyyən etdiyimiz əməllərin

kommütativliyi alınır. Göstərək ki, $\langle F', +, \cdot \rangle$ meydandır. Əvvəlcə toplanmanın assosiativliyini yoxlayaq, yəni göstərək ki,

$$(\overline{(a,b) + (c,d)}) + \overline{(e,f)} = \overline{(a,b)} + (\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}). \quad (3)$$

Bunun üçün sağ və sol tərəflərin ifadələrini ayrı-ayrılıqda hesablayaraq, alınan siniflərin bərabər olduğunu göstərmək lazımdır. (3) –ün sol tərəfini çevirək:

$$(\overline{(a,b) + (c,d)}) + \overline{(e,f)} = \overline{(ad + bc, bd)} + \overline{(e,f)} = \overline{((ad + bc)f + bde, bdf)}.$$

İndi isə (3) –ün sağ tərəfinə baxaq:

$$\overline{(a,b)} + (\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}) = \overline{(a,b)} + \overline{(cf + de, df)} = \overline{(adf + (cf + de)b, bdf)}.$$

Göründüyü kimi, alınmış cütlər və deməli, onların sinifləri eynidir. Toplamanın kommutativ olduğu artıq yuxarıda qeyd olundu. Neytral və simmetrik elementləri müəyyən edək. Toplama əməli üçün neytral element olaraq $\overline{(0,1)}$ sinfi götürülə bilər. Doğrudan da,

$$\overline{(a,b)} + \overline{(0,1)} = \overline{(a \cdot 1 + b \cdot 0, b \cdot 1)} = \overline{(a,b)}.$$

$-\overline{(a,b)} = \overline{(-a,b)}$ olduğu da asanlıqla yoxlana bilər. Deməli, $\langle F', + \rangle$ Abel qrupudur.

$\langle F', \cdot \rangle$ cəbrini araşdıraraq. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu cəbr assosiativ, kommutativ və vahid elementi $\overline{(1,1)}$ olan monoiddir. Toplama və vurma əməlləri distributivlik xassəsinə malikdir, yəni

$$\overline{(a,b)}(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}) = \overline{(a,b)(c,d)} + \overline{(a,b)(e,f)}.$$

İsbat etmək üçün yenə də sol və sağ tərəfləri ayrılıqda hesablayaq.

$$\overline{(a,b)}(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}) = \overline{(a,b)(cf + de, df)} = \overline{(acf + ade, bdf)}.$$

$$\overline{(a,b)(c,d)} + \overline{(a,b)(e,f)} = \overline{(ac, bd)} + \overline{(ae, bf)} = \overline{(acb + abde, b^2df)}.$$

Alınan siniflərin üst-üstə düşdüyünü isbat etmək üçün uyğun elementlərin φ münasibətində olduğunu göstərmək lazımdır:

$$b^2df(acf + ade) = bdf(abc + abde).$$

Beləliklə, $\langle F', +, \cdot \rangle$ cəbri vahidi olan kommutativ halqadır. Onun $\overline{(1,1)}$ vahid elementi $\overline{(0,1)}$ sıfır elementindən fərqlidir, çünki, $1 \cdot 0 \neq 1 \cdot 1$.

Göstərək ki, $\langle F', +, \cdot \rangle$ halqasında hər bir sıfırdan fərqli elementin tərsi vardır. İxtiyati $\overline{(a,b)} \neq \overline{(0,1)}$ elementi qeyd edək. Bu şərt $a \cdot 1 = a \neq b \cdot 0 = 0$ şərti ilə eynigüclüdür. Onda $\overline{(b,a)} \in F'$ və

$$\overline{(a,b)}\overline{(b,a)} = \overline{(ab,ab)} = \overline{(1,1)}.$$

Deməli, $\langle F', +, \cdot \rangle$ halqası meydandır. İndi isə göstərək ki, bu meydan ilə izomorf olan və teoremin şərtlərini ödəyən meydan vardır. Aşağıdakı inikasa baxaq:

$$\tau : K \rightarrow F'; \tau(a) = \overline{(a,1)}.$$

Asanlıqla yəqin etmək olar ki, bu inikas homomorfizmdir:

$$\tau(a+b) = \overline{(a+b,1)} = \overline{(a,1)} + \overline{(b,1)} = \tau(a) + \tau(b);$$

$$\tau(ab) = \overline{(ab,1)} = \overline{(a,1)}\overline{(b,1)} = \tau(a)\tau(b).$$

Bu münasibətlər göstərir ki, τ inikası sürəktiv homomorfizmdir. Onun $K' = \tau(K)$ obrazı alt halqadır, nüvəsi isə trivialdır. Demək, τ inikası izomorf daxilolmadır. Kompleks ədədlər meydanını qurarkən istifadə etdiyimiz üsulla elə $F = \langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ meydanı qura bilərik ki, $F \cong \langle F', +, \cdot, 0, 1 \rangle$ olmaqla $\langle K, +, \cdot, 1, 0 \rangle < \langle F, +, \cdot, 1, 0 \rangle$ və $K \subset F$ olsun. Teorem 1 isbat olundu.

Teorem 2. Tutaq ki, $F \cong \langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ və $E \cong \langle E, \oplus, \bullet, 0, 1 \rangle$ eyni bir $K = \langle K, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ tamlıq oblastının nisbətə meydanıdır. Onda, bu meydanların K -nın elementlərini tərpənməz saxlayan izomorfizmi vardır.

İsbatı. Şərtə əsasən ixtiyari $\alpha \in F$ və $\beta \in E$ elementlərini $\alpha = ab^{-1}$, $\beta = c \bullet d^{-1}$ şəklində yazmaq olar və burada $a, b, c, d \in K$ olmaqla ikinci bərabərlikdə tərs element E meydanında təyin olunan vurma əməlinə nəzərən götürülür. $f : F \rightarrow E$ inikasını aşağıdakı kimi təyin edək. Bu inikas K -nın elementlərini tərpənməz saxladığı üçün $a \in K$ olduqda $f(a) = a$ qəbul edək. $\alpha = ab^{-1}$ elementi üçün $f(\alpha) = a \bullet b^{-1}$ yazaq. Hər iki meydanda elementin baxılan şəkildə göstərilişi yeganə deyil. Buna görə də yuxarıda qeyd olunan bərabərlik vasitəsi ilə biyektiv inikas təyin olunduğunu xüsusi olaraq göstərmək lazımdır. Tutaq ki, $\alpha = ab^{-1}$ elementi üçün

başqa göstəriliş də verilmişdir: $\alpha = cd^{-1}$. Onda yazı bilərik: $ad = bc$. K halqasının elementləri üçün hər iki meydana təyin olunan vurma əməllərinin nəticələri eynidir. Buna görə də

$$a \bullet d = b \bullet c \rightarrow a \bullet b^{-1} = c \bullet d^{-1}.$$

Beləliklə, α elementinin yazılışından asılı olmadan $f(\alpha) = a \bullet b^{-1}$ qiyməti dəyişmir. Deyilənlərdən aydın olur ki, təyin olunan f inikası biyektivdir. Onun homomorfizm olduğunu göstərmək qalır. Biz f inikasının toplama əməlini saxladığını göstərməklə kifayətlənək.

$$f\left(\frac{q}{r} + \frac{s}{t}\right) = f\left(\frac{qt + rs}{rt}\right) = (qt + rs) \bullet (rt)^{-1} = q \bullet r^{-1} \oplus s \bullet t^{-1}.$$

Bu onu göstərir ki, f inikası toplama əməlini saxlayır. Eyni qayda ilə göstərə bilərik ki, f inikası vurma əməlini də saxlayır. Teorem 2 isbat olundu.

Teorem 2 göstərir ki, tamlıq oblastının nisbətələri meydanı *izomorfizm dəqiqliyi ilə yeganədir*.

§4. Sadə cisimlər və onların kommutativliyi

Tərif 1. $F \cong \langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ cəbri o zaman cisim adlanır ki, aşağıdakı şərtlər ödənsin:

1) $\langle F, + \rangle$ cəbri “+” binar əməlinə nəzərən kommutativ qrup olsun;

2) $F^* = F \setminus \{0\} = \emptyset$ olmaqla, $\langle F^*, \cdot \rangle$ cəbri qrup olsun.

Bu tərif meydanın tərifinə ilə müqayisə etsək, görərik ki, kommutativ cisim meydana gəlir. Cismə misal olaraq **H** kvaternionlar cəbrini göstərmək olar.

Kompleks ədədlər və həqiqi ədədlər meydanları kvaternionlar cisminin, bir cəbr kimi, alt cisimləridir. F cisimi özünün alt cismidir və o, trivial alt cisim adlanır. Qeyri-trivial alt cisim isə *məxsusi alt cisim* adlanır.

Tərif 2. F cismi o zaman sadə cisim adlanır ki, onun məxsusi alt cismi olmasın.

Teorem 1. Əgər F_1 və F_2 hər hansı F cisminin ixtiyari iki alt cisimləri olarsa, onda onların kəsişməsi də alt cisimdir.

Teoremin isbatı asanlıqla tərifdən alınır. Bu teoremin ixtiyari ailə alt cisimlər üçün də ümumiləşməsi vardır.

Teorem 2. İxtiyari ailə $\{F_\alpha\}$ alt cisimlərinin kəsişməsi də alt cisimdir.

Teorem 3. Verilən F cisminin bütün alt cisimlərinin kəsişməsi sadə cisimdir.

İsbatı. Tutaq ki, $\{F_\alpha\}$ verilən F cisminin bütün alt cisimlər ailəsidir. Onda teorem 2-yə əsasən

$$\bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$$

kəsişməsi də alt cisim olacaqdır. Fərz edək ki, onun məxsusi Φ alt cismi vardır. Onda, alt cisim kimi $\Phi \in \{F_\alpha\}$ və buna görə də

$$\bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \subset \Phi \Rightarrow \bigcap_{\alpha} F_{\alpha} = \Phi .$$

Bu isə Φ -nin məxsusi alt cisim olması şərtinə ziddir. Teorem 3 isbat olundu.

Teorem 4. Sadə cisim kommutativdir, yəni meydandır.

İsbatı. Tutaq ki, $F \cong \langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ sadə cisimdir. Onda onun $1 \neq 0$ elementi vardır. Nəzər bir natural n ədədi üçün $n * 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n$ kimi təyin olunan element vardır. F cisim olduğu üçün onun 0 elementi və $-n * 1$ şəklində elementləri vardır. Asanlıqla yəqin etmək olar ki, $n * 1, -n * 1$ şəklində elementlər çoxluğu 0 ilə birlikdə halqa təşkil edir və bu halqa $\langle Z, +, \cdot \rangle$ tam ədədlər halqası ilə izomorfdur. Onda §3, teorem 1-ə əsasən həmin halqanın nisbətələr meydanı vardır və bu meydan $\langle Q, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ rəasional ədədlər meydanı ilə izomorfdur. Deməli, hər bir sifirdən fərqli $n * 1$ elementinin tərsi vardır və $(n * 1)^{-1}$ şəklindədir. Beləliklə, bütün

$$\frac{n * 1}{m * 1}$$

şəklində kəsrlər çoxluğu F cisminə daxildir. Deməli, bu cisim rəasional ədədlər meydanı ilə izomorf olan meydanı daxilinə alır. Lakin F cismi sadə cisim olduğu üçün onun məxsusi alt cismi (kommutativ halı istisna deyil) ola bilməz. Deməli,

$$F \cong Q = \langle Q, +, \cdot, 0, 1 \rangle .$$

və F cisimi meydandır, yəni o , kommutativdir. Teorem 4 isbat olundu.

III Hissə

I FƏSİL. Çoxhədlilər halqası

§1. Halqanın sadə transsəndent genişlənməsi

Bu fəsilə baxılan halqalar kommutativ və vahidi olan hesab olunur. İxtiyari iki belə halqa götürək: $K = \langle K, +, \cdot, 1 \rangle$ və $L = \langle L, +, \cdot, 1 \rangle$. Fərz edək ki, $K \prec L$.

Tərif 1. L halqası o zaman K halqasının $u \in L$ elementinin birləşdirilməsi vasitəsi ilə alınan sadə genişlənməsi adlanır ki, onun ixtiyari $\alpha \in L$ elementini

$$\alpha = a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n \quad (1)$$

($a_0, a_1, \dots, a_n \in K$) şəklində göstərmək mümkün olsun.

K halqasının $u \in L$ elementinin birləşdirilməsi vasitəsi ilə alınan sadə genişlənməsi simvolik olaraq $L = K[u]$ şəklində yazılır. Eyni simvolik yazılış əsas çoxluqlar üçün də istifadə olunur: $L = K[u]$.

Misal 1. Bütün $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) Qaus tam kompleks ədədlər çoxluğu $\mathbb{Z}$ tam ədədlər halqasının i kompleks ədədini birləşdirməklə alınan sadə genişlənməsidir.

Misal 2. $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ çoxluğu $\mathbb{Z}$ tam ədədlər halqasının $\sqrt[3]{2}$ ədədini birləşdirməklə alınan sadə genişlənməsidir. Doğrudan da, bu çoxluğun hər bir elementi (1) şəklindədir (burada $u = \sqrt[3]{2}$). Asanlıqla göstərmək olar ki, $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ çoxluğu kommutativ və vahidi olan halqadır. $2 - u^3 = 0 + 0u$ bərabərliyi göstərir ki, bu halqada 0 ədədi iki müxtəlif üsulla (1) şəklində göstərilə bilər. Əslində isə sonsuz sayda belə göstərilişlər mümkündür.

Bir çox məsələlər üçün hər bir elementin (1) şəklində yazılışının yeganəliyi vacibdir. Sadə genişlənmələrin belə növü transsəndent genişlənmə adlanır.

Tərif 2. L halqası o zaman K halqasının $u \in L$ elementinin birləşdirilməsi vasitəsi ilə alınan sadə transsəndent genişlənməsi adlanır ki:

1) $L = K[u]$ olsun;

2) onun ixtiyari $\alpha \in L$ elementinin (1) şəklində göstərilişi yeganə olsun.

Bu tərifdə 2) şərtini onunla eyniüclü olan $0 = a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n \Leftrightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ şərti ilə əvəz etmək olar.

Tərif 3. Əgər $u \in L$ elementi üçün $L = K[u]$ sadə transsəndent genişlənmə olarsa, onda $u \in L$ elementi K halqası üzərində transsəndent element adlanır. $\mathbb{Q}$ rəasional ədədlər meydanı, yaxud $\mathbb{Z}$ tam ədədlər halqası üzərində transsəndent element transsəndent ədəd adlanır.

Tutaq ki, $L = K[u]$ sadə genişlənmədir. Əgər o, transsəndent genişlənmə olmazsa, onda belə genişlənmə sadə cəbri genişlənmələr sinfinə aid olur (cəbri genişlənmənin tərfi VI fəsildə

veriləcəkdir). Uyğun birləşdirilmiş element isə *cəbri element* adlanır. Məsələn, $Z[i]$ və ya $Z[\sqrt[3]{2}]$ genişlənmələri *cəbri genişlənmələr*dir.

İxtiyari kommutativ və vahidi olan K halqası üçün onun sadə transsendent genişlənməsi vardır. Bu hökmün isbatı verilən halqa vasitəsi ilə qurulan köməkçi halqa ilə bağlıdır.

$\langle K, +, 1 \rangle$ halqasının elementlərindən düzələn bütün mümkün sonsuz elə $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ ardıcılıqlarına baxaq ki, onun sonlu sayda hədlərindən başqa qalanları 0-a bərabər olsun. Başqa sözlə hər bir belə ardıcılıq üçün həmişə elə m nömrəsi göstərmək olar ki, $n > m$ olduqda $a_n = 0$ olsun. Bütün belə *psevdo-sonsuz* ardıcılıqlar çoxluğunu $\bar{K}$ kimi işarə edək. $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ və $\beta = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) \in \bar{K}$ çoxluğundan götürülmüş iki element olarsa, onda bu iki elementin bərbərliyi $\alpha = \beta \Leftrightarrow a_0 = b_0 \wedge a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n$ münasibəti ilə verilir.

$\bar{K}$ çoxluğunda binar əməllər təyin edək. $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ və $\beta = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) \in \bar{K}$ çoxluğundan götürülmüş iki element olarsa, onda onların cəmini belə müəyyən edək:

$$\alpha + \beta = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots).$$

Bu elementlərin hasilini isə

$$\alpha\beta = (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots); c_i = \sum_{k+j=i} a_k b_j$$

kimi təyin edək (burada cəmləmə bütün mənfi olmayan k və j tam ədədləri üzrə aparılır). Beləliklə, biz $\langle \bar{K}, +, \cdot \rangle$ cəbrini aldığımızı. Gösrək ki, o, kommutativ və vahidi olan halqadır. Daxil olunmuş əməllərin kommutativ olduğu K halqasının özünün kommutativliyindən alınır. Aydındır ki, $\bar{0} = (0, \dots, 0, \dots)$ elementi toplamanın neytral elementidir. Hər bir elementin əksi (toplamaya nəzərən simmetrik elementi) komponentlərin işarəsini dəyişməklə alınır: $-\alpha = (-a_0, -a_1, \dots, -a_n, \dots)$. Deməli, $\langle \bar{K}, + \rangle$ cəbri kommutativ qrupdur. $\langle \bar{K}, \cdot \rangle$ cəbri kommutativ qruppoiddir. Onun monoid olduğunu göstərək.

Tutaq ki, α və β elementləri ilə birlikdə ixtiyari üçüncü bir $\gamma = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ elementi də verilmişdir. Onda yazı bilərik:

$$\alpha\beta = (d_1, d_2, \dots, d_m, \dots); d_j = \sum_{k+l=j} a_k b_l.$$

Beləliklə,

$$(\alpha\beta)\gamma = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots); f_i = \sum_{r+j=i} d_r c_j = \sum_{k+l+j=i} \left(\sum a_k b_l \right) c_j. \quad (2)$$

Digər tərəfdən, əgər $\beta\gamma = (g_1, g_2, \dots, g_n, \dots)$ işarə etsək, onda yazı bilərik:

$$\alpha(\beta\gamma) = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots); u_i = \sum_{r+j=i} a_r g_j = \sum_{k+l+j=i} a_k \left(\sum b_l c_j \right). \quad (3)$$

Toplamanın yerdəyişmə və qruplaşdırma qanunlarından alınır ki, (2) və (3) bərabərlikləri eyni bir hasili təyin edir yəni:

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\bar{1} = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ vahid elementdir. Beləliklə, $\langle \bar{K}, \cdot \rangle$ cəbri kommutativ monoiddir. $\langle \bar{K}, +, \cdot \rangle$ cəbrinin halqa olduğu distributivlikdən alınır. Sonuncu isə aşağıdakı münasibətin nəticəsidir:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \left(\sum_{k+l=i} a_k (b_l + c_l) \right)_{i \geq 0} = \left(\sum_{k+l=i} a_k b_l \right)_{i \geq 0} + \left(\sum_{k+l=i} a_k c_l \right)_{i \geq 0} = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

§2. Çoxhədlilər halqası və onun sadə xassələri

Teorem 1. İxtiyari kommutativ və vahidi olan halqanın sadə transsendent genişlənməsi vardır.

İsbatı. Tutaq ki, $K_1 = \{(a, 0, \dots, 0, \dots) \mid a \in K\}$. Aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edək:

$$u = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots), \quad (a, 0, \dots, 0, \dots) = a = au^0 = a \cdot \bar{1}.$$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$u^2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \cdot (0, 1, 0, \dots, 0, \dots) = (0, 0, 1, \dots, 0, \dots).$$

Analoji olaraq, yaza bilərik:

$$u^k = u^{k-1} \cdot u = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

(burada 1 k -cı yerdə dayanmışdır). Eyni zamanda,

$$(0, a_1, \dots, 0, \dots) = (a_1, 0, \dots) \cdot u = a_1 u,$$

$$(0, 0, a_2, \dots, 0, \dots) = (a_2, 0, \dots) \cdot u^2 = a_2 u^2,$$

və i. a. Beləliklə, ixtiyari psevdo-sonsuz $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ ardıcılığını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = a_0 u^0 + a_1 u^1 + \dots + a_n u^n. \quad (4)$$

Bu ayrılışın yeganəliyi ardıcılıqların bərabərliyindən alınır. Yeni $K' = (\bar{K} \setminus K_1) \cup K$ çoxluğunu daxil edək. $\varphi: \bar{K} \rightarrow K'$ inikasını belə təyin edək:

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} a, & \alpha = (a, 0, \dots), \\ \alpha, & \alpha \neq (a, 0, \dots). \end{cases}$$

Aydındır ki, bu inikas biyektiv inikasdır. Bu inikasın köməyi ilə K' çoxluğunda binar əməllər təyin edə bilərik. Tutaq ki, $y, z \in K'$ ixtiyari iki elementdir. Bu elementlərin cəmini və hasilini belə müəyyən edirik:

$$y \oplus z = \varphi(\varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(z)) \wedge y * z = \varphi(\varphi^{-1}(y) \cdot \varphi^{-1}(z)).$$

Asanlıqla yəqin etmək olar ki, $\langle K', \oplus, *, 1 \rangle$ cəbri kommutativ halqadır və $\langle K', \oplus, *, 1 \rangle \cong \langle \bar{K}, \oplus, *, \bar{1} \rangle$.

Əgər $x = \varphi(u)$ qəbul etsək onda hər bir $\varphi(\alpha)$ elementini (4)-ə əsasən

$$\varphi(\alpha) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (5)$$

kimi yazı bilərik. Qurmayla əsasən hökm edə bilərik ki, $K \subset K'$. Beləliklə, $K' = K[x]$ və teorem bununla isbat olundu.

Tərif 1. $K[x]$ transsendent sadə genişlənməsi K halqası üzərində *birdəyişənli çoxhədlilər halqası* adlanır. Çoxhədlilər halqasının (5) kimi yazılan elementləri *çoxhədlilər* adlanır. (5) cəminə daxil olan hər bir toplanan *birhədlilər* adlanır. $a_0, a_1, \dots, a_n$ elementləri çoxhədlinin əmsalları adlanır.

Bu halqanın bilvasitə tərifdən alınan ən sadə xassələri aşağıdakı teoremlərlə ifadə olunur.

Teorem 2. Əgər K halqası tamliq oblastı olarsa, onda $K[x]$ çoxhədlilər halqası da tamliq oblastı olar.

İsbatı. Tutaq ki, $f(x), g(x) \in K[x]$ ixtiyari iki sıfır olmayan çoxhədlidir. Göstərək ki, $fg \neq 0$. Əksini fərz edək. Tutaq ki, $fg = 0$. f və g çoxhədlilərini aşağıdakı kimi yazaq:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m.$$

Çoxhədlilər sıfırdan fərqli olduğu üçün əmsallar içərisində maksimal nömrəli sıfır olmayan əmsallar vardır. Fərz edək ki, bunlar a_n və b_m əmsallarıdır. Onda, fg hasilinin maksimal nömrəli həddi a_nb_m olcaqdır. Lakin K halqası tamliq oblastı olduğundan $a_nb_m \neq 0$. Beləliklə, $fg \neq 0$. Teorem 2 isbat olundu.

Məlumdur ki, tamliq oblastının nisbətler meydanı həmişə vardır. $K[x]$ halqasının nisbətler meydanı *rasional kəsrlər* meydanı adlanır.

Teorem 3. Fərz edək ki, K və L iki kommutativ halqa olmaqla, $K \cong L$. Onda,

$$K[x] \cong L[y].$$

İsbatı. $K[x]$ halqasının hər bir $f(x)$ çoxhədlisi yeganə qayda ilə

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

kimi yazıla bilər. Tutaq ki, $\varphi: K \rightarrow L$ $K = \langle K, +, \cdot, 1 \rangle$ və $L = \langle L, +, \cdot, 1 \rangle$ halqalarının izomorfizmidir.

$f(x)$ çoxhədlisinə $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ çoxhədlisini qarşı qoyaq; burada b_i əmsalları $b_i = \varphi(a_i)$ kimi təyin olunur. Aydındır ki, bu inikas əməlləri saxlayır və biyektiv inikasdır. Teorem 3 buradan alınır.

§3. Çoxhədlinin dərəcəsi. Çoxhədlinin kökü. Bezu teoremi

Tutaq ki, $\langle K, +, \cdot, 1 \rangle$ kommutativ və vahidi olan halqadır, $K[x]$ isə bu halqa üzərində çoxhədlilər halqasıdır. İxtiyari $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisini $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ şəklində yazmaq olar ki, burada $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$.

Tərif 1. Əgər $a_n \neq 0$ olarsa, onda $n \geq 0$ ədədi $f(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsi adlanır və $\deg f$ kimi işarə olunur.

Məsələn, $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ çoxhədlisinin dərəcəsi 3-ə bərabərdir: $\deg f = 3$.

Yaxıd, $g(x) = 0x^5 - 0x^3 + x^2 - x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}[x]$ çoxhədlisi üçün $\deg g = 2$.

Bütün əmsalları 0 olan sıfır çoxhədlisinin dərəcəsi təyin olunmamışdır. Hər bir $0 \neq c \in K$ elementi sıfır dərəcəli $f(x) = c$ çoxhədlisini müəyyən edir.

Çoxhədlinin dərəcəsinin aşağıdakı xassələri vardır:

1) İxtiyari iki $f, g \in K[x]$ çoxhədliləri üçün $\deg(f + g), \deg f, \deg g$ ədədləri təyin olunarsa, onda

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g).$$

2) Heç biri sıfır olmayan ixtiyari iki $f, g \in K[x]$ çoxhədliləri üçün

$$\deg(fg) \leq \deg f + \deg g.$$

3) Əgər K halqası tamlıq oblastı olarsa, onda heç biri sıfır olmayan ixtiyari iki $f, g \in K[x]$ çoxhədliləri üçün

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g.$$

Bu xassələrin isbatı bilvasitə çoxhədlinin dərəcəsinin tərifindən alınır. Buna görə də biz ancaq misallarla kifayətlənə bilərik.

Misal 1. Tutaq ki, $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 1$ və $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$. Bu halda,

$$\deg(f + g) = \deg(-2x^3 - 6x^2 - 4x + 2) = 3.$$

Bərbərsizliyin ciddi olan halı da mümkündür. Məsələn, $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 1, g(x) = 2x^3 - 4x + 1$ çoxhədliləri üçün $\deg(f + g) = \deg(-4x^2 - 4x + 2) = 2 < \deg f$.

Misal 2. Tutaq ki, $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 1$ və $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$. Bu halda,

$$\deg(fg) = \deg(4x^5 + 16x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 1) = 5 = \deg f + \deg g.$$

Misal 3. Əgər K halqası tamliq oblastı deyilsə, onda 3) xassəsindəki bərabərlik ödənməyə bilər. Doğrudan da tutaq ki, $K = \mathbb{Z}_6$ 6 modulun görə çıxıqlar sinifləri halqasıdır $g(x) = \bar{2}$ və $f(x) = \bar{3}x + \bar{1}$. Bu halda $f(x)g(x) = \bar{6}x + \bar{2} = \bar{2}$. Yəni $\deg(fg) = 0 < \deg f + \deg g$.

Dərəcəsi n olan $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ çoxhədlisində a_n yüksək (yaxud böyük) əmsal, a_0 isə sərbəst hədd adlanır. Yüksək əmsalı 1-ə bərabər olan çoxhədli unitar (yaxud normalaşmış) çoxhədli adlanır.

Tərif 2. $c \in K$ elementi o zaman $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisinin kökü adlanır ki,

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0 = 0$$

bərabərliyi doğru olsun.

Məsələn, $\sqrt[5]{2}$ ədədi $f(x) = x^5 - 2 \in R[x]$ çoxhədlisinin köküdür, çünki, $(\sqrt[5]{2})^5 - 2 = 0$.

Göründüyü kimi, çoxhədlinin kökü anlayışı verilmiş çoxhədlidə dəyişənin K halqasının elementi ilə əvəz olunması vasitəsi ilə alınan yeni elementinin sıfır bərabər olub olmamaması ilə bağlıdır. Dəyişənin bu cür əvəz olunması $\phi_c : K[x] \rightarrow K$ inikasını müəyyən edir.

Teorem 1. $\phi_c : K[x] \rightarrow K$ inikası halqaların homomorfizmdir.

İsbatı. Göstərək ki, ϕ_c inikası toplama və vurma əməllərini saxlayır. Bunu isbat etmək üçün

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

yazaq. $m \leq n$ olduğunu fərz edərək, $b_{m+1} = \dots = b_n = 0$ ($m < n$ olduqda) olduğunu qəbul edək. Onda yazı bilərik:

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Bu halda,

$$\begin{aligned} \phi_c(f + g) &= (a_n + b_n)c^n + \dots + (a_1 + b_1)c + (a_0 + b_0) = \\ &= (a_n c^n + b_n c^n + \dots + a_1 c + b_1 c + a_0 + b_0) = f(c) + g(c) = \phi(f) + \phi(g). \end{aligned}$$

Eyni qayda ilə göstərmək olar ki,

$$\phi_c(fg) = \phi_c(f)\phi_c(g).$$

Teorem 1 isbat olundu.

Tərif 3. Teorem 1 vasitəsi ilə müəyyən olunan homomorfizm qiymət homomorfizmi adlanır.

Tutaq ki, $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in K[x]$ çoxhədli verilmişdir. İxtiyarı $c \in K$ ele -

menti üçün ϕ_c inikası bu çoxhədlinin qiymətini müəyyən edir. Həmin qiymətin hesablanması üçün praktik cəhətdən əlverişli üsul vardır ki, bu üsul Hörner sxemi adlanır. Əvvəlcə Bezu teoremi deyilən aşağıdakı teoremi verək.

Teorem 3. İxtiyari $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisi və $c \in K$ elementi üçün elə $q(x) \in K[x]$ çoxhədlisi tapmaq olar ki,

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c). \quad (1)$$

Bu teoremi bəzən belə də ifadə edirlər: $f(x)$ çoxhədlisinin $x - c$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalıq $f(c)$ -yə bərabərdir.

İsbati. $f(x) - f(c)$ fərqlərini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$f(x) - f(c) = a_1(x - c) + a_2(x^2 - c^2) + \dots + (x^n - c^n).$$

İstənilən k natural ədədi üçün məlum bərabərliyə əsasən

$$x^k - c^k = (x - c)(x^{k-1} + \dots + xc^{k-2} + c^{k-1}).$$

Deməli,

$$\begin{aligned} f(x) - f(c) &= a_1(x - c) + a_2(x^2 - c^2) + \dots + a_n(x^n - c^n) = \\ &= a_1(x - c) + a_2(x - c)(x + c) + \dots + a_n(x - c)(x^{k-1} + \dots + xc^{k-2} + c^{k-1}) = \\ &= (x - c)(a_1 + a_2(x + c) + \dots + a_n(x^{k-1} + \dots + xc^{k-2} + c^{k-1})). \end{aligned}$$

Conuncu mötərizə daxilindəki çoxhədlini $q(x)$ ilə işarə etsək, onda tələb olunan bərabərliyi aşağıdakı eynigüclü şəkildə yaza bilərik:

$$f(x) - f(c) = (x - c)q(x).$$

Teorem 3 isbat olundu.

Xüsusi halda K halqası tamlıq oblastı olarsa, onda aşağıdakı əlamət doğrudur.

Nəticə. $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisinin K halqasında $c \in K$ kökünə malik olması üçün onun $x - c$ ikihədlisinə bölünməsi zəruri və kafi şərtədir.

İsbati. Tutaq ki, $c \in K$ elementi $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisinin köküdür. Teorem 3-ə əsasən, elə $q(x) \in K[x]$ çoxhədlisi tapmaq olar ki,

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c).$$

Şərtə əsasən, $f(c) = 0$. Buna görə də, $f(x) = (x - c)q(x)$.

Əksinə, əgər $f(x) = (x - c)q(x)$ münasibəti doğru olarsa, onda teorem 3-ə görə elə $q'(x) \in K[x]$ çoxhədlisi tapa bilərik ki, $f(x) = (x - c)q'(x) + f(c)$. Alınan iki bərabərliyi tərəf – tərəfə çıxaraq:

$$f(c) = (x - c)(q'(x) - q(x)).$$

Dərəcənin tərifinə əsasən, bu bərabərlik yalnız o zaman mümkün ola bilər ki, $q'(x) = q(x)$ olsun, əks halda sol tərəfin dərəcəsi 0, sağ tərəfdəki çoxhədlinin dərəcəsi isə ən azı 1 olardı. Beləliklə, nəticə isbat olundu.

Teorem 3-dən verilən çoxhədlinin verilmiş nöqtədə aldığı qiyməti müəyyən etmək üçün Hörner sxemi adlanan əlverişli üsul alınır. Bu üsul eyni zamanda $q(x)$ çoxhədlisinin əmsallarını tapmaq üçün də faydalıdır.

(1) bərabərliyində $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$ yazaraq, sağ tərəfi çevirək:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n &= (x - c)(b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1}) + f(c) = \\ &= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - cb_{n-1})x^{n-1} + \dots + (b_0 - cb_1)x + f(c) - b_0c. \end{aligned}$$

Hər iki tərəfin əmsallarını bərabərləşdirsək alırıq:

$$b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}, \dots, b_0 = a_1 + cb_1, f(c) = a_0 + cb_0.$$

Tapılmış bu ifadələri aşağıdakı cədvəldə yerləşdirək.

a_n	a_{n-1}	...	a_1	a_0
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$	...	$b_0 = a_1 + cb_1$	$f(c) = a_0 + cb_0$

Misal. $f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x - 3$ çoxhədlisinin $x - 2$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalıqı və natamam qisməti (yəni $q(x)$ çoxhədlisini) tapmaq.

	2	-1	0	5	-3
2	2	$2 \cdot 2 - 1 = 3$	$2 \cdot 3 + 0 = 6$	$2 \cdot 6 + 5 = 17$	$2 \cdot 17 - 3 = 31$

Bu cədvəl əsasən yazı bilərik: $f(x) = (x - 2)(2x^3 + 3x^2 + 6x + 17) + 31$.

§4. Köklərin sayı. Çoxhədlilərin cəbri və funksional bərabərliyi

Bezu teoreminin köməyi ilə çoxhədlinin müxtəlif köklərinin sayı haqda məlumat almaq olar. Bu teorem sadə modula nəzərən müqayisələr üçün (yəni sonlu meydanlarda) ilk dəfə *Laqranj* tərəfindən isbat olunmuşdur. Sonralar bu teorem tamlıq oblastları üçün ümumiləşdirilmişdir. Sonsuz ədədi meydanlarda onu Laqranjin interpolasiya düsturundan da almaq olar. Laqranj teoreminin tamlıq oblastları üçün ifadəsi belədir.

Teorem 1. n dərəcəli çoxhədlinin müxtəlif köklərinin sayı çoxhədlinin dərəcəsindən böyük deyil.

İsbatı. Teoremi dərəcəyə görə induksiya metodu ilə isbat edək. Tutaq ki, $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisinin dərəcəsi n -ə bərabərdir və onun m sayda müxtəlif kökləri vardır: $x_1, x_2, \dots, x_m$. $n=0$

olarsa, onda $f = c \neq 0$. Buna görə də $m = 0$ və bu halda teorem doğrudur. Bir dərəcəli çoxhədlinin birdən çox kökü ola bilməz. Fərz edək ki, teorem $n-1$ dərəcəli çoxhədlilər üçün doğrudur. Onda Bezu teoreminə əsasən yazı bilərik:

$$f(x) = (x - x_1)g(x).$$

K tamlıq oblastı olduğundan dərəcənin xassəsinə əsasən yazı bilərik: $\deg g = \deg f - 1 = m - 1$. $x_2, \dots, x_m$ köklərindən ixtiyari birini götürək və onu y ilə işarə edək. Aydındır ki, $y \neq x_1$ olmaqla $f(y) = (y - x_1)g(y) = 0$. Deməli, $g(y) = 0$. Beləliklə, qalan $m-1$ sayda $x_2, \dots, x_m$ kökləri ancaq g çoxhədlisinin kökü ola bilər. İnduktiv fərziyyəyə əsasən, $m-1 \leq n-1$ olmalıdır. Deməli, $m \leq n$ və teorem 1 isbat olundu.

Hər bir çoxhədlinə əsas halqa üzərində təyin olunan funksiya kimi də baxmaq olar. Tutaq ki ixtiyari $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisi və $c \in K$ elementi verilmişdir. Onda, ϕ_c qiymət homomorfizminin köməyi ilə $f(c) \in K$ elementi müəyyən oluna bilər. Bir çox hallarda bununla $f(x)$ birqiymətli müəyyən olunur.

Teorem 2. Əgər K halqası sonsuz tamlıq oblastı və $f, g \in K[x]$ ixtiyari iki çoxhədli olarsa, onda ixtiyari $c \in K$ elementi üçün $f(c) = g(c)$ olmasından $f = g$ alınır.

Teoremin hökmünə əsasən, sonsuz tamlıq oblastları üzərində verilmiş çoxhədlilərin funksional bərabərliyi ilə cəbri bərabərliyi eynigüclüdür.

Teorem 2-nin isbatı. Teoremi aşağıdakı şəkildə isbat etmək kifayətdir: göstərek ki,

$$(\forall c \in K)(f(c) = 0)$$

müləhizəsi doğru olarsa, onda $f = 0$. Əksini fərz edək, yəni tutaq ki, $f \neq 0$ və $n = \deg f$. K halqası sonsuz olduğu üçün onun $n+1$ sayda müxtəlif elementi vardır. Laqranj teoreminə əsasən $n+1 \leq n$ olmalıdır ki, bu da mümkün deyil. Alınan ziddiyyət göstərir ki, $f = 0$. Teorem 2 isbat olundu.

Bununla belə, çoxhədli anlayışı ilə uyğun funksiyanın fərqi vardır. Əgər K halqası sonlu olarsa, onda teorem 2-nin hökmü doğru olmaya bilər. Məsələn, Z_2 halqası üzərində $f(x) = x^2 + x$ çoxhədlisini götürsək, asanlıqla görə bilərik ki, $f(\bar{0}) = \bar{0}$ və $f(\bar{1}) = \bar{0}$. Lakin $f(x) \neq 0$.

II FƏSİL. Meydan üzərində çoxhədlilər halqası

§1. Qalıqlı bölmə haqda teorem. Bölünmə münasibəti

Yuxarıda gördük ki, iki çoxhədlinin hasilinin dərəcəsi vuruqların dərəcələri cəminə bərabərdir. Ən sadə halda iki birhədlidən birinin dərəcəsi böyük olarsa, onda onu kiçik dərəcəli birhədliyə bölmək o zaman mümkün olar ki, birincinin əmsalı ikinciye bölünsün. Əsas halqa meydan olduqda bu həmişə mümkün olur. Buna görə də əvvəlcə sadə hal kimi meydan üzərində çoxhədlilər halqasını öyrənmək daha əlverişlidir.

Tutaq ki, hər hansı bir $K = \langle K, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ meydanı verilmişdir. Bu meydan üzərində çoxhədlilər halqasına baxaq. Bu halqa bölünmə ilə bağlı xüsusiyyətləri ilə tam ədədlər halqasına çox yaxındır, çünki burada da qalıqlı bölmə haqda teorem vardır. Bu teorem aşağıdakı şəkildə söylenebilir.

Teorem 1. İxtiyari iki $f, g \in K[x] (g \neq 0)$ çoxhədliləri üçün elə yeganə (q, r) çoxhədlilər cütü göstərmək olar ki,:

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

münasubəti ödənməklə ya $r(x) = 0$ və ya $\deg r(x) < \deg g(x)$.

İsbatı. Əvvəlcə göstərilən münasibətin doğruluğunu isbat edək. F çoxhədlisinin dərəcəsinə görə induksiya metodunu tətbiq edək. Tutaq ki, $\deg f = 0$. Əgər $\deg g = 0$ olarsa, onda $0 \neq g \in K$ və deməli, $g^{-1} \in K$. Bu halda $q(x) = fg^{-1}$, $r(x) = 0$ götürmək kifayətdir.

Fərz edək ki, teorem dərəcəsi n -dək kiçik çoxhədlilər üçün isbat olunmuşdur. $\deg f = n$ qəbul edək və

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m$$

işarə edək. İki hala baxaq. Əvvəlcə tutaq ki, $m > n$. Bu halda $q(x) = 0$ və $r(x) = f(x)$ qəbul etsək, onda tələb olunan bərabərliyi alarıq. İndi isə fərz edək ki, $n \geq m$. Aşağıdakı fərqlə baxaq:

$$f_1(x) = f(x) - a_0b_0^{-1}x^{n-m}g(x).$$

Asanlıqla yazı bilərik:

$$f_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n -$$

$$= a_0b_0^{-1}x^{n-m}(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m) = c_0x^{n-1} + \dots + c_{n-1}$$

İnduktiv fərziyyəyə əsasən $f_1(x)$ və $g(x)$ çoxhədliləri üçün elə $q_1(x)$ və $r(x)$ çoxhədliləri tapmaq olar ki,

$$f_1(x) = q_1(x)g(x) + r(x), \quad \deg r < \deg g \vee r = 0$$

və ya

$$f(x) - a_0 b^{-1}_0 g(x) \cdot x^{n-m} = q_1(x)g(x) + r(x)$$

olsun. Onda

$$f(x) = (q_1(x) + a_0 b^{-1}_0 \cdot x^{n-m})g(x) + r(x).$$

Əgər

$$q(x) = q_1(x) + a_0 b^{-1}_0 x^{n-m}$$

işarə etsək yazı bilərik:

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x).$$

Beləliklə, biz tələb olunan göstərilişi aldıq. Bu göstərilişin yeganəliyini isbat etmək üçün tutaq ki, $f(x)$ üçün iki belə göstəriliş vardır:

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

$$f(x) = q'(x)g(x) + r'(x)$$

olmaqla, $\deg r < \deg g \vee r = 0$, $\deg r' < \deg g \vee r' = 0$. Tərəf-tərəfə bu bərabərlikləri çıxaraq. Onda alırıq

$$(q(x) - q'(x))g = r'(x) - r(x)$$

$q(x) \neq q'(x)$ olarsa, sol tərəfin dərəcəsi m -dən az deyil. Lakin sağ tərəfin dərəcəsi isə aşağıdakı münasibəti ödəyir:

$$\deg(r' - r) \leq \max(r, r') < m.$$

Alınan ziddiyyət göstərir ki, $q(x) \neq q'(x)$. Deməli, $q(x) = q'(x)$ və $r(x) = r'(x)$. Teorem isbat olundu.

Teoremin münasibəti ödənersə, onda tam ədədlər halqasında oluğu kimi, $f(x)$ bölünən, $g(x)$ bölən, $q(x)$ natamam qismət, $r(x)$ isə qalıq adlanır.

Teoremin ifadəsində $r = 0$ olduqda $f(x) = q(x)g(x)$ alırıq.

Tərif 1. $f(x) = q(x)g(x)$ olarsa, onda deyilir ki, $f(x)$ çoxhədlisi $g(x)$ -ə bölünür və ya $g(x)$ çoxhədlisi $f(x)$ -in bölənidir.

Məsələn, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ çoxhədlisi $x - 1$ çoxhədlisinə bölünür və eyni zamanda bu çoxhədli $x^2 - 1$ çoxhədlisinin bölənidir. $f(x)$ və $g(x) \neq 0$ çoxhədliləri verildikdə, onda

$$f \mid g \Leftrightarrow (\exists h(x) \in K[x])(f(x) = g(x)h(x))$$

münasibəti $K[x]$ çoxhədlilər halqasında binar münasibət müəyyən edir. Bu münasibət bölünmə münasibəti adlanır və $f(x) : g(x)$ kimi işarə olunur.

Tərif 2. Əgər elə $c \neq 0$ elementi olsa ki, $f(x) = cg(x)$ onda $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədliləri *assosiasiyalanmış* çoxhədlilər adlanır və belə işarə olunur: $f \sim g$.

$\sim$ münasibəti $K[x]$ halqasında ekvivalentlik münasibətidir.

Bölünmə münasibətinin aşağıdakı xassələri vardır:

1. $f(x) : g(x)$ və $g(x) : h(x)$ olarsa, onda $f(x) : h(x)$.
2. $c \in K$ və $c \neq 0$ olarsa, $f(x) : c$;
3. $f(x) : g(x) \rightarrow (\forall h(x) \in K[x])(f(x)h(x) : g(x))$;
4. $f(x) : g(x) \rightarrow (\forall h(x) \neq 0)(f(x)h(x) : g(x)h(x))$;
5. $f(x)h(x) : g(x)h(x) \rightarrow f(x) : g(x)$;
6. $f_1(x) : g(x) \wedge f_2(x) : g(x) \rightarrow c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) : g(x)$;
7. $f_1(x) : g(x) \wedge f_2(x) : g(x) \rightarrow c_1(x) f_1(x) + c_2(x) f_2(x) : g(x)$.
8. $f : g(x) \wedge g(x) : f(x) \rightarrow f \sim g$.
9. Əgər $f_1 + f_2 + \dots + f_n = g_1 + g_2 + \dots + g_m$ olmaqla, $f_2 : h \wedge \dots \wedge g_1 : h \wedge \dots \wedge g_m : h$

münasibəti ödənersə, onda $f_1 : h$.

§2. ƏBOB və ƏKOB. Sadə xassələr

Tutaq ki, iki $f, g \in K[x]$ çoxhədliləri verilmişdir.

Tərif 1. $h \in K[x]$ çoxhədlisi o zaman f və g çoxhədlilərinin *ortaq böləni* adlanır ki, $f : h$ və $g : h$ münasibətləri doğru olsun.

Tərif 2. $h \in K[x]$ çoxhədlisi o zaman f və g çoxhədlilərinin *ən böyük ortaq böləni* adlanır ki, $f : h$ və $g : h$ münasibətləri ödənməklə, h bu çoxhədlilərin hər bir başqa ortaq böləninə bölünsün.

Tərif 3. $h \in K[x]$ çoxhədlisi o zaman f və g çoxhədlilərinin *ortaq bölünəni* adlanır ki, $h : f$ və $h : g$ münasibətləri doğru olsun.

Tərif 4. $h \in K[x]$ çoxhədlisi o zaman f və g çoxhədlilərinin *ən kiçik ortaq bölünəni* adlanır ki, $h : f$ və $h : g$ münasibətləri ödənməklə, h bu çoxhədlilərin hər bir başqa ortaq bölünəninə böləni olsun.

Ən böyük ortaq bölən birqiymətli təyin olunmamışdır. Çünki $h(x)$ çoxhədlisi $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədlilərinin ən böyük ortaq böləni olarsa, onda ixtiyari $c \neq 0$ elementi üçün ($c \in K$) $ch(x)$ - də onların ən böyük ortaq böləni olar. Lakin çoxhədlilərinin ən böyük ortaq bölənləri içərisində yüksək həddinin əmsalı 1 olan yeganə çoxhədli vardır. Bu çoxhədli $\text{ƏBOB}(f, g)$ kimi işarə edəcəyik. Eyni deyilənləri ən kiçik ortaq bölünən üçün də söyləmək olar. Yüksək əmsalı 1 olan ən kiçik ortaq bölünən $\text{ƏKOB}(f, g)$ kimi işarə olunur. Bəzən ƏBOB üçün (f, g) kimi yazılışdan da istifadə olunur.

Misal. $x^2 - 1 : x + 1$ və $x^3 + 1 : x + 1$. Deməli $x + 1$, $x^2 - 1$ və $x^3 + 1$ çoxhədlilərinin ortaq bölənidir.

f və g çoxhədlilərinin ∂BOB -in bəzi xassələri aşağıdakı lemma və teoremlərdə verilmişdir.

Lemma 1. Tutaq ki, f, g və h çoxhədliləri $f = ga + h$ münasibətini ödəyir. Onda

$$\partial BOB(f, g) = \partial BOB(g, h).$$

İsbatı. Verilən münasibətdən görünür ki, f və g çoxhədlilərinin hər bir ortaq böləni h -in bölənidir və deməli, g və h -in ortaq bölənidir. Əksinə g və h -in hər bir ortaq böləni f və g -nin ortaq bölənidir. Beləliklə, f və g -nin ortaq bölənlər çoxluğu g və h -in ortaq bölənlər çoxluğu ilə eynidir. Buna görə də $\partial BOB(f, g) = \partial BOB(g, h)$.

∂BOB -in tapılması üçün tam ədədlərdə olduğu kimi, Evklid algoritmi deyilən olduqca əhəmiyyətli bir üsul vardır.

Teorem 1. Tutaq ki, $f, g \in K[x]$ çoxhədliləri verilmişdir və $g \neq 0$.

a) Onda mənfi olmayan elə m tam ədədi tapmaq olar ki,

$$f = gq + r; 0 < \deg r < \deg g,$$

$$g = rq_1 + r_1; 0 < \deg r_1 < \deg r,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_{m-2} = r_{m-1}q_m + r_m; 0 \leq \deg r_m < \deg r_{m-1}.$$

$$r_{m-1} = r_m q + r_{m+1}; r_{m+1} = 0;$$

münasibətləri doğrudur;

b) Sonuncu sıfırdan fərqli qalıq verilən çoxhədlilərin ən böyük ortaq bölənidir.

İsbatı. a) Əvvəlcə f və g çoxhədlilərinə qalıqlı bölmə haqda teoremi tətbiq edək. Onda yazı bilərik:

$$f = gq + r; r = 0 \vee \deg r < \deg g.$$

Əgər $r=0$ olarsa, onda a) bəndi doğrudur. Lakin bu zaman $f = gq$ olacaqdır və bu isə onu göstərir ki, $\partial BOB(f, g) = g$ (bu zaman sonuncu sıfırdan fərqli qalıq elə g çoxhədlisinin özü hesab olunur). Əgər $g \neq 0$ olarsa, onda $\deg r < \deg g$. İki hal ola bilər: $\deg r = 0 \vee 0 < \deg r$. Birinci halda yazı bilərik: $g = rq_1$. Lemma 1-ə əsasən $(f, g) = (g, r) = 1$. Bu halda teorem yenə də doğrudur.

İkinci halda isə yenə də qalıqlı bölmə haqda teoremi tətbiq edə bilərik. Prosesi bu qayda ilə davam etdirərək alırıq:

$$f = gq + r; 0 < \deg r < \deg g,$$

$$g = rq_1 + r_1; 0 < \deg r_1 < \deg r,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_{m-2} = r_{m-1}q_m + r_m; 0 \leq \deg r_m < \deg r_{m-1}.$$

Göründüyü kimi $\deg r_m < \deg r_{m-1} < \dots < \deg r_1 < \deg g$. Lakin dərəcələr mənfi olmadığı üçün belə ardıcılıq sonsuz ola bilməz. Yəni m nömrəsinin müəyyən qiymətində $\deg r_m = 0$ və ya $r_m = 0$ olacaqdır. Birinci halda isə $r_{m+1} = 0$ olacaqdır. Yəni hər iki halda teoremin münasibəti doğrudur.

Teoremin isbatını başa çatdırmaq üçün bu münasibətlərə ardıcıl olaraq lemma 1-i tətbiq etmək lazımdır: $(f, g) = (g, r_1) = \dots = (r_{m-1}, r_m) = r_m$.

Misal. Aşağıdakı çoxhədlilərin ƏBOB-ni tapaq:

$$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 \text{ və } g(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Evklid alqoritmini tətbiq edək:

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 \mid x^3 + x^2 - x - 1 \\ \underline{x^4 + x^3 - x^2 - x} \mid x \\ -2x^2 - 3x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 \mid 2x^2 + 3x + 1 \\ \underline{2x^3 + 3x^2 + x} \mid x-1/2 \\ -x^2 - 3x - 2 \\ \underline{-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}} \\ -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 1 \mid x + 1 \\ \underline{2x^2 + 2x} \mid 2x+1 \\ x + 1 \\ \underline{x + 1} \\ 0 \end{array}$$

Sonuncu sıfırdan fərqli qalıq $x + 1$ olduğu üçün yazı bilərik: $\text{ƏBOB}(f, g) = x + 1$.

ƏBOB-in tərifdən və yuxarıda isbat olunan hökmlərdən alınan xassələri vardır.

Xassə 1. Əgər $(f, g) = h$ olarsa, onda $\left(\frac{f}{h}, \frac{g}{h}\right) = 1$.

İsbati. Əgər $\left(\frac{f}{h}, \frac{g}{h}\right) = \delta$ olarsa, yaza bilərik: $f = f_1 h \delta$, $g = g_1 h \delta$. Deməli, $h \delta$ çoxhədlisi

si f və g çoxhədlilərinin ortaq bölənidir. ƏBOB-in tərifinə əsasən h bu ortaq bölənə bölünməlidir, yəni $h : h \delta$. Lakin $h \delta : h$ olduğundan bu çoxhədlilər assosiasiyalanmış çoxhədlilərdir, yəni elə $\varepsilon \in K[x]$ çoxhədlisi var ki, $h \delta = h \varepsilon$. Deməli, $(K[x]$ tamıq oblastı olduğu üçün) $\delta = \varepsilon$. Xassə isbat olundu.

Tərif 5. ƏBOB-i 1-ə bərabər olan çoxhədlilər *qarşılıqlı sadə çoxhədlilər* adlanır.

Xassə 2. Əgər $(f, g) = h$ olarsa, onda ixtiyari $c \in K[x]$ çoxhədlisi üçün $(cf, cg) = ch$.

İsbati. Evklid alqoritmindəki bərabərliklərinin hamısının hər iki tərəfini c -yə vuraq. İlk iki münasibət belə olar:

$$cf = cgq + cr; 0 < \deg cr < \deg cg,$$

$$cg = crq_1 + cr_1; 0 < \deg cr_1 < \deg cr,$$

Eyni qayda ilə hər bir i üçün

$$cr_{i-1} = cr_i q_i + cr_{i+1}; 0 < \deg cr_{i+1} < \deg cr_i.$$

Qalıqlı bölmə teoreminə əsasən mr_{i+1} qalığı yuxarıdakı bərabərliklə birqiymətli müəyyən olunur. Buna görə də, teorem 1-ə və sonuncu münasibətə əsasən cf və cg çoxhədlilərinin ƏBOB-ni cr_n - ə bərabər olaqcaqdır. Xassə 2 isbat olundu.

Xassə 3. Əgər $(f, g) = 1$ olarsa, onda ixtiyari $c \in K[x]$ çoxhədlisi üçün $(cf, g) = (c, g)$.

İsbati. $(f, g) = 1$ olduğu üçün xassə 1-ə əsasən $(cf, cg) = c$. Deməli, $h = (cf, g)$ işarə etsək alırıq: $g : h \Rightarrow gc : h$. ƏBOB- nin tərifinə əsasən, $(h$ ortaq bölən olduğu üçün) $c : h$. Nəticədə alırıq ki, $g : h \wedge c : h$. Onda $(g, c) : h$. İndi göstərək ki, tərsinə, həm də $h : (g, c)$. Aydındır ki, (g, c) çoxhədlisi g çoxhədlisinin və c -nin bölənidir. Onda o, cf hasilinin də bölənidir. Yəni (g, c) cf və g -nin ortaq bölənidir. ƏBOB-nin tərifinə görə o, h -ın da bölənidir. Deyilənlərə əsasən $(g, c) \sim h$ və xassə isbat olundu. (hər ikisi unitar çoxhədlilər olduğu üçün onlar bərabərdir).

Xassə 4. Əgər $(f, g) = h$ olarsa, onda elə $u, v \in K[x]$ çoxhədliləri tapmaq olar ki,

$$h = fu + gv.$$

İsbati. Evklid alqoritmində sondan əvvəlki bərabərlikdən yaza bilərik:

$$r_m = r_{m-2} - r_{m-1} q_m.$$

Alqoritm üzrə yuxarı hərəkət etməklə alırıq: $r_{m-1} = r_{m-3} - r_{m-2} q_m$. Bu münasibəti əvvəlki bərabərlikdə nəzərə alsaq

$$r_m = r_{m-2} - q_m(r_{m-3} - r_{m-2} q_{m-1}) = r_{m-2}(1 + q_m q_{m-1}) - r_{m-3} q_m$$

tapırıq. Prosesi bu qayda ilə davam etdirməklə, son nəticədə tələb olunan ifadəni almaq olar.

Misal. Yuxarıdakı misalda ƏBOB-i f və g çoxhədliləri ilə ifadə edək. Yuxarıda aparılan hesablamalara əsasən yazı bilərik:

$$f = gx - 2x^2 - 3x - 1; r(x) = -2x^2 - 3x - 1;$$

$$g = r(x) \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{3x}{4} - \frac{3}{4}.$$

Deməli,

$$\begin{aligned} 3x + 3 &= -4g(x) - r(x)(2x - 1) = -4g(x) - (2x - 1)(f(x) - xg(x)) = \\ &= (-2x + 1)f(x) + (2x^2 - x - 4)g(x). \end{aligned}$$

Göründüyü kimi, $u(x) = \frac{-2x+1}{3}$ və $v(x) = \frac{2x^2-x-4}{3}$ götürsək tələb olunan göstərilişi alarıq.

§3. Gətirilməyən çoxhədlilər.

Çoxhədlilərin gətirilməyən vuruqlara ayrılışı

Çoxhədlilər halqasında ƏBOB və ƏKOB anlayışlarının olması, bu halqada Evklid alqoritmının varlığı göstərir ki, *sonsuz meydan üzərində çoxhədlilər halqası* öz xassələrinə görə tam ədədlər halqasına bənzəyir. Çoxhədlilər halqasında da sadə ədəd anlayışına uyğun anlayış vermək olar və halqanın elementlərini yeganə qayda ilə sadə elementlərin hasili şəklində göstərmək olar.

Tərif 1. $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisi o zaman K meydanı üzərində *gətirilən çoxhədli* adlanır ki, onu iki müsbət dərəcəli çoxhədlinin hasili şəklində göstərmək mümkün olsun:

$$f(x) = g(x)h(x); \deg g, \deg h > 0.$$

Tərif 2. Sıfırdan fərqli $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisi gətirilən deyilsə, ona K meydanı üzərində *gətirilməyən çoxhədli* deyilir.

Misallar 1. $f(x) = x^2 - 1$ çoxhədlisi R həqiqi ədədlər meydanı üzərində gətirilən çoxhədlidir, çünki, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

2. $g(x) = x^2 + 1$ çoxhədlisi R həqiqi ədədlər meydanı üzərində gətirilməyən çoxhədlidir. Doğrydan da əgər bu çoxhədli gətirilən olarsa, onda onu müsbət dərəcəli iki çoxhədlinin hasili kimi ancaq bir yolla göstərmək olar (vuruqların hər ikisi xətti olduqda):

$$x^2 + 1 = (x - a)(x - b), a, b \in R.$$

Bu isə mümkün deyil, çünki bu çoxhədlinin həqiqi kökləri yoxdur.

3. $a(x) = x^3 + 1$ çoxhədlisi gətirilən çoxhədlidir: $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

4. $g(x) = x^2 + 1$ çoxhədlisi R həqiqi ədədlər meydanı üzərində gətirilməyən çoxhədlidir, lakin o, C kompleks ədədlər meydanı üzərində gətirilən çoxhədlidir.

Gətirilməyən çoxhədlilərin aşağıdakı xassələri vardır.

Xassə 1. Birdərəcəli çoxhədli gətirilməyən çoxhədlidir (isbat edin).

Xassə 2. Əgər $p(x)$ gətirilməyən çoxhədli, $f(x)$ isə ixtiyari çoxhədli olarsa, onda ya $f(x) \vdots p(x)$ və ya $(f(x), p(x)) = 1$.

İsbatı. $(f(x), p(x)) = a(x)$ işarə edək. Onda $p(x) \vdots a(x)$ və buna görə də elə $b(x)$ çoxhədlisi var ki, $p(x) = a(x)b(x)$. Sağ tərəfdəki çoxhədlilərdən biri sıfır dərəcəli olmalıdır, əks halda $p(x)$ gətirilən çoxhədli olacaqdır. Əgər bu $b(x)$ çoxhədlisi olarsa, onda $p(x) \sim a(x)$ və deməli, $f(x) \vdots p(x)$. Əks halda isə $(f(x), p(x)) = 1$. Xassə 2 isbat olundu.

Xassə 3. Əgər $p(x)$ və $q(x)$ gətirilməyən çoxhədlilər olarsa, onda $p(x) \sim q(x)$ və ya $(q(x), p(x)) = 1$.

Bu xassə bilavasitə xassə 2 –dən alınır.

Xassə 4. Əgər $p(x)$ gətirilməyən çoxhədli olarsa, onda ixtiyari $q(x) \sim p(x)$ çoxhədlisi də gətirilməyən olar.

Xassənin isbatı bölünmənin xassələrindən alınır.

Xassə 5. Əgər $p(x)$ gətirilməyən çoxhədli olarsa və $f(x)g(x) \vdots p(x)$ olarsa, onda $f(x) \vdots p(x)$ və ya $g(x) \vdots p(x)$.

İsbatı. Fərz edək ki, məsələn $f(x) \nmid p(x)$. Onda xassə 2-yə əsasən, $(f(x), p(x)) = 1$. ƏBOB-un xassəsinə görə elə $u(x), v(x) \in K[x]$ çoxhədliləri vardır ki, $fu + pv = 1$. Bərabərliyin hər iki tərəfini $g(x)$ çoxhədlisinə vuraq. Alınan $fgu + pgv = g$ bərabərliyinin sol tərəfi p -yə bölünür. Deməli, $g(x) \vdots p(x)$. Xassə 5 isbat olundu.

Qeyd edək ki, xassə 5-in hökmü ixtiyari sayda vuruqların hasili üçün də doğrudur.

Bu xassələr göstərir ki, gətirilməyən çoxhədlilər öz xssələri ilə sadə ədədlərə bənzəyir. Aşağıdakı teorem bəzən çoxhədlilər halqası üçün *hesabın əsas teoremi* adlandırılır.

Teorem 1. İxtiyari müsbət dərəcəli çoxhədlini gətirilməyən çoxhədlilərin hasili şəklində göstərmək olar və iki belə ayrılışda vuruqlar bir birindən düzülüş sırası ilə və ya sabit vuruqla fərqlənə bilər.

Teorem 1-ə əsasən əgər çoxhədlinin gətirilməyən vuruqlara ayrılışında ancaq normalaşmış çoxhədlilər götürülərsə, onda hər iki ayrılışa eyni vuruqlar daxil olacaqdır və iki ayrılış ancaq vuruqların düzülüş sırası ilə fərqlənə bilər.

Teorem 1-in isbatı. Teoremi müsbət dərəcəli $f(x)$ çoxhədlisinin n dərəcəsinə görə induksiya metodu ilə isbat edək.

Fərz edək ki, $\deg f = n = 1$. Bu halda xassə 1-ə əsasən $f(x)$ çoxhədlisi gətirilməyən çoxhədlidir və bu halda teorem doğrudur, yəni çoxhədli bir vuruqdan ibarət hasil şəklindədir.

İnduktiv fərziyyə qəbul edək, yəni tutaq ki, teoremin hökmü dərəcəsi $n-1$ -dən böyük olmayın çoxhədlilər üçün doğrudur. Göstərək ki, teorem n dərəcəli çoxhədlilər üçün doğrudur.

Əgər $f(x)$ çoxhədlisi gətirilməyən olarsa, onda teorem doğrudur. Əgər $f(x)$ çoxhədlisi gətirilən olarsa, onda onu iki müsbət dərəcəli çoxhədlinin hasili şəklində yazmaq olar:

$$f(x) = g(x)h(x).$$

Sağ tərəfdə hər iki çoxhədli müsbət dərəcəli olduğu üçün hər iki vuruğun dərəcəsi $n-1$ -dən böyük deyil. İnduktiv fərziyyəyə görə onların hər ikisini sadə vuruqların hasili şəklində yazmaq olar:

$$g = p_1 p_2 \cdots p_k, \quad h = q_1 q_2 \cdots q_s.$$

Bu ayrılışları yuxarıda nəzərə alsaq, onda tələb olunan ayrılışı alırıq: $f = p_1 p_2 \cdots p_k q_1 q_2 \cdots q_s$.

İndi isə göstərək ki, iki ayrılış bir birindən ancaq assosiasiyalanmış vuruqların düzülüş sırası ilə fərqlənə bilər.

Tutaq ki, $f(x)$ çoxhədlisi iki yolla gətirilməyən vuruqlara ayrılmışdır:

$$f = p_1 p_2 \cdots p_k = q_1 q_2 \cdots q_m. \quad (1)$$

Göstərək ki, $k = m$ olmaqla, sol tərəfdəki hər bir vuruq sağ tərəfdəki vuruqlardan heç olmazsa biri ilə assosiasiyalanmışdır. Fərz edək ki, $m > k$. (1) bərabərliyinin sol tərəfi p_1 -ə bölünür. Deməli, onun sağ tərəfi də p_1 -ə bölünür. Xəssə 5-ə əsasən sağ tərəfdəki vuruqlardan biri p_1 -ə bölünür, məsələn $q_1 : p_1$. Bu çoxhədlilərin hər ikisi də gətirilməyən olduğu üçün xəssə 3-ə görə $q_1 \sim p_1$, yaxud elə $c_1 \in K[x]$ var ki, $q_1 = c_1 p_1$. Bu bərabərliyi (1) -də nəzərə alaq və hər iki tərəfi p_1 -ə bölək:

$$p_2 \cdots p_k = c_1 q_2 \cdots q_m; \quad c_1 \in K.$$

Eyni mühakimələri təkrar etməklə, k sayda addımdan sonra aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$1 = c_1 \cdots c_k q_{k+1} \cdots q_m.$$

Sağ tərəfin dərəcəsi sıfırdan böyükdür. Sol tərəfdə isə sıfır dərəcəli çoxhədli dayanmışdır. Bu ziddiyyət göstərir ki, $m > k$ fərziyyəsi doğru deyil. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, $k > m$ halı da mümkün deyil. Deməli, $m = k$ və $q_1 \sim p_1, \dots, q_k \sim p_k$. Teorem 1 isbat olundu.

Əlbəttə gətirilməyən vuruqlara ayrılışa daxil olan çoxhədlilər təkrar oluna və ya assosiasiyalanmış ola bilər. Əgər gətirilməyən çoxhədliləri unitarlaşıdırsa (normalaşdırsa), onda ayrılış bu şəkllə düşər:

$$f = c p_1 \cdots p_k; \quad (2)$$

burada c müəyyən sabit, $p_1, \dots, p_k$ isə gətirilməyən unitar çoxhədlilərdir. (2) bərabərliyində təkrar vuruqları onlardan birinin qüvvəti ilə əvəz etsək yazı bilərik:

$$f = c q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}. \quad (3)$$

Sağ tərəfdə artıq $q_1, \dots, q_r$ müxtəlif gətirilməyən unitar çoxhədlilərdir. Beləliklə biz aşağıdakı teoremi isbat etdik.

Teorem 2. Müsbət dərəcəli hər bir çoxhədlini, vuruqların düzülüş sırası nəzərə alınmamaqla, yeganə qayda ilə sabit vuruqla müxtəlif unitar gətirilməyən çoxhədlilərin qüvvətlərinin hasili şəklində göstərmək olar.

(3) hasili çoxhədlinin *kanonik ayrılışı* adlanır. Teorem 2-yə əsasən kanonik ayrılış yeganədir.

§4. Çoxhədlinin formal törəməsi

Tutaq ki, K meydanı üzərində $K[x]$ çoxhədlilər halqası verilmişdir. Başqa bir y dəyişəni (yəni $K[x]$ halqası üzərində transsendent element) götürək. Onda biz $K[x][y]$ transsendent genişlənməsini qura bilərik. Bu genişlənmə əmsalları $K[x]$ -də x -dən asılı çoxhədlilər olan və y dəyişənindən asılı olan çoxhədlilərin halqası olacaqdır. Bu halqanı $K[x, y]$ kimi, onun elementlərini isə $f(x, y)$ kimi işarə edəcəyik. Bu yeni halqa həm $K[x]$ və həm də $K[y]$ halqlarını alt halqa kimi daxilinə alır.

Hər hansı $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisi götürək. Riyazi analiz kursunda $f(x)$ çoxhədlisinin törəməsi aşağıdakı limit vasitəsi ilə təyin olunur:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y}. \quad (1)$$

Əgər limit işarəsi altında olan ifadədə məxrəcdəki y -dən yaxa qurtararaq, tam ifadə almaq mümkün olsa, törəməni sadəcə $y = 0$ qəbul etməklə hesablamaq olar. Bu fikir törəməni limit anlayışına müraciət etmədən, cəbri yolla müəyyən etməyə imkan verir. (1) ifadəsində olduğu kimi əvvəlcə $\Delta f(x, y) = f(x+y) - f(x)$ fərqini düzəldək. $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ yazaq. Alınan fərq $K[x, y]$ halqasında y -dən asılı çoxhədlidir və $y = 0$ olduqda $\Delta f(x, 0) = 0$. Bezu teoreminə görə bu çoxhədli y -ə bölünür. Qisməti $Df(x, y)$ kimi işarə edək: $\Delta f(x, y) = y Df(x, y)$. (1) bərabərliyində nisbət $Df(x, y)$ olacaqdır. Törəməni almaq üçün $y = 0$ qəbul etmək lazımdır.

Tərif. $\Phi(x, 0)$ çoxhədlisinə $f(x)$ çoxhədlisinin *formal törəməsi* deyilir və adi törəmə kimi ($f'(x)$) işarə olunur.

Çox zaman törəmə üçün Df , $\frac{df}{dx}$ işarələrindən də istifadə olunur.

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ çoxhədlisinin göstərilən qayda ilə formal törəməsini hesablayaq.

$$\Delta f(x, y) = f(x+y) - f(x) =$$

$$= a_0((x+y)^n - x^n) + a_1((x+y)^{n-1} - x^{n-1}) + \dots + a_{n-1}((x+y) - x).$$

Məlum ayrılışa əsasən, $k \geq 1$ olduqda

$$(x+y)^k - x^k = y((x+y)^{k-1} + (x+y)^{k-2}x + \dots + (x+y)x^{k-2} + x^{k-1}).$$

Bu ifadələri yuxarıdakı bərabərlikdə nəzərə alsaq, onda $\Phi(x, y)$ üçün belə bir ifadə alınır:

$$Df(x, y) = a_0((x+y)^{n-1} + (x+y)^{n-2}x + \dots + (x+y)x^{n-2} + x^{n-1}) + \\ + a_1((x+y)^{n-2} + (x+y)^{n-3}x + \dots + (x+y)x^{n-3} + x^{n-2}) + \dots + a_{n-1}.$$

İndi isə yuxarıda göstərildiyi kimi $y = 0$ qəbul edərək tapırıq:

$$Df(x, 0) = f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Xüsusi halda $(x^m)' = mx^{m-1}$.

Göründüyü kimi n dərəcəli çoxhədlinin törəməsi $n-1$ dərəcəli çoxhədlidir. Buna görə də onun da törəməsi vardır və bu törəmə verilən çoxhədlinin ikinci törəməsi adlanır və $f''(x)$ kimi işarə olunur. Eyni qayda ilə çoxhədlinin daha yüksək törəmələri təyin olunur. Ümumiyyətlə, istənilən mənfi olmayan $k \geq 0$ tam ədədi üçün $f(x)$ çoxhədlisinin k -cı törəməsi və ya k -cı *tərtib formal törəməsi* vardır və $f^{(k)}(x)$ kimi işarə olunur (bəzən $\frac{d^k f}{dx^k}$ və ya $D^k f$ kimi yazılışlardan da istifadə olunur). $k=0$ olduqda $f^{(k)}(x) = f(x)$ hesab olunur. “Formal törəmə” ifadəsi isə sadəcə “törəmə” sözü ilə əvəz olunur.

Törəmənin aşağıdakı xassələri vardır:

$$1) (f + g)' = f' + g';$$

$$2) (\forall c \in K)((cf)') = cf';$$

$$3) (fg)' = f'g + fg';$$

$$4) (f^m)' = mf^{m-1} \cdot f'.$$

Bu xassələri isbat edək.

1) $\varphi = f + g$ işarə edək. Onda, $\varphi(x+y) - \varphi(x) = (f(x+y) - f(x)) + (g(x+y) - g(x))$ münasibətindən alırıq:

$$\Delta\varphi(x, y) = \varphi(x+y) - \varphi(x) = yD\varphi(x, y) = \\ = yDf(x, y) + yDg(x, y) = y(Df(x, y) + Dg(x, y)).$$

Beləliklə, çoxhədlilərin bərabərliyindən alırıq:

$$D\varphi(x, y) = Df(x, y) + Dg(x, y).$$

$y = 0$ qəbul etsək tələb olunan bərabərliyi alırıq:

$$\varphi'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Bununla xassə 1) isbat olundu.

2)Xassə 2-nin isbatı asanlıqla xassə 1) –in isbatı yetirilən üsulla aparılır.

3)Xassə 3)-ü isbat edək. $h = fg$ işarə edək. Yuxarıda olduğu kimi

$$\begin{aligned}\Delta h &= f(x+y)g(x+y) - f(x)g(x) = \\ &= f(x+y)g(x+y) - f(x+y)g(x) + f(x+y)g(x) - f(x)g(x) = \\ &= f(x+y)(g(x+y) - g(x)) + (f(x+y) - f(x))g(x) = \\ &= f(x+y)\Delta g(x,y) + \Delta f(x,y)g(x) = yf(x+y)Dg(x,y) + yDf(x,y)g(x).\end{aligned}$$

Lakin $\Delta h = yDh(x,y)$ olduğu üçün buradan aşağıdakı münasibəti alırıq:

$$Dh(x,y) = f(x+y)Dg(x,y) + g(x)Df(x,y).$$

$y = 0$ qəbul etsək tələb olunan bərabərliyi alırıq:

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

4) Sonuncu xassənin isbatına baxaq. Isbatı m ədədinə görə induksiya üsulu ilə apararaq. $m=1$ olarsa, xassə doğrudur. Fərz edək ki, xassənin hökmü $m-1$ üçün doğrudur. Onda xassə 3-ə görə

$$\begin{aligned}(f^m)' &= (f \cdot f^{m-1})' = f' \cdot (f^{m-1}) + f(f^{m-1})' = \\ &= f^{m-1}f' + (m-1)f' \cdot f^{m-2} = mf^{m-1}f'\end{aligned}$$

çünki induktiv fərziyyəyə əsasən

$$(f^{m-1})' = (m-1)f^{m-2}f'.$$

Xassə isbat olundu.

§5. Çoxhədlinin $x-c$ ikihədlisinin qüvvətləri üzrə ayrılışı.

Teylor düsturu

Fərz edək ki, hər hansı n dərəcəli $f(x) \in K[x]$ çoxhədliyi verilmişdir. İxtiyari $c \in K$ elementi götürərək və bu çoxhədliyə Bezu teoremini tətbiq edək:

$$f(x) = (x-c)f_1(x) + r_0; r_0 = f(c). \quad (1)$$

Burada $f_1(x)$ çoxhədliyi dərəcəsi $n-1$ olan çoxhədlidir. Bu çoxhədlinin əmsallarını və r_1 qalığını Hörner sxeminin köməyi ilə tapmaq olar. Eyni mühkimələri $f_1(x)$ çoxhədliyi üçün də yerinə yetirmək olar. Belə ki,

$$f_1(x) = (x-c)f_2(x) + r_1; r_1 = f_1(c) \in K.$$

Alınmış ifdəni (1) bərbərliyində nəzərə alsaq, onda aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$f(x) = (x-c)[(x-c)f_2(x) + r_1] + r_0 = (x-c)^2 f_2(x) + r_1(x-c) + r_0.$$

Aydındır ki, $f_1(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsi $n-1$ -ə, $f_2(x)$ -in dərəcəsi $n-2$ -yə bərabərdir. Bu mühakimələri m dəfə təkrar etsək, alırıq:

$$f(x) = (x-c)^m f_m(x) + r_{m-1}(x-c)^{m-1} + \dots + r_1(x-c) + r_0.$$

$m=n$ olduqda $f_m(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsi 0-a bərabər olacaqdır (yəni o, K halqasının elementi olacaqdır) və beləliklə biz aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$f(x) = r_n(x-c)^n + r_{n-1}(x-c)^{n-1} + \dots + r_1(x-c) + r_0. \quad (2)$$

Biz aşağıdakı teoremi isbat etdik.

Teorem 1. İxtiyari n dərəcəli $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisi və ixtiyari $c \in K$ elementi üçün elə $r_0, r_1, \dots, r_n \in K$ elementləri tapmaq olar ki,

$$f(x) = r_n(x-c)^n + r_{n-1}(x-c)^{n-1} + \dots + r_1(x-c) + r_0$$

müsbəti ödənsin.

Misal 1. $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ çox hədlisini $x-2$ -nin qüvvətləri üzrə ayıraq. Teorem 1 -in ifadəsinə daxil olan ayrılış əmsalları Hörner sxeminin köməyi ilə tapıla bilər. Bunun üçün bu sxemi ardıcıl olaraq çoxhədlinin özünə, daha sonra qalıqlı bölmə zamanı alınan natamam qismətə, sonra isə yeni natamam qismətə və s. tətbiq etmək lazımdır.

1	0	-4	6	-8	10
1	2	0	6	4	18
1	4	8	22	48	
1	6	20	62		
1	8	36			
1	10				

1

Cədvəldən göründüyü kimi $r_0 = 18$, $r_1 = 48$, $r_2 = 62$, $r_3 = 36$, $r_4 = 10$, $r_5 = 1$ və beləliklə,

$$f(x) = (x-2)^5 + 10(x-2)^4 + 36(x-2)^3 + 62(x-2)^2 + 48(x-2) + 18.$$

(2) ayrılışının əmsallarını $f(x)$ çoxhədlisinin törəmələri vasitəsi ilə də ifadə etmək olar.

Yuxarıda deyilənlərə əsasən aydındır ki, $r_0 = f(c)$. Bu, (2) ifadəsində x dəyişənini bilvasitə c ilə əvəz etməklə də alınır. (2) bərabərliyinin hər iki tərəfini diferensillayaq (yəni hər iki tərəfdən törəmə alaq). Onda, törəmənin yuxarıda sadalanan xassələrini tətbiq etsək yazı bilərik:

$$f'(x) = r_n n(x-c)^{n-1} + r_{n-1}(n-1)(x-c)^{n-2} + \dots + 2r_2(x-c) + r_1. \quad (3)$$

x dəyişənini c ilə əvəz edək: $f'(c) = r_1$. (3) bərabərliyini təkrar diferensiallayaq.

$$f''(x) = r_n n(n-1)(x-c)^{n-2} + r_{n-1}(n-1)(n-2)(x-c)^{n-3} + \dots + 2r_2.$$

Yenə də x dəyişənini c ilə əvəz edərək alırıq: $f''(c) = 2r_2$. Yəni ümumiyyətlə, ixtiyari $1 \leq k \leq n$ tam ədədi üçün

$$f^{(k)}(x) = r_n n(n-1) \cdots (n-k+1)(x-c)^{n-k} + \\ + r_{n-1}(n-1)(n-2) \cdots (n-k)(x-c)^{n-k-1} + \cdots + k!r_k.$$

x dəyişənini c ilə əvəz etdikdə buradan $f^{(k)}(c) = k!r_k$ bərabərliyini alırıq. Tapılan qiymətləri (2) bərabərliyində yerinə yazsaq. Beləliklə, biz aşağıdakı teoremi isbat etdik.

Teorem 2. İxtiyari n dərəcəli $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisi və ixtiyari $c \in K$ elementi üçün *Taylor düsturu* adlanan aşağıdakı düstur doğrudur:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Qeyd edək ki, bu ayrılış riyazi analiz kursundan da məlumdur.

Misal 2. Yuxarıda verilmiş misaldakı çoxhədlini Taylor düsturundan istifadə etməklə $x=2$ -nin qüvvətləri üzrə ayıraq. Bunun üçün $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ çoxhədlisinin ardıcıl törəmələrinin $c=2$ nöqtəsində qiymətlərini hesablayaq.

$$f(2) = 32 - 32 + 24 - 16 + 10 = 18.$$

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 12x - 8; f'(2) = 80 - 48 + 24 - 8 = 48.$$

$$f''(x) = 20x^3 - 24x + 12; f''(2) = 160 - 48 + 12 = 124.$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 24; f'''(2) = 240 - 24 = 216.$$

$$f^{(IV)}(x) = 120x; f^{(IV)}(2) = 240.$$

$$f^{(V)}(x) = f^{(V)}(2) = 120.$$

Taylor düsturuna əsasən yazsaq bilirik:

$$f(x) = 18 + 48(x-2) + \frac{124}{2!}(x-2)^2 + \frac{216}{3!}(x-2)^3 + \frac{240}{4!}(x-2)^4 + \frac{120}{5!}(x-2)^5 = \\ = (x-2)^5 + 10(x-2)^4 + 36(x-2)^3 + 62(x-2)^2 + 48(x-2) + 18.$$

Törəmənin xassələrinə əsasən hasilin və qüvvətin törəmələrini hesablamaq olar. Bəzən iki çoxhədlinin hasilinin yüksək tərtibli törəməsini hesablamaq lazım gəlir. Aşağıdakı teorem bunun üçün *Leybnis düsturu* adlanan faydalı vasitə verir.

Teorem 3. İxtiyari n natural ədədi üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

İsbatı Teoremi induksiya metodu ilə isbat edək. $n=1$ olduqda teorem xassə 3-dən alınır:

$$(uv)' = \sum_{k=0}^1 C_1^k u^{(n-k)} v^{(k)} = u'v + uv'.$$

Fərz edək ki, teorem $n-1$ üçün isbat olunmuşdur, yəni

$$(uv)^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(n-1-k)} v^{(k)}. \quad (1)$$

Göstərək ki, o, n üçün də doğrudur. (1) bərabərliyinin hər iki tərəfinin törəməsini alaq:

$$\begin{aligned} (uv)^{(n)} &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(n-1-k)} v^{(k)} \right)' = \sum_{k=0}^{n-1} \left(C_{n-1}^k u^{(n-1-k)} v^{(k)} \right)' = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \{ u^{(n-k)} v^{(k)} + u^{(n-1-k)} v^{(k+1)} \} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(n-1-k)} v^{(k+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \sum_{s=1}^n C_{n-1}^{s-1} u^{(n-s)} v^{(s)}; \end{aligned}$$

yuxarıda biz ikinci cəmdə $s=k+1$ əvəzləməsi apardıq. Birinci cəmdə $k=0$ ikinci cəmdə isə $s=n$ qiymətlərinə uyğun toplananları ayıraq; bu toplananların cəmi $u^{(n)}v + uv^{(n)}$ ifadəsinə bərabərdir. Cəmin bu toplananları atdıqdan sonra qalan hissəsində k və s indeksləri eyni qiymətlər alır. Bu iki cəmi bir cəmdə birləşdirək:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Mötərizə içərisindəki cəm, binomial əmsalların xassəsinə əsasən, C_n^k -ni verir. Lakin $C_n^0 = C_n^n = 1$ olduğu üçün əvvəl ayırdığımız iki toplananı da birləşdirərək, alırıq:

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \sum_{s=1}^n C_{n-1}^{s-1} u^{(n-s)} v^{(s)} = u^{(n)}v + uv^{(n)} + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}. \end{aligned}$$

Teorem 3 isbat olundu.

FƏSİL III. Təkrarlanan vuruqlar

Yuxarıda biz çoxhədlinin kökü anlayışını verdik. Bir sıra məsələlərdə təkrar kök anlayışı mühüm rol oynayır. Orta məktəb kursundan məlumdur ki, x dəyişəni artaraq, $x = a$ nöqtəsindən keçdikdə $x - a$ və $(x - a)^2$ çoxhədliləri özlərini müxtəlif cür aparırlar. Birinci funksiya öz işarəsini dəyişir, yəni onun qrafiki absis oxunu kəsərək, aşağı yarımmüstəvidən yuxarı yarımmüstəviyə keçir, ikinci funksiya isə öz işarəsini dəyişmir və qrafik yuxarı yarımmüstəvidə qalır. Birinci halda qrafik absis oxunu kəsərək keçir, ikinci halda isə ona toxunur. Kök ətrafında çoxhədlilərin özünü aparmasında bu cür müxtəlifliyin səbəbi köklərin müxtəlif təkrarlıq malik olmasındadır.

§1. Təkrar köklər

Tutaq ki, hər hansı K tamlıq oblastı üzərində $K[x]$ çoxhədlilər halqası verilmişdir. $c \in K$ elementi $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisinin kökü olarsa, onda Bezu teoreminə əsasən,

$$f(x) = (x - c) f_1(x).$$

Ola bilər ki, c elementi $f_1(x)$ çoxhədlisinin də kökü olsun. Bu halda Bezu teoremini təkrar tətbiq etməklə,

$$f(x) = (x - c)^2 f_2(x)$$

yaza bilərik. Bu prosesi müəyyən bir $f_k(c) \neq 0$ şərtini ödəyən çoxhədli alınadək davam etdirmək olar.

Tərif 1. $c \in K$ elementi o zaman $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisinin k təkrarlığına malik (k dəfə təkrarlanan, təkrarlıq dərəcəsi k olan, k - qat) kökü adlanır ki,

$$f(x) = (x - c)^k g(x); g(c) \neq 0$$

münasibətləri ödənsin.

$k=1$ olduqda c sadə kök adlanır. Əgər c kök deyilsə, onun təkrarlığı 0-a bərabərdir.

Misallar. 1. $x=1$ ədədi $x^2 - 1$ çoxhədlisinin sadə köküdür. Doğrudan da,

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

2. $c=-1$ ədədinin $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8$ çoxhədlisinin hansı təkrarlığa malik kökü olduğunu müəyyən etmək üçün ardıcıl olaraq Hörner sxemini tətbiq edək.

3	2	1	0	-10	-8
3	-1	2	-2	-8	0
3	-4	6	-8	0	
3	-7	13	-21		

Cədvəldən göründüyü kimi -1 ədədi həm verilən çoxhədlinin, həm də onun $x+1$ -ə bölünməsindən alınan qismətin köküdür. Bezu teoreminə görə

$$f(x) = (x+1)^2(3x^3 - 7x^2 + 13x - 21).$$

Beləliklə, -1 ədədi verilən çoxhədlinin təkrarlığı 2 olan (və ya ikiqat) köküdür.

Teorem. $c \in K$ elementinin $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisinin k təkrarlığına malik kökü olması üçün

$$f(c) = f'(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0 \wedge f^{(k)}(c) \neq 0 \quad (2)$$

münasibətlərinin ödənməsi zəruri və kafi şərtədir.

İsbatı. Fərz edək ki, c elementi $f(x)$ -in k təkrarlığına malik köküdür. Onda, tərifə əsasən

$$f(x) = (x-c)^k g(x); g(c) \neq 0.$$

Leybnis düsturuna görə yazı bilərik:

$$\begin{aligned} f^{(s)}(x) &= \sum_{r=0}^s C_s^r ((x-c)^k)^r g^{(s-r)}(x) = (x-c)^k g(x) + \\ &+ \sum_{r=1}^s C_s^r k(k-1)\dots(k-r+1)(x-c)^{k-r} g^{(s-r)}(x). \end{aligned}$$

Bərabərlikdən göründüyü kimi $s < k$ olduqda bütün toplananlarda $x-c$ vuruğu vardır. Deməli, $s < k$ olduqda $f^{(s)}(c) = 0$. $s = k$ olarsa isə cəmdə $k!g(x)$ toplananı daxildir və o, x -i c ilə əvəz etdikdə sıfır çevrilmir, yəni $f^{(k)}(c) = k!g(c) \neq 0$. Deməli, teoremin şərti zəruridir.

İndi isə kafi şərti isbat edək. Yəni (2) şərtlərini qəbul edərək, göstərək ki, c təkrarlığı k olan kökdür. Teylor düsturuna əsasən

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Bu bərabərlikdə ilk k syda toplanın sıfır bərabərdir. Deməli,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-c)^{k+1} + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \\ &= (x-c)^k \left(\frac{f^{(k)}(c)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-k} \right). \end{aligned}$$

Əgər

$$g(x) = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-k}$$

işarə etsək asanlıqla görə bilərik ki, şərtə əsasən

$$= (x-c)^k g(x) \wedge g(c) = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \neq 0.$$

Teorem isbat olundu.

Misal. a və b həqiqi ədədlərinin hansı qiymətlərində $f(x) = x^5 + ax^3 + b$ çoxhədlisinin sıfırdan fərqli ikiqat kökü vardır?

Həlli. Çoxhədlinin törəməsini tapaq:

$$f'(x) = 5x^4 + 3ax^2; f''(x) = 20x^3 + 6ax.$$

Hər hansı $c \neq 0$ ədədinin ikiqat kök olması üçün yuxarıdakı teoremə əsasən

$$\begin{cases} c^5 + ac^3 + b = 0, \\ 5c^4 + 3ac^2 = 0, \\ 20c^3 + 6ac \neq 0 \end{cases}$$

münasibətləri ödənməlidir. İkinci şərtədən alırıq: $-5c^2 = 3a \Rightarrow a = -\frac{5c^2}{3}$. Bunu birinci tənlikdə nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$b = \frac{2c^5}{3}. \quad (3)$$

3-cü münasibətindən isə alırıq.

$$30c^3 \neq 0.$$

Bu şərt ödənilir, çünki $c \neq 0$. (3)-ə əsasən $c = \left(\frac{3b}{2}\right)^{1/5}$. Bunu a üçün alınan bərabərlikdə yerinə yazaraq:

$$3a = -5c^2 = -5\left(\frac{3b}{2}\right)^{2/5} \Rightarrow \left(-\frac{3a}{5}\right)^5 = \left(\frac{3b}{2}\right)^2$$

yaxud

$$108a^5 + 3125b^2 = 0, a \neq 0.$$

Cavabı bir xüsusi hal üçün yoxlayaq. Tutaq ki, $a = -5$; onda $b = 6\sqrt{3}$. Deməli, $c = \sqrt{3}$. Bu qiyməti $f(x)$ və $f'(x)$ -in ifadələrində yerinə yazaraq: $f(\sqrt{3}) = 9\sqrt{3} - 5 \cdot 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 0$ və $f'(\sqrt{3}) = 5 \cdot 9 - 15 \cdot 3 = 0$, lakin $f''(\sqrt{3}) = 20 \cdot 3\sqrt{3} - 6 \cdot 5\sqrt{3} = -10\sqrt{3} \neq 0$. Buna görə də $c = \sqrt{3}$ ikiqat kökdür.

§2. Təkrarlanan vuruqlar

Təkrar kök anlayışının ümumiləşməsi təkrarlanan vuruq anlayışıdır.

Tərif. Gətirilməyən $p(x)$ çoxhədlisi o zaman $f(x)$ çoxhədlisinin *təkrarlığı* k olan

vuruğu (yaxud k -qat vuruğu) adlanır ki,

$$f(x) = (p(x))^k g(x) \wedge g(x) \nmid p(x)$$

münsibəti ödənsin.

Misal. $p(x) = x^2 + 1$ çoxhədlisi $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)^2(x - 1)$ çoxhədlisinin 2-qat vuruğudur.

Teorem 1. Gətirilməyən $p(x)$ çoxhədlisinin $f(x)$ çoxhədlisinin *təkrar vuruğu* olması üçün $(f(x), f'(x)) \vdots p(x)$ şərtinin ödənməsi zəruri və kafidir.

İsbatı. Tutaq ki,

$$f(x) = (p(x))^k g(x) \wedge g(x) \nmid p(x),$$

yəni $p(x)$ çoxhədlisi $f(x)$ çoxhədlisinin təkrarlığı k olan vuruğudur. Onda,

$$f'(x) = k(p(x))^{k-1} p'(x)g(x) + (p(x))^k g'(x).$$

Əgər $k > 1$ olarsa, sonuncu cəmin hər iki toplananı $p(x)$ çoxhədlisinə bölünür və deməli, $(f(x), f'(x)) \vdots p(x)$.

İndi isə fərz edək ki, $(f(x), f'(x)) \vdots p(x)$. Tutaq ki, $p(x)$ çoxhədlisi $f(x)$ çoxhədlisinin k -qat vuruğudur. Göstərək ki, $k > 1$. Əksini fərz edək tutaq ki, $k=1$. Onda

$$f(x) = p(x)g(x) \wedge g(x) \nmid p(x).$$

Bu halda

$$f'(x) = p'(x)g(x) + p(x)g'(x).$$

$p'(x)$ çoxhədlisi $p(x)$ çoxhədlisinə bölünmür, çünki onun dərəcəsi $p(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsindən kiçikdir. $g(x)$ çoxhədlisi də $p(x)$ çoxhədlisinə bölünmür və deməli,

$$f'(x) \nmid p(x).$$

Bu isə teoremin şərtinə ziddir. Deməli, $k > 1$ və $p(x)$ çoxhədlisi təkrar vuruqdur. Teorem 1 isbat olundu.

Nəticə. Gətirilməyən $p(x)$ çoxhədlisinin $f(x)$ çoxhədlisinin təkrarlığı k olan vuruğu olması üçün onun $f'(x)$ çoxhədlisinin təkrarlığı $k-1$ olan vuruğu olması zəruri və kafidir.

Misal. $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ çoxhədlisinin təkrar köklərini taparaq, onu gətirilməyən vuruqlara ayıraq.

Teorem 1 –i tətbiq edərək əvvəlcə verilən çoxhədlinin törəməsini tapaq.

$$f'(x) = 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12 = 6(x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2).$$

Evklid alqoritmini tətbiq edərək, $\text{ƏBOB}(f(x), f'(x))$ -i müəyyən edək.

$$\begin{array}{r} x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 \mid x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2 \\ x^6 - 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x \quad \mid x \\ \hline -2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 10x + 4 \end{array}$$

Bölməni davam etdirək.

$$\begin{array}{r} x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2 \mid x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \\ x^5 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 2x \mid x - 1 \\ \hline -x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2 \\ -x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Beləliklə, $\partial BOB(f(x), f'(x)) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$. Asanlıqla görmək olar ki, $f(-1) = 0$.

Deməli, $f(x) : (x+1)$. Hörner sxemini tətbiq edərək tapırıq:

	1	1	-3	-5	-2
-1	1	0	-3	-2	0
-1	1	-1	-2	0	
-1	1	-2	0		

Sonuncu qismət $x - 2$ -yə bərabərdir və o, $x + 1$ -ə bölünür. Bun görə də $\partial BOB(f(x), f'(x))$ üçün belə bir ayrılış alırıq: $(f(x), f'(x)) = (x+1)^3(x-2)$. Teorem 2-yə əsasən bu onu göstərir ki, $x+1$ ikihədlisi $f(x)$ -in 4-qat, $x-2$ ikihədlisi isə 2-qat vuruğudur. Verilən çoxhədlinin yüksək əmsalı 1 olduğundan yazı bilərik:

$$f(x) = (x+1)^4(x-2)^2.$$

§3. Faktorial halqa. Faktorial halqa üzərində

çoxhədlilər halqasının faktoriallığı

Tutaq ki, K tamlıq oblastıdır. $\alpha \in K$ elementi o zaman dönən element adlanır ki, $(\exists \beta \in K)(\alpha\beta = 1)$ münasibəti ödənsin. Tutaq ki, $p \in K$ elementi K halqasının ixtiyari elementidir.

Tərif 1. Əgər p elementi üçün $p = p'p''$ olmaqla p' və p'' dönən elementlər deyilsə, onda $p \in K$ *gətirilən element* adlanır. *Gətirilməyən* (gətirilən olmayan) element *sadə element* adlanır.

Tərif 2. Əgər K halqasının hər bir sıfırdan fərqli və dönən olmayan elementi yeganə qayda ilə gətirilməyən elementlərin hasilinə ayrılırsa belə halqa *faktorial halqa yaxud Qaus halqası* adlanır.

Qeyd edək ki, α elementinin sadə elementlərin hasilinə yeganə qayda ilə ayrılışı dedikdə,

$$\alpha = p_1 \dots p_m = q_1 \dots q_s$$

kimi iki ayrılışın olmasından $m=s$ və müəyyən yerdəyişmədən sonra $p_1 \sim q_1, \dots, p_m \sim q_m$ münasibətlərinin ödənməsi nəzərdə tutulur.

Məlumdur ki, K meydan olduqda $K[x]$ çoxhədlilər halqasında sadə vuruqlara ayrılış və onun yeganəliyi haqda teorem doğrudur. Lakin K tamlıq oblastı olduqda $K[x]$ halqasında sadə vuruqlara ayrılış məsələsinin təqqiqi K halqasının özünün xassələri ilə sıx əlaqədardır. Göstərək ki, K halqası faktorial halqa olduqda, $K[x]$ halqası da faktorial halqa olacaqdır.

Tutaq ki, K faktorial halqadır. F ilə K -nın nisbətlər meydanını işarə edək. Məlumdur ki, F meydanının hər bir sıfırdan fərqli elementi a/b kəsri şəklində yazıla bilər və burada $a, b \in K^* = K \setminus \{0\}$.

Tərif 3. Tutaq ki, $f(x) \in K[x]$ olmaqla $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Onda, $a_0, \dots, a_n$ elementlərinin ən böyük ortaq bölünənə f çoxhədlisinin məzmunu deyilir.

F çoxhədlisinin məzmununu $C(f)$ ilə işarə edək. $C(f) \sim 1$ olan çoxhədli bəsit çoxhədli adlanır. Beləliklə,

$$C(f) = \partial BOB(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

∂BOB –nın xassəsinə görə $C(f)$ dönən element dəqiqliyi ilə birqiymətli təyin olunmuşdur. Yəni c_1 və c_2 eyni bir çoxhədlinin iki məzmunu olarsa, $c_1 \sim c_2$

Misal. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 15x - 4$ çoxhədlisi bəsit çoxhədlidir, çünki, $(2,6,15,4) = 1$.
 $g(x) = 4x^2 + 16x + 14$ çoxhədlisi isə bəsit çoxhədli deyil, çünki $C(f) = 2$.

Lemma 1. Tutaq ki, $c(f) = d$. Onda elə bəsit $g \in K[x]$ çoxhədlisi var ki, $f = dg$.

İsbatı. Tutaq ki,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

və $c(f) = d = (a_0, \dots, a_n)$. Onda $a_0 = db_0, \dots, a_n = db_n$ və $(b_0, b_1, \dots, b_n) \sim 1$. Onda

$$f(x) = d(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) = dg$$

və $c(g) \sim 1$.

Nəticə. Əgər $f(x) \in K[x]$ halqasında gətirilməyən çoxhədli olarsa, onda $f(x)$ bəsit çoxhədlidir.

İsbatı. Əksini fərz edək. Tutaq ki, f çoxhədlisi bəsit deyil və $d = c(f)$. Onda Lemma 1-ə görə $f = dg$ və g bəsit çoxhədlidir. d elementi dönən olmayan elementdir. Beləliklə, f çoxhədlisi

$K[x]$ halqasında iki dönən olmayan d və g elementlərinin hasili şəklindədir. Deməli, f çoxhədlisi $K[x]$ halqası üzərində gətirilən elementdir ki, bu da şərtə ziddir. Alınmış ziddiyyət göstərir ki, $f(x)$ bəsit çoxhədlidir.

Lemma2. Fərz edək ki, f və g bəsit çoxhədlilər olmaqla, sıfırdan fərqli c və $d \in K$ elementləri üçün

$$cf = dg$$

münasibəti ödəyir. Onda $c \sim d$ və $f \sim g$

İsbati. Lemma c və d elementləri dönən olduqda doğrudur. Fərz edək ki, c dönən element deyil. K halqası faktorial olduğundan elə sadə $p_1, \dots, p_k$ elementləri var ki, $c = p_1 \cdots p_k$. Beləliklə, hər bir i üçün ($i=1, \dots, k$)

$$dg : p_i \rightarrow d : p_i \vee g : p_i.$$

$g : p_i$ olarsa, onda $g = h \cdot p_i$ və deməli, g bəsit çoxhədlidir deyil. Deməli $g \not\vdash p_i$ münasibəti ödəyir. Deməli, $d : p_i$ olmalıdır. Beləliklə, $d : c$, yəni $d = cm$ və buradan isə $F = mg$ alırıq. $f : m$ və $m \in K$ olmasından alırıq ki, m dönən elementdir (əks halda f bəsit olmazdı). Beləliklə, $f \sim g$. Lemma 2 isbat olundu.

Lemma 3. Əgər $K[x]$ halqasında bəsit f və g çoxhədliləri $F[x]$ halqasında assosiasialı olarsa, onda onlar $K[x]$ halqasında da assosiasialıdır.

İsbati. Şərtə əsasən $F[x]$ halqasında $f \sim g$. Yəni elə $\alpha \in F$ var ki, $\alpha \neq 0$ və $f = \alpha g$. Tutaq ki,

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad a, b \in K.$$

Onda yazı bilərik.

$$bf = ag.$$

Lemma 1-ə əsasən $K[x]$ halqasında $a \sim b$ və $f \sim g$. Deməli, $a = \varepsilon b$ və $f = \delta g$. Bu halda (burada ε və δ K -da dönən elementlərdir) $bf = \varepsilon b \delta g$, yaxud $f = \varepsilon \delta g$. Lemma 3 isbat olundu.

Lemma 4. (Qaus). İki bəsit çoxhədlinin hasili bəsit çoxhədlidir.

İsbati., Fərz edək ki,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$$

çoxhədliləri bəsit çoxhədlilərdir. Onda,

$$f(x) \cdot g(x) = c_0 x^{m+n} + c_1 x^{m+n-1} + \dots + c_0$$

və burada

$$C_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j ;$$

əgər bu cəmdə $i > m$ və ya $j \geq m$ olarsa, uyğun olaraq $a_i = 0$ və ya $b_j = 0$ qəbul olunur.

$$C(fg)=d$$

işarə edək. Əgər d dönən element olarsa, lemmanın hökmü doğrudur. Əks halda d elementi sadə vuruqlara ayrılır. p ilə onun hər hansı sadə vuruğunu işarə edək. Yuxarıdakı şərtədən görünür ki, $a_0 b_0 \vdots p$. Deməli, $a_0 \vdots p \vee b_0 \vdots p$. Tutaq ki, məsələn, $b_0 \vdots p$. G çoxhədlisi bəsit çoxhədli olduğu üçün onun bütün əmsalları p -yə bölünə bilməz. Fərz edək ki, $b_0 \vdots p, \dots, b_{s-1} \vdots p$, $s \leq m$, lakin $b_s \not\vdots p$. Eyni qayda ilə elə $k \leq n$ var ki, $a_0 \vdots p, \dots, a_{k-1} \vdots p$ olmaqla, $b_k \not\vdots p$. Belə olduqda isə,

$$c_{s+k} = a_k b_s + (a_{k-1} b_{s+1} + \dots) + (b_{s-1} a_{k+1} + \dots)$$

və burada $r > m$ olduqda $b_r = 0$ və $t > n$ olduqda isə $a_t = 0$ şərtləri nəzərə alınmalıdır. Göründüyü kimi mötərizədəki toplananlar p -yə bölünür. Lakin, $p \times a_k b_s$. Deməli, $p \times c_{s+k}$. Bu isə ziddiyyətdir. Deməli, $c(fg) \sim 1$. Lemma 4 isbat olundu.

Lemma 5. Əgər $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisi $F[x]$ halqası üzərində gətirilən olarsa, onda o, $K[x]$ halqası üzərində də gətiriləndir.

İsbatı. Əksini fərz edək. Tutaq ki, $f(x)$ çoxhədlisi $K[x]$ üzərində gətirilməyəndir. Onda $f(x)$ bəsit çoxhədlidir. Fərz edək ki,

$$f=gh$$

və burada g və h müsbət dərəcəli və $F[x]$ halqasından olan çoxhədlilərdir.

$$g = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k$$

yazaraq elə $c_0 b_0, \dots, c_1 b_k \in K$ elementləri tapa bilərik ki,

$$\alpha_0 = \frac{c_0}{b_0}, \dots, \alpha_k = \frac{c_k}{b_k}.$$

$b = b_0 \cdots b_k$ işarə etsək alırıq: $bg \in K[x]$. Onda, lemma1-ə əsasən elə $c \in K$ elementi var ki, $bg = cg_1$ və g_1 bəsit çoxhədlidir. Eyni qayda ilə elə $d, e \in K$ elementləri var ki, $dh = eh_1$ və h_1 bəsit çoxhədlidir. Onda, yazı bilərik

$$bdf = ceg_1 h_1.$$

Lemma 4-ə əsasən $g_1 h_1$ hasili bəsit çoxhədlidir. f də bəsit çoxhədli olduğu üçün lemma 2-yə görə $bd \sim ce$ və $f \sim g_1 h_1$. Deməli, f gətirilən çoxhədlidir. Alınan ziddiyyət göstərir ki, f həqiqətən $K[x]$ halqasında gətirilən çoxhədlidir. Lemma 5 isbat olundu.

Nəticə. Əgər $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisi gətirilməyən çoxhədlidirsə, onda o, $F[x]$ halqa -

sında da gətirilməyən çoxhədlidir.

Teorem1. Əgər K faktorial halqa olarsa, onda $K[x]$ halqası da faktorial halqadır.

İsbati. Tutaq ki, $f(x) \in K[x]$ müsbət dərəcəli çoxhədlidir. (Qeyd edək ki, f sıfır dərəcəli çoxhədli olarsa, $f \in K$ və K faktorial halqa olduğu üçün f yeganə qayda ilə sadə vuruqların hasilinə ayrılır). Əvvəlcə göstərək ki, $f(x)$ çoxhədlisi $K[x]$ üzərində sadə vuruqlara ayrılır. $\deg f = 0$ olduqda yuxarıdakı mühakimələrə əsasən f K halqasında və deməli, həm də $K[x]$ halqasında, sadə vuruqlara ayrılır. Əvvəlcə induksiya metodu ilə göstərək ki, sadə vuruqlara ayrılış mövcuddur. Bu hökmün sıfır dərəcəli çoxhədlilər üçün doğruluğunu yuxarıda göstərdik. İndi fərz edək ki, $\deg f < n$ şərtini ödəyən hər bir çoxhədli üçün sadə vuruqlara ayrılış vardır.

Göstərək ki, ixtiyari n dərəcəli çoxhədli üçün də gətirilməyən vuruqlara ayrılış doğrudur. Əgər $f(x)$ çoxhədlisi gətirilməyən olarsa, onda hökm doğrudur. Əks halda elə iki $h \in K, g \in K[x]$ elementləri tapmaq olar ki, $f = hg$ olmaqla, g bəsit çoxhədlidir. Əgər g gətirilməyən olarsa, onda tələb olunan ayrılış alınmışdır. Əks halda elə $p, q \in K[x]$ elementləri var ki, $g = pq$. Əgər bu elementlərdən biri sıfır dərəcəli çoxhədli olarsa, onda g bəsit çoxhədli ola bilməz. Deməli, $p, q \in K[x]$ elementlərinin hər ikisi müsbət dərəcəli çoxhədlidir. Onda onların hər ikisinin dərəcəsi n -dən kiçikdir. İnduktiv fərziyyəyə əsasən onların hər ikisinin sadə vuruqlara ayrılışı vardır:

$$p = p_1 \cdots p_k \wedge q = q_1 \cdots q_s.$$

Bu yazılışları yuxarıdakı bərabərliklərdə yerinə yazaraq, tələb olunan ayrılışı alırıq. Beləliklə, hər bir tərsi olmayan elementin sadə vuruqlara ayrılışı vardır.

Göstərək ki, sadə vuruqlara ayrılış yeganədir. Əksini fərz edək. Tutaq ki, $f(x)$ çoxhədlisi üçün iki ayrılış vardır:

$$f = p_1 \cdots p_k u_1 \cdots u_r = q_1 \cdots q_m v_1 \cdots v_s;$$

burada $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_m$ K halqasının sadə elementləridir, $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ isə müsbət dərəcəli gətirilməyən çoxhədlilərdir. Lakin lemma 1-in nəticəsinə əsasən onlar bəsit çoxhədlilərdir. Onda, lemma 2-yə görə yazı bilərik:

$$p_1 \cdots p_k \sim q_1 \cdots q_m,$$

$$u_1 \cdots u_r \sim v_1 \cdots v_s.$$

Birinci münasibətdən K halqası faktorial olduğu üçün $k = m \wedge p_1 \sim q_1 \wedge \cdots \wedge p_k \sim q_k$ olması alınır. İkinci münasibətdən alırıq ki, $u = u_1 \cdots u_r$ və $v = v_1 \cdots v_s$ hasiləri $K[x]$ halqasında assosiasıylanmış çoxhədlilərdir. Qaus lemmasına görə u və v çoxhədliləri bəsit çoxhədlilərdir. u_i və v_j çoxhədliləri $K[x]$ halqasında gətirilməyən olduğu üçün lemma 5-in nəticəsinə əsasən

onlar $F[x]$ halqasında da gətirilməyəndir.

$$u_1 \cdots u_r \sim v_1 \cdots v_s$$

münasibəti göstərir ki, $r = s$ (çünki meydan üzərində çoxhədlilər halqası faktorial halqadır) və müəyyən yerdəyişmədən sonra

$$u_1 \sim v_1, \dots, u_r \sim v_r.$$

Lemma 3-ə əsasən bu çoxhədlilər həm də $K[x]$ halqasında assosiasıylanmış çoxhədlilərdir. Bu isə o deməkdir ki, $K[x]$ halqasında sadə vuruqlara ayrılış yeganədir, yəni $K[x]$ halqası faktorial halqadır. Teorem 1 isbat olundu.

§4. Rasional ədədlər meydanı üzərində gətirilməyən çoxhədlilər

Əvvəlki paraqrafda istifadə olunan mühakimələri rasional ədədlər meydanı üzərində verilmiş çoxhədlilərə tətbiq etmək olar.

Lemma. Əgər tam əmsallı $f(x)$ çoxhədlisi rasional ədədlər meydanı üzərində gətiriləndirsə, onda bu çoxhədlini tam əmsallı və müsbət dərəcəli çoxhədlilərin hasilinə ayırmaq olar.

Bu lemma əvvəlki paraqrafda lemma 5-in xüsusi halıdır.

Tam əmsallı çoxhədlilərin gətirilməyən olduğunu göstərmək üçün müxtəlif əlamətlər vardır. Bunlardan ən sadəsi 1850-ci ildə Eyzənşteyi tərəfindən təklif edilmiş əlamətdir.

Teorem. (Eyzənşteyi əlaməti). Fərz edək ki,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

çoxhədlisi tam əmsallı çoxhədlidir. Əgər elə sadə p ədədi tapmaq olarsa ki:

1- a_n yüksək əmsalı p ədədinə bölünməsin;

2- qalan əmsalların hamısı p ədədinə bölünsün;

3- a_0 sərbəst həddi p ədədinə bölünməklə, p^2 -na bölünməsin, onda $f(x)$ çoxhədlisi rasional ədədlər meydanı üzərinə gətirilməyəndir.

İsbatı. Teoremi isbat etmək üçün əksini fərz edək, yəni tutaq ki, əlamətin üç şərti ödənildikdə n dərəcəli $f(x)$ çoxhədlisi gətiriləndir. Onda bu çoxhədlinin iki tam əmsallı çoxhədlinin hasili şəklində yazmaq olar. (ikinci lemmaya görə) yəni $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

$$g(x) = b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

$$h(x) = c_s x^s + \dots + c_1 x + c_0.$$

Burada $0 < r < n$, $0 < s < n$ və $r + s = n$. Aydındır ki,

$$g(x)h(x) = b_r c_s x^{r+s} + \dots + (b_k c_0 + \dots + b_0 c_k) x^k + \dots + b_0 c_0.$$

$f(x)$ və $g(x)h(x)$ çoxhədlilərini müqayisə etsək aşağıdakı bərabərlikləri alarıq:

$$\begin{cases} a_n = b_r \cdot c_s, \\ a_k = b_k c_0 + \dots + b_0 c_k, 0 < k < n, \\ a_0 = b_0 c_0. \end{cases}$$

$g(x)$ çoxhədlisinin əmsallarının hamısı sadə p ədədinə bölünə bilməz, əks halda $b_r \div p \Rightarrow a_n \div p$ olardı ki, bu isə 1-ci şərtə ziddir. $g(x)$ çoxhədlisinin əmsallarından p -yə bölünməyən ilk əmsalı b_k ($0 < k \leq r$) ilə işarə edək.

2-ci şərtə görə $f(x)$ -in $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ əmsalları p -yə bölünür. $a_0 \div p$ olmasından $b_0 c_0 \div p$ olması alınır. c_0 və b_0 ədədlərinin hər ikisi p -yə bölünə bilməz, çünki bu halda $b_0 c_0 = a_0 \div p^2$ olardı; bu isə a_0 -ın p^2 -na bölünməməsi şərtinə ziddir. Deməli, $b_0 \div p$ və ya $c_0 \div p$ münasibətləri doğrudur. Tutaq ki, $b_0 \div p$ və $c_0 \nmid p$. $a_k, b_{k-1}, b_{k-2}, \dots, b_0$ ədədlərinin p -yə bölünməsindən və

$$a_k = b_k c_0 + b_{k-1} c_1 + \dots + b_0 c_k$$

bərabərliyindən $b_k c_0 \div p$ alırıq. Bu isə ziddiyyətdir, çünki $b_k \nmid p$ və $c_0 \nmid p$. Alınan ziddiyət fərziyyəimizin doğru olmadığını göstərir. Deməli, $f(x)$ çoxhədlisi rasional ədədlər meydanı üzərində gətirilməyəndir. Teorem isbat olundu.

Misal. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 15$ çoxhədlisinin rasional ədədlər meydanı üzərində gətirilməyən olduğunu göstərək.

Bunu üçün $p=3$ sadə ədədini götürək. Çoxhədlinin yüksək həddinin əmsalı 3-ə bölünür. Qalan əmsallar isə 3-ə bölünürlər. Sərbəst hədd, yəni 15, 3-ə bölünməklə, 9-a bölünür. Eyzenşteyn əlamətinə əsasən bu çoxhədli gətirilməyəndir.

Bəzi çoxhədlilərə Eyzenşteyn əlamətini müəyyən çevrilmədən sonra tətbiq etmək mümkün olur. Doğrudan da, $f(x) = x^5 + 1$ çoxhədlisi üçün p sadə ədədini aşağıdakı kimi təyin etmək olar. Əvvəlcə $x=y+4$ əvəzləməsi aparaq:

$$f(x) = f(y+4) = (y+4)^5 + 1 = y^5 + 20y^4 + 160y^3 + 640y^2 + 1280y + 5.$$

Alınmış $\varphi(y)$ çoxhədlisi üçün $p=5$ sadə ədədi Eyzenşteyn əlamətinin şərtlərini ödəyir. $\varphi(y)$ çoxhədlisi rasional ədədlər meydanında gətirilməyəndir. Buna görə də $f(x)$ çoxhədlisi rasional ədədlər meydanında gətirilməyən olar.

Eyzenşteyn əlamətindən görünür ki, rasional ədədlər meydanında istənilən dərəcəli çoxhədli gətirilməyən ola bilər. Məsələn, p sadə ədəd olduqda, $x^n + p$ gətirilməyən çoxhədlidir.

FƏSİL IV. Üç və dörd dərəcəli cəbri tənliklər

§1. Üç dərəcəli tənlik. Kardano düsturu

Ümumiliyi pozmadan üç dərəcəli tənliyi

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

şəklində yazmaq olar. Burada a, b, c əmsalları kompleks ədədlərdir. Əgər kub tənlikdə x^3 -nün əmsalı 1-dən fərqli ədəd olarsa, onda tənliyin hər iki tərəfini bu ədədə bölməklə, onu (1) şəklində tənliyə gətirmək olar. (1) tənliyində

$$x = y - \frac{a}{3} \quad (2)$$

əvəzləməsi aparaq:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0.$$

Mötərizələri açıb, islah etdikdə alınan yeni tənlikdə y^2 iştirak etməyəcəkdir:

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

Burada

$$\left. \begin{aligned} p &= b - \frac{a^2}{3} \\ q &= \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \end{aligned} \right\}$$

işarə etsək

$$y^3 + py + q = 0 \quad (3)$$

tənliyini alırıq. Belə tənlik *natamam kub tənlik* adlanır. Ümumiliyi pozmadan tənliyin bu şəkildə verildiyini fərz edək.

(3) tənliyini həll etmək üçün

$$y = u + v$$

əvəzləməsi aparaq. Bu əvəzləməni (3) tənliyində nəzərə alsaq, yazı bilərik:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0.$$

Mötərizələri açaraq, yenidən quruplaşdırma aparsaq,

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0$$

bərabərliyini alırıq. u və v -nin üzərinə $3uv + p = 0$, yaxud $uv = -\frac{p}{3}$ şərtini qoyaq. Onda alırıq:

$$u^3 + v^3 = -q,$$

$$u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Buradan aydın olur ki, u^3 və v^3 dəyişənləri

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

kvadrat tənliyinin kökləridir. Bu tənlik verilmiş kub tənliyin *həlləddici tənliyi* adlanır. Beləliklə,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (4)$$

(4) düsturlarında u və v -nin qiyməti, kub kök ilə təyin edildiyindən hər biri üçün üç kompleks qiymət alınır. (4) ifadəsindəki u və v -nin mümkün qiymətlərini $y = u + v$ əvəzləməsində yazdıqda

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (5)$$

bərabərliyi alınır. Bu düstur *Kardano düsturu* adlanır. u və v -nin müxtəlif qiymətləri vastəsi ilə (5) düsturuna görə y üçün 9 qiymət almaq olar. Lakin məlumdur ki, kub tənliyin köklərinin sayı 3-ə bərabərdir. Yəni 9 qiymətdən ancaq 3-ü kub tənliyin kökü ola bilər. Bu kökləri müəyyən etmək üçün u və v -nin $uv = -\frac{p}{3}$ bərabərliyini ödədiyini nəzərə almaq lazımdır. Göstərək ki, bu yolla bütün üç kökü tapa bilərik. (5) düsturunda birinci kub kökün ixtiyari bir kompleks qiymətini u_0 ilə işarə edək və

$$v_0 = -\frac{p}{3u_0}$$

qəbul edək. Məlumdur ki, birinci kökün digər iki qiymətini

$$u_1 = u_0\varepsilon, u_2 = u_0\varepsilon^2$$

düsturları vsitəsi ilə tapmaq olar ki, burada ε vahidin 3-cü dərəcədən ibtidai kökünü göstərir. Analoji olaraq ikinci kök üçün daha iki qiymət alırıq:

$$v_1 = -p/(3u_0\varepsilon) = v_0\varepsilon^2, v_2 = v_0\varepsilon.$$

Beləliklə, kub tənliyin həlli üçün aşağıdakı düsturları alırıq:

$$y_i = u_i + v_i, i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Vahidin üçüncü dərəcədən ibtidai kökü $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ olduğundan (6) düsturlarını belə yazmaq olar:

$$y_0 = u_0 + v_0,$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0),$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0).$$

Misal. Kardano düsturundan istifadə edərək

$$x^3 + 15x + 124 = 0$$

tənliyini həll edək.

$$u_0 = \sqrt[3]{-62 + \sqrt{3969}} = \sqrt[3]{-62 + 63} = 1 \text{ qəbul etsək } v_0 = -\frac{p}{3u_0} = -5 \text{ olar. Beləliklə,}$$

$$x_1 = u_1 + v_1 = -4$$

$$x_{2,3} = 2 \pm 3i\sqrt{3}$$

alırıq.

Kardano düsturunda $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ ifadəsi kub tənliyin həlledici tənliyinin diskriminantıdır.

Diskriminantın işarəsindən asılı olaraq üç hal mümkündür.

1. $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. Bu halda $\sqrt{\Delta}$ həqiqi ədəddir. $-\frac{q}{2}$ ədədi də həqiqi ədəd olduğundan

$$u_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}$$

üçün kökün həqiqi qiymətini götürmək olar. Bu halda $v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$ da həqiqi ədəd olacaqdır.

Aydındır ki, $\sqrt{\Delta} \neq 0$ olduğu üçün $u_1 \neq v_1$ olmalıdır. Deməli, $\Delta > 0$ olduqda həqiqi əmsal-
lı $x^3 + px + q = 0$ tənliyinin üç müxtəlif kökü vardır. Bu köklərdən $x_0 = u_0 + v_0$ həqiqi,

$x_{1,2} = -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0)$ isə qoşma kompleks ədədlər olacaqdır.

2. $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0, q \neq 0, p \neq 0$. Bu halda $\sqrt{\Delta} = 0$ olduğu üçün $U_0 = V_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ olar.

Onda $x_0 = u_0 + v_0 = -\frac{3q}{2p}$ həqiqi ədəd olar. Beləliklə, $\Delta = 0$ olduqda $x^3 + px + q = 0$ tənliyinin

köklərinin üçü də həqiqidir və x_1 kökü ilə x_2 kökü eynidir.

3. $\Delta < 0$. Bu halda $\sqrt{\Delta}$ xəyalı ədəd olur. Buna görə də

$$U_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}, V_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

kompleks ədədlər olacaqdır.

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\alpha^2, \alpha^2 > 0$$

işarə edək.

Onda $\sqrt{\Delta} = i\alpha$ yazı bilərik. Bu halda

$$u_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\alpha},$$

$$v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\alpha},$$

$$\overline{u_0} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\alpha} = v_0$$

olacaqdır. Asanlıqla yəqin etmək olar ki, u_i və v_i ədədləri qoşma kompleks ədədlərdir. Buna görə də (6) münasibətinə əsasən baxılan halda kub tənliyin üç həqiqi kökü vardır.

§2. Dörd dərəcəli tənlik. Ferrari üsulu

Ümumi şəkildə dörd dərəcəli cəbri tənlik

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

kimi yazılır. Bu tənliyi həll etmək üçün sol tərəfi elə çevirək ki, verilən ifadədə tam kvadrat ayırmaq mümkün olsun. Yoxlamaq olar ki, verilən tənliyi

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 2\lambda - b\right)x^2 + (a\lambda - c)x + \lambda^2 - d \quad (1)$$

kimi yazmaq olar. Burada λ kompleks parametrdir. λ ədədini elə seçək ki, sağ tərəf də tam kvadrat olsun. Sağ tərəf x dəyişəninə görə kvadrat üçhədlidir. Deməli, sağ tərəfin tam kvadrat olması üçün onun diskriminantı sıfır olmalıdır, yəni

$$(a\lambda - c)^2 - (\lambda^2 - d)(8\lambda + a^2 - 4b) = 0.$$

Bu bərabərlik λ dəyişəninə nəzərən üç dərəcəli tənlikdir:

$$8\lambda^3 + 4b\lambda^2 + (8d - 2ac)\lambda + c^2 + a^2d^2 - 4bd = 0.$$

Bu tənlikdən λ dəyişəninin hər hansı $\lambda = \lambda_0$ qiymətini taparaq, (1) bərabərliyində nəzərə alsaq aşağıdakı tənliyi alırıq:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda_0\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 2\lambda_0 - b\right)\left(x + \frac{2a\lambda_0 - 2c}{a^2 + 8\lambda_0 - 4b}\right)^2.$$

Hər iki tərəfdən kvadrat kök alaq:

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \lambda = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2\lambda_0 - b} \left(x + \frac{2a\lambda_0 - 2c}{a^2 + 8\lambda_0 - 4b}\right). \quad (2)$$

Beləliklə, dörd dərəcəli tənliyin həlli iki kvadrat tənliyin həllinə gətirilmiş olur. Bu tənlikləri həll etməklə x dəyişəni üçün dörd qiymət alınır. Göstərmək olar ki, bununla kvadrat tənliyin bütün kökləri tapılmış olur.

Misal. Aşağıdakı tənliyi həll edək:

$$x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0.$$

Burada $a = -1, b = -1, c = 2, d = -2$. Əvvəlcə köməkçi kub tənliyi yazaq:

$$8\lambda^3 - 4\lambda^2 + (-16 + 4)\lambda + 4 + 4 - 8 = 0,$$

yaxud,

$$8\lambda^3 - 4\lambda^2 - 12\lambda = 0.$$

Aşkardır ki, $\lambda_0 = 0$ bu tənliyin köküdür. Onda (2) tənlikləri aşağıdakı şəkllə düşər:

$$x^2 - \frac{1}{2}x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \left(x - \frac{4}{5} \right).$$

Əvvəlcə $+$ işarəsini götürək:

$$x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x - \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0.$$

Bu tənliyin iki kökü vardır:

$$x_{1,2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8} + \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{15+21\sqrt{5}}{40}}.$$

– işarəsini götürdükdə isə belə bir kvadrat tənlik alınır:

$$x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0.$$

Buradan qalan iki kökü tapırıq:

$$x_{3,4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8} - \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{15-21\sqrt{5}}{40}}.$$

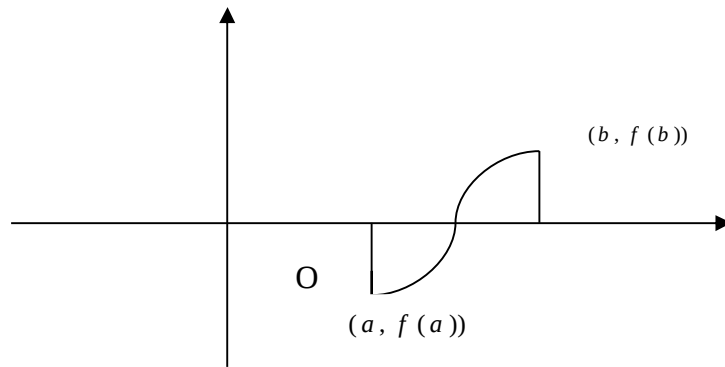
§3. Həqiqi əmsallı çoxhədlilərin köklərinin sərhədləri

Əsas meydanın R həqiqi ədədlər meydanı olan hal cəbrin əsas teoreminin isbatı üçün xüsusi əhəmiyyətə malikdir. R meydanında cəbri əməllərlə birlikdə topoloji strukturun olması çoxhədlilərin köklərinin öyrənilməsi üçün daha geniş imkanlar açır.

Teorem 1. Əgər $f(x) \in R[x]$ çoxhədlisi (a, b) aralığının uc nöqtələrində müxtəlif işarəli qiymətlər alarsa (məsələn, $f(a) < 0 \wedge f(b) > 0$ olarsa), onda bu aralıqda verilən çoxhədlinin heç olmazsa bir kökü vardır.

İsbati. (a, b) aralığında verilən çoxhədli kəsilməz funksiya olduğu üçün onun qrafiki,

yəni $\{ \langle x, y \rangle \mid x \in (a, b) \wedge y = f(x) \}$ çoxluğu rabitəli çoxludur. Bu qrafikin uc nöqtələri yuxarı və aşağı yarımmüstəvilərdə yerləşmişdir.



Şəkildən görüldüyü kimi funksiyanın qrafiki yarımmüstəviləri ayıran və onların hər ikisinin sərhəddi olan absis oxunu hər hansı bir nöqtədə kəsməlidir. Bu nöqtədə funksiya sıfıra bərabər qiymət alır. Teorem 1 isbat olundu.

Teorem 2. Tutaq ki, $f(x) \in R[x]$ çoxhədlisi normalaşmış şəkildə verilmişdir:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

və əmsallar üçün $|a_i| \leq M$ bərabərsizliyi ödəyir. Onda $f(x)$ çoxhədlisinin bütün həqiqi kökləri $|x| < M + 1$ aralığında yerləşmişdir.

İsbatı. İxtiyari həqiqi x üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$|f(x)| \geq |x^n| - |a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n|.$$

İkinci modulu yuxarıdan qiymətləndirək.

$$\begin{aligned} |a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n| &\leq |a_1 x^{n-1}| + \dots + |a_{n-1} x| + |a_n| \leq \\ &\leq M(|x|^{n-1} + \dots + |x| + 1) = M \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}. \end{aligned}$$

$|x| \geq M + 1$ olduqda sonuncu bərabərsizlikdən alırıq:

$$|a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n| \leq M \frac{|x|^n - 1}{M} = |x|^n - 1.$$

Beləliklə, göstərilən şərt daxilində $|f(x)| > 0$. Teorem 2 isbat olundu.

Teorem 3. Tək dərəcəli çoxhədlinin heç olmazsa bir həqiqi kökü vardır.

İsbatı. Tutaq ki, tək dərəcəli çoxhədli

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

şəklində verilmişdir və n tək ədəddir. Teorem 2 –nin mühakimələrindən asanlıqla yəqin etmək olar ki, $|x| \geq M+1$ olduqda $f(M+1) \geq 1 \wedge f(M+1) \leq -1$ yazıla bilər. Beləliklə, verilən çoxhədli $(-(M+1), M+1)$ aralığının uc nöqtələrində müxtəlif işarəli qiymətlər alır. Onda teorem 1-ə görə bu aralıqda çoxhədlinin heç olmazsa bir kökü vardır. Teorem 3 isbat olundu.

FƏSİL V. Çoxdəyişənli çoxhədlilər

§1. Tamlıq oblastının təkrar transsendent genişlənməsi

Çoxhədlinin formal törəməsini daxil edərkən biz halqanın təkrar transsendent genişlənməsindən istifadə etdik. İndi biz həmin konstruksiya ilə daha müfəssəl məşğul olaq.

N natural ədədlər çoxluğuna 0 ədədini birləşdirməklə alınan çoxluğu N_0 ilə işarə edək: $N_0 = N \cup \{0\}$. Fərz edək ki, x və y hər hansı K tamlıq oblastı üzərində transsendent

elementlərdir. Əvvəlcə $K[x]$ transsendent genişlənməsini quraq. İki hal mümkündür: 1) y elementi $K[x]$ üzərində transsendent elementdir; 2) y elementi $K[x]$ üzərində cəbri elementdir.

1) Birinci halda $K[x]$ halqasının $K[x][y]$ transsendent genişlənməsi vardır. Bu genişlənmənin elementləri əmsalları $K[x]$ halqasından olan y elementindən asılı çoxhədlilərdir. Yəni onun hər bir elementi

$$f(y) = a_0(x) + a_1(x)y + \dots + a_n(x)y^n$$

şəklindədir ki, burada $a_i(x)$ çoxhədliləri x dəyişənindən asılıdır:

$$a_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \dots + a_{ik_i}x^{k_i}.$$

Əgər bu ifadələri yuxarıda nəzərə alsaq, yazı bilərik:

$$f(y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{k_i} a_{ij} x^i y^j. \quad (1)$$

Eyni qayda ilə $K[y][x]$ təkrar transsendent genişlənməsi qurula bilər. Aydın ki, əgər x və y elementləri K halqasının genişlənməsi olan başqa bir kommutativ və assosiativ L halqasının elementləri olarsa, onda $K[x][y] = K[y][x]$. Bunu yəqin etmək üçün (1) cəminin toplananlarını x^i qüvvətlərinə görə qruplaşdırmaq lazımdır (qruplaşdırma və yerdəyişmə L halqasında mümkündür).

Qeyd etmək lazımdır ki, eyni konstruksiyanı L halqasında K -nı və x, y elementlərini daxilində saxlayan ən kiçik alt halqa kimi də müəyyən etmək olar. Belə alt halqa K -nın x və y elementlərinin birləşdirilməsi ilə alınan genişlənməsi adlanır.

2) İkinci halda y cəbri elementdir, yəni əmsalları $K[x]$ halqasından olan müəyyən bir çoxhədlinin köküdür. Beləliklə, ilk növbədə $K[x]$ halqasından hər hansı transsendent genişlənməsinə baxmaq lazımdır. Məlumdur ki, (bax fəsil 1, §2, teorem 1) hər bir kommutativ və vahidi olan halqanın sadə transsendent genişlənməsi vardır. Deməli, $K[x][z]$ transsendent genişlənməsi vardır. Deylənlərə əsasən, elə $f(z) \in K[x][z]$ çoxhədlisi vardır ki,

$$f(y) = 0. \quad (2)$$

(1)-ə əsasən yazı bilərik:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{k_i} a_{ij} x^i y^j = 0.$$

Bu bərabərlik göstərir ki, eyni zamanda x elementi də $K[y]$ halqası üzərində cəbri elementdir. Belə elementlər K üzərində *cəbri asılı elementlər* adlanır. Beləliklə, cəbri asılı elementlər ikidəyişənli çoxhədlilərin kökü olan cütələr təşkil edir. İndi isə ümumi təriflərə keçək.

Tərif 1. Tutaq ki, L tamlıq oblastı, $K \subset L$ onun alt halqsıdır. $x_1, \dots, x_m \in L$ olmaqla, x_1 K üzərində, x_2 $K[x_1]$ üzərində və i. a., transsendent elementlərdir. $m \geq 1$ olduqda induktiv olaraq

$$K[x_1] \dots [x_m] = (K[x_1] \dots [x_{m-1}])[x_m]$$

kimi təyin olunan transsendent genişlənmə K halqasının m -qat təkrar transsendent genişlənməsi adlanır.

Tərif 2. Tutaq ki, L tamlıq oblastı, $K \subset L$ onun alt halqsıdır və $x_1, \dots, x_m \in L$. L halqasının K -nı və $x_1, \dots, x_m$ elementlərini daxilinə alan ən kiçik alt halqasına K halqasının $x_1, \dots, x_m$ elementlərini birləşdiməklə alınan genişlənməsi deyilir və $K[x_1, \dots, x_m]$ kimi işarə olunur.

Qeyd etmək lazımdır ki, ən kiçik alt halqa dedikdə biz göstərilən xassələrə malik məxsusi alt halqası olmayan alt halqa nəzərdə tuturuq.

Teorem 1. İxtiyari natural m üçün

$$K[x_1, \dots, x_m] = (K[x_1, \dots, x_{m-1}])[x_m]$$

İsbatı. İnduksiya metodunu tətbiq edək. Teorem $m=1$ olduqda doğrudur. Doğrudan da, $K \subset K[x]$ və $x \in K[x]$ olduğundan K -nı və x -i daxilinə alan ən kiçik alt halqa vardır. Onu A ilə işarə edək. Lakin A halqasının hər bir elementi

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

şəklində olduğu üçün o, həm də A halqasına daxildir. Beləliklə, $A = K[x]$.

İndi fərz edək ki, teorem $m-1$ syda dəyişən üçün doğrudur. Göstərək ki,

$$K[x_1, \dots, x_m] = (K[x_1, \dots, x_{m-1}])[x_m].$$

Yuxarıda isbat olunduğuna əsasən, sağ tərəf $K[x_1, \dots, x_{m-1}]$ halqasını və x_m elementini daxilinə alan ən kiçik alt halqadır. Aydındır ki,

$$K[x_1, \dots, x_m] \subset (K[x_1, \dots, x_{m-1}])[x_m].$$

Lakin, $(K[x_1, \dots, x_{m-1}])[x_m]$ halqasının hər bir elementi

$$a_0 + a_1x_m + \dots + a_nx_m^n$$

şəklindədir və $a_0, \dots, a_n \in K[x_1, \dots, x_{m-1}]$. Deməli, $a_0 + a_1x_m + \dots + a_nx_m^n \in K[x_1, \dots, x_m]$. Teorem 1 isbat olundu.

Misal.

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1x_2 + \alpha_2x_2^2,$$

$$\alpha_0 = 3 + 2x_1,$$

$$\alpha_1 = -1 - 2x_1 + x_1^2,$$

$$\alpha_2 = 3x_1^2 - x_1^3$$

olarsa, alarıq:

$$\begin{aligned}\alpha &= 3 + 2x_1 + (-1 - 2x_1 + x_1^2)x_2 + (3x_1^2 - x_1^3)x_2^2 = \\ &= 3 + 2x_1 - x_2 - 2x_1x_2 + x_1^2x_2 + 3x_1^2x_2^2 - x_1^3x_2^2.\end{aligned}$$

Teorem 1-ə əssən, ixtiyari $m \geq 1$ natural ədədi üçün $K[x_1, \dots, x_m]$ halqasının hər bir elementini

$$\sum_{(i_1, \dots, i_m) \in M} a_{i_1 \dots i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$$

şəklində yazmaq olar və burada $M \subset N_0^m = N_0 \times \dots \times N_0$ sonlu çoxluqdur.

Tərif 2. $x_1, \dots, x_m \in L$ elementləri o zaman K halqası üzərində cəbri asılı olmayan elementlər adlanır ki, $K[x_1, \dots, x_m]$ halqasında hər bir $M \subset N_0^m$ sonlu çoxluğu üçün

$$\sum_{(i_1, \dots, i_m) \in M} a_{i_1 \dots i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} = 0$$

bərabərliyindən

$$(\forall (i_1, \dots, i_m) \in M) (a_{i_1 \dots i_m} = 0)$$

alınsın.

Teorem2. $x_1, \dots, x_m$ elementlərinin K halqası üzərində cəbri asılı olmaması üçün hər bir $s, 1 \leq s \leq m$ üçün x_s elementinin $K[x_1, \dots, x_{s-1}]$ halqası üzərində transsendent element olması zəruri və kafidir.

İsbatı. Tutaq ki, $x_1, \dots, x_m$ elementləri K halqası üzərində cəbri asılı deyil. Onda $s \geq 1$ olduqda

$$\sum_{i=1}^k a_i x_s^i = 0, \alpha_i \in K[x_1, \dots, x_{s-1}]$$

bərabərliyini

$$\sum_{(i_1, \dots, i_m) \in M} a_{i_1 \dots i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} = 0$$

şəklində yazmaq (burada $i_{s+1} = \dots = i_m = 0$). $x_1, \dots, x_m$ elementləri cəbri asılı olmadığı üçün

$$a_{i_1 \dots i_m} = 0$$

və deməli,

$$a_i = 0, i = 0, \dots, k.$$

Buna görə də x_s elementi $K[x_1, \dots, x_{s-1}]$ halqası üzərində transsendent elementdir.

Tərsinə əgər x_s elementi hər bir $1 \leq s \leq m$ üçün $K[x_1, \dots, x_{s-1}]$ halqası üzərində transsendent element olarsa, göstərək ki, $x_1, \dots, x_m$ elementləri cəbri asılı deyil. Bunun üçün

$$\sum_{(i_1, \dots, i_m) \in M} a_{i_1 \dots i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} = 0$$

bərabərliyinə baxaq. $K[x_1, \dots, x_m] = K[x_1, \dots, x_{m-1}][x_m]$ olduğu üçün yazı bilərik

$$\sum_{(i_1, \dots, i_m) \in M} a_{i_1 \dots i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} = 0 = \sum_{i=0}^k \alpha_i x_m^i;$$

burada $k = \max_{(i_1, \dots, i_m) \in M} i_m$ və əgər $(i_1, \dots, i_{m-1}, i) \in M$ şəklində element yoxdursa, onda $\alpha_i = 0$ hesab olunur. Əmsallar üçün isə

$$\alpha_i = \sum_{(i_1, \dots, i_{m-1}, i) \in M} a_{i_1 \dots i_{m-1} i} x_1^{i_1} \dots x_{m-1}^{i_{m-1}}$$

qəbul olunur. Şərtə əsasən x_m elementi transsendent elementdir. Deməli, hər bir i üçün

$$a_i = 0.$$

Lakin x_{m-1} elementi $K[x_1, \dots, x_{m-2}][x_{m-1}]$ halqası üzərində transsendent elementdir və hər bir $1 \leq i_m \leq k$ üçün

$$\sum_{(i_1, \dots, i_m) \in M} a_{i_1 \dots i_m} x_1^{i_1} \dots x_{m-1}^{i_{m-1}} x_m^{i_m} = 0$$

olmasından hər bir qeyd olunmuş i_{m-1}, i_m indeksləri üçün yazı bilərik:

$$\sum_{(i_1, \dots, i_{m-2}, i_{m-1}, i_m) \in M} a_{i_1 \dots i_{m-2} i_{m-1} i_m} x_1^{i_1} \dots x_{m-2}^{i_{m-2}} x_{m-1}^{i_{m-1}} x_m^{i_m} = 0.$$

Beləliklə, ardıcıl olaraq, hər addımda bir dəyişəni yox edərək ixtiyari $(i_1, \dots, i_m) \in M$ kortəji üçün

$$a_{i_1 \dots i_m} = 0$$

alırıq. Teorem 2 isbat olundu.

Tərif 3. $x_1, \dots, x_m$ elementləri K halqası üzərində cəbri asılı olmazsa, onda $K[x_1, \dots, x_m]$ halqası K üzərində $x_1, \dots, x_m$ dəyişənlərindən asılı çoxhədlilər halqası və ya K -nın m -qat transsendent genişlənməsi adlanır.

Teorem 3. Əgər K halqası tamliq oblastıdırsa, onda $K[x_1, \dots, x_m]$ halqası da tamliq oblastıdır.

Teorem 3 riyazi induksiya üsulu ilə asanlıqla isbat olunur.

Teorem 4. Əgər K_1 və K_2 izomorf tamliq oblastları olarsa ($K_1 \cong K_2$), onda

$$K_1[x_1, \dots, x_m] \cong K_2[x_1, \dots, x_m].$$

Nəticə: Əgər K tamlıq oblastı olmaqla $K[x_1, \dots, x_m]$ və $K[y_1, \dots, y_m]$ çoxhədlilər halqası olarsa, onda K -nın elementlərini yerində saxlayan və $x_1, \dots, x_m$ elementlərini uyğun olaraq $y_1, \dots, y_m$ elementlərinə çevirən izomorfizim vardır.

Çoxhədliləri müxtəlif formalarda yazmaq olar. $\max i_k = n_k$ olarsa, onda

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in M} a_{i_1 \dots i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$$

çoxhədlisi

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} a_{i_1 \dots i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$$

şəklində yazıla bilər ki, burada $(i_1, \dots, i_m) \notin M$ olduqda

$$a_{i_1 \dots i_m} = 0$$

hesab olunur. $(i) = (i_1, \dots, i_m)$ multi indeksini daxil etsək və

$$a_{(i)} = a_{i_1 \dots i_m}, x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} = x^{(i)}$$

qəbul etsək, $f(x_1, \dots, x_m)$ çoxhədlisini simvolik olaraq

$$f(x) = \sum_{(i) \in M} a_{(i)} x^{(i)}$$

şəklində yazmaq olar.

Tərif 4. $i_1 + \dots + i_m$ cəminə birhədlisinin *dərəcəsi* deyilir.

$$f(x) = \sum_{(i) \in M} a_{(i)} x^{(i)}$$

çoxhədlisinin birhədlilərinin dərəcələrinin ən böyüyünə verilmiş çoxhədlinin *dərəcəsi* deyilir və $\deg f$ kimi işarə olunur.

Çoxhədlinin eyni dərəcəli birhədlilərini qruplaşdırmaqla alınan yazılışına onun *normal yazılışı* (göstərilişi) deyilir. Hər bir çoxhədlini aşağıdakı normal şəkildə yazmaq olar:

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^N \sum_{i_1 + \dots + i_m = j} a_{i_1 \dots i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}.$$

Teorem 5. Əgər K halqası faktorial halqa olarsa, onda $K[x_1, \dots, x_m]$ halqası da faktorial halqadır.

Nəticə. Əgər K halqası meydandırsa, onda $K[x_1, \dots, x_m]$ halqası faktorial halqadır.

§2. Leksikoqrafik nizam. Çoxhədlinin hədlərinin leksikoqrafik düzülüşü

Birdəyişənli çoxhədlinin hədlərini təbii olaraq birhədlilərin artan və ya azalan qaydası ilə düzmək olar. Çoxdəyişənli çoxhədlilərdə isə belə təbii düzülş mümkün deyil. Məsələn,

$$x^2y - 2xy^2 + y^3$$

çoxhədlisinin bütün birhədliləri eyni dərəcəyə malikdir və deməli onun hədlərini dərəcənin artma və ya azalma sırası ilə düzmək olmaz. Çoxhədlilərin hədlərini düzmək üçün *leksikoqrafik nizam* anlayışından istifadə olunur. Bu nizam N_0^m hasilində təyin olunur.

Tərif 1. İki $(i) \in N_0^m$ və $(j) \in N_0^m$ multi indekslərinin fərqlinin (vektorlar kimi) ilk sıfırdan fərqli komponenti müsbət olarsa, onda $(i) \succ (j)$ yazılır və deyilir ki, birinci kortej ikincidən *yüksəkdir* və ya böyükdür.

Məsələn, $(2,2,1) \succ (2,1,1)$, çünki onların fərqlinin ilk sıfırdan fərqli olan ikinci komponenti müsbət 1-dir: $(0,1,0)$.

Teorem 1. $(i) \succ (j)$ binar münasibəti N_0^m çoxluğunda ciddi xətti nizam münasibətidir.

İsbatı. Göstərmək lazımdı ki:

- 1)bu münasibət tranzitivdir;
- 2)antirefleksivdir;
- 3)xəttidir.

1) Fərz edək ki, $(i) \succ (j)$ və $(j) \succ (k)$ şərtlərini ödəyən üç kortej verilmişdir. Onda şərtə əsasən $(i) - (j) \succ (0)$ və $(j) - (k) \succ (0)$. Sol tərəfdəki fərqləri toplaşaq $(i) - (k)$ fərqlini alarıq. Birinci fərqlin ilk sıfırdan fərqli elementinin nömrəsi r ikinci fərqlin belə elementinin nömrəsi isə s olarsa, onda onların cəminin ilk sıfırdan fərqli elementinin nömrəsi $\min(r, s)$ olar. Aydındır ki, cəmin bu nömrəli elementi müsbətdir, çünki o, mənfi olmayan və heç olmazsa ikisindən biri müsbət olan toplananların cəmidir. Deməli, $(i) - (k) \succ 0$ və ya $(i) \succ (k)$. Bu isə tranzitivliyin doğruluğunu göstərir.

2) $(i) - (i) = (0)$ olduğundan $(i) \succ (i)$ münasibəti ödəmə bilməz.

3) Z^m düz hasilindən olan ixtiyari kortejin ilk sıfırdan fərqli elementi tam ədəd kimi ya müsbət, ya mənfi, ya da sıfır ola bilər. Yəni hər bir $(i) \in Z^m$ kortej üçün $(i) \succ 0$, $(i) \prec 0$, $(i) = 0$ münasibətlərindən ancaq və ancaq biri ödəyir.

Teorem 1 isbat olundu.

Teorem 1 vasitəsi ilə təyin olunan nizam *leksikoqrafik nizam* adlanır. İxtiyari $M \subset N_0^m$ sonlu alt çoxluğu götürək. Aydındır ki, bu çoxluqda leksikoqrafik nizam vardır. Tutaq ki, M hər hansı m dəyişənli $f(x_1, \dots, x_m)$ çoxhədlisinin yazılışındakı mülti indekslər çoxluğudur yəni

$$f(x) = \sum_{(i) \in M} a_{(i)} x^{(i)}.$$

Çoxhəddlinin hədlərini elə düzək ki, onun birhədliləri multi indekslərin leksikoqrafik nizamda azalma sırası ilə düzölsün. Belə düzölüş çoxhəddlinin hədlərinin *leksikoqrafik düzölüşü* adlanır.

Çoxhəddlinin birhədlilərindən düzələn sonlu çoxluğu S ilə işarə edək:

$$S = \{a_{(i)}x^{(i)} \mid (i) \in M\}.$$

Yuxarıda deyilənlərə əsasən, $\langle S, \succ \rangle$ cütü ciddi xətti nizamlı sonlu çoxluqdur. Bu çoxluq verilən çoxhəddlidən asılıdır və çoxhəddli dəyişdikdə uyğun S çoxluğu da dəyişir.

Tərif 1. $\langle S, \succ \rangle$ nizamlı çoxluğunun yüksək elementinə çoxhəddlinin yüksək həddi deyilir.

Misal. Fərz edək ki, üçdəyişənli həqiqi əmsallı çoxhəddli verilmişdir:

$$f(x, y, z) = 3x^2y - 2y^3 + x^4 + 4x^3z + 2xyz - z^3 + 5xyz^2 - x^3y + 2y^2z^2.$$

Onun hədlərinin leksikoqrafik düzölüşünü yazaq. Əvvəlcə x dəyişəninə qüvvətlərini (sıfırıncı qüvvəti də daxil olmaqla) azalan qayda ilə düzürük:

$$x^4, 4x^3z, -x^3y, 3x^2y, 2xyz, 5xyz^2, -2y^3, -z^3, 2y^2z^2.$$

x -in qüvvət üstləri eyni olan birhədliləri əvvəl y -in dərəcəsinə görə, daha sonra isə z -in dərəcəsinə görə düzək. Nəicədə aşağıdakı düzölüşü alarıq:

$$x^4, -x^3y, 4x^3z, 3x^2y, 5xyz^2, 2xyz, -2y^3, 2y^2z^2, -z^3.$$

Beləliklə,

$$f(x, y, z) = x^4 - x^3y + 4x^3z + 3x^2y + 5xyz^2 + 2xyz - 2y^3 + 2y^2z^2 - z^3.$$

Göründüyü kimi çoxhəddlinin yüksək həddi x^4 -dür.

Aşağıdakı teorem iki çoxhəddlinin hasilinin yüksək həddi haqda teorem adlanır.

Teorem 2. İki çoxhəddlinin hasilinin yüksək həddi onların yüksək hədlərinin hasilinə bərabərdir.

İsbatı. Tutaq ki, iki $f, g \in K[x_1, \dots, x_m]$ çoxhədliləri verilmişdir. $ax_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$ və $bx_1^{j_1} \dots x_m^{j_m}$ onların, uyğun olaraq, yüksək hədləridir. Çoxhədlilərin hasilini tapmaq üçün onlardan birincinin bütün birhədlilərini ikinci çoxhəddlinin hər bir birhədlisinə vuraraq, alınan birhədliləri toplamaq lazımdır. Əgər göstərsək ki, birhədlilərdən heç olmazsa biri yüksək hədd olmadıqda onların hasilini yüksək hədlərin hasilindən aşağıdır, onda teoremi isbat etmiş oluruq. Fərz edək ki, $cx_1^{i'_1} \dots x_m^{i'_m}$ və $dx_1^{j'_1} \dots x_m^{j'_m}$ bu çoxhədlilərin ixtiyari iki yüksək olmayan hədləridir və $(i) = (i_1, \dots, i_m) \succ (i'_1, \dots, i'_m) = (i')$. Onda,

$$(i) \succ (i').$$

Aydındır ki,

$$(i) + (j) \succ (i') + (j) \geq (i') + (j');$$

burada $\geq$ simvolu belə müəyyən olunur:

$$(i) \geq (j) \Leftrightarrow (i) \succ (j) \vee (i) = (j).$$

Teorem 2 isbat olundu.

§3. Simmetrik çoxhədlilər. Əsas teorem

Tərif 1. n dəyişənli $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ çoxhədlisində dəyişənlərin yerini ixtiyari qayda ilə dəyişdikdə çoxhədli dəyişməzsə, ona *simmetrik çoxhədli* deyilir.

Bu tərif əvəzləmələr qrupunun çoxdəyişənli çoxhədlilər halqasında təsiri vsitəsi ilə də vermək olar. S_n əvəzləmələr qrupunun $K[x_1, \dots, x_n]$ halqasında təsiri belə müəyyən olunur:

$$(\sigma \in S_n)(\forall f \in K[x_1, \dots, x_n])(\sigma f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})).$$

Teorem 1. İxtiyari $\sigma \in S_n$ əvəzləməsi və $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ çoxhədliləri üçün

$$\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g).$$

İsbtı. Teoremi birhədlilər üçün isbat edək. Tutaq ki, $f = ax_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ və $g = bx_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$ iki birhədlilərdir. Onda, $fg = abx_1^{i_1+j_1} \cdots x_n^{i_n+j_n}$ və buna görə də

$$\sigma(fg) = abx_{\sigma(1)}^{i_1+j_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{i_n+j_n}.$$

Buradan tələb olunan münasibəti birhədlilər üçün alırıq: $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g)$. Hər bir çoxhədli birhədlilərin cəmi olduğundan tələb olunan münasibət $\sigma(f+g) = \sigma(f) + \sigma(g)$ bərabərliyindən alınır. Teorem 1 isbat olundu.

Nəticə. $\sigma : f \mapsto \sigma f$ inikası $K[x_1, \dots, x_n]$ halqasının özünə epimorfizmidir.

İxtiyari $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ çoxhədlisi üçün S_n qrupunun bu çoxhədlini dəyişməz saxlayan əvəzləmələr çoxluğu f çoxhədlisinin stasionar alt qrupunu təşkil edir (bax II hissə, IV fəsil §1, teorem 4): $St(f) \triangleleft S_n$. Tərif 1-ə əsasən, f -in simmetrik çoxhədli olması üçün $St(f) = S_n$ şərtinin ödənməsi zəruri və kafidir.

Misllər. 1. $f(x, y) = x + y$ çoxhədlisi simmetrik çoxhədlidir.

2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ çoxhədlisi simmetrik çoxhədlidir. Lakin $f(x, y, z) = x^2 + zy^2$ çoxhədlisi isə simmetrik çoxhədli deyil. Doğrudan da,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

əvəzləməsi $x \rightarrow y, y \rightarrow x, z \rightarrow z$ yerdəyişməsi aparır. Buna görə də $\sigma f = y^2 + zx^2 \neq f$.

3. Aşağıdakı çoxhədlilər simmetrik çoxhədlilərdir:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$x_1 x_2 \cdots x_n.$$

4. İxtiyari $\varphi = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ birhədlisi verilərsə, onun S_n qrupunun təsiri ilə yaranan orbitini $S_n(\varphi)$ kimi işarə edək. Əgər bu orbitə daxil olan birhədlilərin cəmini götürsək, onda simmetrik çoxhədli alınar. Bu simmetrik çoxhədli bəzən $\varphi = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ birhədlisinin orbiti adlanır:

$$S(\varphi) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} + x_2^{k_1} x_1^{k_2} \cdots x_n^{k_n} + \cdots.$$

Xüsusi halda,

$$S(x_1) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$S(x_1 x_2) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \cdots + x_2 x_n + \cdots + x_{n-1} x_n,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$S(x_1 x_2 \cdots x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$$

kimi təyin olunan simmetrik çoxhədlilər *elementar simmetrik çoxhədlilər* adlanır. Bu çoxhədlilər simmetrik çoxhədlilər nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır. Onları daha müxtəşər şəkildə yazaq:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ S_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \\ S_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n, \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ S_{n-1} &= x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n + \dots + x_2 x_3 \dots x_n, \\ S_n &= x_1 x_2 x_3 \dots x_n. \end{aligned} \right\} (1)$$

Bütün simmetrik çoxhədlilər çoxluğu $SK[x_1, x_2, \dots, x_n]$ kimi işarə olunur.

Teorem 2. $SK[x_1, x_2, \dots, x_n]$ çoxluğu $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ halqasının alt halqasıdır.

İsbatı. S_n qrupunun hər bir əvəzləməsinin təsiri ilə $SK[x_1, x_2, \dots, x_n]$ çoxluğu özünə inikas olunur. İxtiyari iki simmetrik $f, g \in SK[x_1, x_2, \dots, x_n]$ çoxhədliləri üçün teorem 1-in nəticəsinə əsasən

$$\sigma(f + g) = \sigma(f) + \sigma(g) = fg,$$

$$\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g) = fg.$$

Deməli, $SK[x_1, x_2, \dots, x_n]$ çoxluğu toplama və vurma əməllərinə nəzərən qapalıdır. Buna görə də $SK[x_1, x_2, \dots, x_n]$ çoxluğu halqadır. Teorem 2 isbat olundu.

İndi isə ixtiyari $\varphi \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ çoxhədlisi götürək. Əgər dəyişənləri $x_i \mapsto s_i$ inikasına müvafiq olaraq s_i çoxhədliləri ilə əvəz etsək, alınan $\varphi(s_1, s_2, \dots, s_n)$ çoxhədlisi simmetrik çoxhədli olcaqdır. Doğrudan da,

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i) \in M} a_{(i)} x^{(i)}$$

işarə etsək, onda hər bir σ əvəzləməsi üçün aşağıdakı münasibət ödəyir:

$$\begin{aligned}\sigma\varphi(s_1, \dots, s_n) &= \sum_{(i) \in M} a_{(i)} \sigma(s^{(i)}) = \sum_{(i) \in M} a_{(i)} (\sigma s_1)^{i_1} \cdots (\sigma s_n)^{i_n} = \\ &= \sum_{(i) \in M} a_{(i)} s^{(i)} = \varphi(s_1, \dots, s_n).\end{aligned}$$

Beləliklə, $x_i \mapsto s_i$ inikası $K[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow SK[x_1, x_2, \dots, x_n]$ inikasını müəyyən edir. Simmetrik çoxhədlilər nəzəriyyəsinin əsas teoremi hökmü edir ki, bu inikas *epimorfizmdir*.

Bu teoremin isbatı üçün simmetrik çoxhədlinin yüksək həddi haqda bir lemma isbat edək.

Lemma. Əgər $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ simmetrik çoxhədli, $ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ isə onun yüksək həddi olarsa, onda dəyişənlərin qüvvət üstləri $i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_n$ bərabərsizliklərini ödəyir.

İsbatı. Verilən çoxhədlidə $x_1 \leftrightarrow x_2$ yerdəyişməsi aparaq. Onda bu çoxhədli və onun yüksək həddi dəyişməz. Beləliklə, yerdəyişmədən sonra $ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ birhədlisi $ax_2^{i_1} x_1^{i_2} \cdots x_n^{i_n} = ax_1^{i_2} x_2^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ bihədlisi ilə əvəz olunur. Bu hədd leksikoqrafik düzülüşdə yüksək həddən, yəni $ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ birhədlisindən aşağı olmalıdır. Deməli, x_1 dəyişəninə qüvvət üstü $i_1 \geq i_2$ bərabərsizliyini ödəməlidir. Oxşar mühakimələri apararaq $x_2 \leftrightarrow x_3$ yerdəyişməsi yerinə yetirsək $i_2 \geq i_3$ bərabərsizliyini alarıq və i. a. Beləliklə, lemma isbat olundu.

Qeyd olunduğu kimi simmetrik çoxhədlilər haqda əsas teorem $x_i \mapsto s_i$ inikası ilə müəyyən olunan $K[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow SK[x_1, x_2, \dots, x_n]$ inikasının epimorfizm olduğunu göstərir. Bu o deməkdir ki, ixtiyari $f \in SK[x_1, x_2, \dots, x_n]$ simmetrik çoxhədli verilsə, onda elə $g \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ çoxhədli tapmaq olar ki, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(s_1, s_2, \dots, s_n)$. Aşağıdakı əsas teorem daha güclü faktın – yuxarıdakı epimorfizmin izomorfizm olduğunu göstərir.

Teorem 3. İxtiyari $f \in SK[x_1, x_2, \dots, x_n]$ simmetrik çoxhədli verilsə, onda elə yeganə $g \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ çoxhədli tapmaq olar ki, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(s_1, s_2, \dots, s_n)$.

İsbatı. Əvvəlcə göstərilənin varlığını isbat edək. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ çoxhədlisinin yüksək həddini $ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ ilə işarə edək. Lemmaya əsasən $i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_n$ münasibəti doğrudur. Aşağıdakı çoxhədliyə baxaq:

$$\varphi_1 = as_1^{i_1-i_2} s_2^{i_2-i_3} \cdots s_{n-1}^{i_{n-1}-i_n} s_n^{i_n}.$$

φ_1 çoxhədli simmetrik çoxhədlidir. Onun yüksək həddini müəyyən edək. $s_1, s_2, \dots, s_n$ elementar simmetrik çoxhədlilərinin yüksək həddləri, uyğun olaraq, belə olacaqdır:

$$x_1, x_1 x_2, x_1 x_2 x_3, \dots, x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Onda φ_1 çoxhədlisinin yüksək həddi hasilin yüksək həddi haqda teorem 2-yə əsasən aşağıdakı kimi olar:

$$ax_1^{i_1-i_2}(x_1x_2)^{i_2-i_3} \cdot (x_1x_2x_3)^{i_3-i_4} \dots (x_1x_2 \dots x_{n-1})^{i_{n-1}-i_n} (x_1x_2 \dots x_n)^{i_n} = ax_1^{i_1}x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}.$$

Buradan görünür ki, $f_1 = f - \varphi_1$ çoxhədlisinin yüksək həddi leksikoqrafik düzülüşdə $ax_1^{i_1}x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ birhədlisindən aşağı olacaqdır. Lakin $f - \varphi_1 = f_1$ simmetrik çoxhədlilərin fərqi kimi özü simmetrik çoxhədlidir. Eyni mühakimələri bu çoxhədlilyə tətbiq etsək elementar simmetrik çoxhədlilərin hasili olan elə φ_2 çoxhədlisi tapa bilərik ki, $f_1 - \varphi_2 = f_2$ olmaqla, f_2 simmetrik çoxhədlisinin yüksək həddi f_1 -in yüksək həddindən aşağı olan simmetrik çoxhədlidir. Sonuncu iki bərabərlikdən alırıq ki,

$$f = \varphi_1 + \varphi_2 + f_2.$$

Prosesi bu qayda ilə davam etdirməklə, hər hansı bir s nömrəli addımdan sonra

$$f = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_s + f_s$$

bərabərliyini alırıq. Bu proses sonsuz davam edə bilməz, çünki, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$ çoxhədlilərinin yüksək hədləri azalan ardıcılıq təşkil edir. $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ şərtini ödəməklə

$$(i_1, i_2, \dots, i_n) \succ (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

şərtini ödəyən $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ kortejlərinin sayı ən çoxu $(i_1 + 1)(i_2 + 1) \dots (i_n + 1) \leq (i_1 + 1)^n$ ola bilər.

Deməli, elə s nömrəsi vardır ki, $f_s = 0$. Beləliklə, φ_j birhədlilərinin cəmini

$$\varphi_j = as_1^{i_1-i_2}s_2^{i_2-i_3} \dots s_{n-1}^{i_{n-1}-i_n}s_n^{i_n} + \dots$$

kimi işarə edərək alırıq:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^s \varphi_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = g(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

Teoremin isbatını başa çatdırmaq üçün ayrılışın yeganəliyini isbat edək. Əksini fərz edək. Yəni tutaq ki, elə iki $g_1, g_2 \in K[s_1, s_2, \dots, s_n]$ çoxhədliləri var ki,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1(s_1, s_2, \dots, s_n) = g_2(s_1, s_2, \dots, s_n) \quad (2)$$

olmaqla, $g_1 \neq g_2$. Onda, $h = g_1 - g_2 \neq 0$ və deməli, bu çoxhədlinin $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ -də sıfırdan fərqli yüksək həddi vardır. Bu yüksək hədd $h(s_1, s_2, \dots, s_n)$ çoxhədlisinin $K[s_1, s_2, \dots, s_n]$ halqasında ancaq yüksək həddinin açılışında vardır və $h(s_1, s_2, \dots, s_n)$ çoxhədlisini $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ -də yazdıqda islah oluna bilməz. Deməli, $h(s_1, s_2, \dots, s_n) \neq 0$ və teorem isbat olundu.

Misal. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - x_1^2x_2^2 - x_1^2x_3^2 - x_2^2x_3^2$ simmetrik çoxhədlisini elementar simmetrik çoxhədlilər vastəsilə ifadə edək.

f simmetrik çoxhədlisinin yüksək həddi x_1^4 -dür. Elementar simmetrik çoxhədlilərin uyğun kombinasiyalarını çıxmaqla, ardıcıl olaraq yüksək hədləri yox etdikdə, alınan çoxhədlilərin yüksək dərəcəli hədləri üçün aşağıdakı cədvəli tərtib edək:

4 0 0	$x_1^4 x_2^0 x_3^0$	$s_1^{4-0} s_2^{0-0} s_3^0 = s_1^4$
3 1 0	$A x_1^3 x_2^1 x_3^0$	$A s_1^{3-1} s_2^{1-0} s_3^0 = A s_1^2 s_2$
2 2 0	$B x_1^2 x_2^2 x_3^0$	$B s_1^{2-2} s_2^{2-0} s_3^0 = B s_2^2$
2 1 1	$C x_1^2 x_2^1 x_3^1$	$C s_1^{2-1} s_2^{1-1} s_3^1 = C s_1 s_3$

Bu cədvələ əsasən yazı bilərik:

$$f(x_1, x_2, x_3) = s_1^4 + A s_1^2 s_2 + B s_2^2 + C s_1 s_3. \quad (3)$$

Burada A, B, C sabit əmsallardır, həmin əmsalları təyin etmək üçün x_1, x_2, x_3 dəyişənlərinə ədədi qiymətlər verək və nəticələri aşağıdakı cədvələ yazaq:

x_1, x_2, x_3	s_1	s_2	s_3	f
1 1 -1	1	-1	-1	0
0 1 1	2	1	0	1
1 -1 0	0	-1	0	1

Beləliklə A, B, C əmsallarını təyin etmək üçün aşağıdakı tənliklər sistemini alırıq:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 1 - A + B - C \\ 1 = 16 + 4A + B \\ 1 = 0 + 0 + B + 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -A + B - C = -1 \\ 4A + B = -15 \\ B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} B = 1 \\ A = -4 \\ C = 6 \end{array} \right\}$$

Bu qiymətləri (3) –də yazaq.

$$f = s_1^4 - 4s_1^2 s_2 + s_2^2 + 6s_1 s_3$$

göstərilişini alırıq.

§3. Viyet düsturları

Fərz edək ki, unitar

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \in K[x]$$

çoxhədlisinin K meydanında n sayda kökü vardır. Bezu teoremini təkrar tətbiq etməklə,

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

alırıq. Sağ tərəfdə mötərizələri açaq:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) x^{n-1} + \\ &+ (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) x^{n-2} + \dots + x_1 x_2 \dots x_n = \end{aligned}$$

$$= x^n - s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n s_n.$$

Uyğun əmsalları bərabərləşdirək:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -a_1, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n &= a_2, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1 x_2 \dots x_n &= (-1)^n a_n. \end{aligned}$$

Bu düsturlar *Viyet düsturları* adlanır. $n=2$ olarsa, orta məktəb kursundan məlum olan Viyet düsturları alınır.

Fərz edək ki, K meydanı ilə birlikdə onu daxilinə alan başqa bir $K \subset L$ meydanı verilmişdir. Tutaq ki, $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisinin bu meydanda n sayda kökü vardır: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Teorem 1. Tutaq ki, $g(y_1, y_2, \dots, y_n) \in K[y_1, y_2, \dots, y_n]$ çoxhədlisi simmetrik çoxhədlidir, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ isə $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisinin K meydanının hər hansı genişlənməsində kökləridir. Onda, $g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K$.

İsbatı. $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ çoxhədlisi simmetrik çoxhədli olduğu üçün, simmetrik çoxhədlilər haqda əsas teoremə görə elə $h(y_1, y_2, \dots, y_n) \in K[y_1, y_2, \dots, y_n]$ çoxhədlisi tapmaq olar ki,

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = h(s_1, s_2, \dots, s_n);$$

Burada $s_1, s_2, \dots, s_n$ çoxhədliləri $y_1, y_2, \dots, y_n$ dəyişənlərinin elementar simmetrik çoxhədliləridir.

Viyet düsturlarına görə $s_i = (-1)^i a_i \in K$. Deməli, $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = h(-a_1, a_2, \dots, (-1)^n a_n) \in K$.

Teorem 1 isbat olundu.

Misal. Həqiqi əmsallı simmetrik

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - x_1^2 x_2^2 - x_1^2 x_3^2 - x_2^2 x_3^2$$

çoxhədlisinin $x^3 + x = 0$ tənliyinin köklərində aldığı qiyməti tapmaq. Yuxarıda göstərdik ki,

$$f = s_1^4 - 4s_1^2 s_2 + s_2^2 + 6s_1 s_3.$$

Viyet teoreminə əsasən $s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = 0$. Buna görə də,

$$f(0, i, -i) = 1.$$

Bilavasitə yoxlama ilə bu bərabərliyin doğru olduğunu yəqin etmək olar.

Teorem 1-in əhəmiyyəti bundan ibarətdir ki, o simmetrik çoxhədlinin qiymətini kökləri bilmədən hesablamağa imkan verir.

§4. İki çoxhədlinin rezultantı

Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədliləri K meydanı üzərində $K[x]$ çoxhədlilər halqasından götürülmüşdür. Bu çoxhədlilərin müsbət dərəcəli ortaq bölənə malik olması şərtini müəyyən edək.

Teorem 1. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədliləri K meydanı üzərində verilən çoxhədlilər olmaqla

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \\ g(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m \end{aligned}$$

və a_0, b_0 əmsallarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidir. f və g çoxhədlilərinin $K[x]$ -də müsbət dərəcəli ortaq böləninin olması üçün $K[x]$ -ə daxil olan və aşağıdakı şərtləri ödəyən c və d çoxhədlilərinin olması zəruri və kafidir:

- 1) $fc = gd$;
- 2) $c = c_0x^{m-1} + \dots + c_{m-1}, d = d_0x^{n-1} + \dots + d_{n-1}$;
- 3) c və d çoxhədlilərindən heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidir.

İsbat : Tutaq ki, f və g çoxhədlilərinin $K[x]$ -ə daxil olan müsbət dərəcəli U ortaq böləni vardır. Onda elə c və d çoxhədliləri vardır ki, $f = dU, g = cU$. Aydındır ki, $fc = gd$. Bu çoxhədlilərdən heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olduğu üçün asanlıqla yoxlamaq olar ki, c və d çoxhədliləri 1) – 3) şərtlərini ödəyir.

İndi isə fərz edək ki, 1)–3) şərtlərini ödəyən c və d çoxhədliləri vardır. Tutaq ki, $a_0 \neq 0$ $\deg f = n$. φ ilə c və d çoxhədlilərinin ƏBOB-ni işarə edək. Onda $K[x]$ -də elə c_1 və d_1 çoxhədliləri vardır ki,

$$c = c_1\varphi, d = d_1\varphi, (c_1, d_1) = 1 \quad (1)$$

Qeyd edək ki, $d_1 \neq 0$ -dır. Əks halda $d=0$ və 1) şərtinə əsasən buradan $c=0$ alınardı ki, bu mümkün deyil ($c=0$ olması 3) şərtinə ziddir). (1)-ə və teoremin 1) şərtinə əsasən

$$fc_1\varphi = gd_1\varphi.$$

Deməli,

$$fc_1 = gd_1. \quad (2)$$

d_1 çoxhədlisi fc_1 - in böləni olmaqla c_1 -lə qarşılıqlı sadə olduğundan d_1 çoxhədlisi f -in böləni-dir; yəni

$$f = d_1t. \quad (3)$$

d_1 - in dərəcəsi d - nin dərəcəsiindən yüksək deyil. d -nin dərəcəsi isə 2) şərtinə görə f - in dərəcəsiindən kiçikdir. Deməli, t müsbət dərəcəli çoxhədlidir. (3) və (2) –dən alırıq ki,

$$d_1c_1t = gd_1 \Rightarrow g = c_1t.$$

Beləliklə, t çoxhədli f və g çoxhədlərinin müsbət dərəcəli ortaq bölənidir. Teorem 1-in isbatı başa çatdı.

$$(a_0x^n + \dots + a_n)(c_0x^{m-1} + \dots + c_{m-1}) = (b_0x^m + \dots + b_m)(dx^{n-1} + \dots + d_{n-1}) \quad (4)$$

bərabərliklərini hər iki tərəfində mötərizələri açsaq və x –in eyni dərəcəli əmsallarını bir –birinə bərabərlişdirsək, aşağıdakı kimi xətti tənliklər sistemi alarıq:

$$\begin{aligned} a_0c_0 &= b_0d_0, \\ a_1c_0 + a_0c_1 &= b_1d_0 + b_0d_1, \\ a_2c_0 + a_1c_1 + a_0c_2 &= b_2d_0 + b_1d_1 + b_0d_2, \\ &\dots \dots \dots \dots \\ a_nc_{m-2} + a_{n-1}c_{m-1} &= b_md_{n-2} + b_{m-1}d_{n-1} \\ a_nc_{m-1} &= b_md_{n-1} \end{aligned}$$

Bu sistem $n+m$ məchullu ($c_0, c_1, \dots, c_{m-1}, d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ dəyişənlərindən asılı) $n+m$ sayda tənlikdən ibarət xətti tənliklər sistemidir. Sağ tərəfdəki hədləri sol tərəfə keçirsək, onun bircins xətti tənliklər sistemi olduğunu yəqin edə bilərik. Bu sistemin sıfırdan fərqli həllinin olması üçün zəruri və kafi şərt sistemin determinantının sıfıra bərabər olmasıdır. Elementlərin qarşısındakı mənfi işarələrdən azad olmaq üçün məchulların $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}, -d_0, -d_1, \dots, -d_{n-1}$ olduğunu qəbul etmək məqsədəuyğundur. Determinantın matrisini transponirə etməklə, onu aşağıdakı şəkildə salmaq olar:

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_m & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Bu determinantda boş yerlərdə sıfırlar dayanır.

Tərif. $R(f, g)$ determinantına $f = a_0x^n + \dots + a_n$ və $g = b_0x^m + \dots + b_m$ çoxhədlilərinin *rezultantı* deyilir.

Teorem 1-ə əsasən f və g çoxhədlilərinin (burda $a_0 \neq 0$ və ya $b_0 \neq 0$) müsbət dərəcəli ortaq bölənin olması üçün zəruri və kafi şərt onların rezultatının sıfıra bərabər olmasıdır. Beləliklə aşağıdakı teoremi isbat etdik.

Teorem 2. Tutaq ki, $f = a_0x^n + \dots + a_n$ və $g = b_0x^m + \dots + b_m$ çoxhədlilərindən heç olmazsa birinin yüksək həddi sıfırdan fərqlidir. f və g çoxhədliləri müsbət dərəcəli ortaq böləninin olması üçün zəruri və kafi şərt onların rezultatının sıfıra bərabər olmasıdır.

Buradan aşağıdakı nəticə alınılır .

Nəticə. Əgər f və g çoxhədlilərinin rezultantı sıfıra bərabədirsə, onda ya bu çox hədlilər müsbət dərəcəli ortaq bölənə malikdir, və ya a_0 və b_0 əmsalları sıfıra bərabərdir.

§5. İki dəyişənli tənliklər sistemindən dəyişənin yox edilməsi

Xətti tənliklər sisteminin Qaus üsulu ilə həlli zamanı biz gördük ki, sistemi həll edərkən dəyişənlərin tədricən yox edilməsindən istifadə olunur. Eyni üsuldən ixtiyari (xətti olmayan) cəbri tənliklər sisteminin həllində də istifadə etmək olar. Bu yolla tənliklər sistemini həlli bir tənliyin həllinə gətirilir. Resultant və onun xassələri dəyişənlərin yox edilməsi üçün əsas rol oynayır.

Tutaq ki, aşağıdakı kimi tənliklər sistemi verilmişdir :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Burada f və g çoxhədliləri baxılan meydan üzərində verilmiş iki dəyişənli çoxhədlilərdir. Bu çoxhədliləri x -in azalan qüvvətlərinə görə düzək :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \dots + a_n(y), \\ g(x, y) &= b_0(y)x^m + b_1(y)x^{m-1} + \dots + b_m(y). \end{aligned}$$

Burada $a_i(y)$ və $b_k(y)$ əmsalları $K[y]$ halqasından götürülmüş çoxhədlilərdir. f və g çoxhədlilərinin $R(y)$ rezultantını tapaq. Resultant y dəyişənindən asılı çoxhədli olacaqdır. Tutaq ki, (1) sisteminin K meydanında (α, β) kimi həlli vardır. Onda

$$\begin{aligned} f(x, \beta) &= a_0(\beta)x^n + a_1(\beta)x^{n-1} + \dots + a_n(\beta) \\ g(x, \beta) &= b_0(\beta)x^m + b_1(\beta)x^{m-1} + \dots + b_m(\beta) \end{aligned}$$

çoxhədlilərinin ortaq α kökü vardır. Ona görə də bu çoxhədlilər müsbət dərəcəli ortaq bölənə malikdir. Onda teorem 2 –yə görə bu çoxhədlilərin rezultantı olan $R(\beta)$ ədədi sıfıra bərabər olmalıdır. Tərsinə, əgər β ədədi $R(y)$ rezultantının köküdürsə, yəni $R(\beta) = 0$ isə, onda yuxardakı nəticəyə görə $f(x, \beta)$ və $g(x, \beta)$ çoxhədlilərinin ya ortaq kökü vardır, yaxud $a_0(\beta)$ və $b_0(\beta)$ əmsallarının hər ikisi sıfıra bərabərdir.

Beləliklə, (1) tənliklər sisteminin həlli ancaq y -dən asılı tənliyin (və ya tənliklərin) həllinə gətirilir. Bu yolla biz (1) sistemindən x məchulunun kənar etmiş oluruq. Nəticədə çoxhədlilərin rezultantının köməyi ilə qeyri-xətti tənliklər sistemini həll etmək üçün üsul alırıq.

Misal. Aşağıdakı sistemi həll edək:

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2y + 3xy + 2y + 3 \\ g(x, y) = 2xy - 2x + 2y + 3 \end{cases} \quad (1)$$

Bu sistemdən x məchulu kənar edək. Bunun üçün (1) sistemini

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= yx^2 + 3yx + (2y + 3) \\ g(x, y) &= (2y - 2)x + (2y + 3) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

şəklində yazaq. Çoxhədlilərin y -dən asılı rezultantını tapan.

$$\begin{aligned} R(y) &= \begin{vmatrix} y & 3y & 2y+3 \\ 2y-2 & 2y+3 & 0 \\ 0 & 2y-2 & 2y+3 \end{vmatrix} = y(2y+3)^2 + (2y+3)(2y-2)^2 - 3y(2y-2)(2y+3) = \\ &= 2y^2 + 11y + 12. \end{aligned}$$

Rezultantın kökləri $\beta_1 = -4, \beta_2 = -\frac{3}{2}$ -dir. y -in bu qiymətlərində (2) sistemində x -in yüksək dərəcəli hədlərinin əmsalları sıfıra bərabər deyil. Deməli, rezultantın xassəsinə əsasən hökm edə bilərik ki, aşağıdakı çoxhədlilərin ortaq kökləri vardır:

$$\begin{aligned} f(x, -4) &= -4x^2 - 12x - 5, \\ g(x, -4) &= -10x - 5. \end{aligned}$$

Həmin ortaq kökləri bunlardan birinin (daha sadə olanın) kökləri içərisində axtarmaq lazımdır.

İkinci çoxhədlinin bir kökü var $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ və o axtarılan ortaq kökdür (bunu yoxlamaqla yəqin

etmək olar. Analoji olaraq, $\beta_2 = -\frac{3}{2}$ olduqda

$$\begin{aligned} f\left(x, -\frac{3}{2}\right) &= -\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x \\ g\left(x, -\frac{3}{2}\right) &= -5x \end{aligned}$$

çoxhədlilərinin $\alpha_2 = 0$ ortaq kökün tapırıq. (2) sistemində baş hədlərin əmsallarının ortaq kökü

olmadığı üçün sistemin ancaq iki həlli vardır: $\alpha_1 = -\frac{1}{2}, \beta_1 = -4$ və $\alpha_2 = 0, \beta_2 = -\frac{3}{2}$.

§6. Diskriminant

Tutaq ki, $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisi verilmişdir:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, a_0 \neq 0. \quad (1)$$

Məlumdur ki, $f(x)$ çoxhədlisinin təkrar c kökünün olması üçün zəruri və kafi şərt $f(c) = f'(c) = 0$ bərabərliyinin ödənməsidir. Deməli, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisinin təkrar kökü olması üçün $R(f, f') = 0$ olması zəruri və kafi şərtidir.

Tərif. (1) bərabərliyi ilə təyin olunan f çoxhədlisi üçün

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{-1} R(f, f')$$

ifadəsinə verilən çoxhədlinin *diskriminantı* deyilir.

Nəticə. $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisinin təkrar kökü olması üçün $D(f) = 0$ olması zəruri və kafi şərtidir.

Misal 1. Fərz edək ki,

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

Onda, $f'(x) = 2ax + b$. Deməli,

$$R(f, f') = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = ab^2 + 4a^2c - 2ab^2 = a(4ac - b^2).$$

Beləliklə,

$$D(f) = -a^{-1} R(f, f') = b^2 - 4ac$$

və biz diskriminantın məlum ifadəsini aldıq.

Misal 2. İndi isə üçdərəcəli $f(x) = x^3 + px + q$ çoxhədlisinin diskriminantını hesablayaq.

$$f'(x) = 3x^2 + p.$$

Düstura əsasən

$$D(f) = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & -2p & -3q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2p & -3q \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 2p & 3q & 0 \\ 0 & 2p & 3q \\ 3 & 0 & p \end{vmatrix} = -4p^3 - 27q^2 = -108 \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right) = -108\Delta.$$

Beləliklə, baxılan üçdərəcəli çoxhədlinin diskriminantı uyğun kub tənliyin həlledici tənliyinin diskriminantından -108 vuruğu ilə fərqlənir.

VI FƏSİL. Cəbri genişlənmələr

§1. Sonlu genişlənmələr

İki K və L meydanlı üçün $K \subset L$ münasibəti ödənərsə, onda L meydanı K meydanının genişlənməsi adlanır və L/K kimi işarə olunur. Asanlıqla yəqin etmək olar ki, L meydanı K üzərində xətti fəzadır. Bu xətti fəzanın ölçüsü $[K:L]$ kimi işarə olunur.

Tərif 1. Əgər $[K:L] < +\infty$ sonlu olarsa, onda L meydanı K meydanının *sonlu genişlənməsi* adlanır.

Misallar. 1. C kompleks ədədlər meydanında hər bir α kompleks ədədini yeganə qayda ilə $\alpha = a + bi$ kimi yazmaq olar. 1 və i ədədləri isə həqiqi ədədlər meydanı üzərində xətti asılı deyil. Beləliklə, $[C : R] = 2$ və buna görə də C / R genişlənməsi sonlu genişlənmədir.

2. R / Q genişlənməsi sonlu genişlənmə deyil. Bu genişlənmənin cəbri olmadığı ilk dəfə Ermit tərəfindən göstərilmişdir. O isbat etmişdir ki, e ədədi cəbri ədəd deyil, yəni heç bir rəşional əmsallı tənliyin kökü deyil.

Teorem 1. F, L, K meydanları üçün $[F : L] = m, [L : K] = k$ olarsa, onda $[F : K] = mk$.

İsbatı. Tutaq ki, F / L genişlənməsinin bazisi $x_1, x_2, \dots, x_m$, L / K genişlənməsinin bazisi isə $y_1, y_2, \dots, y_k$, -dir. Göstərək ki, bütün mümkün $x_i y_j, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, k$ hasilləri F / K genişlənməsi üçün bazis təşkil edir. Bunun üçün onların K meydanı üzərində xətti asılı olmadığını və F meydanının hər bir elementinin bu hasillərin xətti kombinasiyası olduğunu göstərmək lazımdır.

Sıfır bərabər olan xətti kombinasiya götürək:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k c_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^m x_i \left(\sum_{j=1}^k c_{ij} y_j \right) = 0.$$

Mötərizə içərisində olan cəm L meydanının elementidir və deməli, ikiqat cəm bazis vektorların F meydanında xətti kombinasiyasıdır. Buradan alırıq:

$$\sum_{j=1}^k c_{ij} y_j = 0, i = 1, \dots, m.$$

Yenə də bazis vektorların xassəsinə əsasən hər bir i üçün $c_{ij} = 0, j = 1, \dots, k$.

İndi isə ixtiyari $\alpha \in F$ elementi götürək. Onu F meydanında bazis elementlərin xətti kombinasiyası kimi yazmaq olar:

$$\alpha = \sum_{i=1}^m a_i x_i, a_i \in L. \quad (1)$$

Hər bir a_i elementini L meydanında bazis elementlərin xətti kombinasiyası kimi yazmaq olar:

$$a_i = \sum_{j=1}^k c_{ij} y_j, c_{ij} \in K.$$

Bu bərabərlikləri (1)-də nəzərə alsaq, onda α elementini $x_i y_j, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, k$ elementlərinin xətti kombinasiyası şəklində göstərişini almış olarıq. Teorem 2 isbat olundu.

Teorem 2 göstərir ki, hər hansı meydanın iki ardıcıl sonlu genişlənməsi yenə də ilkin meydanın sonlu genişlənməsinə gətirir.

§2. Cəbri genişlənmə

Tərif 2. Əgər L meydanının hər bir elementi K meydanı üzərində cəbri element olarsa, onda belə genişlənmə *cəbri genişlənmə* adlanır.

Misal. C/R genişlənməsi cəbri genişlənmədir. Doğudan da, hər bir $\alpha \in C$ elementi üçün

$$\alpha = a + bi \rightarrow (\alpha - a)^2 = -b^2 \rightarrow \alpha^2 - 2a\alpha + a^2 + b^2 = 0,$$

yəni hər bir kompleks ədəd həqiqi əmsallı cəbri tənliyin köküdür. Bu tənliyin dərəcəsi 2-dən böyük deyil. Sonuncu faktı ümumi şəkildə söyləmək olar.

Teorem 1. Hər bir sonlu L/K genişlənməsi cəbri genişlənmədir. Əgər $[K:L] = n$ olarsa, onda ixtiyari $\alpha \in L$ elementi üçün elə $f(x) \in K[x]$, $\deg f(x) \leq n$ çoxhədlisi var ki, $f(\alpha) = 0$.

İsbatı. $[K:L] = n$ olduğu üçün L/K genişlənməsi K meydanı üzərində xətti fəzadır. Onda $n+1$ sayda

$$1, \alpha, \dots, \alpha^n$$

elementləri xətti asılıdır. Deməli, elə $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ elementləri vardır ki,

$$a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0.$$

Deməli, α elementi cəbri elementdir. Teorem isbat olundu.

Tərif 3. α cəbri elementinin kökü olduğu ən kiçik dərəcəli unitar çoxhədlisyə bu elementin *minimal çoxhədlisi* deyilir (bəzi ədədbiyyatda o, *Irr* α kimi işarə olunur). Minimal çoxhədlinin dərəcəsi n olarsa, α *n dərəcəli cəbri element* adlanır.

Misallar 1. $\sqrt{2}$ ədədi cəbri ədəddir. Onun minimal çoxhədlisi $f(x) = x^2 - 2$ -dir. $\sqrt{2}$ -nin cəbrilik dərəcəsi 2-dir.

2. $2 - \sqrt[3]{5}$ ədədi cəbri ədəddir. Onun minimal çoxhədlisi

$$f(x) = (x - 2)^3 + 5 = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$$

olacaqdır.

Minimal çoxhədlinin əsas xassələri aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem 2. Tutaq α elementi K meydanı üzərində cəbri elementdir, $f(x)$ isə onun minimal çoxhədlisidir. Aşağıdakı hökmlər doğrudur:

- 1) $f(x)$ gətirilməyən çoxhədlidir;
- 2) Əgər $g(x)$ kökü α olan ixtiyari çoxhədli olarsa, onda $g(x) : f(x)$;
- 3) α elementinin minimal çoxhədlisi yeganədir.

İsbatı. 1) Əksini fərz edək, yəni tutaq ki, $f(x)$ çoxhədlisi gətirilən çoxhədlidir. Onda onu iki müsbət dərəcəli çoxhədlinin hasilinə kimi göstərmək olar:

$$f(x) = g(x)h(x).$$

x -i α elementi ilə əvəz etsək yazı bilərik: $f(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha) = 0$. Onda vuruqlardan heç olmazsa biri sıfıra bərabərdir: $g(\alpha) = 0 \vee h(\alpha) = 0$. Lakin bu ola bilməz, çünki, bu halda α elementi dərəcəsi minimal çoxhədlinin dərəcəsiindən kiçik çoxhədlinin kökü olardı. Deməli, fərziyyəmiz doğru deyil, yəni $f(x)$ çoxhədlisi gətirilməyən çoxhədlidir.

2) $g(x)$ çoxhədlisini $f(x)$ -ə qalıqlı bölk:

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x); r(x) = 0 \vee \deg r(x) < \deg f(x).$$

İkinci hal mümkün deyil, çünki, bu halda $g(x) = f(x)q(x) + r(x)$ bərabərliyində x -i α elementi ilə əvəz edərək, alırıq: $0 = g(\alpha) = f(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha)$. Bu o deməkdir ki, α elementi dərəcəsi minimal çoxhədlinin dərəcəsiindən kiçik olan çoxhədlinin köküdür. Bu minimal çoxhədlinin tərifinə ziddir. Beləliklə, ancaq $r(x) = 0$ olmalıdır və bu halda $g(x) \div f(x)$.

3) Fərz edək ki, $g(x)$ α elementinin başqa bir minimal çoxhədlisidir. Onda, $g(x) = 0$ və 2) bəndinə görə $g(x) \div f(x)$. Eyni zamanda, $g(x)$ -də minimal çoxhədlidir və $f(x) = 0$. Onda 2) xassəsinə əsasən $f(x) \div g(x)$. Deməli, $f(x) = cg(x)$. Lakin, minimal çoxhədli unitar çoxhədli olduğundan $c=1$ olmalıdır.

Teorem 2 isbat olundu.

Nəticə. Əgər $f(x)$ gətirilməyən çoxhədli olmaqla, α cəbri elementi onun köküdür, onda $f(x)$ -n normallaşdırılması ilə alınan unitar çoxhədli α -nın minimal çoxhədlisi olacaqdır.

Nəticə teorem 2-nin 2) bəndindən dərhal alınır.

Misal. $\alpha = 3 - \sqrt[4]{6}$ cəbri ədədinin minimal çoxhədlisini tapaq.

$\sqrt[4]{6} = 3 - \alpha$ olduğundan $(3 - \alpha)^4 = 6$ və ya $\alpha^4 - 12\alpha^3 + 90\alpha^2 - 108\alpha + 75 = 0$. Beləliklə, α ədədi $f(x) = x^4 - 12x^3 + 90x^2 - 108x + 75$ çoxhədlisinin köküdür. $p = 3$ götürməklə yəqin etmək olar ki, bu çoxhədli üçün Eyzenşteyn əlamətinin şərtləri ödənilir, yəni $-12 \div 3, 90 \div 3, -108 \div 3, 75 \div 3$ olmaqla, $75 \nmid 9$. Deməli, $f(x)$ gətirilməyəndir və nəticəyə əsasən o, α ədədinin minimal çoxhədlisidir.

§3. Sadə cəbri genişlənmə

L/K genişlənməsində K meydanı üzərində $\alpha \in L$ cəbri elementi götürək.

Tərif 1. L meydanının α elementininə və K meydanını özündə saxlayan ən kiçik alt meydanı K meydanının α elementini birləşdirməklə alınan *sadə genişlənməsi* deyilir və $K(\alpha)$ kimi işarə olunur.

Qeyd edək ki, tərifdə ifadə olunan ən kiçik alt meydanı göstərilən xassələrə malik olan bütün alt meydanların kəsişməsi kimi qəbul etmək olar.

Misal. $K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\} \subset R$ çoxluğu meydan təşkil edir. Bu meydan Q rasional ədədlər meydanını və $\sqrt{2}$ elementini daxilinə alır. 1 və $\sqrt{2}$ ədədləri rasional ədədlər meydanını üzərində xətti asılı deyil, əks halda $\sqrt{2}$ rasional ədəd olardı. Deməli, K göstərilən xassələrə malik ən kiçik alt meydandır və buna görə də $K = Q(\sqrt{2})$.

Sadə genişlənmənin quruluşunu müəyyən edək. Aydındır ki, α elementi ilə birlikdə sadə genişlənmə bu elementin bütün

$$1 = \alpha^0, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^m, \dots$$

qüvvətlərini də daxilinə alır. Buna görə də hər bir $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisi üçün $f(\alpha) \in K(\alpha)$.

Məlumdur ki, əgər $\psi : f(x) \mapsto f(\alpha)$ qiymət homomorfizmi olarsa, onda onun obrazı olan

$$K[\alpha] = \{f(\alpha) \mid f(x) \in K[x]\}$$

halqası $K(\alpha)$ sadə genişlənməsində alt halqa olar.

$$\psi : K[x] \rightarrow K[\alpha]$$

homomorfizmi suryektiv homomorfizmdir. Onun nüvəsi $f(\alpha) = 0$ şərtini ödəyən, yəni köklərindən biri α olan çoxhədlilərdən ibarətdir. §2, teorem 2-nin 2) bəndinə əsasən bu çoxhədlilərin hamısı α elementinin $\varphi(x)$ minimal çoxhədlisinə bölünür. Tərsinə, bu çoxhədliliyə bölünən hər bir çoxhədlinin köklərindən biri α -dır. Deməli, homomorfizmin nüvəsi $(\varphi(x))$ baş idealından ibarətdir. Homomorfizmlər haqda əsas teoremə görə

$$K[x]/(\varphi(x)) \cong K[\alpha].$$

Göstərək ki, $K[\alpha]$ halqası əslində meydandır. Fərz edək ki, $\deg \varphi = n$. İxtiyarı $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisini $\varphi(x)$ -ə qalıqlı bölək:

$$f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x),$$

burada $r(x) = 0 \vee \deg r(x) < \deg \varphi(x)$. Deməli, $f(\alpha) = r(\alpha)$. Bu o deməkdir ki, hər bir $f(\alpha) \in K[\alpha]$ elementi ancaq $1 = \alpha^0, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ elementlərinin xətti kombinasiyası kimi yazıla bilər. Bu elementlər xətti asılı ola bilməz. Əks halda, hamısı sıfır olmayın elə $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in K$ elementləri tapmaq olar ki,

$$c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{n-1}\alpha^{n-1} = 0$$

bərabərliyi doğru olsun. Lakin bu $\varphi(x)$ -in minimal çoxhədli olması şərtinə ziddir. Nəticədə aldığımız ki, $K[\alpha]$ halqası K meydanı üzərində n ölçülü xətti fəza təşkil edir.

Əgər $\overline{g(x)} \in K[x]/(\varphi(x))$ sıfır deyilsə, onda $g(x) \nmid \varphi(x)$ olar. $\varphi(x)$ gətirilməyən olduğu üçün, bu münasibət göstərir ki, $(g(x), \varphi(x)) = 1$ və ƏBOB-un xassəsinə əsasən yaza bilirik:

$$(\exists u, v \in K[x])(gu + v\varphi = 1).$$

Bu münasibətdə x dəyişənini α ilə əvəz etsək və $\varphi(\alpha) = 0$ olduğunu nəzərə alsaq, aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$g(\alpha)u(\alpha) = 1 \Rightarrow u(\alpha) = (g(\alpha))^{-1}.$$

Deməli, $K[\alpha]$ halqasının hər bir sıfırdan fərqli elementinin tərsi vardır. Doğrudan da, $g(\alpha) \neq 0$ isə, onda $g(x) \notin (\varphi(x))$ və $\overline{g(x)} \in K[x]/(\varphi(x))$. Yuxarıda göstərildiyi kimi bu elementin tərsi vardır $\overline{g(x)}^{-1} = \overline{u(x)}$. Nəticə etibarilə, biz göstərdik ki, $K[\alpha]$ halqası meydandır. Bu meydan K halqasını və α elementini daxilinə alır. Onda həmin meydan $K(\alpha)$ sadə genişlənməsinin alt meydanı olar. Beləliklə,

$$K[\alpha] \subset K(\alpha) \subset K[\alpha] \Rightarrow K[\alpha] = K(\alpha).$$

Biz aşağıdakı teoremi isbat etdik.

Teorem. Tutaq ki, α n dərəcəli cəbri element, $\varphi(x)$ isə onun minimal çoxhədlisidir.

Onda aşağıdakı təkliflər doğrudur:

1) $K[x]/(\varphi(x)) \cong K[\alpha];$

2) $1 = \alpha^0, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ elementləri xətti asılı deyil;

3) $K[\alpha]$ halqası K meydanı üzərində n ölçülü xətti fəzadır və $1 = \alpha^0, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ elementləri onun bazisidir;

4) $K(\alpha) = K[\alpha].$

Geyd olunduğu kimi $K[\alpha]$ halqası $f(\alpha)$ kimi elementlərdən ibarətdir. Tamlıq oblastı kimi onun nisbətlər meydanı $\frac{g(\alpha)}{h(\alpha)}$ şəklində kəsrlərdən ibarətdir. Lakin teoremə əsasən bu kəsri $f(\alpha) \in K[u]$ kimi yzmaq olar. Bu proses kəsrin məxrəcinin α cəbri irrasiionallığından azad olunması adlanır. Yuxarıda deyilənlər kəsrin məxrəcində irrasiionallıqdan azad olmaq üçün üsul verir. Deyilənləri bir misal üzərində nümayiş etdirək.

Misal. $\frac{1 + \sqrt[3]{7}}{2 - 3\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}}$ kəsrinin məxrəcini irrasiionallıqdan azad edək.

Həlli. $g(x) = 2 - 3x + x^2, h(\alpha) = 1 + \alpha$ və $\alpha = \sqrt[3]{7}$ işarə etsək, yuxarıda olduğu kimi məsələ $u(\alpha)h(\alpha)$ hsilinin tapılmasına gətirilir. $\alpha = \sqrt[3]{7}$ elementinin minimal çoxhədlisi $\varphi(x) = x^3 - 7$ -yə bərabərdir. $(g(x), \varphi(x)) = 1$ olduğu üçün

$$gu + \varphi v = 1 \quad (1)$$

münasibətini ödəyən u və v çoxhədliləri vardır. Bu çoxhədlilər üçün

$$\deg u < \deg \varphi, \deg v < \deg g$$

münasibətləri ödəyir. Həmin çoxhədliləri qeyri-müəyyən əmsallar üsulundn istifadə etməklə tapmaq olar. $\deg u(x) < 3$ və $\deg v(x) < 2$ olduğundan

$$u(x) = u_2 x^2 + u_1 x + u_0, \quad v(x) = v_1 x + v_0$$

qəbul edə bilərik; burada u_2, u_1, u_0, v_1, v_0 əmsalları (1) münasibəti vasitəsi ilə tapılır. (1) ünsibəti-ni açıq şəkildə yazaq:

$$(x^2 - 3x + 2)(u_2 x^2 + u_1 x + u_0) + (x^3 - 7)(v_1 x + v_2) = 1.$$

Mötərizələri açaraq, sağ və sol tərəfdəki çoxhədlilərin uyğun əmsallarını bərabərləşdirək.

$$(u_2 + v_1)x^4 + (-3u_2 + u_1 + v_2)x^3 + (2u_2 - 3u_1 + u_0)x^2 + (2u_1 - 3u_0 - 7v_1)x + 2u_0 - 7v_2 = 1.$$

Bərabərliyin sol və sağ tərəflərindəki çoxhədlilərin uyğun əmsallarını bərabərləşdirdikdən sonra belə bir xətti tənkilər sistemi alırıq:

$$\begin{array}{ccccccc} u_2 & & & & + v_1 & & = 0, \\ -3u_2 & + u_1 & & & & + v_2 & = 0, \\ 2u_2 & -3u_1 & + u_0 & & & & = 0, \\ & 2u_1 & -3u_0 & -7v_1 & & & = 0, \\ & & 2u_0 & & -7v_2 & & = 1. \end{array}$$

v_1, v_2 dəyişənlərini 1-ci və 2-ci tənliklərdən tapmaq və sonuncu iki tənlikdə nəzərə alaraq. Onda sistem aşağıdakı şəkildə düşər:

$$\begin{array}{ccccccc} 2u_2 & -3u_1 & + u_0 & = & 0, \\ 7u_2 & + 2u_1 & -3u_0 & = & 0, \\ -21u_2 & 7u_1 & + 2u_0 & = & 1. \end{array}$$

Sistemi Kramer üsulu ilə həll edək. Sistem determinantını tapmaq:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & -3 \\ -21 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 49 - 189 + 42 + 42 + 42 = -6.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7, \Delta_1 = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 13, \Delta_0 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 25.$$

Beləliklə,

$$u(x) = -\frac{7}{6}x^2 - \frac{13}{6}x - \frac{25}{6}.$$

Nəticədə alırıq:

$$u(\alpha)h(\alpha) = \left(-\frac{7}{6}\alpha^2 - \frac{13}{6}\alpha - \frac{25}{6}\right)(1+\alpha) = \\ = -\frac{7}{6}\alpha^3 - \frac{20}{6}\alpha^2 - \frac{38}{6}\alpha - \frac{25}{6} = -\frac{20}{6}\alpha^2 - \frac{38}{6}\alpha - \frac{74}{6}.$$

Yoxlama.

$$(2 - 3\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}) \left(-\frac{10}{3}\sqrt[3]{49} - \frac{19}{3}\sqrt[3]{7} - \frac{37}{3} \right) = \frac{-(38 - 111 + 70)\sqrt[3]{7}}{3} - \\ - \frac{(20 - 57 + 37)\sqrt[3]{49}}{3} - \frac{74 + 133 - 210}{3} = 1 + \sqrt[3]{7}.$$

§4. Mürəkkəb cəbri genişlənmə

Sadə genişlənmənin qurulma qaydası ilə ardıcıl olaraq aşağıdakı kimi iki və daha artıq genişlənmə qurmaq olar:

$$\kappa = K(\theta), \rho = \kappa(\eta).$$

Burada θ və η elementləri K meydanı üzərində cəbri elementlərdir. Beləliklə biz, K meydanına iki cəbri elementin birləşdirilməsi ilə qurulmuş genişlənmə aldığımızı. Bu genişlənmə θ və η elementlərini və K meydanını daxilinə alan ən kiçik meydanıdır.

Tərif 1. K meydanının, θ və η cəbri elementlərini daxilinə alan ən kiçik meydan K meydanının, bu elementləri birləşdirməklə alınan *mürəkkəb genişlənməsi* adlanır və $K(\theta, \eta)$ kimi işarə olunur.

Tərifdən aydındır ki, K meydanının istənilən sayda cəbri elementləri birləşdirməklə alınan mürəkkəb genişlənməsini qurmaq olar. Əlbəttə, belə genişlənmələrdən bəziləri meydanı dəyişməyə də bilər. Məsələn, Q rasional ədədlər meydanına $\sqrt{2}$ və $-\sqrt{2}$ ədədlərini birləşdirməklə alınan mürəkkəb genişlənmə tək bir $\sqrt{2}$ ədədini birləşdirməklə alınan sadə genişlənmə ilə eynidir. Genişlənmənin necə qurulması məsələsinə gəlicə, bu proses müəyyən bir geniş meydan və ya halqada yerinə yetirilə bilər.

Mürəkkəb genişlənmənin quruluşunu müəyyən etməzdən əvvəl bir misalı nəzərdən keçirək. Rasional ədədlər meydanının iki sadə genişlənməsinə baxaq: $Q(\sqrt{2})$ və $Q(\sqrt{3})$. $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ genişlənməsi əvvəlki iki genişlənmə kimi sonlu genişlənmədir. Genişlənmələrin aşağıdakı kimi

$$Q \prec Q(\sqrt{2}) \prec Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

“qülləsinə” baxaq. $Q(\sqrt{2})/Q$ genişlənməsinin bazisi $1, \sqrt{2}$ ədədləridir. $\sqrt{3} \notin Q(\sqrt{2})$ olduğundan $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ genişlənməsinin xətti fəza kimi $Q(\sqrt{2})$ üzərində bazisi $1, \sqrt{3}$ olacaqdır. Onda, §1, teorem 1-ə əsasən, mürəkkəb genişlənmə Q meydanı üzərində aşağıdakı bazisə malik olacaqdır: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$. İndi isə $\theta = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ədədinin ardıcıl qüvvətlərinə baxaq:

$$\theta^0 = 1, \theta = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \theta^2 = 5 + 2\sqrt{6}, \theta^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}.$$

$\theta = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ədədinin cəbrilik dərəcəsi 4 (göstərin) olduğu üçün və onun qvvətləri $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ bazis elementləri ilə ifadə oluna bildiyi üçün yazı bilərik $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = Q(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Göründüyü kimi, mürəkkəb genişlənmə sadə genişlənmə ilə alınır.

Teorem 2. Tutaq ki, K meydanının iki cəbri θ və η elementləri ilə alınan $K(\theta, \eta)$ mürəkkəb genişlənməsi verilmişdir. Onda elə $\alpha \in K(\theta, \eta)$ elementi vardır ki, $K(\theta, \eta) = K(\alpha)$.

İsbatı. Genişlənmələrin aşağıdakı ardıcılığına baxaq:

$$K \prec K(\theta) \prec K(\theta, \eta).$$

Əgər $\eta \in K(\theta)$ olarsa, onda $K(\theta) = K(\theta, \eta)$ və $\alpha = \theta$ qəbul etsək teoremin hökmünü alırıq.

İndi fərz edək ki, $\eta \notin K(\theta)$. Bu halda, η elementi $K(\theta)$ üzərində cəbri elementdir. Onun $K(\theta)$ üzərində dərəcəsini m ilə işrə etsək, $1, \eta, \dots, \eta^{m-1}$ qvvətləri $K(\theta, \eta)/K(\theta)$ genişlənməsinin bazisi olar. §1, teorem 1-ə görə $K(\theta, \eta)/K$ genişlənməsi sonlu genişlənmədir və onun $\theta + c\eta$ ($c \in K$) elementi K üzərində cəbri elementdir. c elementi sonsuz sayda müxtəlif qiymətlər aldıqca biz, bazisi, §1, teorem 1-ə görə, $\theta^i \eta^j$ ($i=1, \dots, n-1, j=1, \dots, m-1$) hasillərindən düzələn genişlənmələr alırıq. Aydınır ki, belə xətti fəzalar sonlu saydadır. Deməli, onlar içərisində $K(\theta + c\eta)$ kimi genişlənmələr də sonlu saydadır. Beləliklə, elə iki müxtəlif $c_1, c_2 \in K$ elementləri tapmaq olar ki,

$$K' = K(\theta + c_1\eta) = K(\theta + c_2\eta).$$

Deməli, $\theta + c_1\eta, \theta + c_2\eta \in K'$, yaxud, $(c_1 - c_2)\eta \in K' \rightarrow \eta \in K'$. Minimallığa görə burardan

$$K' = K(\theta, \eta) = K(\theta + c_1\eta)$$

alırıq. Teorem 2 isbat olundu.

Tərif 2. Teorem 2-nin şərtlərini ödəyən α elementinə mürəkkəb genişlənmənin *bəsit (primitiv) elementi* deyilir.

Məsələn, yuxarıda göstəriləyi kimi $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ mürəkkəb genişlənməsinin bəsit elementi olaraq $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ cəmini götürmək olar. Ümumiyyətlə, bəsit element yeganə deyil. Çox zaman belə elementlər sonsuz sayda olur.

VII FƏSİL. Cəbrin əsas teoremi

Cəbrin inkişaf tarixində cəbri tənliklərin həlli ilə bağlı məsələlər əsrlər boyu cəbrin əsas tədqiqat obyekti olmuşdur. Bu səbəbdən cəbri tənliklərin həlli haqda Qaus teoremi *cəbrin əsas teoremi* adını almışdır. Belə məsələlər içərisində cəbri tənliklərin radikallarla həlli xüsusi yer tutur. Sonuncu məsələnin tam həlli ancaq XIX əsrdə qrup nəzəriyyəsi elementlərinin meydana gəlməsindən sonra mümkün olmuşdur.

§1. Cəbri qaralı meydanlar

$f(x) \in K[x]$ çoxhədlisinin əsas meydanında kökləri ola da bilər, olmaya da bilər. Məsələn, $x^2 + 1$ çoxhədlisinin R həqiqi ədədlər meydanında kökü yoxdur. Lakin bu çoxhədlinin kompleks ədədlər meydanında iki kökü vardır. Buna görə də verilən meydan üzərində çoxhədlinin kökləri

ilə bağlı qarşıya aşağıdakı suallar çıxır: verilən çoxhədlinin əsas meydanın müəyyən genişlənməsində həmişə kökü varmı; yaxud, çoxhədlinin kökü varsa, onda onların sayı haqda nə demək olar? Biz bu məsələləri ancaq xarakteristikası 0 olan meydanlar üzərində öyrənəcəyik.

Hər iki sualın müsbət cavabı vardır. İkinci sual haqda, demək olar ki, həmişə çoxhədlinin köklərinin sayı, Bezu teoreminə əsasən, təkrarlılığı da nəzərə alınmaqla, çoxhədlinin dərəcəsiindən böyük ola bilməz.

Tərif 1. İxtiyari $f(x) \in K[x]$ çoxhədlisinin K meydanında kökü varsa, onda belə meydan *cəbri qapalı meydan* adlanır.

Yuxarıdakı qeydlərə əsasən hökm etmək olar ki, R həqiqi ədədlər meydanı cəbri qapalı meydan deyil. Eyni sözləri rəşional ədədlər meydanı haqda da söyləmək olar. Cəbri qapalı meydanların bəzi xassələri vardır.

Xassə 1. Cəbri qapalı meydanında ixtiyari n dərəcəli çoxhədlinin n sayda kökü vardır.

Bu xassə Bezu teoremindən dərhal alınır.

Xassə 2. Cəbri qapalı meydanında ixtiyari n dərəcəli $f(x)$ çoxhədlisi aşağıdakı kimi xətti vuruqlara ayrılır:

$$f(x) = a_0(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

burada a_0 bu çoxhədlinin yüksək əmsalı, $x_1, \dots, x_n$ isə onun kökləridir.

İsbatı. Şərtə əsasən, $f(x)$ çoxhədlisinin K meydanında heç olmazsa bir kökü vardır. Bu kökü x_1 kimi işarə edək. Bezu teoreminə əsasən, yazı bilərik:

$$f(x) = (x - x_1) f_1(x).$$

Aydındır ki, $f_1(x) \in K[x]$ olmaqla, $f_1(x)$ çoxhədlisinin də yüksək əmsalı a_0 olacaqdır. Bu prosesi sonuncu sıfır dərəcəli qismət alınanadək davam etdirmək olar. Asanlıqla yəqin etmək olar ki, sonuncu qismət a_0 -dır. Xassə 2 bununla isbat olundu.

Xassə 3. Cəbri qapalı meydanında gətirilməyən çoxhədlilər ancaq bir dərəcəli çoxhədlilərdir.

§2. Həqiqi əmsallı çoxhədlilərin xassələri

Bu paraqrafın nəticələri cəbrin əsas teoreminin isbatına hazırlıq məqsədi ilə verilsə də onlar müstəqil əhəmiyyətə malikdir. Lakin bu nəticələrdən bəzilərinin isbatı kursumuzdan kənara çıxdığı üçün onları isbatsız qəbul edəcəyik. Həmin nəticələrin tam isbatını oxucular aşağıda təqdim olunan ədəbiyyatdan tapa bilərlər.

Lemma 1. Həqiqi əmsallı çoxhədlilərin (həqiqi olmayan) kompleks kökləri cüt-cüt qoşma kompleks ədədlərdir.

İsbati. Tutaq ki, həqiqi əmsallı

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

çoxhədlisinin α kompleks kökü vardır. Onda,

$$0 = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n.$$

Qoşma kompleks ədədə keçsək, yazı bilərik:

$$0 = \overline{a_0} + \overline{a_1}\overline{\alpha} + \dots + \overline{a_n}\overline{\alpha}^n = a_0 + a_1\overline{\alpha} + \dots + a_n\overline{\alpha}^n,$$

yəni $f(\overline{\alpha}) = 0$. Lemma 1 isbat olundu.

Lemma 2. Hər bir kompleks əmsallı çoxhədli üçün həqiqi əmsallı elə çoxhədli vardır ki, onun hər bir kökü, yaxud bu kökün qoşması, verilən çoxhədlinin köküdür.

Qeyd edək ki, lemma 1-ə əsasən verilən çoxhədlinin bütün kökləri həmin həqiqi əmsallı çoxhədlinin kökləri içərisindədir.

Lemma 2-nin isbatı. Fərz edək ki,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in C[x]$$

kompleks əmsallı çoxhədlidir. Aşağıdakı kimi yeni çoxhədli quraq:

$$g(x) = f(x) \cdot \bar{f}(x);$$

burada

$$\bar{f}(x) = \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \dots + \overline{a_n}x^n.$$

Onda yazı bilərik:

$$g(x) = f(x) \cdot \bar{f}(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{2n}x^{2n}$$

və

$$c_m = a_0\overline{a_m} + a_1\overline{a_{m-1}} + \dots + a_{m-1}\overline{a_1} + a_m\overline{a_0}.$$

Bu cəmdə $k > n$ olduqda $a_k = 0$ qəbul olunur. Asanlıqla yəqin etmək olar ki,

$$\overline{c_m} = \overline{a_0}a_m + \overline{a_1}a_{m-1} + \dots + \overline{a_{m-1}}a_1 + \overline{a_m}a_0 = c_m.$$

Deməli, c_m əmsalları həqiqi ədədlərdir. Hər hansı α kompleks ədədi üçün

$$g(\alpha) = f(\alpha) \cdot \bar{f}(\alpha) = 0$$

olarsa, onda $f(\alpha) = 0 \vee \bar{f}(\alpha) = 0$ olmalıdır. Birinci halda α $f(x)$ çoxhədlisinin köküdür. İkinci halda isə,

$$0 = \overline{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n} = a_0 + a_1\overline{\alpha} + \dots + a_n\overline{\alpha}^n,$$

yəni $\overline{\alpha}$ ədədi $f(x)$ çoxhədlisinin köküdür. Lemma 2 isbat olundu.

Lemma 3. n tərtibli nər bir matris öz xarakteristik çoxhədlisinin köküdür.

Bu teorem ədəbiyyatda Keli-Hamilton teoremi adı ilə məşhurdur və onu isbatsız qəbul edərk.

Lemma 4. Hər bir həqiqi əmsallı çoxhədli həqiqi ədədlər meydanının müəyyən genişlənməsində xətti vuruqlara ayrılır.

İsbatı. Ümumiliyi pozmadan qəbul etmək olar ki, verilən çoxhədli unitar və gətirilməyən çoxhədlidir, əks halda onu gətirilməyən vuruqların hasilı kimi yazmaq olar. Verilən çoxhədlini

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (1)$$

şəklində yazaq. Bezu teoreminə əsasən göstərmək kifayətdir ki, bu çoxhədlinin həqiqi ədədlər meydanının müəyyən genişlənməsində neç olmazsa bir kökü vardır.

Qeyd edək ki, n tərtibli $M_n(R)$ matrislər halqasında $\varphi: \alpha \mapsto \alpha E$ (burada $\alpha \in R$, E isə n tərtibli vahid matrisdir) xətti inikası vasitəsi ilə müəyyən olunan $R_0 = \varphi(R) \subset M_n(R)$ alt halqası həqiqi ədədlər meydanı ilə izomorf olan alt meydan müəyyən edir (isbat edin). Aşağıdakı kimi təyin olunan $A \in M_n(R)$ matrisinə baxaq:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a_1 \end{pmatrix};$$

bu matrisin birinci sətrini və sonuncu sütununu atsaq, $n-1$ tərtibli vahid matris alınır. A matrisinə verilən çoxhədlinin *müşaiyə edici* matrisi deyilir. Əvvəlcə müşaiyə edici matrisin bəzi mühüm xassələrini qeyd edək.

1. A matrisinin xarakteristik çoxhədli $(-1)^n f(x)$ şəklindədir. Doğrudan da,

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & -\lambda & \dots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda - a_1 \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 1 & -\lambda & \dots & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda - a_1 \end{vmatrix} + (-1)^n a_n = \\ &= (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & -a_{n-2} \\ 1 & -\lambda & \dots & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda - a_1 \end{vmatrix} + (-1)^n a_{n-1} \lambda + (-1)^n a_n = \dots = \\ &= (-\lambda)^n + (-1)^n \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n a_{n-1} \lambda + (-1)^n a_n = (-1)^n f(x). \end{aligned}$$

2. A matrisi $R(\alpha)$ sadə genişlənməsində $\psi: \theta \mapsto \alpha \theta$ (α -ya vurma) xətti operatorunun təbii bazisdə matrisidir.

Bu xassəni isbat etmək üçün əvvəlcə təbii bazisi yazaq:

$$1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}.$$

$$\psi(1) = \alpha \cdot 1 = \alpha, \psi(\alpha) = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2, \dots, \psi(\alpha^{n-2}) = \alpha \cdot \alpha^{n-2} = \alpha^{n-1},$$

$$\psi(\alpha^{n-1}) = \alpha \cdot \alpha^{n-1} = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \dots - a_1\alpha - a_0$$

münasibətləri bazis elementlərin obrazlarının koordinat sütunlarının aşağıdakı kimi olduğunu göstərir:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Xassə xətti operatorun matrisinin qurulması qydasından alınır.

3. $\alpha \mapsto A$ inikası inyektiv inikasdır.

Bu xassəni də isbatsız qəbul edək. Onun isbatı ilə ədəbiyytda təqdim olunan daha geniş kurslarda tanış olmaq olar. Göstərilən xassələrin köməyi ilə aşağıdakı hökmü ala bilərik.

4. $\alpha \mapsto A$ inikası $R(\alpha) \cong R(A)$ izomorfizini doğurur.

$R(A)$ genişlənməsi tələb olunan genişlənmədir. Doğrudan da lemma 3-ə və xassə 1-ə əsasən $A \in R(A)$ elementi $f(x)$ çoxhədlisinin bu meydanda köküdür. Lemma 4 isbat olundu.

§3. Cəbrin əsas teoremi

Teorem. Hər bir kompleks əmsallı çoxhədlinin heç olmazsa bir kompleks kökü vardır.

Bu teorem cəbrin əsas teoremi adlanır və o göstərir ki, kompleks ədədlər meydanı cəbri qapalı meydandır.

Cəbrin əsas teoreminin isbatı. Tutaq ki, kompleks əmsallı

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

çoxhədlisi verilmişdir. Onda lemma 2-yə əsasən, elə həqiqi əmsallı

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m$$

çoxhədlisi vardır ki, verilən çoxhədlinin bütün kökləri $g(x)$ çoxhədlisinin kökləri içərisindədir.

Beləliklə, cəbrin əsas teoremini həqiqi əmsallı çoxhədlilər üçün isbat etmək kifayətdir.

Beləliklə, həqiqi əmsallı ixtiyari $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ çoxhədlisi götürək.

Göstərək ki, onun heç olmazsa bir kompleks kökü vardır. İki hal mümkündür: 1) çoxhədlinin dərəcəsi tək ədəddir; 2) çoxhədlinin dərəcəsi cüt ədəddir. Birinci halda teoremin hökmü teorem 1-dən alınır (bu halda çoxhədlinin həqiqi kökü vardır). Buna görə də yalnız ikinci hala baxmaqla kifayətlənmək olar.

2) Fərz edək ki, $n = 2^k n_1$ olmaqla n_1 tək ədəddir. k ədədinə görə induksiya metodunu

tətbiq edək. Əgər $k = 0$ olarsa, yuxarıda baxılan hal alınır və teorem doğrudur. Fərz edək ki, teoremin doğruluğu $k - 1$ üçün isbat olunmuşdur. Teoremin hökmünün doğruluğunu bu şərt daxilində isbat edək.

Əvvəlki paraqraftan məlum olduğu kimi, verilən çoxhədlinin həqiqi ədədlər meydanının müəyyən sonlu genişlənməsində kökü vardır.

Qeyd edək ki, məlum Frobenius teoreminə əsasən belə genişlənmə ancaq kompleks ədədlər meydanı ola bilər. Lakin Frobenius teoreminin isbatı cəbrin əsas teoreminə əsaslandığı üçün ondan istifadə etmək olmaz. Beləliklə görürük ki, Frobenius teoremi cəbrin əsas teoremi ilə eynigüclüdür.

Beləliklə, həqiqi ədədlər meydanının elə L genişlənməsi vardır ki, burada verilən çoxhədlinin n sayda kökü vardır: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Aşağıdakı kimi iki ədədlər sisteminə baxaq:

$$\beta_{ij} = \alpha_i + \alpha_j; i, j = 1, 2, \dots, n, i > j$$

və

$$\gamma_{ij} = \alpha_i \alpha_j; i, j = 1, 2, \dots, n, i > j.$$

Hər iki sistemin eyni sayda, yəni $(n+1)n/2 = 2^{k-1}n_1(n+1)$ sayda elementləri vardır. İki çoxhədli quraq:

$$F(x) = \prod_{i>j} (x - \beta_{ij})$$

və

$$G(x) = \prod_{i>j} (x - \gamma_{ij}).$$

Bu çoxhədlilərin dərəcələri eynidir və $2^{k-1}n_1(n+1)$ hasilinə bərabərdir. $n_1(n+1)$ hasilini tək ədəddir.

Bu çoxhədlilərdən birincisinə baxaq. Onun əmsalları $\beta_{ij} = \alpha_i + \alpha_j$ elementlərinin elementar simmetrik funksiyalarıdır. Buna görə də bu əmsallar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ədədlərinə görə simmetrik çoxhədlilərdir (doğrudan da, onların ixtiyari yerdəyişməsi nəticəsində yalnız çoxhədlilərin ifadəsindəki hədlər öz yerini dəyişir.). Deməli, onlar əsas meydan daxildir, yəni həqiqi ədədlərdir. Buna görə də $F(x)$ həqiqi əmsallı çoxhədlidir və onun dərəcəsinə 2-nin qvvət üstü k -dan kiçikdir. İnduktiv fərziyyəyə əsasən onun kökləri olan $\beta_{ij} = \alpha_i + \alpha_j$ ədədləri kompleks ədədlərdir. Eyni qayda ilə əmin olmaq olar ki, $\gamma_{ij} = \alpha_i \alpha_j$ ədədləri də kompleks ədədlərdir. Viyet teoreminə əsasən, hər bir (i, j) indekslər cütü üçün α_i, α_j ədədləri kompleks əmsallı

$$z^2 - \beta_{ij}z + \gamma_{ij} = 0$$

tənliyinin kökləridir, yəni kompleks ədədlərdir. Bununla, cəbrin əsas teoreminin isbatı başa çatdı.

Ədəbiyyat

- 1.Хрестоматия по истории математики. Под редакцией А. П. Юшкевича. Москва: «Просвещение», 1976.
- 2.Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969.
- 3.Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. – М.: Наука, 1988.
- 4.Винберг Э.Б. Курс алгебры. -. М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001.
- 5.Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.
6. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971.
7. Евклид. Начала. кн.1-6. – М.-Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.
8. Кострикин А. И. Введение в алгебру.- М.: ФМЛ, 2000.
9. Кострикин А. И. (ред). Сборник задач по алгебре. – М.: Факториал, 1995.
10. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел.- М: Высшая школа, 1979.

- 11.Куликов Л. Я., Москаленко А. И., Фомин А. А. Сборник задач по алгебра и теории чисел. – М.: Просвещение, 1993.
12. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975.
13. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973.
- 14.Ланкастер П. теория матриц – М.: Наука, 1978.
- 15.Ленг С. Алгебра.- М: Мир, 1967.
16. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 2005.
17. Нечаев В.И. Числовые системы. //Москва «Просвещение», 1975.
18. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984.
- 19.Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977.
- 20.Baxşəliyev Y.R.,Əbdulkərimli L.Ş. Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi kursu. – Bakı, 2008.
- 21.Qasımov V.Ə. Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi. - Bakı, 2012.
- 22.Abdulkərimov Y. və başq. Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi. - Bakı, 1995.
- 23.Cavadov M.H. və başq. Çoxhədlilər cəbrindən məsələ və misallar. – Bakı, 1985.
- 24.Hacıyev M.A., Axundov S.S. Ali cəbrdən məsələlər. - Bakı, 1968.
- 25.Əkbərov M. Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsinədən mühazirələr. - Bakı, 2006.
- 26.Cavadov M. Xətti və kvadratik formalar. - Bakı, 1941.
- 27.Abbasov Z. H. Ədədi sistemlər. – Bakı, 2001.